АЛГЕБРА и НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник

11

Естественно-математическое направление

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ:

!	— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями
	— задания для самостоятельного выполнения
?	— вопросы на закрепление материала
	— конец доказательства теоремы или свойства
ABCD	— дополнительные материалы
A	— упражнения, выполнение которых обязательно для каждого учащегося
B	— упражнения среднего уровня сложности
C	— упражнения повышенной трудности
	— упражнения на использование электронных ресурсов
ПОВТОРИТЕ	— упражнения для повторения пройденного материала

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие учащиеся! Предлагаемый вам учебник является продолжением курса "Алгебра и начала анализа" для 10 класса естественно-математического направления.

В 11 классе вы будете изучать такие понятия как *первообразная, неопределенный и определенный интегралы, корень n-й степени, степень с рациональным и иррациональным показателями, логарифм, степенная, показательная и логарифмическая функции, комплексные числа, дифференциальное уравнение, дискретные и интервальные вариационные ряды*. Вы научитесь решать иррациональные, показательные, логарифмические уравнения, неравенства и их системы, дифференциальные уравнения, находить производные степенной, показательной и логарифмической функций.

Вы также ознакомитесь с приложениями интеграла при вычислении площадей плоских фигур и объемов тел.

Учебник состоит из 8 глав, 28 параграфов.

В каждом параграфе при изложении текста программного материала даны вопросы и задания для самостоятельного выполнения учащимися.

При работе с учебником вам необходимо обратить внимание на вопросы, предлагаемые перед упражнениями каждого параграфа. Кроме этого, главы учебника завершаются тестовыми заданиями, заданиями по математической грамотности.

Чтобы помочь вам в работе с учебником, к каждой теме указаны опорные понятия, способы решения задач.

Система заданий по каждой теме состоит из трех групп:

A — обязательные задания для всех учащихся;

B — задания средней сложности;

C — задания повышенной трудности.

Кроме этого, в учебник включены задания со знаком*. Эти задания рекомендуются учащимся, которые имеют высокий уровень математической подготовки.

Овладев навыками решений заданий группы **A**, нужно перейти к решению заданий группы **B**, и если после этого у вас появился интерес к дальнейшему повышению своих знаний, то по своему желанию вы можете работать над решениями отдельных заданий из группы **C**. Освоив навыки решения заданий группы **C**, вы, безусловно, развиваете свои математические способности.

Также в учебнике даны упражнения для повторения курса алгебры и начала анализа 10—11 классов.

В конце учебника имеется глоссарий.

Для проверки правильности решений упражнений в конце учебника даны ответы.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА "АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА" ДЛЯ 10 КЛАССА

Вычисления

1. Найдите значение выражения:

1) $\arcsin 0{,}5 + \arccos(-1) - \arccos 0 - \operatorname{arctg} 1$;

2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcctg} 1$;

3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin 1$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2} - \arccos 0 - \operatorname{arcctg}(-1)$.

2. Найдите значение выражения:

1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $\arccos\left(\sin\frac{27\pi}{7}\right)$; 5) $\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right)$; 6) $\arcsin(\sin 7)$;

7) $\arcsin(\cos 8)$; 8) $\arccos(\cos 12)$.

3. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = 3\sqrt{2x} - \frac{5}{x} + 3x - 2$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = (3x + 4)^2 + \frac{6}{x+1}$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \sin(3x - 2\pi) + 3\pi$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

4) $f(x) = \cos(2x - \pi) - 2\pi$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. Найдите значение углового коэффициента касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $y = 1 - \frac{2x+1}{x-1}$, $x_0 = 2$; 2) $y = 3 + \frac{x}{x+1} + \sqrt{3-x}$, $x_0 = 2$.

5. Найдите значение $f''(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = 4x + \sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

2) $f(x) = 2x + \cos 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = x + \sin^2 3x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на заданном промежутке:

1) $y = x^4 - 8x^2 - 9$, $[-1; 3]$; 2) $y = 2 + 3x^5 - 5x^3$, $[2; 3]$;

3) $y = \sqrt{x} - x$, $[0; 4]$; 4) $y = \frac{1}{x} + x$, $[0{,}5; 4]$.

Производная функции

7. Найдите производную функции $f(x)$:

1) $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x - \sqrt{2x}$; 2) $f(x) = \sin^3 2x + \cos 3x - \frac{2}{x}$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}^2 2x + \mathrm{ctg} 3x + \sqrt{\pi}$; 4) $f(x) = \mathrm{arctg} 2x + \arccos x + \sqrt{x}$;

5) $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2} + 3x - 2$; 6) $f(x) = x \sin 2x + \sqrt{2-3x}$.

8. Найдите значение второй производной функции $f(x) = 3x + \sqrt{1+x^2}$ при $x = 2$.

9. Решите уравнение $f'(x) = 0$:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3 - 2$; 2) $f(x) = 4 + 2x^2 - x^4$;

3) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 2$; 4) $f(x) = \sin^2 2x + 2x - \pi$.

Уравнения и неравенства

10. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $f'(x) < 0$, если:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$; 2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x$;

3) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x$; 4) $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

11. 1) Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{x-2}{2} > \frac{(\sqrt{x-6})^2}{x-7}$.

2) Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{6-x}{\sqrt{x^2-8x+7}} > 0$.

3) Решите неравенство $(x^2 + 4x - 12) \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} < 0$.

12. Решите неравенство $f'(x) > 0$:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x - x$; 2) $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3} \cdot x$;

3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x + 3x$; 4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos 6x + x$;

5) $f(x) = 1 + \arccos 3x + 2x$; 6) $f(x) = \mathrm{arcctg} 2x + 2x$.

13. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

1) $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} x$; 2) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$;

3) $f(x) = 2x - \mathrm{tg} x$; 4) $f(x) = x + \mathrm{ctg} x$.

14. Решите уравнение:

1) $\sin^4\frac{x}{2} = \cos^4\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$;

2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$;

3) $\cos^2 x - \cos^2 2x = \cos^2 4x - \cos^2 3x$;

4) $5\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x \cdot \sin x + 6\cos^2 x = 5$;

5) $(x-1)^2(x^2-2x) = 12$;

6) $(x-3)^2(x^2-6x) + 16 = 4$;

7) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 3) - 3 = 0$;
8) $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x - 2) + 1 = 0$;
9) $(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 7(x + \frac{1}{x}) + 12 = 0$;
10) $(x^2 + \frac{4}{x^2}) - (x - \frac{2}{x}) - 16 = 0$.

15. Решите систему тригонометрических неравенств:

1) $\begin{cases} \sin x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant 1, \\ \operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}, \\ \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Функция и ее график

16. Найдите асимптоты графика функции:

1) $y = \frac{x-3}{x-2}$; 2) $y = \frac{5-3x}{x+3}$; 3) $y = \frac{x^2+3}{x-2}$; 4) $y = \frac{x^2-2x}{x+1}$.

17. Найдите координаты точки перегиба графика функции:

1) $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$; 2) $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$; 3) $y = \frac{x^3}{4-x^2}$; 4) $y = 4 - 3x + 2x^3$.

18. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$:

1) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$; 2) $f(x) = \frac{3x}{x^2-9}$; 3) $f(x) = \frac{x}{25-x^2}$; 4) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$.

19. а) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 0$:

1) $y = 2x + \sqrt{x+1}$; 2) $y = \sqrt{3x+1}$; 3) $y = 1 + \frac{1}{x+2}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

б) Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, параллельной прямой $y = \frac{3}{4}x + 1$;

2) $f(x) = \sqrt{3-2x}$, параллельной прямой $y = 2 - x$.

20. Для функции, график которой дан на рисунке 1, запишите:

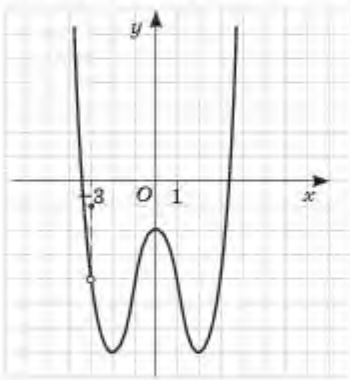


Рис. 1

1) точки минимума функции;
2) точки максимума;
3) координаты точек перегиба;
4) экстремумы функции.

21. Дан график производной функции $f'(x)$ (рис. 2).

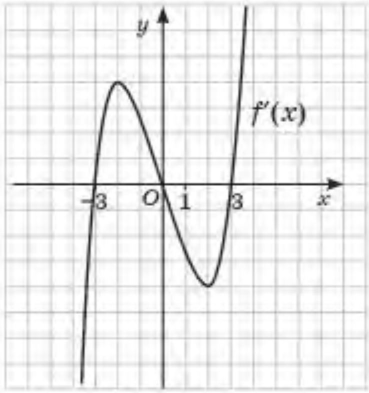


Рис. 2

Найдите точки максимума и точки минимума функции.

22. Исследуйте функцию и постройте ее график:

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;

3) $y = 2x + \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x} - \frac{x}{4}$.

Применение производной

23. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 4t^2 - \frac{1}{2}t$, где $s(t)$ — путь в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени из промежутка [1; 8] скорость движения точки будет наибольшей и чему равна величина этой скорости?

24. 1) Спортивная площадка прямоугольной формы имеет площадь 3600 м^2. Найдите размеры этой площадки, если надо использовать наименьшее количество размера 1 м × 2 м.

2) Одно из оснований и две боковые стороны трапеции равны 15 см. Найдите значение длины второго основания трапеции, чтобы ее площадь была наибольшей.

25. Надо огородить участок земли прямоугольной формы, примыкающей одной стороной к реке. Имеется 600 м проволоки. Найдите размеры этого участка, чтобы его площадь была наибольшей.

26. Периметр земельного участка в форме прямоугольной трапеции с острым углом в 30° равна 96 м. Найдите наибольшую площадь этого участка.

27. В равнобедренный прямоугольный треугольник с длиной катета в $4\sqrt{2}$ см вписан прямоугольник наибольшей площади. Две вершины прямоугольника лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах треугольника. Найдите значения длин сторон прямоугольника.

28. 1) Число 484 представьте в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы значение их суммы было наибольшим.
2) Значение суммы двух положительных чисел равно 98. Найдите эти числа, если их произведение принимает наибольшее значение.

29. На графике функции $y = 0,5x^2$ найдите координаты точки K, ближайшей к точке $M(0; 3)$.

Многочлен

30. Найдите все значения параметра a, при которых тождественно равны многочлены $f(z)$ и $h(z)$:
1) $f(z) = (a^2 - 2)z^3 - 2z^2 + (2a + 1)z - 4$ и $h(z) = 2z^3 - 2z^2 + (a - 1)z - a - 6$;
2) $f(z) = (a^2 - 2a)z^4 - 2z^2 + (3a - 2)z - 4 + a$ и $h(z) = -z^4 - 2z^2 + (2a - 1)z - a - 2$.

31. Используя схему Горнера, разделите многочлен $P(z) = z^5 - 2z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 7$ на двучлен $z - 2$. Найдите частное и остаток.

32. Разложите на линейные множители многочлен:
1) $y^4 - 10y^2 + 9$; 2) $y^3 + 3y^2 - 4y - 12$.

33. При каких значениях a и c равны многочлены $P(y)$ и $K(y)$:
1) $P(y) = 2y^3 - 5y^2 + (a - c)y - 11, K(y) = 2y^3 + (a + c)y^2 + 3y - 11$;
2) $P(y) = y^3 + 10y^2 + 3y + a - 3c$, $K(y) = y^3 + (a + 2c)y^2 + 3y - 5$?

34. При каких значениях a многочлен $Q(y)$ имеет корень, равный 1:
1) $Q(y) = 2y^3 - 3y^2 + 3y + 2a^2 - 3a - 7$;
2) $Q(y) = y^3 + 7y^2 - 2y + a^2 - 5a$?

35. 1) Остаток от деления многочлена $P(x)$ на трехчлен $x^2 - 5x + 6$ равен $2x - 5$. Найдите значение $P(2) - 3P(3)$;
2) остаток от деления многочлена $P(x)$ на трехчлен $x^2 - x - 6$ равен $5x - 7$. Найдите значение $P(3) - 2P(-2)$.

36. Решите симметрическое уравнение:
1) $y^4 + 2y^3 - y^2 + 2y + 1 = 0$;
2) $3y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 4y + 12 = 0$.

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

37. 1) В меню школьной столовой имеется 3 первых, 3 вторых и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?
2) Найдите число четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 3, 6, 9, при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды?
3) Найдите число способов раскрасить треугольник, ромб и квадрат тремя цветами: желтым, красным, черным.

38. Найдите корни уравнения:

1) $A_{2x+1}^{x} : A_{2x}^{x-1} = 31$; 2) $C_x^2 : A_x^3 = \frac{1}{24}$.

39. Найдите коэффициент при x^n в разложении бинома Ньютона:
1) $(x + 3)^6$, $n = 3$; 2) $(1 - 3x)^7$, $n = 4$.

40. 1) В ящике находятся 4 шара зеленого цвета и 2 желтого. Извлекаются два шара. Найдите вероятность того, что среди двух извлеченных шаров окажется два шара зеленого цвета.
2) При изготовлении детали совершается три операции. Вероятность брака при первой и второй операциях равна 0,01, а при третьей — 0,02. Найдите вероятность того, что после трех операций деталь окажется стандартной.

41. Среди 200 лотерейных билетов есть 10 выигрышных.
1) Найдите вероятность того, что три наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.
2) Найдите вероятность того, что из двух наудачу выбранных билетов только один окажется выигрышным.

Практико-ориентированные задания

42. В таблице 1 представлены результаты забега на дистанции 200 м среди учащихся 11 классов.

Таблица 1

Интервалы результата забега (в секундах)	24 — 25	26 — 27	28 — 29	30 — 31	32 — 33
Число учащихся, показавших результаты	4	9	11	10	6

1) Сколько учащихся участвовало в соревновании?
2) В каких пределах изменяются результаты забега?
3) У скольких учащихся показатели составят от 28 с до 33 с?
4) Сколько участников забега имеют результаты не более 27 с?

43. Для строительства коттеджа требуется закупить 25 т облицовочного кирпича у одного из трех поставщиков. Вес одного кирпича — 5 кг. Цены и условия доставки приведены в таблице 2.

Таблица 2

Фирма	Цена кирпича за 1 шт.	Стоимость доставки (в тенге)	Дополнительные условия
X	254	190 000	Нет
Y	260	150 000	Если стоимость заказа выше 500 000 тг, то доставка со скидкой составляет 10%
Z	270	145 000	Если стоимость заказа выше 500 000 тг, то доставка со скидкой составляет 20%

1) Во сколько тенге обойдется наиболее дешевый вариант покупки?
2) Если подрядчик решил приобрести 30 т облицовочного кирпича, то к какой фирме ему следует обратиться, чтобы иметь меньшие затраты?

44. На рисунке 3 показано количество посетителей супермаркета во все дни с 1 по 20 марта 2018 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — число посетителей за данный день.

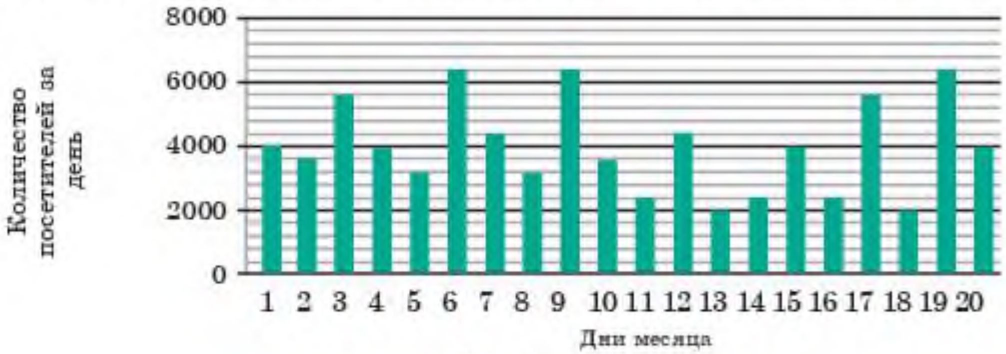


Рис. 3

1) Найдите значение разности между наибольшим и наименьшим количеством посетителей супермаркета в день в течение этого периода.
2) Найдите среднее число посетителей супермаркета в день.
3) Если в среднем каждый посетитель совершает покупку на 2540 тг, то какой будет выручка супермаркета за день?

45. A, B, C — разные нечетные цифры. Известно, что $\overline{ABC} \cdot \overline{ABC} = 32\,041$. Найдите значение выражения $(C + B) : (4A)$.

46. Расходы фирмы в течение месяца предоставлены на рисунке 4. Общая сумма расходов составляет 2 500 000 тенге.

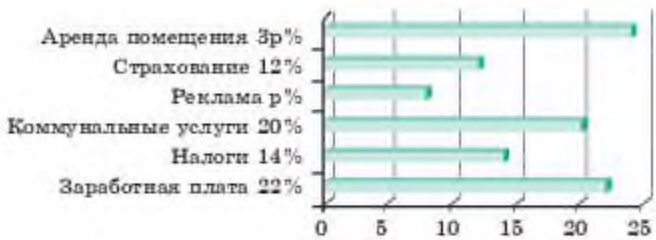


Рис. 4

1) Найдите расходы фирмы за аренду помещения.
2) Какой процент составляют расходы за аренду помещения от общих затрат?

47. Ученик начальной школы в день, посещая столовую, покупает кашу, 1 стакан чая или компота и 1 булочку. Цена одной порции каши — 60 тг, булочки — 45 тг, сладкого чая — 35 тг, а компота — 50 тг. Проезд школьников в городском транспорте — 40 тг.
1) Какую сумму должны дать родители школьнику на один день учебы в школе?
2) Школа работает по пятидневке. Какие расходы родителей за неделю, если у них два ребенка и они три дня покупают чай, а два дня — компот?

48. 1) В коробке находятся 32 шарика красного, синего, зеленого цветов. Красных шариков в 18 раз больше, чем зеленых. Сколько шаров синего цвета находится в коробке?
2) В коробке лежат 14 синих и 12 красных шариков. Сколько шариков надо вынуть, не глядя в коробку, чтобы среди них обязательно оказалось 6 шаров одного цвета.

49. Используя таблицу 3, задайте функцию формулой и найдите ее значение при $z = 10$.

Таблица 3

z	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1	-2	-3	-2	1	6	13

50. В сосуд формы прямоугольного параллелепипеда налили 1700 см^3 воды. Уровень воды в сосуде при этом достиг высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь, тогда уровень воды в сосуде поднялся на 5 см.
1) Чему равен объем этой детали?
2. Если уровень воды в этом сосуде равен 15 см, то каков объем воды в сосуде?
3. Если объем детали, опущенной в этот сосуд, равен 1700 см^3, то на сколько сантиметров поднимется уровень воды в этом сосуде?

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, предел функции, производная функции, производная сложной функции, правила вычисления производных, физический и геометрический смысл производной, таблица производных функций.

ГЛАВА I ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вы ознакомитесь с понятием первообразной функции и научитесь находить первообразную функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, область определения, постоянное число, производная, график функции

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Если дана функция $f(x) = 3x^2$, то ее производная $f'(x) = 6x$. Производная от любой функции является функцией (постоянной или зависимой от переменной).

Как найти функцию, производная которой известна?

Возьмем для этого функцию $f(x) = 4x^3$ и выясним, для какой функции она является производной, т. е. как найти функцию, производная которой была бы равна $f(x) = 4x^3$.

Если искомую функцию условно обозначим через $F(x)$, поставленный вопрос сводится к нахождению функции $F(x) = x^4$, поскольку $F'(x) = (x^4)' = 4x^3$.

Определение. *Если для любого x из множества X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$, то функцию $F(x)$ называют* ***первообразной*** *для функции $f(x)$ на данном множестве.*

Первообразная функции, также как и сама функция, может быть рассмотрена на множестве всех действительных чисел или на определенном промежутке или интервале.

В приведенном выше примере функция $F(x) = x^4$ является первообразной для функции $f(x) = 4x^3$ на множестве $(-\infty; +\infty)$, т. е. на всей числовой оси.

ПРИМЕР

1. Функция $F(x) = \cos 5x$ является первообразной для функции $f(x) = -5\sin 5x$, так как $F'(x) = (\cos 5x)' = -5\sin 5x$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

ПРИМЕР

2. Функция $F(x) = -\frac{1}{x} + 2$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$, так как $F'(x) = \left(-\frac{1}{x} + 2\right)' = \frac{1}{x^2}$ для всех $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

ПРИМЕР

3. Функция $F(x) = \frac{1}{x}$ не является первообразной для функции $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как равенство $F'(x) = f(x)$ не выполняется в точке $x = 0$. Однако в каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$.

Нетрудно заметить, что первообразная функции не единственна, их бесчисленное множество. Например, для функции $f(x) = 4x^3$ первообразной функцией является не только $F(x) = x^4$, но и $G(x) = x^4 - 5$; $P(x) = x^4 + \frac{\sqrt{2}}{3}$; $Q(x) = x^4 + 7$ и т. д., так как производная каждой из этих функций равна $4x^3$. Другими словами, они отличаются друг от друга только на постоянное число, производная которого равна нулю.

Теорема. *Если на каком-то промежутке функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x)$, то на этом промежутке они отличаются друг от друга только на постоянное число.*

Доказательство. Допустим, что

$$\varphi(x) = \Phi(x) - F(x) \qquad (*)$$

По условию теоремы, на данном промежутке $F'(x) = f(x)$ и $\Phi'(x) = f(x)$. Вычислим производную $\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

По правилу нахождения производной только постоянное число имеет производную, равную нулю.

Следовательно, должно быть, $\varphi(x) = C = const$. Подставив данное значение в равенство (*) имеем

$$\Phi(x) = F(x) + C. \qquad (1)$$

Таким образом, если $F'(x) = f(x)$ и C — любое постоянное число, тогда выражение $F(x) + C$ также будет первообразным для функции $f(x)$.

Равенство $\Phi(x) = F(x) + C$ выражает основное свойство первообразной.

Вы узнаете геометрический смысл первообразной.

Пусть постоянная C из формулы (1) будет равна нулю. Тогда получим функцию вида $y = F(x)$ и построим ее график. Остальные перво-

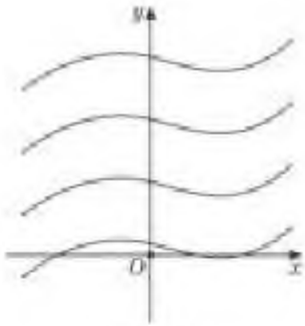


Рис. 5

образные отличаются от полученной функции только на постоянную C, поэтому их графики можно получить параллельным переносом вдоль оси Oy на C единиц графика функции $y = F(x)$. Таким образом, геометрическим смыслом первообразной является *совокупность параллельных кривых* (рис. 5).

Для нахождения первообразных используется следующая таблица (табл. 4):

Таблица 4

Функция	Общий вид первообразных
$f(x) = k$ (k — постоянная)	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^n$, $n \in Z$, $n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x + C$

Вы ознакомитесь с понятием неопределенного интеграла и научитесь находить неопределенный интеграл.

Определение. *Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для данной функции $f(x)$ называется* ***неопределенным интегралом*** *функции $f(x)$.*

Неопределенный интеграл обозначается:

$$\int f(x)\,dx, \qquad (2)$$

где $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования, а символ $\int$ — знак интеграла.

По определению неопределенного интеграла получаем: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Здесь вместо постоянной C можно взять любое число, т. е. ее значение точно не определено, поэтому интеграл $\int f(x)\,dx$ и называется *неопределенным интегралом.*

Операцию нахождения неопределенного интеграла называют *интегрированием функции.*

Из определений первообразной и неопределенного интеграла следует, что

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (3)$$

Необходимо заметить, что в школьном курсе математики существуют прямое и обратное действия: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня. Теперь вы убедились, что нахождение производной (дифференцирование) и нахождение первообразной (интегрирование) есть взаимообратные действия.

Вы знаете: С помощью производной по заданному закону движения можно найти скорость движения материальной точки в определенный момент времени. Скорость движения рассматривается как производная пути по времени: $s'(t) = v(t)$, а ускорение движения есть производная от скорости по времени, т. е.:

$$v'(t) = a(t).$$

Как найти $v(t)$ по заданной производной $v'(t)$, равной $a(t)$, а затем по заданной $s'(t)$, равной $v(t)$, найти $s(t)$, т. е. как можно найти функцию по ее заданной производной? Для решения такого рода задач используется операция интегрирования.

Вы узнаете правила нахождения первообразных.

Правило 1. *Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $P(x)$ — первообразная для $p(x)$,* то *$F(x) + P(x)$ есть первообразная для $f(x) + p(x)$.* Действительно, так как $F'(x) = f(x)$ и $P'(x) = p(x)$, то по правилу нахождения производной суммы имеем: $(F(x) + P(x))' = F'(x) + P'(x) = f(x) + p(x)$. $\blacksquare$

Правило 2. *Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k — постоянная, то функция $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.*

Справедливость правила 2 докажите самостоятельно.

Правило 3. *Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.*

Доказательство. Используя теорему о нахождении производной сложной функции получим: $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b)$. ■

Вы узнаете формулы нахождения некоторых неопределенных интегралов (табл. 5).

Таблица 5

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

Свойства неопределенных интегралов:

1) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

2) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, где k — постоянная;

3) $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Докажем свойство 3. Найдем производную от левой и правой частей равенства. Тогда согласно формуле (3) получим: $\left(\int f(kx+b)\,dx\right)' = f(kx+b)$; $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)+C\right)' = \frac{1}{k}(F(kx+b))' + C' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' + 0 = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b)$.

Так как производные от левой и правой частей равенства равны, то функции отличаются друг от друга на постоянную C, т. е.

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C. \ ■$$

Самостоятельно докажите свойства 1 и 2.

Приведем примеры применения этих правил и свойств неопределенных интегралов.

ПРИМЕР

4. Найдем следующие неопределенные интегралы:

$$1)\ \int 3\sin x\,dx;\quad 2)\ \int\left(\frac{1}{x^3} + x^4\right)dx;\quad 3)\ \int \cos(5x+1)\,dx.$$

Решение. 1) Так как для функции $\sin x$ одна из первообразных есть функция $-\cos x$, то по правилу 2 имеем:

$$\int 3\sin x\,dx = -3\cos x + C.$$

2) Нам известно, что для функции $\frac{1}{x^2}$ первообразной является функция $-\frac{1}{x}$, а для функции x^4 первообразная — $\frac{x^5}{5}$, тогда по правилу 1 можно записать:

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+x^4\right)dx=-\frac{1}{x}+\frac{x^5}{5}+C.$$

3) Известно, что для $\cos x$ одной из первообразных является $\sin x$, поэтому по правилу 3 получаем:

$$\int\cos(5x+1)\,dx=\frac{1}{5}\sin(5x+1)+C.$$

Ответ: 1) $-3\cos x+C$; 2) $-\frac{1}{x}+\frac{x^5}{5}+C$; 3) $\frac{1}{5}\sin(5x+1)+C$.

ПРИМЕР

5. Найдите для функции $f(x)=x^2$ первообразную, график которой проходит через точку $M(-2;\ 3)$.

Решение. Любую первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=x^2$ можно записать в виде: $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$. По условию, график функции $F(x)$ должен пройти через точку $M(-2;\ 3)$.

Поэтому имеем: $F(-2)=3$; $\frac{(-2)^3}{3}+C=3$, откуда $C=\frac{17}{3}$.

Следовательно, искомой первообразной будет $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{17}{3}$.

Ответ: $\frac{x^3}{3}+\frac{17}{3}$.

?

1. Какая форма связи имеется между понятиями *производная* и *первообразная*?
2. Может ли первообразная четной (нечетной) функции быть функцией четной (нечетной)? Приведите пример.
3. Запишите конкретный пример на использование всех трех свойств нахождения неопределенного интеграла.
4. Известно, что: 1) $f'(x)=p'(x)$ на $[a;\ b]$; 2) $\int f(x)dx=\int p(x)\,dx$ на $[a;\ b]$. Следует ли из этого, что имеет место равенство $f(x)=p(x)$ на этом же промежутке?

Упражнения

А

Найдите первообразные следующих функций (**1.1—1.2**):

1.1. 1) $f(x) = 3x$; 2) $f(x) = 4x^2 + x - 2$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1.2. 1) $f(x) = 2\sin x$; 2) $f(x) = 5\cos x$;

3) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$; 4) $f(x) = 5\sin x + 2\cos x$;

5) $f(x) = x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}$; 6) $f(x) = x^3 - \frac{4}{\sqrt{x}}$;

7) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$; 8) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

1.3. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int\left(3x^5 + \frac{7}{2\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int\left(3\cos 5x - \frac{1}{x^2}\right)dx$;

3) $\int\left(8\sin x - \frac{2}{\sin^2 2x}\right)dx$; 4) $\int(2\sin 3x - 5x^7 + 3)\,dx$;

5) $\int\left(\frac{3}{x^7} - \frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$; 6) $\int\left(7 - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$.

1.4. Для функции $y = f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через начало координат:

1) $f(x) = (x + 1)(x + 3)$; 2) $f(x) = (1 - x)(3 + x)$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{3} + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $f(x) = -\frac{x^3}{2} + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.5. Для функции $y = f(x)$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M(a;\ b)$, и постройте график $F(x)$:

1) $f(x) = x + 1$, $M(-2;\ 3)$; 2) $f(x) = 4 + x$, $M(-2;\ 3)$;

3) $f(x) = \sin x$, $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$; 4) $f(x) = \cos x$, $M(\pi;\ -1)$.

1.6. Найдите первообразную $F(x)$ функции $y = f(x)$, график которой проходит через точку $M(a;\ b)$:

1) $f(x) = x^{-2}$, $M(1;\ -1)$;

2) $f(x) = x^{-3}$, $M(-1;\ 0)$;

3) $f(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1$, $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$.

1.7. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$:

1) $f(x) = 3x^2 + 3\sin x$, $F(x) = x^3 - 3\cos x$;
2) $f(x) = x^4 + 4\cos x$, $F(x) = 0{,}2x^5 + 4\sin x$.

B

1.8. Найдите общий вид первообразных для функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 9x^2 + \sin 3x$; 2) $f(x) = 12x^3 - \cos 4x$;

3) $f(x) = \cos 2x - \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} + 2$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}} + \sin 5x + 1$.

1.9. Для функции $y = f(x)$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M(a;\ b)$, и постройте график функции $F(x)$:

1) $f(x) = 2x + 3$, $M(1;\ 2)$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2$, $M(2;\ 4)$;

3) $f(x) = 1 + \sin x$, $M(0;\ 1)$; 4) $f(x) = 3\cos x - 2$, $M\left(\dfrac{\pi}{2};\ -1\right)$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}$, $M\left(-\dfrac{\pi}{4};\ -1\right)$; 6) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)}$, $M\left(\dfrac{5\pi}{6};\ \sqrt{3}\right)$.

1.10. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int (3x-2)^2 dx$; 2) $\int ((2-x)^4 - 17x^9 + \sqrt{2})dx$;

3) $\int (\sin 5x - 2(4x-1)^5)dx$; 4) $\int \left(\dfrac{1}{\sin^2 5x} - \dfrac{3}{x^{10}}\right)dx$.

1.11. Найдите общий вид первообразных для функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = (x-1)^3$; 2) $f(x) = (1-2x)^2$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 11x^{10}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 12x^3$.

1.12. Для функции $y = f(x)$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M(a;\ b)$, если:

1) $f(x) = x - \cos^{-2}x$, где $x \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi^2}{32}\right)$;

2) $f(x) = 2\sin^{-2}x - x$, где $x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi^2}{32}\right)$;

3) $f(x) = x^{-3} + \cos x$, где $x \in (0;\ +\infty)$, $M\left(0{,}5\pi;\ -\dfrac{1}{2\pi^2}\right)$;

4) $f(x) = x^3 - \sin x$, где $x \in (0;\ +\infty)$, $M\left(\pi;\ \dfrac{\pi^4}{4}\right)$.

1.13. Проверьте, является ли функция $y = F(x)$ первообразной для функции $y = f(x)$ на указанном промежутке:

1) $F(x) = (x - 3)\sqrt{x - 5}$, $f(x) = 2x - 10 + \dfrac{x - 3}{\sqrt{x - 5}}$, $x \in (5; +\infty)$;

2) $F(x) = \dfrac{2x - 5}{3 + 5x}$, $f(x) = \dfrac{31}{(3 + 5x)^2}$, $x \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{5}; +\infty\right)$.

С

1.14. Найдите функцию $F(x)$ по ее производной $F'(x)$ и по условию $F(a) = b$:

1) $F'(x) = 4x^3 - 3x^2$ и $F(1) = 3$;
2) $F'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 2x$ и $F(1) = 4$;
3) $F'(x) = 1 + x + \cos 2x$, $F(0) = 1$;
4) $F'(x) = \sin 2x + 3x^2$, $F(0) = 2$.

1.15. Вычислите неопределенный интеграл:

1) $\int(\cos(4x - 5) + 2x^{-7} + 3)\,dx$;
2) $\int\left(\sin(2 - x) + \dfrac{1}{\cos^2 5x}\right)dx$;
3) $\int\left(\dfrac{24}{\cos^2 2x} - \dfrac{2}{x^4} + \sqrt{3}\right)dx$;
4) $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}} - \dfrac{3}{\sin^2 2x} - x\right)dx$.

Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ (**1.16—1.17**):

1.16. 1) $F(x) = -\dfrac{1}{4}\cos 2x - \dfrac{1}{2}\cos x + \pi$, $\quad f(x) = \cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2}$;

2) $F(x) = -\dfrac{3}{8}\cos\dfrac{4x}{3} + \dfrac{3}{4}\cos\dfrac{2x}{3} - 7$, $\quad f(x) = \sin\dfrac{x}{3}\cos x$.

1.17. 1) $F(x) = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{32}\sin 4x$, $\quad f(x) = \sin^4 x$;

2) $F(x) = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{32}\sin 4x$, $\quad f(x) = \cos^4 x$;

3) $F(x) = |x^2 - 1| - 3x + 3$; $\quad f(x) = 2x - 3$, $x \in (1; +\infty)$.

ПОВТОРИТЕ

1.18. Докажите тождество:

1) $2\cdot\left(0{,}5 - 0{,}5\cos 4\alpha + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}\right) - (1 - \sin^2 2\alpha)\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 2\alpha} - \cos^2 2\alpha = 1$;

2) $\dfrac{\cos^2(2\pi + 4\alpha) - \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2\left(4\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^2(3\pi - (\alpha + \beta)) + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)} - \cos^2(2\pi + (\alpha + \beta)) = 0$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-4\alpha)\cdot\sin(4\pi-2\alpha)\cdot\cos(-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(6\pi-4\alpha)\cdot\left(\cos^2 2\alpha-\cos^2(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)\right)}-0,5\operatorname{tg}4\alpha=0.$

1.19. Постройте график функции в программе "Живая геометрия":

1) $f(x)=3-\sqrt{3-x}$; 2) $f(x)=1+\sqrt{4-x}$;

3) $f(x)=\sqrt{x+1}-2$; 4) $f(x)=-\sqrt{x-1}+2$.

1.20. Найдите область определения функции:

1) $f(x)=2x-\sqrt{x^2+5x}$; 2) $f(x)=x^2-\sqrt{x^2+4x+4}$;

3) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$; 4) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{16-x^2}$.

1.21. Найдите производную функции:

1) $y=(2x-7)^5+4x^2$; 2) $y=3(3x^2-5x)^4-x^6$;

3) $y=\sin^2 3x+2x$; 4) $y=\cos^2 3x-x^3+\sqrt{3}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Прямоугольник, трапеция, площадь плоской фигуры, прямоугольная система координат, функция, непрерывность функции, график функции, предел функции, производная, первообразная, неопределенный интеграл.

§ 2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Вы научитесь находить интеграл, используя метод замены переменной.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, первообразная, интеграл, подынтегральная функция

В некоторых случаях невозможно найти интеграл подынтегрального выражения по таблице. Тогда можно использовать метод введения новой переменной, который помогает свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Такой метод называется *методом подстановки* или *методом замены переменной.*

Метод замены переменной применяется, когда подынтегральное выражение представляет собой независимую переменную, умноженную на:
— многочлен от этой переменной;
— тригонометрическую функцию от этой переменной;
— степенную функцию или на корень от этой переменной.

ПРИМЕР 1. Найдите неопределенный интеграл $\int x\cdot(2+x)^5\,dx$.

Решение. Для нахождения данного интеграла введем замену $t = 2 + x$.

Дифференцируя обе части равенства $t = 2 + x$, получим $dt = d(2+x)$ или $dt = dx$. Из равенства $t = 2 + x$ найдем $x = t - 2$.

Тогда $\int x\cdot(2+x)^5dx = \int(t-2)\cdot t^5dt = \int(t^6 - 2t^5)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{3} + C$.

Далее переходим к переменной x: $\int x\cdot(2+x)^5dx = \frac{(2+x)^7}{7} - \frac{(2+x)^6}{3} + C$.

Ответ: $\frac{(2+x)^7}{7} - \frac{(2+x)^6}{3} + C$.

ПРИМЕР 2. Найдите неопределенный интеграл $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Для нахождения данного интеграла введем замену: $t = \sqrt{x}$.

Отсюда $x = t^2$. Далее продифференцируем последнее равенство: $dx = (t^2)'dt$ или $dx = 2tdt$.

$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int\frac{\sin t}{t}\cdot 2t\,dt = \int 2\sin t dt = -2\cos t + C$.

Далее переходим к переменной x: $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -2\cos\sqrt{x} + C$.

Ответ: $-2\cos\sqrt{x} + C$.

Вы научитесь находить интеграл, используя метод интегрирования по частям.

Не существует формулы, выражающей интеграл от произведения дифференцируемых функций через интегралы от сомножителей. В отличие от производных интеграл от элементарных функций не всегда является элементарной функцией. Например, интегралы $\int\cos x dx$, $\int x^5dx$ табличные, тогда как интеграл $\int\frac{\cos x}{x}dx$ не выражается через элементарные функции.

Пусть функции $u = f(x)$, $v = g(x)$, $u' = f'(x)$ и $v' = g'(x)$ непрерывны на числовом промежутке $[a; b]$.

Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла имеет вид:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим формулу для нахождения производной произведения $(uv)' = uv' + vu'$ и проинтегрируем обе части этого равенства. Получим: $\int(uv)'\,dx = \int(uv' + vu')dx$. Отсюда $uv + C = \int(uv' + vu')dx$ или $uv + C = \int uv'dx + \int vu'dx$. Поскольку $v'dx = dv$ и $u'dx = du$, то получим $uv + C = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu + C$. ■

Формула (1) называется *формулой интегрирования по частям*. При ее применении подынтегральная функция разлагается на два множителя u и v', из которых один множитель дифференцируется, а второй — интегрируется, т. е. переходим к интегралу, у которого вместо u стоит u', а вместо v' стоит v. После такого преобразования иногда получается табличный интеграл, или более простой интеграл, чем исходный.

Формула интегрирования по частям применяется во многих случаях, например, интегралы вида: $\int P_n(x)\sin ax\,dx$, $\int P_n(x)\cos ax\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P_n(x)\arccos ax\,dx$, $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,ax\,dx$.

Причем, при нахождении $\int P_n(x)\sin ax\,dx$ или $\int P_n(x)\cos ax\,dx$ в качестве u берем многочлен $P_n(x)$, тогда соответственно получаем $dv = \cos ax\,dx$ или $dv = \sin ax\,dx$ и формула интегрирования по частям применяется n раз.

При нахождении интегралов вида $\int P_n(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P_n(x)\arccos ax\,dx$, $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,ax\,dx$ в качестве u берем $\arcsin ax$, или $\arccos ax$, или $\mathrm{arctg}\,ax$, тогда $dv = P_n(x)dx$, и значит $v = P_{n+1}(x)$.

ПРИМЕР

3. Найдем $\int x\sin x\,dx$.

Решение. Пусть $u = x$ и $\sin x\,dx = dv$. Первое равенство продифференцируем, а второе проинтегрируем.

Тогда $du = dx$ и $v = \int\sin x\,dx = -\cos x$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Ответ: $-x\cos x + \sin x + C$.

ПРИМЕР

4. Найдем неопределенный интеграл $\int(5x + 2)\cos 2x\,dx$.

Решение. $\int(5x + 2)\cos 2x\,dx = \left|u = 5x + 2,\ dv = \cos 2x\,dx \Rightarrow du = 5dx,\ v = \frac{1}{2}\sin 2x\right| =$
$= (2{,}5x + 1)\sin 2x - \frac{5}{2}\int\sin 2x\,dx = (2{,}5x + 1)\sin 2x + \frac{5}{4}\cos 2x\,dx + C.$

Ответ: $(2{,}5x + 1)\sin 2x + \frac{5}{4}\cos 2x\,dx + C$.

ПРИМЕР

5. Найдем интеграл $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Решение. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \left|u = \mathrm{arctg}\,x, dv = x\,dx, \text{тогда } du = \frac{dx}{1 + x^2}, dx = \frac{x^2}{2}\right| = \frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}\,x -$
$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1 + x^2}dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}\,x) + C.$

Ответ: $\frac{x^3}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}\,x) + C$.

?

1. В каких случаях для нахождения неопределенного интеграла используется метод замены переменной?
2. В каких случаях применяется интегрирование по частям?

Упражнения

A

Найдите неопределенный интеграл (2.1.—2.4.):

2.1. 1) $\int x \cdot (1+x)^4 dx$; 2) $\int (x-3)^5 x dx$.

2.2. 1) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int \frac{5\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

2.3. 1) $\int x \cdot \cos x dx$; 2) $\int 2x \cdot \sin x\, dx$.

2.4. 1) $\int x \cdot \cos 2x dx$; 2) $\int x \cdot \sin 3x\, dx$.

B

Найдите неопределенный интеграл (2.5.—2.7.)

2.5. 1) $\int x \cdot (2x-1)^7 dx$; 2) $\int x \cdot (3x+1)^8 dx$.

2.6. 1) $\int x \cdot \sqrt{4+x}\, dx$; 2) $\int x \cdot \sqrt{x-3}\, dx$; 3) $\int \sin x \cdot \sqrt{\cos x}\, dx$.

2.7. 1) $\int x^2 \cos 4x dx$; 2) $\int x \cos(x+2) dx$; 3) $\int (x^2-3x)\sin 2x dx$.

C

Найдите неопределенный интеграл (2.8.—2.9.)

2.8. 1) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$; 2) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

2.9. 1) $\int x \cdot \sin^2 x dx$; 2) $\int x \cdot \cos^2 x dx$.

2.10. Найдите интеграл:

1) $\int x \arcsin x dx$; 2) $\int x \arccos x dx$.

2.11. Найдите интеграл:

1) $\int x \,\mathrm{arcctg}\, x dx$; 2) $\int x \,\mathrm{arctg}\, 2x dx$.

ПОВТОРИТЕ

2.12. Постройте график функции в программе “Живая геометрия” и укажите область определения функции:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; 2) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$;

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$; 4) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$.

2.13. Найдите множество значений функции:

1) $f(x) = 2x + \sin 2x$; 2) $f(x) = \sin 2x \cos 2x$;

3) $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; 4) $f(x) = \mathrm{tg}\, 2x\, \mathrm{ctg}\, 2x$.

2.14. Найдите производную функции:

1) $y = \mathrm{tg}^5 x + x^{-2}$; 2) $y = \cos^2 2x - 2x$;

3) $y = x^3 \sin 2x$; 4) $y = (x^{-2} - 1)\sin^2 x^2$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Прямоугольник, трапеция, площадь плоской фигуры, прямоугольная система координат, функция, непрерывность функции, график функции, предел функции, производная, первообразная, неопределенный интеграл.

§ 3. КРИВОЛИНЕЙНАЯ ТРАПЕЦИЯ И ЕЕ ПЛОЩАДЬ

Вы ознакомитесь с понятием криволинейной трапеции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, первообразная, неопределенный интеграл, подынтегральная функция, трапеция, площадь, координатная плоскость

ВЫ ЗНАЕТЕ: Формулы нахождения площади многоугольников: треугольника, прямоугольника, трапеции и других, стороны которых являются отрезками прямых.

На практике часто встречаются случаи, когда требуется вычислить площадь фигуры, одна из сторон которой не отрезок, а кривая линия (часть графика нелинейной функции).

Вычисление площади таких фигур невозможно осуществить с помощью известных вам формул. Для этого используется другой способ.

Дана плоская фигура $ABCD$, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, с двух боковых сторон — прямыми $x = a$ и $x = b$, а снизу — осью Ox (рис. 6).

В данном случае функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ считается определенной и непрерывной.

Введем понятие криволинейной трапеции.

Определение. *Фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, называется* ***криволинейной трапецией.***

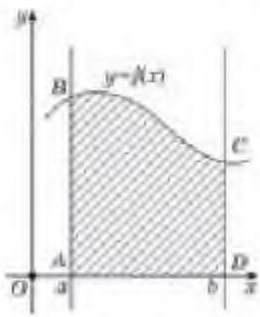


Рис. 6

В данном случае отрезок $[a; b]$ является основанием криволинейной трапеции.

Примеры криволинейных трапеций, ограниченных сверху графиками известных вам функций $f(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \cos x$ показаны на рисунках 7, 8, 9.

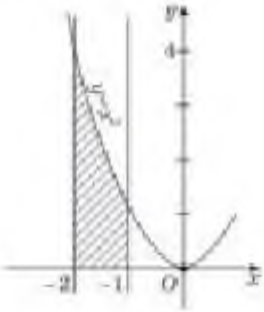


Рис. 7

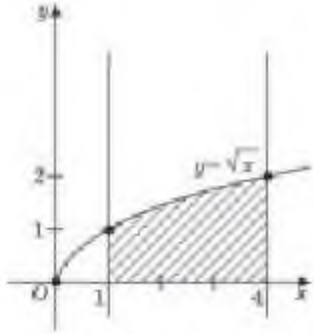


Рис. 8

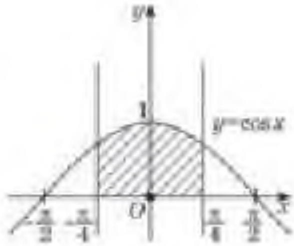


Рис. 9

Криволинейная трапеция может быть образована с помощью графиков различных функций. Некоторые примеры криволинейных трапеций показаны на рисунке 10.

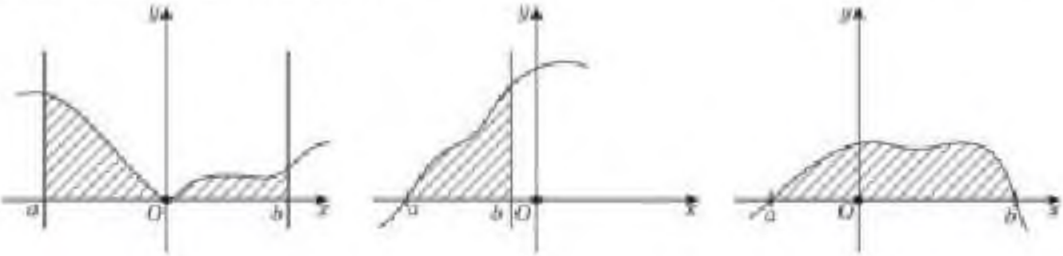


Рис. 10

Вы ознакомитесь с формулой нахождения площади криволинейной трапеции.

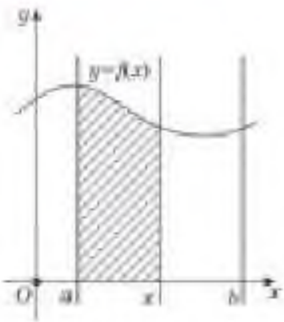


Рис. 11

Площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 6, обозначим через S. Если рассмотрим точку x на отрезке $[a; b]$, то функция $S(x)$ будет выражать площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком нелинейной функции, снизу — осью Ox, прямой $x = a$ и прямой, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точку с координатами $(x; 0)$ (рис. 11).

Нетрудно убедиться, что $S(a) = 0$, $S(b) = S$.

Докажем, что $S(x)$ является совокупностью всех первообразных для функции $f(x)$ на отрезке $[a; x]$, т. е. $S'(x) = f(x)$.

вы знаете: Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю определяет производную этой функции.

В нашем случае надо доказать, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x) = f(x)$.

Вы узнаете геометрический смысл $\Delta S(x)$.

Рассмотрим случай когда $\Delta x > 0$. Так как $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$, то $\Delta S(x)$ есть площадь фигуры заштрихованной части криволинейной трапеции (рис. 12.1).

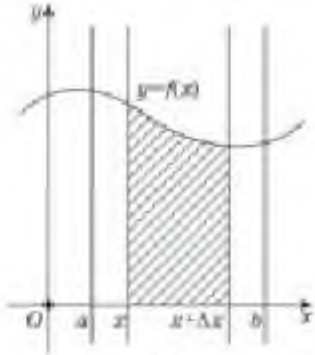


Рис. 12.1

Докажем, что

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x}.$$

Доказательство. Разность $S(x + \Delta x) - S(x)$ равна площади криволинейной трапеции. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $f(x)$ непрерывна и на отрезке $[x; x + \Delta x] \subset [a; b]$. Значит, $f(x)$ на отрезке $[x; x + \Delta x]$ достигает наибольшего и наименьшего значений (по теореме Вейерштрасса). Пусть наибольшее значение $f(x)$ на $[x; x + \Delta x]$ равно M, а наименьшее значение равно m. Тогда площадь криволинейной трапеции заключена между площадями прямоугольников с общим основанием $[x; x + \Delta x]$, высоты которых m и M (рис. 12.2).

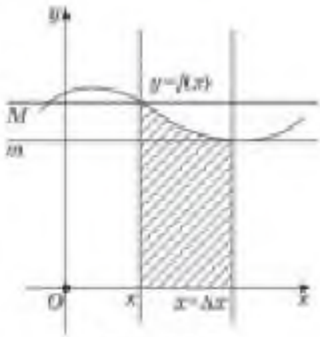


Рис. 12.2

Следовательно, имеет место неравенство:

$m \cdot \Delta x \leqslant S(x + \Delta x) - S(x) \leqslant M \cdot \Delta x$, где $\Delta x > 0$, а m и M зависят от выбора Δx. $\Delta x > 0$, так как $m \leqslant \dfrac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} \leqslant M$.

Если $\Delta x \to 0$, то в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x и на отрезке $[x; x + \Delta x]$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на $[x; x + \Delta x]$ стремятся к общему пределу $f(x)$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} M = f(x)$.

Значит, и заключенное между ними значение $\dfrac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x}$ стремится к $f(x)$.

Следовательно, $S'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$. Это равенство верно и для случая $\Delta x < 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$. Отсюда следует, что $S'(x) = f(x)$, т. е. $S(x)$ является первообразной для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Если одну из первообразных для функции $f(x)$ обозначим через $F(x)$, то можно записать:

$$S(x) = F(x) + C,$$

где C — произвольное число.

Чтобы найти значение C, вместо x подставим a, тогда $S(a) = F(a) + C$, или учитывая, что $S(a) = 0$, получим: $F(a) + C = S(a) = 0$, откуда $C = -F(a)$. Следовательно, $S(x) = F(x) - F(a)$. Выше было показано, что $S(b) = S$, поэтому площадь криволинейной трапеции можно выразить следующим образом:

$$S = S(b) = F(b) - F(a)$$

или

$$S = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Формула (1) является *формулой для вычисления площади криволинейной трапеции*. В формуле (1) $F(x)$ — одна из первообразных для функции $S(x)$, а S — площадь криволинейной трапеции.

АЛГОРИТМ

При нахождении площади криволинейной трапеции применяется следующий алгоритм:

1) на одной координатной плоскости строятся графики данных линий;

2) определяется одна из первообразных функций, графиком которой криволинейная трапеция ограничивается сверху;

3) определяются координаты точек, являющихся началом и концом отрезка нижнего основания криволинейной трапеции;

4) по формуле (1) вычисляется искомая площадь.

ПРИМЕР

1. Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$ и $f(x) = x^2 - 2x + 1$ (рис. 13).

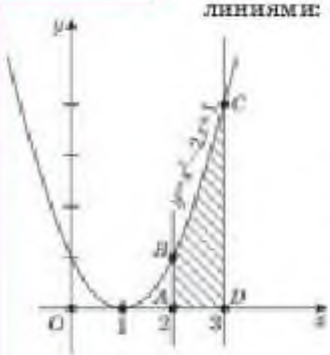


Рис. 13

Решение. Вначале построим на координатной плоскости параболу $f(x) = x^2 - 2x + 1$ с вершиной в точке (1; 0) и ветвями, направленными вверх. Затем проведем прямые $x = 2$ и $x = 3$, параллельные оси Oy, проходящие, соответственно, через точки $A(2; 0)$ и $B(3; 0)$, а прямая $y = 0$ совпадает с осью Ox (рис. 13). Тогда получим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную сверху графиком функции $f(x) = x^2 - 2x + 1$, прямыми $x = 2$ и $x = 3$ и осью Ox, площадь которой можно вычислить, используя формулу (1).

Так как $f(x) = x^2 - 2x + 1$, то, используя первое и второе правила нахождения первообразных, имеем:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x.$$

Учитывая, что в данном случае $a = 2$ и $b = 3$, по формуле (1) получим:

$$S = F(3) - F(2) = \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2\right) = 3 - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Ответ: $2\frac{1}{3}$ кв. ед.

ПРИМЕР

2. Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = 0$, $x = \pi$, графиком функции $y = \sin x$ (рис. 14).

Решение. Одна из первообразных для функции $y = \sin x$ есть функция $F(x) = -\cos x$. Поскольку $a = 0$ и $b = \pi$, то $S = F(\pi) - F(0) = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$.

Ответ: 2 кв. ед.

Рис. 14

ПРИМЕР

3. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2$, $y = 0$, $x = -2$ (рис. 15).

Решение. Из рисунка 15 видно, что фигура, площадь которой необходимо найти, целиком расположена ниже оси абсцисс. В таких случаях, чтобы определить площадь фигуры в формуле (1), значение выражения $F(b) - F(a)$ берется со знаком минус.

Одна из первообразных для функции $y = -x^2$ есть $F(x) = -\frac{x^3}{3}$. В нашем случае $a = -2$, $b = 0$.

Тогда: $S = -(F(b) - F(a)) = F(a) - F(b) = -\frac{(-2)^3}{3} + 0 = 2\frac{2}{3}$.

Ответ: $2\frac{2}{3}$ кв. ед.

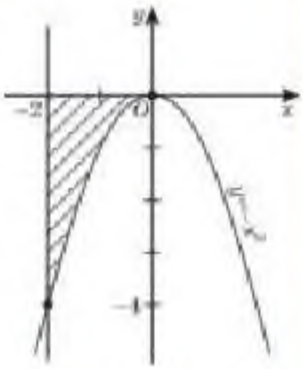


Рис. 15

ПРИМЕР

4. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $x = -2$ (где $x > -2$), $y = 3 - 2x - x^2$.

Решение. На координатной плоскости построим графики линий $y = 0$, $x = -2$ и $y = 3 - 2x - x^2$ (рис. 16). Прямая $x = -2$ делит криволинейную трапецию на две части.

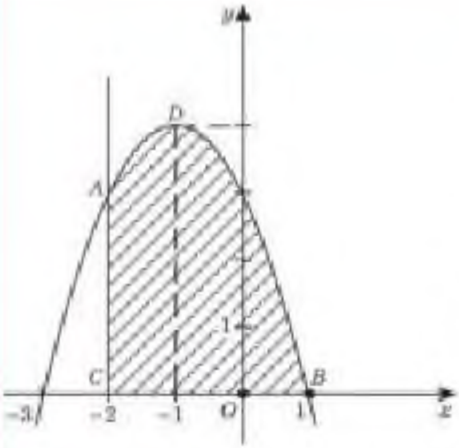


Рис. 16

По условию $x > -2$. Следовательно, возьмем ту часть, которая расположена правее прямой $x = -2$, т. е. находим площадь криволинейной трапеции $CADB$.

Фигура, площадь которой надо найти, ограничена линиями $y = 3 - 2x - x^2$ (сверху) и $y = 0$ (снизу). Можно считать, что с боковых сторон эта фигура ограничена прямыми $x = -2$ и $x = 1$. Для функции $y = 3 - 2x - x^2$ первообразная $F(x) = 3x - x^2 - \dfrac{x^3}{3}$ и $a = -2$, $b = 1$. Тогда для вычисления площади фигуры S_{CADB} можно воспользоваться формулой (1). Следовательно, $S_ф = S_{CADB}$.

$$S_{CADB} = F(1) - F(-2) = \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-6 - 4 + \frac{8}{3}\right) = 1\frac{2}{3} + 7\frac{1}{3} = 9.$$

Ответ: 9 кв. ед.

1. Чем отличается криволинейная трапеция от трапеции, известной вам из курса геометрии?
2. Какие известные вам понятия были использованы при выводе формулы площади криволинейной трапеции?
3. Можно ли воспользоваться формулой площади криволинейной трапеции для вычисления площади трапеции, известной вам из курса геометрии?

Упражнения

А

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (**3.1—3.4**):

3.1. 1) $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;

2) $y = x^2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

3) $y = 2x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

4) $y = 2x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

3.2. 1) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

2) $y = x^2 - 2x + 8$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 3$;

3) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$;

4) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

3.3. 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$; 2) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

3.4. 1) $y = 1 - x^2$, $y = 0$; 2) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$;
3) $y = 3x - x^2$, $y = 0$; 4) $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

3.5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = \cos x$, прямыми $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ и $y = 0$;

2) графиком функции $y = \sin x$, прямыми $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $y = 0$.

B

3.6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми:

1) $x = \frac{\pi}{18}$, $x = \frac{\pi}{12}$, графиком функции $y = \sin 6x$ и осью абсцисс;

2) $y = 0$, $x = \frac{\pi}{24}$, $x = \frac{\pi}{12}$, графиком функции $y = \cos 4x$.

3.7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = -x^3$, $x = -3$, $y = 0$; 2) $y = -2x^3$, $x = -2$, $y = 0$;
3) $y = 1 - x^3$, $x = 0$, $y = 0$; 4) $y = 1 - x^2$, $y = 0$;
5) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
6) $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$;
7) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 4$; 8) $y = -\frac{3}{x^3}$; $y = -3x$, $x = -4$.

3.8. Если $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$, то чему равна площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin 6x$ и $y = 0$?

C

3.9. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, соответственно, на отрезках $[a; b]$ и $[b; c]$ прямыми $x = a$, $x = c$ и осью Ox:

1) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $[-2; 1]$ и $g(x) = x^2 - 2x + 7$, $[1; 2]$;
2) $f(x) = -x^2 - 4x - 1$, $[-3; -1]$ и $g(x) = -x^2 + 2x + 5$, $[-1; 1]$.

3.10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции:

1) $y = -x^2 + x + 6$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$;
3) $y = -2(x - 1)^2 + 8$; 4) $y = -2(x - 3)^2 + 2$.

3.11. При каком значении d площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos 5x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{30}$ и $x = d$ $\left(d < \frac{\pi}{30}\right)$, будет равна 0,2?

3.12. Вычислите площадь фигуры, ограниченной касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, прямой $x = a$ и осью Ox:

1) $f(x) = 4,5 - 0,5x^2$, $x_0 = 1$, $x = -2$;
2) $f(x) = 8 - 0,5x^2$, $x_0 = -2$, $x = 1$.

3.13. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2 = x$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $y < 0$;
2) $y^2 = x$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y > 0$;
3) $y = 2\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $x = 9$.

3.14. 1) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3$, касательной к нему в точке с абсциссой $x = 1$ и осью Oy.
2) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3$ и касательными к нему в точке $x = 1$ и $x = 0$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

3.15. Использование символа $\int$ предложил Готфрид Вильгельм Лейбниц. Термин “интеграл” ввел Иоганн Бернулли, а появился он в работах Якоба Бернулли. Символ $\int_a^b f(x)dx$ стал широко использоваться после работ французского математика и физика Жан-Батиста Жозефа Фурье.

Я. Бернулли
(1655—1705)

Ж. Фурье
(1768—1830)

Г.В Лейбниц
(1646—1716)

ПОВТОРИТЕ

3.16. На координатной плоскости постройте область, ограниченную графиками функций:

1) $y = x^2 - 2x$ и $y = x$;
2) $y = x + 1$ и $y = \sqrt{x+1}$.

3.17. Найдите производную функции:

1) $y = \operatorname{arctg}2x + \frac{1}{x}$; 2) $y = \sqrt{2x+1} - \operatorname{tg}x^2$;

3) $y = \cos^{-1}x - x$; 4) $y = \frac{\sin 2x}{x} + \frac{1}{3x}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, непрерывность функции, предел функции, график функции, криволинейная трапеция, производная, первообразная, неопределенный интеграл, правила нахождения первообразной, формула вычисления площади криволинейной трапеции.

§4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Вы ознакомитесь с понятием определенного интеграла.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, первообразная, определенный интеграл, подынтегральная функция

ВЫ ЗНАЕТЕ: Как находить площадь криволинейной трапеции.

У вас может возникнуть вопрос: можно ли найти площадь криволинейной трапеции другим способом?

Для ответа на данный вопрос возьмем непрерывную функцию $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $f(x)$, снизу — осью абсцисс и с двух боковых сторон — прямыми $x = a$ и $x = b$.

Выведем формулу нахождения площади полученной криволинейной трапеции S.

Для этого отрезок $[a; b]$ разобьем на равные части с помощью точек, координатами которых являются $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_{n-1}$ (рис. 17.1).

Тогда имеем: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Длину каждой части отрезка $[a; b]$ обозначим через Δx:

Тогда: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ... = x_i - x_{i-1} = ... = x_n - x_{n-1}$.

Теперь построим прямоугольник, основанием которого служит отрезок $[x_{i-1}; x_i]$, а высотой является отрезок длиной, равной $f(x_{i-1})$ (рис. 17.2). Тогда площадь этого прямоугольника равна $S_{i-1} = f(x_{i-1}) \cdot \Delta x = f(x_{i-1}) \cdot \frac{b-a}{n}$.

Общее число таких прямоугольников равно n (рис. 17.3). Следовательно, сумму площадей всех n таких прямоугольников можно записать:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\,(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})).$$

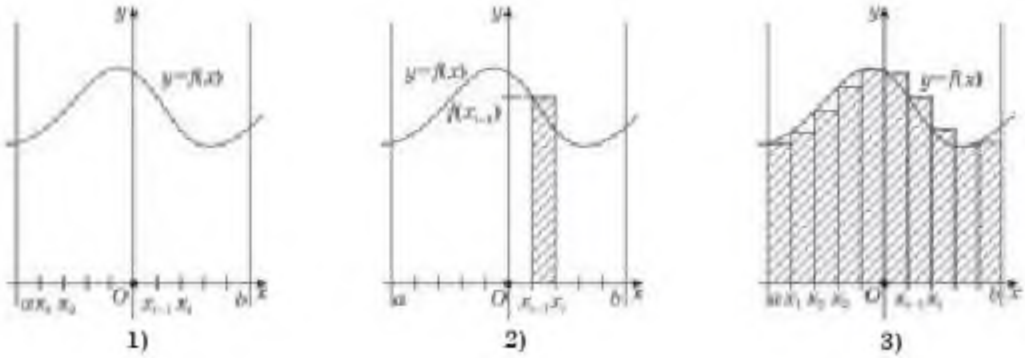


Рис. 17

Поскольку взятая нами функция $f(x)$ непрерывная, то при увеличении числа точек деления отрезка $[a; b]$, т. е. при достаточно больших n (что делает отрезок Δx достаточно малым) можно считать, что совокупность площадей всех построенных таких прямоугольников приблизительно совпадает с площадью рассматриваемой криволинейной трапеции.

Отсюда можно предположить, что при достаточно большом n площадь S_n приближенно равна S — площади криволинейной трапеции, поэтому S_n стремится к S при n, стремящемся к бесконечности:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Сделанное предположение будет верным для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, и S_n при $n \to \infty$ обязательно стремится к некоторому числу S, которое называют *определенным интегралом функции* $f(x)$ от a до b.

Определенный интеграл обозначают: $\int_a^b f(x)\,dx$, который читается: "Интеграл от a до b эф от икс дэ икс". Здесь числа a и b называются *пределами интегрирования*: a — *нижним пределом*, b — *верхним пределом*.

Таким образом, если на отрезке $[a; b]$ непрерывная функция $f(x) \geqslant 0$, то площадь S рассматриваемой криволинейной трапеции можно записать так:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

вы знаете: Площадь криволинейной трапеции можно вычислить с помощью формулы:

$$S = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Вы ознакомитесь с формулой Ньютона—Лейбница.

Если $F(x)$ является первообразной функцией для $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, то, сравнивая формулы (1) и (2), имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Формула (3) называется *формулой Ньютона—Лейбница.*

В дальнейшем для удобства записи разность $F(b) - F(a)$ (приращение) функции $F(x)$ на отрезке $[a; b]$ будем обозначать через $F(x)\Big|_a^b$, тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

Вы научитесь вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями.

ПРИМЕР

1. Вычислим определенный интеграл: 1) $\int_0^2 x^3\,dx$; 2) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; 3) $\int_{-1}^{1} (9x^2 - 24x + 16)\,dx$.

Решение. 1) Для функции $f(x) = x^3$ одной из первообразных будет $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Применяя формулу Ньютона—Лейбница, можно записать:

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

2) Для функции $f_0(x) = \sin x$ одной из первообразных является $F(x) = -\cos x$, следовательно, по формуле Ньютона—Лейбница имеем:

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

3) Одной из первообразных для подынтегральной функции будет $F(x) = 3x^3 - 12x^2 + 16x$.

Следовательно, имеем $\int_{-1}^{1} (9x^2 - 24x + 16)\,dx = (3x^3 - 12x^2 + 16x)\Big|_{-1}^{1} = (3 - 12 + 16) - (-3 - 12 - 16) = 38.$

Ответ: 1) 4; 2) 2; 3) 38.

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $\int_x^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.$

Решение. Вначале, используя формулу Ньютона—Лейбница, найдем интеграл: $\int_x^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_x^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{x} = 4 - 2\sqrt{x}$. Далее, приравнивая найденное выражение к числу 2, решим уравнение: $4 - 2\sqrt{x} = 2$ или $\sqrt{x} = 1$. Отсюда $x = 1$.

Ответ: 1.

ПРИМЕР 3. Используя геометрический смысл определенного интеграла, найдите: $\int_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx$.

Решение. Подынтегральную функцию запишем в виде: $y = \sqrt{6x - x^2}$, или $y^2 = 6x - x^2$, где $y \geqslant 0$, или $x^2 - 6x + y^2 = 0$. Прибавим к обеим частям уравнения число 9 и выделим квадрат двучлена. Получим $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9$ или $(x - 3)^2 + y^2 = 9$, где $y > 0$. Это уравнение окружности радиуса 3 и центром в точке $A(3; 0)$, причем $y > 0$. Так как геометрический смысл определенного интеграла это площадь фигуры, ограниченной графиком функции и пределы интегрирования от 3 до 6, то это четверть круга радиуса 3. Значение площади круга равно 9π. Тогда $\int_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx = \frac{9\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{9\pi}{4}$.

1. Почему $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *определенным интегралом*?
2. Чем отличается определенный интеграл от неопределенного интеграла?
3. Можно ли рассматривать определенный интеграл в случае, когда подынтегральная функция на данном отрезке не является непрерывной? Обоснуйте свой ответ.
4. Известно, что $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) = 0$ на отрезке $[a; b]$? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

Вычислите интегралы (4.1—4.2):

4.1. 1) $\int_{-3}^{2} (2x - 3)\,dx$; 2) $(\int_{-2}^{1} (5 - 4x)\,dx$;

3) $\int_{-2}^{0} (3x^2 + 10)\,dx$; 4) $\int_{0}^{2} (6x^2 - 2x + 5)\,dx$.

4.2. 1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos x\,dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x dx$;

3) $\int_{-1}^{1} \left(5x^4 + 6x^2\right)dx$; 4) $\int_{-2}^{1} \left(4x^3 + 6x\right)dx$.

Вычислите интегралы, преобразуя подынтегральные функции (4.3—4.4):

4.3. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1}\,dx$; 4) $\int\limits_3^5 \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}\,dx$.

4.4. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{18}} (\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x)\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{16}} (\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x)\,dx$;

3) $\int\limits_{0,3}^{1,5} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{x^2}\right)dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{-1} \left(x - \frac{4}{x^2}\right)dx$.

B

Вычислите интегралы (4.5–4.7):

4.5. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \sin 3x\,dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx$.

4.6. 1) $\int\limits_1^{1,5} (1 - 2x)^3\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} (3x + 1)^3\,dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{4} \frac{(2 - x)^3}{8}\,dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{(1 - x)^4}{7}\,dx$.

4.7. 1) $\int\limits_1^4 \frac{5\sqrt{x}}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_{-8}^{-3} \frac{1}{\sqrt{1 - x}}\,dx$;

3) $\int\limits_4^{11} \frac{1}{\sqrt{x + 5}}\,dx$; 4) $\int\limits_{14}^{17} \frac{4}{\sqrt{x + 2}}\,dx$.

Вычислите интегралы, преобразуя подынтегральные функции (4.8—4.9):

4.8. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\cos^2 x)\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (2\sin 2x - 1)\,dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x)dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\frac{x}{5} \operatorname{ctg}\frac{x}{5} - \cos x\right)dx$.

4.9. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} 12\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - x\right)dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \sin 2x dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos 2x dx$.

4.10. Решите уравнение:

1) $\int\limits_{1}^{x} (3 - 2t)dt = 4 - 2x$; 2) $\int\limits_{1}^{x} (1 - 4t)dt = 12 - 9x$;

3) $\int\limits_{x}^{-1} (3t - 2)dt = 5 - x$; 4) $\int\limits_{x}^{-2} (5t + 1)dt = 6 + x$.

4.11. Решите неравенство:

1) $\int\limits_{0}^{x} 5dt > 1$; 2) $\int\limits_{x}^{x^3} 5dt < 0$;

3) $\int\limits_{x}^{1} 3dt > 9$; 4) $\int\limits_{x}^{2} (2t - 3)\, dt > 0$.

C

Вычислите интегралы (4.12–4.14):

4.12. 1) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x \cos 3x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos dx}{1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2\sin x + 1}$.

4.13. 1) $\int\limits_{0}^{1} (2 + 5x)^3 dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} (2x + 3)^3 dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(6x - 1)^4}$; 4) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(1 - 2x)^5}$.

4.14. 1) $\int\limits_{2}^{12} \frac{dx}{\sqrt{3x - 1}}$; 2) $\int\limits_{4}^{12} \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}}$;

3) $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 1}{1 + x^2}\, dx$; 4) $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1}\, dx$.

4.15. Найдите все значения, при которых верно неравенство:

1) $\int\limits_x^3 (t+1)dt < 0$; 2) $\int\limits_x^3 (1-t)dt > 0$;

3) $\int\limits_{-2}^x (2-3t)dt > 0$; 4) $\int\limits_{-3}^x (4t-1)dt < 0$.

4.16. Найдите наименьшее:

1) положительное значение x, при котором $\int\limits_x^{2x} \sin 2t dt = \frac{1}{2}$;

2) целое положительное значение x, при котором $\int\limits_x^{x-1} \sin 2t dt < 0$.

4.17. Используя геометрический смысл определенного интеграла, найдите:

1) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$; 4) $\int\limits_2^4 \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

ПОВТОРИТЕ

4.18. Дана функция $f(x)$. Найдите $f'(x)$.

1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{при } x > 3, \\ -x^2 + 2 & \text{при } x < 3; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 5x - x^2 & \text{при } x > 2, \\ -\sqrt{2-x} & \text{при } x < 2. \end{cases}$

4.19. На координатной плоскости постройте область, ограниченную графиками функций:

1) $y = 2 + \sin x$ и $y = x^2 - x$; 2) $y = \cos x + 1$ и $y = \sqrt{4-x}$.

4.20. Найдите первообразную для функции:

1) $f(x) = 2x + 6x^3$; 2) $f(x) = \sqrt{2x+1} - 4x^3$;

3) $f(x) = 6\cos 3x - 4x$; 4) $f(x) = 2\sin 2x - 2x$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве, функция, график функции, прямая, парабола, многогранник, тело вращения, криволинейная трапеция, производная, первообразная, интеграл, скорость и ускорение движения.

§5. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Вы научитесь вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, первообразная, определенный интеграл, плоская фигура, тело вращения, площадь, объем

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ выражает площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу — осью Ox, с двух сторон — прямыми $x = a$ и $x = b$.

Иногда встречаются плоские фигуры, ограниченные и сверху, и снизу графиками различных функций (различными кривыми) (рис. 18).

Чтобы определить площадь заштрихованной плоской фигуры (рис. 18), нужно из площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y_1 = f_1(x)$, вычесть площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y_2 = f_2(x)$.

Тогда искомая площадь:

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

или

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx. \qquad (1)$$

В отдельных случаях необходимо вычислить площадь фигуры, а которая ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, параллельными оси Ox, $x = 0$ и одна из боковых сторон ограничена линией (графиком функции $x = \varphi(y)$) (рис. 19).

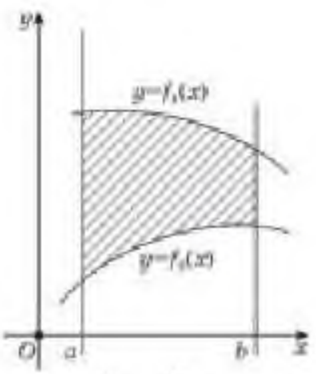


Рис. 18

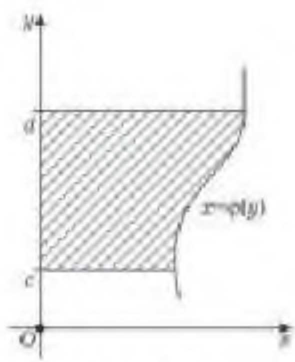


Рис. 19

Площадь такой фигуры вычисляется по формуле, где переменная интегрирования y:

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy \qquad (2)$$

Если фигура с двух боковых сторон ограничена кривыми линиями $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ (рис. 20), тогда площадь такой плоской фигуры вычисляется с помощью интеграла:

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy. \qquad (3)$$

ПРИМЕР

1. Вычислим площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3 + 1$, прямой $y = 2$ и осью Oy (рис. 21).

Решение. По формуле (1) площадь данной фигуры:

$$S = \int_0^1 (2 - x^3 - 1)\,dx = \int_0^1 (1 - x^3)\,dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$ кв. ед.

ПРИМЕР

2. Вычислим площадь треугольника, ограниченного прямыми $y = 2x$, $x = 1$ и осью Ox (рис. 22).

Решение. Площадь этого треугольника:

$$S = \int_0^1 2x dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

Такой же результат можно получить, если используется формула вычисления площади прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}ab$. В данном случае: $a = 1$, $b = 2$. Тогда:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Ответ: 1 кв. ед.

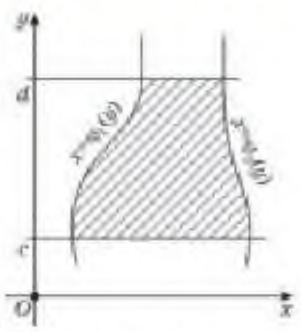


Рис. 20

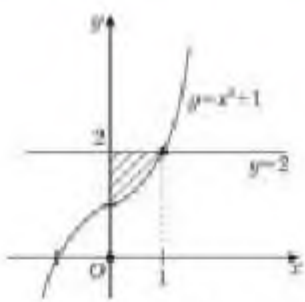


Рис. 21

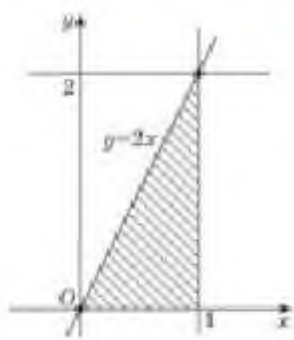


Рис. 22

ПРИМЕР

3. Найдем площадь фигуры, ограниченной графиком функции, заданной в интегральной форме $y = \int\limits_{x^2}^{x^2+1} t\,dt$ **и прямой** $y = 4\frac{1}{2}$.

Решение. Вначале найдем интеграл:

$$y = \int\limits_{x^2}^{x^2+1} t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_{x^2}^{x^2+1} = \frac{1}{2}((x^2+1)^2 - x^4) = x^2 + \frac{1}{2}.$$

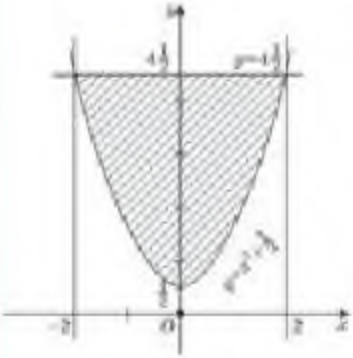


Рис. 23

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению площади фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + \frac{1}{2}$ и прямой $y = 4\frac{1}{2}$ (рис. 23).

Предварительно найдем пределы интегрирования. Для этого решим уравнение $x^2 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$, откуда $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.

Данная фигура симметрична относительно оси Oy, поэтому можно вычислить площадь фигуры на отрезке $[0; 2]$ и умножить на два.

$$S = 2 \cdot \int\limits_0^2 \left(4\frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = 2 \cdot \int\limits_0^2 (4 - x^2)dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}$ кв. ед.

ПРИМЕР

4. Вычислим площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x$, **и прямой** $y = x$.

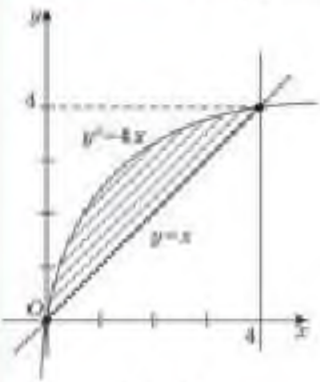


Рис. 24

Решение. Фигура, ограниченная данными линиями, показана на рисунке 24. Сначала найдем точки пересечения параболы с данной прямой. Для этого решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x \end{cases} \text{ или } \frac{y^2}{4} = y, \text{ откуда } y_1 = 0,\ y_2 = 4.$$

Значит, искомая площадь:

$$S = \int\limits_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right)dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right)\Big|_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{12} = $$

$$= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$ кв. ед.

Вы узнаете формулу вычисления объема тела вращения с помощью определенного интеграла.

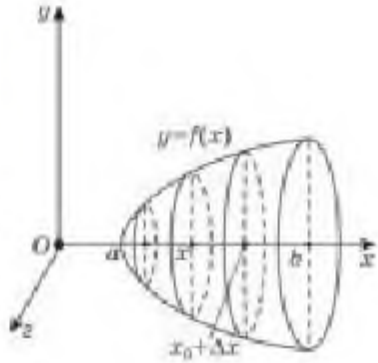


Рис. 25

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Требуется вычислить объем геометрического тела, получаемого при вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox (рис. 25).

На отрезке $[a; b]$ возьмем произвольную точку x. Если через эту точку x провести плоскость, перпендикулярную оси Ox, то она пересечет данное тело вращения по кругу (т. е. в сечении образуется круг). Заметьте, радиус этого круга равен y, следовательно, площадь его $Q(x) = \pi y^2$.

Очевидно, что площадь сечения $Q(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Обозначим через $V(x)$ объем части тела, соответствующего отрезку $[a; x]$ (рис. 25).

Найдем производную функции $V(x)$. Для этого выберем какое-то значение x_0 и дадим ему приращение Δx. Значение Δx может быть больше 0 или меньше 0. Будем считать, что $\Delta x > 0$. Тогда $V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)$ будет объемом тела, заключенного между плоскостями, проходящими через точки x_0 и $x_0 + \Delta x$ на оси Ox (рис. 25). Из чертежа очевидно, что выполняется неравенство:

$$Q(x_0) \cdot \Delta x \leqslant V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) \leqslant Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

В данном случае $Q(x_0) \cdot \Delta x$ — объем цилиндрического тела, целиком лежащего внутри выведенного слоя, а $Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$ — объем цилиндрического тела, содержащего этот слой. Так как $\Delta x > 0$, то выполняется неравенство:

$$Q(x_0) \leqslant \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} \leqslant Q(x_0 + \Delta x).$$

Так как функция $Q(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она непрерывна и в точке x_0. Значит, если Δx стремится к нулю, то $Q(x_0 + \Delta x)$ стремится к $Q(x_0)$, а следовательно $\frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x}$ стремится к $Q(x_0)$

при $\Delta x \to 0$. Таким образом, $V'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = Q(x_0)$.

Значит, $V(x)$ является первообразной для функции $Q(x)$ на отрезке $[a; b]$. Но тогда:

$$\int_a^b Q(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a).$$

Следовательно, чтобы найти объем тела вращения, достаточно вычислить интеграл от функции $Q(x) = \pi y^2$ в пределах от a до b, т. е.

$$V = \int_a^b Q\,(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (4)$$

ПРИМЕР

5. Вычислим объем конуса, площадь основания которого равна S, а высота — h.

Решение. Поместим вершину конуса в начале координат (т. е. в точку O) и ось Ox направим вдоль его высоты (рис. 26).

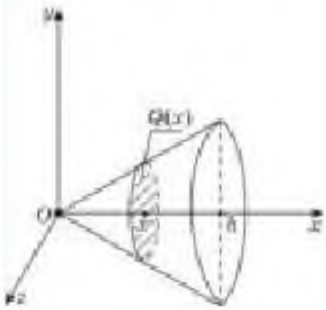


Рис. 26

Через произвольную точку x проводим плоскость, перпендикулярную оси Ox. В сечении получим круг площадью $Q(x)$.

Из курса геометрии вам известно, что площади параллельных сечений конуса относятся как квадраты расстояний от вершины до этих сечений, т. е. $\dfrac{Q(x)}{S} = \dfrac{x^2}{h^2}$. Здесь $Q(x)$ — площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через точку x, перпендикулярной оси Ox, S — площадь основания конуса, h — высота конуса, x — расстояние от вершины конуса до сечения, проходящего через точку x.

Из последнего равенства имеем $Q(x) = \dfrac{S}{h^2}\,x^2$.

Теперь вычислим объем конуса с помощью интеграла следующим образом:

$$V = \int_0^h Q(x)\,dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh.$$

Таким образом, получили известную формулу, выражающую объем конуса $V = \dfrac{1}{3}Sh$.

Вы научитесь применять определенный интеграл для решения физических задач.

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Скорость движения материальной точки определяется как производная от пройденного пути S по времени t, т. е. $\upsilon = S'(t)$. Ускорение же есть производная от скорости υ по времени t, т. е. $a = \upsilon'(t)$.

Если рассмотреть задачу нахождения величин пройденного телом пути по известной его производной (скорости), то, используя формулу Ньютона—Лейбница, будем иметь следующее равенство:

$$\int_{t_0}^{t_1} \upsilon(t)dt = s(t_1) - s(t_0) \text{ или } s(t_1) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \upsilon(t)dt, \qquad (5)$$

где t_0 — начальный момент движения.

Аналогичным образом можно также определить и величину скорости по известной ее производной (ускорения):

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)dt = \upsilon(t_1) - \upsilon(t_0) \text{ или } \upsilon(t_1) = \upsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt.$$

Здесь число $\upsilon\,(t_0)$ означает начальную скорость и обозначается через υ_0, тогда последнее равенство можно записать в следующем виде:

$$\upsilon(t_1) = \upsilon_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt. \qquad (6)$$

Формула (6) позволяет найти скорость движения материальной точки t_0 по известному ее ускорению. В свою очередь, знание скорости движения дает возможность по формуле (5) находить величину пройденного пути.

ПРИМЕР

6. Найдем путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t_0 = 0$ до $t = 5$, если скорость движения точки меняется по закону: $\upsilon = 9{,}8,\ t - 0{,}003t^2$.

Решение. Для решения задачи применим формулу (5), тогда имеем:

$$s(t) = s(t_0) + \int_0^5 (9{,}8t - 0{,}003\ t^2)dt.$$

Но, поскольку по условию задачи $t_0 = 0$ ($s(t_0) = 0$), получим, что:

$$s(t) = \int_0^5 (9{,}8t - 0{,}003t^2)dt = \left(9{,}8 \cdot \frac{t^2}{2} - 0{,}003\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 = (4{,}9t^2 - 0{,}001t^3)\Big|_0^5 =$$

$$= 4{,}9 \cdot 25 - 0{,}001 \cdot 125 = 122{,}5 - 0{,}125 = 122{,}375.$$

Ответ: 122,375.

ПРИМЕР 7. Найдем давление, оказываемое водой на пластину, имеющую форму треугольника, обращенного вершиной вниз, если длина основания равна a, а его высота — h (основание пластины находится на поверхности воды).

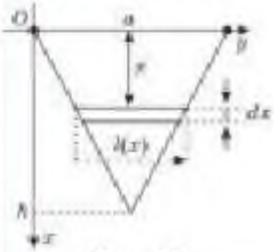


Рис. 27

Решение. Сделаем схематический чертеж (рис. 27). Возьмем полоску "бесконечно малой высоты" dx, находящуюся на глубине x. Тогда из подобия треугольников найдем $l(x)$:

$$\frac{l(x)}{a} = \frac{h-x}{h},\ l(x) = \frac{a(h-x)}{h}.$$

Значит, площадь выделенной полоски равна:

$$dS = \frac{a(h-x)}{h} \cdot dx.$$

Тогда давление воды на нее равно $dp = x \cdot dS = \dfrac{x \cdot a(h-x)}{h} dx.$

Для нахождения давления воды на всю пластину надо проинтегрировать dp, по переменной x от $x = 0$ до $x = h$:

$$p = \int_0^h \frac{x(h-x)a}{h} dx = \frac{a}{h}\int_0^h (xh - x^2)dx = \frac{a}{h}\left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h = \frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{a}{h} \cdot \frac{h^3}{6} = \frac{ah^2}{6}.$$

Следовательно, искомое давление воды на пластину равно $\frac{1}{6}ah^2$ Па.

Ответ: $\frac{1}{6}ah^2$ Па.

1. Какие геометрические задачи решаются с помощью определенного интеграла?
2. Почему применение определенного интеграла является одним из основных способов вычисления площади фигуры, ограниченной не только отрезками прямых, но и кривыми линиями?
3. Почему вывод формул объемов некоторых многогранников и тел вращения (пирамиды, усеченной пирамиды, конуса, усеченного конуса) с помощью определенного интеграла является более рациональным?
4. В чем заключается смысл решения физических задач на движение через определенный интеграл?

Упражнения

A

5.1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: 1) $y = 2x + 2$, $y = 0$, $x = 2$; 2) $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 2$ (ответ проверьте вычислением по формуле из геометрии).

5.2. Чему равна площадь фигуры, ограниченной линиями:
1) $y = (x - 2)(2x - 3)$, $y = 0$; 2) $y = (3x + 2)(x - 1)$, $y = 0$?

5.3. Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

1) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 0$, $x = 0$;

2) $y = x^2 + 6x + 9$, $y = 0$, $x = 0$;

3) $y = 4x^2 + 12x + 9$, $y = 0$, $x = 0$;

4) $y = 9x^2 - 6x + 1$, $y = 0$, $x = 0$.

5.4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и осями координат:

1) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$; 2) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

5.5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 2x^2$, $y = 4x$; 2) $y = x^2$, $y = -2x$.

5.6. Постройте фигуру, ограниченную линиями:

1) $y = \sin x$, $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ и вычислите ее площадь, учитывая $\cos 2 \approx -0{,}41$;

2) $y = \cos x$, $y = 3 - x$, $x = 0$, $x = -1$ и вычислите ее площадь, учитывая $\sin 1 \approx 0{,}84$.

5.7. 1) Найдите объем тела, полученного при вращении параболы $y = x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = 2$ вокруг оси абсцисс.

2) Найдите объем тела, полученного при вращении параболы $y = x^2$ от точки $x = -2$ до точки $x = 2$ вокруг оси ординат.

5.8. Тело падает с некоторой высоты. Его скорость меняется по закону: $v = 9{,}8t + 0{,}01t^2$. Определите, с какой высоты падает тело, если время его падения составляет: $t = 4$ *с*.

B

5.9. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками заданных функций:

1) $y = x^2 - 4x - 4$, $y = -x$; 2) $y = 3x^2$, $y = 2x$.

5.10. 1) Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой, проходящей через точки A (4; 0) и B (0; 4).

2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2$ ($x \leqslant 0$), осью абсцисс и прямой, проходящей через точки (–3; 0) и (0; 4,5).

5.11. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \frac{1}{8}x^3$, $y = 0{,}5x$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^3$, $y = -x$.

5.12. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой 1) $y = 4x - x^2$; 2) $y = x^2 - 6x$ и прямой, проходящей через вершину параболы и начало координат.

5.13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
1) $y = x^2$ и $y = 3 - 2x$;
2) $y = x^2$ и $y = 2x - x^2$;
3) $y = x^2 + 1$ и $y = -x^2 + 3$;
4) $y = 2x^2 + 1$ и $y = x + 2$, $y = 1{,}5$.

5.14. Найдите объем фигуры вращения гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ от $x = 1$ до $x = 3$ вокруг оси абсцисс.

5.15. Найдите путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t = 0$ до $t = 4$, если скорость ее движения меняется по закону: $v = Rt + a\sqrt{t}$.

5.16. Изобразите фигуру, площадь которой равна значению определенного интеграла: 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$.

C

5.17. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2x + 1$ и графиком ее производной.

5.18. Функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x) = 2x - 4$. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)$ и $F(x)$, если известно, что график функции $F(x)$ проходит через точку $A(0; 4)$.

5.19. Треугольник вращается вокруг стороны, длина которой равна a. Прилежащие к стороне a углы треугольника равны α и β. Найдите объем тела вращения.

5.20. Найдите объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = ||x - 1| - 2|$, $y = 0$, $x = 0$, вокруг оси абсцисс.

5.21. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3$ и двумя касательными к этому графику, проходящими через точку на оси Oy и образующими между собой прямой угол.

5.22. Чему равна площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 1$ и касательными, проведенными к этому графику в точках пересечения параболы с осью абсцисс?

5.23. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -x^2 + 4x$ и касательными, проведенными к этому графику в точках пересечения параболы с осью абсцисс.

5.24. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \int\limits_{x}^{x+1} 3t^2\,dt$ и прямой $y = 1$.

5.25. В каком соотношении делится площадь четырехугольника $ABCD$, где $A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ 4)$, $C(2;\ 4)$, $D(4;\ 0)$, параболой $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$?

5.26. 1) Вычислите силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м.
2) Канал имеет в разрезе форму равнобокой трапеции с основаниями a и b и высотой h , где $a > b$, a — верхнее основание. Найдите силу, с которой вода, заполняющая канал, давит на плотину.

5.27. Материальная точка движется по прямой со скоростью $v(t) = \sin t \cos t$. Найдите уравнения движения точки, если при $t = \frac{\pi}{4}$ пройденный путь равен 3 м.

5.28. Найдите первообразную функции $f(x) = 2x + 4$, график которой касается прямой $y = 6x + 3$. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной и прямыми: $y = 6x + 3$ и $y = 0$.

ПОВТОРИТЕ

5.29. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

1) $y = \frac{x}{2x^2 - 1}$ на отрезке $[-4;\ -2]$;

2) $y = x \cdot \sqrt{3-x}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

5.30. Используя геометрический смысл определенного интеграла, найдите:

1) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{4x-x^2}\,dx$;
4) $\int\limits_{1}^{2} \sqrt{2x-x^2}\,dx$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Укажите функцию, для которой функция $F(x) = 2 - \cos x$ является первообразной:

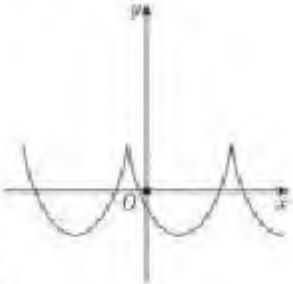
A) $2x + \sin x$;
B) $\sin x$;
C) $-\sin x$;
D) такой функции нет.

2. Какая функция является первообразной для функции $f(x) = 5x^4 - 2x$:

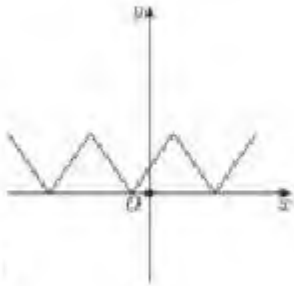
A) $F(x) = 20x^4 + 8$; B) $F(x) = x^5 + x^2$;

C) $F(x) = 20x^4 - 8$; D) $F(x) = x^5 - x^2$?

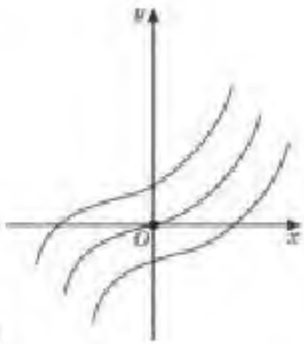
3. На каком из рисунков изображен график первообразных для некоторой функции?



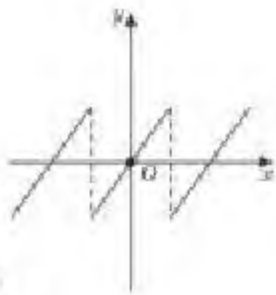
A)



B)



C)



D)

4. На каком множестве функция $F(x) = \dfrac{3}{x-2}$ не является первообразной для функции $f(x) = -\dfrac{3}{(x-2)^2}$:

A) $(-\infty; 0)$; B) $(2; +\infty)$;

C) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; D) $(-\infty; -2) \cup (-2; 4)$?

5. Укажите первообразную функции $y(x) = x^2 - 2x$, график которой проходит через точку $A(-1; 1)$:

A) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + \dfrac{1}{3}$; B) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - \dfrac{1}{3}$;

C) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \dfrac{1}{3}$; D) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \dfrac{4}{3}$.

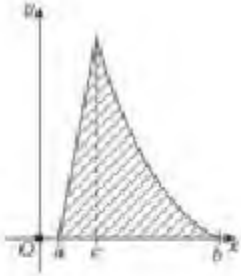
6. Какие правила нахождения первообразных необходимо применить, чтобы найти первообразную функции $f(x) = 5\sin 0{,}5x$:

A) правило 1; B) правило 2;

C) правила 2 и 3; D) правило 3?

7. Вычислите $\int\limits_{2}^{4} 10x\,dx$:

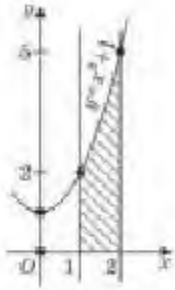
A) 0; B) 100; C) 80; D) 60.



8. Выберите формулу, по которой можно вычислить площадь фигуры, изображенной на рисунке:

A) $S = S_{\text{кр. трап.}} - S_{\Delta}$; B) $S = S_{\text{кр. трап.}} + S_{\Delta}$;

C) $S = 2S_{\text{кр. трап.}} - S_{\Delta}$; D) $S = S_{\text{кр. трап.}}$



9. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке:

A) $\frac{3}{10}$; B) 8; C) 10; D) $3\frac{1}{3}$.

10. Вычислите $\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$:

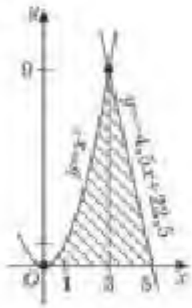
A) 2; B) 3; C) 1; D) 4.

11. При каком значении b имеет место равенство $\int\limits_{1}^{b} 8dx = 8$:

A) 4; B) 8; C) 2; D) 5?

12. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x + 5$ и $y = 5$:

A) $10\frac{2}{3}$; B) $\frac{3}{32}$; C) 11; D) 10.



13. Вычислите площадь фигуры, заштрихованной на рисунке:

A) 18; B) 9; C) 27; D) 54.

14. Вычислите $\int\limits_{0}^{4} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}dx$:

A) 8; B) 12; C) 6; D) −4.

15. Найдите $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 14\sin x\,dx$:

A) −14; B) 1; C) 14; D) 0.

16. Вычислите $\int\limits_{0}^{6} \frac{x^4 - 1}{x + 1}dx$:

A) 212; B) 264; C) 210; D) 320.

17. Решите уравнение $\int\limits_0^x 12t^2dt = 4$:

A) -1; B) 1; C) 2; D) -2.

18. Решите неравенство $\int\limits_{-2}^x 4dt > 0$:

A) $(-2; +\infty)$; B) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$;
C) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; D) $(-\infty; 0)$.

19. Найдите функцию, первообразная которой равна $F(x) = 7{,}5x^2 - 10$:

A) $7{,}5x$; B) $15x$; C) 0; D) $2{,}5x^3 - 10x$.

20. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями функции $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$:

A) 243π; B) $5{,}4\pi$; C) 27π; D) $48{,}6\pi$.

Тестовые задания "Математическая грамотность"

21. Известно, что различные числа a и b делятся на c. Найдите неверный вывод:

A) $\frac{a-b+1}{a+b}$ делится на c; B) $\frac{2a-b}{a+b}$ сократимая дробь;

C) ab делится на c; D) $3a + 2b$ делится на c;

E) $ab - 2c$ делится на c.

22. В пачке "Снежинка" 500 листов белой бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1400 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 6 недель:

A) 15; B) 14; C) 16; D) 17; E) 18?

23. Три апельсина и 1 груша весят столько же, сколько 10 мандарин, а 6 мандарин и 1 апельсин весят столько же, сколько 1 груша. Сколько мандаринов надо взять, чтобы уравновесить одну грушу:

A) 8; B) 7; C) 6; D) 5; E) 9?

24. Игровой мяч сбросили с высоты 27 м и мяч подпрыгивает на одну треть высоты падения. Сколько метров пролетит мяч до полной остановки:

A) 44; B) 56; C) 54; D) 52; E) 60?

25. Сколько равных прямоугольников, длиной 4 см и шириной 3 см, можно получить из квадрата со стороной 6 см при условии, что квадрат можно разбивать на части и затем складывать?

A) 2; B) 4; C) 6; D) 3; E) 5?

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Понятие интеграла возникло из-за потребности вычислять площади любых плоских фигур, а также площади поверхностей и объемов произвольных тел.

Такие проблемы остро встали перед учеными еще в глубокой древности. Так, в Древней Греции и Риме ученые-математики интересовались решением задач на нахождение квадратур произвольной плоской фигуры (т. е. вычисление площадей способом построения равновеликого ей квадрата), а также кубатур (т. е. вычисление объемов в кубических единицах способом построения равноемкого ему куба) произвольного тела. Их деятельность была связана с применением так называемого метода исчерпывания, который был предложен Евдоксом Книдским (ок. 408 — ок. 355 до н.э.). Применяя этот метод Евдокс доказал, например, что площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров, а объем конуса равен $\frac{1}{3}$ объема цилиндра, имеющего такие же основание и высоту.

В своем сочинении "Квадратура параболы" Архимед, усовершенствовав метод Евдокса, вывел формулу площади круга. Суть метода Архимеда заключается в следующем:

1) доказывается, что площадь круга меньше площади любого описанного около него правильного многоугольника, но больше площади любого вписанного в него правильного многоугольника;

2) доказывается, что при неограниченном удвоении числа сторон, описанных около круга и вписанных в круг правильных многоугольников разность их площадей становится бесконечно малой величиной (приближается к нулю);

3) за величину площади круга берется значение, к которому стремится величина площади описанного около него (или вписанного в круг) правильного многоугольника при неограниченном удвоении числа его сторон.

Сам символ интеграла $\int$ введен Г. Лейбницем (1675 г.), он напоминает измененный вид начальной латинской буквы S в слове *summa*. Слово *интеграл* впервые использовано Я. Бернулли (1690 г.). Это слово, видимо, происходит от латинского слова *integro*, которое переводится как "приводить в прежнее состояние, восстанавливать". Возможно, этот термин происходит от слова *integer*, которое означает "целый".

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Варианта, вариационный ряд, ряд распределения, полигон, полигон частот.

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 6. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ И ВЫБОРКА

Вы ознакомитесь с основными терминами математической статистики.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Выборка, генеральная совокупность, статистический ряд, частота, гистограмма

При проведении конкретных измерений или экспериментов часто получают информацию очень большого объема. Например, сведения о дате рождения сотрудников фирмы, балловые результаты ЕНТ в конкретном городе или районе, о размерах вкладов населения в банках Казахстана, масса тела и рост призывников на военную службу из конкретной области РК, список цен всех покупок, совершенных в супермаркете в течение дня, и т. д.

Безусловно, у статистики есть и много различных задач: сбор и хранение информации, разработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Однако одна из основных задач математической статистики состоит в надлежащей обработке полученной информации, тогда и остальные задачи достижимы.

Порядок преобразования первоначально полученной информации примерно следующий:

— данные измерений (опыта) упорядочивают и группируют;

— после группировки составляют таблицы измерений данных;

— по таблице распределения можно построить графики распределения данных;

— составляют своего рода паспорт данного измерения, в котором собрано небольшое количество основных числовых характеристик полученных измерений.

На практике реализация этих шагов проводится с помощью одной из компьютерных программ обработки и анализа данных. Например, “MatLab”, “Microsoft Excel”, “Statistica”.

Итак, пусть изучаются некоторые объекты и их свойства, для это проводится достаточно большое количество испытаний (измерений).

Генеральной совокупностью называется совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех наблюдений, производимых в одинаковых условиях над одним объектом.

Выборочной совокупностью или *выборкой* называется совокупность объектов или результатов наблюдения над объектом, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.

Объемом выборки называется число объектов или наблюдений в выборке.

Значения выборки называют *наблюдаемыми значениями случайной величины* X.

Для получения достоверных и надежных выводов выборка должна быть достаточно представительной по объему. Большая выборка — это неупорядоченное множество чисел. Для исследования выборку приводят к наглядному упорядоченному виду.

вы знаете: Вариационные ряды состоят из двух элементов: частоты и варианты.

Вариантой называют отдельное значение варьируемого признака, которое он принимает в ряду распределения.

Частота — это численность отдельных вариант или каждой группы вариационного ряда.

Пусть дан ряд $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$. Здесь варианта x_1 встречается n_1 раз, варианта x_2 встречается n_2 раз, варианта x_3 встречается n_3 раз и т. д.

Тогда $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ равенство является объемом выборки, n_i является частотой варианты x_i, а число $\frac{n_i}{n}$ — относительной частотой.

вы знаете: Таблица, данная ниже, является статистическим рядом частоты:

Таблица 6

Варианта	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Частота варианты	n_1	n_2	n_3	...	n_k

вы знаете: *Полигон частот* (*многоугольник*) представляет собой ломаную, соединяющую точки, соответствующие срединным значениям интервалов группировки и частотам этих интервалов.

Полигон (*polygon*) в переводе с греческого означает "многоугольник".

Составим таблицу, в которой представлены варианты с относительной частотой:

Таблица 7

Варианта x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_k
Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Данная таблица называется *вариационным рядом относительной частоты*.

Ломаная, соединяющая точки, соответствующие срединным значениям интервалов группировки и относительным частотам этих интервалов, называется *полигоном относительной частоты*.

Для построения полигона относительной частоты на координатной плоскости отмечают точки $(x_1; \frac{n_1}{n})$, $(x_2; \frac{n_2}{n})$, ... , $(x_k; \frac{n_k}{n})$ и соединяют их отрезками.

ПРИМЕР

1. Дан числовой ряд: 8, 9, 4, 8, 6, 8, 8, 9, 4, 4, 4, 9, 6, 9, 9, 4, 8, 8, 8, 9. Найдите объем выборки, варианты выборки, составьте вариационный ряд частоты и вариационный ряд относительной частоты, постройте полигон частоты.

Решение. По условию задачи объем равен 20. В данном ряду встречаются числа 4, 6, 8 , 9. Они являются вариантами выборки.

Составим вариационный ряд частоты:

Таблица 8

Варианта x_i	4	6	8	9
Частота варианты n_i	5	2	7	6

Составим вариационный ряд относительной частоты:

Таблица 9

Варианта x_i	4	6	8	9
$\frac{n_i}{n}$	0,25	0,1	0,35	0,3

Построим полигон частот (рис. 28).

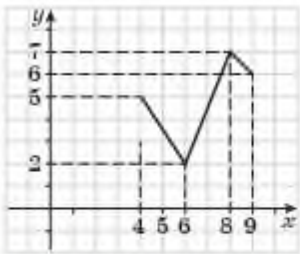


Рис. 28

1. Назовите основные термины математической статистики.
2. Чем отличается генеральная совокупность от выборки?
3. Что показывает полигон частот, полигон относительной частоты?
4. Как составляется таблица абсолютных и относительных частот для выборки?

Упражнения

А

6.1. Дан числовой ряд: 1, 3, 4, 2, 1, 3, 5, 3, 4, 4, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 3, 5, 2, 1. Найдите объем выборки, варианты выборки, составьте вариационный ряд частоты и вариационный ряд относительной частоты.

6.2. Дан числовой ряд: 5, 9, 4, 8, 6, 8, 5, 9, 4, 4, 5, 4, 9, 8, 6, 6, 8, 9, 4, 8, 5, 8, 5, 8, 9. Найдите объем выборки, варианты выборки, составьте вариационный ряд частоты и вариационный ряд относительной частоты и относительных частот в процента.

6.3. Результаты оценок суммативного оценивания по алгебре и началам анализа за I четверть среди учащихся 10-х классов представлены в таблице 9.1:

Таблица 9.1

4	3	2	3	4	3	3	5	3	4
3	4	3	4	3	3	5	4	3	3
4	2	4	4	4	3	4	4	4	5
3	3	4	3	3	4	3	5	2	4
3	4	3	3	4	4	4	4	5	4

1) Составьте вариационный ряд результатов и найдите объем выборки.

2) Составьте вариационный ряд относительных частот.

B

6.4. Учащимся 10-х классов предложено назвать свою ожидаемую оценку по алгебре и началам анализа за I четверть. Результаты представлены в таблице 9.2:

Таблица 9.2

4	3	3	3	4	3	3	5	3	4
3	4	3	4	3	4	5	4	5	3
4	4	4	4	4	3	4	4	4	5
3	3	4	3	3	4	3	5	3	4
3	4	3	5	4	3	4	4	5	4

1) Составьте вариационный ряд результатов и найдите объем выборки.

2) Составьте вариационный ряд относительных частот.

3) Составьте вариационный ряд относительных частот в процентах.

6.5. По вариационному ряду частот найдите объем выборки и постройте полигон частот (таблицы 9.3—9.4):

Таблица 9.3

1)

x_i	2	6	10	14
n_i	5	8	6	6

Таблица 9.4

2)

x_i	4	6	8	10	12
n_i	5	8	8	5	4

C

6.6. В таблице приведены результаты измерения роста (в см) детей (табл. 9.5).

Таблица 9.5

55	56	57	56	54
57	59	56	58	58
56	58	59	59	57
55	55	54	57	59
58	57	54	60	56

По данным таблицы:

1) Составьте вариационный ряд результатов и найдите объем выборки.

2) Составьте вариационный ряд относительных частот.

3) Составьте вариационный ряд относительных частот в процентах.

4) Постройте полигон (многоугольник распределения) относительных частот в процентах.

6.7. В крестьянском хозяйстве при сборе картофеля провели взвешивание отдельных клубней. Результаты массы клубней (в граммах) приведены в таблице 9.6.

Таблица 9.6

60	59	61	56	62
57	59	58	58	58
56	58	59	59	57
61	61	59	57	59
58	56	62	60	60

По данным таблицы:

1) Составьте вариационный ряд результатов и найдите объем выборки.

2) Составьте вариационный ряд относительных частот.

3) Составьте вариационный ряд относительных частот в процентах.

4) Постройте полигон (многоугольник распределения) относительных частот в процентах.

ПОВТОРИТЕ

6.8. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int(1+\sqrt{x+1})dx$; 2) $\int(x+\frac{2}{(x-1)^2})dx$;

3) $\int(\sin 2x + x^{-3})dx$; 4) $\int(2-\frac{1}{\cos^2 2x})dx$.

6.9. Исследуйте функцию на четность:

1) $f(x) = x \cdot \arcsin 2x$; 2) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} 2x$;

3) $f(x) = x \cdot \arccos x$; 4) $f(x) = x^2 \cdot \cos 2x + \sqrt{|x|}$.

6.10. Найдите значение определенного интеграла:

1) $\int\limits_1^2 (3x^2 - 2x + 3\sqrt{2x})dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (18x^2 - \sin 2x)dx$;

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Варианта, вариационный ряд, ряд распределения, полигон, полигон частоты, выборка, генеральная совокупность, статистический ряд, гистограмма.

§7. ДИСКРЕТНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ

Вы ознакомитесь с понятием *дискретный вариационный ряд*, научитесь обрабатывать выборочные данные для составления дискретных вариационных рядов.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Ряд, группа, дискретный вариационный ряд, интервальный вариационный ряд

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Рядами распределения* называются группировки особого вида, при которых по каждому признаку, группе признаков или классу признаков известны численность единиц в группе либо удельный вес этой численности в общем итоге.

Ряды распределения могут быть построены или по количественному, или по атрибутивному признаку.

Ряды распределения, построенные по количественному признаку, называются *вариационными рядами*.

Вариационные ряды бывают дискретные и интервальные. Ряд распределения может быть построен по непрерывно варьирующему признаку (когда признак может принимать любые значения в рамках какого-либо интервала) и по дискретно варьирующему признаку (принимает строго определенные целочисленные значения).

Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариантов с соответствующими им частотами или частностями. Варианты дискретного ряда — это дискретно прерывно изменяющиеся значения признака, обычно это результат подсчета.

Дискретные вариационные ряды строят обычно в том случае, если значения изучаемого признака могут отличаться друг от друга не менее чем на некоторую конечную величину.

В дискретных рядах задаются точечные значения признака.

ПРИМЕР 1. Имеются данные о тарифных разрядах 20 рабочих предприятия. Построить дискретный вариационный ряд распределения рабочих по тарифному разряду. 2 3 2 4 4 5 5 4 6 3 1 4 4 5 5 6 4 3 2 3.

Решение. Сначала составим таблицу. Ряды распределения имеют два элемента, значит таблица будет состоять из двух строк.

Первая строка это всегда варианта, в данном примере по условию это — тарифный разряд рабочих; вторая строка — это частота — как часто встречается варианта, а именно численность рабочих определенного разряда.

Учитывая условие задания, выберем те значения, которые встречаются хотя бы один раз. В данном случае это следующие числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Затем подсчитаем, сколько же раз встречается каждое значение варианты и составим следующую таблицу:

Таблица 10

Тарифный разряд (x_i)	1	2	3	4	5	6
Численность рабочих (n_i)	1	3	4	6	4	2

Таким образом, в результате получен дискретный вариационный ряд распределения рабочих по тарифному разряду.

Итак, пусть имеется упорядоченный по возрастанию ряд данных, полученных в результате измерений:

Количество n всех данных — это объем ряда данных измерений.

Разность между $x_n - x_1$ называется *размахом измерения*, или *разностью между наибольшей вариантой и наименьшей вариантой*. *Мода ряда данных* — это варианта, которая встречается чаще всего в ряду измерений. Мода равна варианте, кратность которой является наибольшей.

Медианой ряда из нечетного числа данных $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < x_{2k+1}$ называют число $m = x_{k+1}$ а *медианой ряда из четного числа данных* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k-1} < x_{2k}$ называют число $m = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Часто встречающаяся характеристика данных измерения является их *средним арифметическим значением* или *средним значением* M.

Для нахождения среднего значения необходимо:
1) найти значение суммы всех данных измерения;
2) полученное значение суммы разделить на количество данных (объем выборки) $M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Среднее значение, мода и медиана относятся к одному типу числовых характеристик ряда данных. Иногда их называют *мерами центральной тенденции*: каждое из этих чисел по-своему описывает центральное значение ряда данных.

Самостоятельно найдите моду, медиану и среднее значение к примеру 1.

Вы ознакомитесь с понятием *интервальный вариационный ряд*, научитесь обрабатывать выборочные данные для составления интервальных вариационных рядов.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частотами попаданий в каждый из них значений величины.

Интервальные ряды предназначены для анализа распределения непрерывно изменяющегося признака, значение которого чаще всего регистрируется путем измерения или взвешивания. Варианты такого ряда — это группировка.

Если в дискретных вариационных рядах частотная характеристика относится непосредственно к варианту ряда, то в интервальных — к группе вариантов.

Есть несколько способов построения интервала:

1) визуальный способ без дополнительных расчетов на основе логического анализа данных, расчет по формуле, если по условию требуется построить равные интервалы;

2) способ с дополнительными вычислениями. Для расчетов величины интервала используется формула:

$$i = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}, \qquad (1)$$

где i — величина или длина интервала; x_{max} — максимальное значение; x_{min} — минимальное значение; n – требуемое число групп по условию задачи.

Первый интервал начинают строить от минимального значения, к нему добавляется величина интервала и получается верхняя граница первого интервала. Затем верхняя граница первого интервала становится нижней границей второго интервала, к ней добавляется величина интервала и получается второй интервал. И так далее столько раз, сколько требуется построить интервалов по условию.

ПРИМЕР

2. Имеются данные о величине вклада в банке 10 вкладчиков — 300, 380, 480, 350, 450, 560, 250, 400, 500, 200 тыс. тг. Построить интервальный вариационный ряд распределения вкладчиков по размеру вклада, выделив 3 группы с равными интервалами. По каждой группе подсчитать общий размер вкладов.

Решение. Сначала составим таблицу. Ряды распределения имеют два элемента, поэтому таблица будет состоять из двух строк.

Первая строка это всегда варианта, в данном примере по условию это — размер вклада в банк; вторая строка — это частота — как часто встречаются варианты, а именно, число вкладчиков с соответствующим вкладом, в данном случае попадающие в интервал.

Используя формулу (1), найдем величину интервала. По условию задачи наибольшее значение 560 тыс.тг., наименьшее значение 200 тыс.тг., количество групп — 3. Тогда $i = \frac{560\ 000 - 200\ 000}{3} = 120\ 000$.

Таблица 11.1

Размер вклада в банк (x)	200 000 — 320 000	320 000 — 440 000	440 000 — 560 000
Число вкладчиков (n)	3	3	4

Теперь проведем подсчет общего объема размера вкладов по каждому интервалу и в целом. Для этого сложим размеры вкладов по каждому интервалу и получим суммарное значение вкладов.

По первому интервалу: 200 000 + 300 000 + 250 000 = 750 000;
по второму интервалу: 350 000 + 380 000 + 400 000 = 1 130 000;
по третьему интервалу: 450 000 + 480 000 + 500 000 + 560 000 = 1 990 000.

Таблица 11.2

Размер вклада в банк (x)	200 000 — 320 000	320 000 — 440 000	440 000 — 560 000	Итого
Число вкладчиков (n)	3	3	4	10
Общий объем вкладов	750 000	1 130 000	1 990 000	3 870 000

Вы научитесь анализировать данные вариационного ряда в соответствии с заданным условием.

Ряды распределения удобно анализировать при помощи их графического изображения, позволяющего судить и о форме распределения, и о закономерностях.

Дискретный ряд изображается на графике в виде ломаной линии – полигона распределения. Для его построения в прямоугольной системе координат по оси абсцисс в одинаковом масштабе откладываются ранжированные (упорядоченные) значения варьирующего признака, а по оси ординат наносится шкала для выражения частот.

Самостоятельно постройте дискретный вариационный ряд к примеру 1.

Интервальные ряды изображаются в виде гистограмм распределения (т. е. столбиков диаграмм). При построении гистограммы на оси абсцисс откладываются величины интервалов, а частоты изображаются прямоугольниками, построенными на соответствующих интервалах. Высота столбиков в случае равных интервалов должна быть пропорциональна частотам.

Самостоятельно постройте интервальный вариационный ряд к примеру 2.

1. Какие данные можно извлечь из дискретного вариационного ряда?
2. Какие данные можно извлечь из интервального вариационного ряда?

Упражнения

А

7.1. Имеются данные о категориях учителей школы. Построить дискретный вариационный ряд распределения учителей по категориям (0 — без категории, 2 — вторая категория, 1 — первая категория, 3 — высшая категория): 2 3 2 0 1 0 1 2 3 0 2 3 2 1 0 0 3 2 3 0 1 2 2 1 2.

7.2. У 50 учащихся школы независимо друг от друга попросили назвать любую цифру. Получили следующие данные:

Таблица 12.1

2	1	3	5	3	5	3	8	7	1
5	7	1	5	3	8	0	4	3	7
9	3	6	9	1	9	6	2	1	3
8	9	0	7	5	1	3	1	3	9
2	6	5	3	9	2	5	1	7	5

Постройте таблицу распределения кратностей данного измерения и найдите объем выборки и моду.

7.3. Найдите среднее значение данных измерений в упражнении 7.2.

B

7.4. Постройте полигон (многоугольник распределения) по данным упражнения 7.3.

7.5. Имеются данные о массе учащихся 9-го класса (в кг): 30, 38, 48, 35, 44, 46, 30, 50, 40, 54, 36, 40, 42, 52, 39. Постройте интервальный вариационный ряд распределения учеников по массе, выделив 3 группы с равными интервалами. По каждой группе подсчитать общий размер массы.

C

7.6. По данным упражнения 7.5:
1) составьте вариационный ряд относительных частот;
2) составьте вариационный ряд относительных частот в процентах;
3) постройте полигон (многоугольник распределения) по кратности.

7.7. В специализированном магазине продается 50 видов спортивной обуви (табл. 12.2). Их цена распределена таким образом.

Таблица 12.2

Цена (тыс. тг.)	[2 — 3)	[3 — 6)	[6 — 9)	[9 — 12)	[12 — 15)	[15 — 18]
Количество видов	3	8	19	(*)	11	2

1) Найдите (*) в таблице.
2) Составьте вариационный ряд относительных частот.
3) Составьте вариационный ряд относительных частот в процентах.

ПОВТОРИТЕ

7.8. Найдите промежутки монотонности функции:

1) $y = 2 + 2x^2 - x^4$; 2) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$; 3) $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$.

7.9. Найдите асимптоты графика функции:

1) $y = x^2 - x^4$; 2) $y = \frac{2x^3}{1 - x^2}$;

3) $y = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}$; 4) $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$.

7.10. 1) Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, синусоидой $y = \sin x$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2) Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = 2x$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Варианта, вариационный ряд, ряд распределения, полигон, полигон частоты, выборка, генеральная совокупность, статистический ряд, частота, гистограмма, дискретный вариационный ряд, интервальный вариационный ряд.

§8. ОЦЕНКА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПО ВЫБОРОЧНЫМ ДАННЫМ

! Вы научитесь оценивать числовые характеристики случайных величин по выборочным данным.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Статистика, среднее значение, выборочная дисперсия, выборочное среднее отклонение

В ряде случаев при изучении случайной величины (генеральной совокупности) на основе выборочных данных достаточно вычислить оценки некоторых числовых (точечных) характеристик распределения. Числовые характеристики также вычисляются при определении параметров теоретических распределений на основе выборочных данных.

Точечной оценкой называют оценку, которая может быть представлена одним числом. Точечные оценки дают приближенное представление о величине соответствующего параметра генеральной совокупности.

Рассмотрим оценивание числовых характеристик случайной величины по выборочным данным.

Допустим дана таблица, в которой представлены варианты с относительной частотой, где $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ (табл. 13).

Таблица 13

Варианта x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Математическое ожидание, оцениваемое выборочным средним значением, вычисляется по формуле:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k). \qquad (1)$$

Характеристику, отвечающую за разброс чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ вокруг среднего значения $\bar{X}$, называют *дисперсией* и обозначают $\bar{D}$.

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле:

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\left[\left(x_1 - \bar{X}\right)^2 \cdot n_1 + \left(x_2 - \bar{X}\right)^2 \cdot n_2 + \ldots + \left(x_k - \bar{X}\right)^2 \cdot n_k\right]. \qquad (2)$$

При уменьшении объема выборки появляются погрешности, поэтому при $n \leqslant 30$ находится исправленная выборочная дисперсия и вычисляется по формуле:

$$\bar{\bar{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \bar{D}. \qquad (3)$$

Учитывая формулы (2) и (3), выборочное среднее квадратическое отклонение, соответственно, вычисляется по формулам:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{D}} \qquad (4)$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sqrt{\bar{\bar{D}}} \qquad (5)$$

Обычно выборочная дисперсия находится по формуле:

$$\bar{D} = \overline{X^2} - \bar{X}^2, \qquad (6)$$

где $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\left(x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_k^2 n_k\right)$.

Подсчет дисперсии и среднего квадратического отклонения "вручную" — довольно кропотливая работа. Для ее выполнения лучше использовать какую-либо компьютерную программу (например, Microsoft Office Excel). Если же проводить вычисления непосредственно, то во избежание путаницы и для контроля возможных ошибок лучше представлять результаты в виде таблицы.

Пусть дана таблица интервальной относительной частоты варианты для непрерывных случайных величин (табл. 14):

Таблица 14

Интервалы	$[x_0;x_1)$	$[x_1;x_2)$	$[x_2;x_3)$	...	$[x_{k-1};x_k]$
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Тогда учитывая, что $x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2}$, $x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2}$, ..., $x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$, берем следующую таблицу относительной частоты выборки (табл. 15):

Таблица 15

x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

ПРИМЕР Найдем выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение, используя данные таблицы интервальной относительной частоты вариант (табл. 16).

Таблица 16

Интервалы	[1;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16]
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

Решение. Составим таблицу относительной частоты выборки. Для этого найдем середины интервалов:

$x_1^* = (1+4) : 2 = 2,5$; $x_2^* = (4+8) : 2 = 6$; $x_3^* = (8+12) : 2 = 10$; $x_4^* = (12+16) : 2 = 14$.

Тогда таблица имеет вид (табл. 17):

Таблица 17

x_i^*	2,5	6	10	14
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

Теперь вычислим следующие величины:

$\bar{X} = 2,5 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,3 + 14 \cdot 0,2 = 8,1;$

$\overline{X^2} = \frac{1}{10} \cdot (2,5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 3 + 10^2 \cdot 3 + 14^2 \cdot 2) = 81,25;$

$\bar{D} = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = 81,25 - 8,1^2 = 81,25 - 65,61 = 15,64.$

Так как $n = 10$ и оно меньше 30, поэтому находим исправленную выборочную дисперсию:

$\bar{\bar{D}} = \frac{10}{9} \cdot 15,64 \approx 17,3778.$

Теперь, соответственно, вычисляем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$\bar{\bar{\sigma}} = \sqrt{\bar{\bar{D}}} = \sqrt{17,3778} = 4,1687.$

Ответ: $\approx 17,3778$; $\approx 4,1687$.

1. В чем отличие и сходство выборочной дисперсии и исправленной выборочной дисперсии?
2. От чего зависит выбор формулы для вычисления среднего квадратического отклонения?
3. Запишите формулу выборочной дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Упражнения

A

В упражнениях 8.1. — 8. 3. рассматриваются результаты одного и того же измерения (табл. 17.1). При изучении некоторой генеральной совокупности по результатам независимых наблюдений получены значения.

Таблица 17.1

9	13	10	10	12	8	11	14
11	12	11	8	13	11	14	13
12	11	10	10	9	9	10	12
9	13	14	11	11	12	11	11
12	13	9	13	8	12	8	11

8.1. 1) Составьте вариационный ряд наблюдений и найдите объем выборки.
2) Составьте вариационный ряд относительных частот.
3) Составьте вариационный ряд относительных частот в процентах.

8.2. 1) Найдите моду, медиану, математическое ожидание.
2) Постройте полигон (многоугольник распределения) относительных частот в процентах.

8.3. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

B

8.4. После урока по теме "Элементы математической статистики" на доске остался ответ "среднее значение равно 12" и таблица 17.2.

Таблица 17.2

Варианта	5	8	18	x
Кратность	15	11	19	5

1) Найдите число x;
2) найдите размах, моду и медиану распределения;

3) составьте вариационный ряд относительных частот распределения;
4) найдите дисперсию распределения.

8.5. После урока по теме "Элементы математической статистики" на доске остался ответ "среднее значение равно 9" и таблица 17.3.

Таблица 17.3

Варианта	4	8	12
Кратность	5	2	x

1) Найдите число x;
2) найдите размах, объем выборки, моду и медиану распределения;
3) составьте вариационный ряд относительных частот распределения;
4) найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

C

8.6. Найдите выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение, используя данные таблицы интервальной относительной частоты вариант (табл. 17.4):

Таблица 17.4

Интервалы	[0;6)	[6;12)	[12;18)	[18;24]
n_i	4	6	6	4
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

8.7. В таблице приведены сведения об активах 25 некоторых фирм РК (в млрд. тг) (табл. 17.5):

Таблица 17.5

54,2	55,2	64,7	90,0	85,3
74,0	85,4	75,3	68,4	78,4
82,3	40,0	64,9	48,8	68,9
58,4	65,2	54,6	80,0	45,3
64,0	75,8	77,4	63,2	75,2

Постройте интервальный вариационный ряд распределения активов фирм, по размеру активов, выделив 5 групп с равными интервалами.
1) Напишите вариационный ряд относительных частот.
2) Найдите выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение, используя данные таблицы интервальной относительной частоты вариант.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

8.8. Одним из основателей современной математической статистики является английский математик Карл Пирсон (1857—1936). С его именем связано развитие числовых оценок корреляции (зависимости) между различными статистическими данными. Разнообразны разделы математической статистики; среди них можно выделить описательную статистику, теорию оценивания, теорию проверки гипотез, последовательный статистический анализ.

Карл Пирсон
(1857—1936)

ПОВТОРИТЕ

8.9. Найдите значение выражения:

1) $\frac{97^3 + 23^3}{120} + 97 \cdot 23$; 2) $\frac{83^3 + 27^3}{110} - 83 \cdot 27$;

3) $\frac{71^2 - 51^2}{122} + 21$; 4) $\frac{85^2 - 44^2}{41} + \frac{136^2 - 128^2}{264}$.

8.10. Брошены две игральные кости. Найдите относительную частоту того, что значение произведения выпавших очков равно: 1) 4; 2) 5.

8.11. Найдите корни уравнения:

1) $x + 4\sqrt{x} = 12$; 2) $x - 13\sqrt{x} = -42$;

3) $x - 2 + 3\sqrt{x-2} = 28$; 4) $x - 3 = 2\sqrt{x+4} + 1$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Дан закон распределения случайной величины X:

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	?	0,15	?	0,15	?

Неизвестные относительные частоты пропорциональны числам 2:3:2. Тогда заполненная таблица вариационного ряда относительных частот имеет вид:

A)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

B)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,25	0,15	0,2

C)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,15	0,15	0,25	0,15	0,25

D)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,15	0,3	0,15	0,2

E)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,2	0,15	0,3

2. По вариационному ряду относительных частот найдите среднее значение:

X	2	4	5	7	8
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

A) 5,2; B) 4,95; C) 5,1; D) 5,3; E) 5,15.

3. По вариационному ряду относительных частот найдите дисперсию:

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

A) 5,3; B) 4,9; C) 5,1; D) 4,6; E) 4,8.

4. По вариационному ряду относительных частот задания 3 найдите среднее квадратическое отклонение:

A) 2,292; B) 2,191; C) 2,189; D) 2,176; E) 2,138.

5. В таблице приведены сведения о ценах на женские пальто в фирменном магазине (в тыс. тг):

34,2	35,2	34,7	50,0	25,3
24,0	25,4	25,3	28,4	18,4
32,3	40,0	34,9	18,8	48,9
18,4	25,2	24,6	30,0	25,3
10,0	35,8	17,4	23,2	35,2

Постройте интервальный вариационный ряд распределения женских пальто по стоимости, выделив 4 группы с равными интервалами. Напишите вариационный ряд относительных частот.

A)

Интервалы	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	9	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,36	0,32	0,12

B)

Интервалы	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	9	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,22	0,34	0,32	0,12

C)

Интервалы	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	6	8	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,24	0,32	0,32	0,12

D)

Интервалы	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	8	8	4
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,32	0,32	0,16

E)

Интервалы	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	8	9	3
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,32	0,36	0,12

6. По вариационному ряду относительных частот:

Интервалы	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
x_i^*	15	25	35	45
n_i	5	9	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,36	0,32	0,12

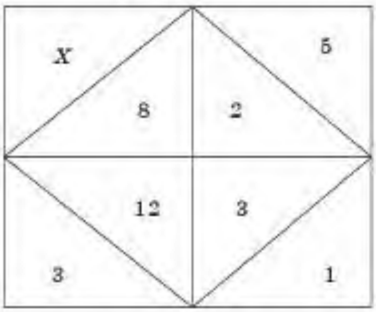
Найдите среднее значение и дисперсию:

A) $\bar{X} = 28{,}2$; $\bar{D} = 87{,}4$; B) $\bar{X} = 28{,}6$; $\bar{D} = 87{,}04$;
C) $\bar{X} = 26{,}6$; $\bar{D} = 85{,}4$; D) $\bar{X} = 27{,}4$; $\bar{D} = 87{,}24$;
E) $\bar{X} = 28{,}6$; $\bar{D} = 85{,}24$.

7. По вариационному ряду относительных частот задания 6 найдите среднее квадратическое отклонение:
A) $\bar{\sigma} \approx 9{,}3488$; B) $\bar{\sigma} \approx 9{,}3509$; C) $\bar{\sigma} \approx 9{,}2412$;
D) $\bar{\sigma} \approx 9{,}3295$; E) $\bar{\sigma} \approx 9{,}2326$.

Тестовые задания "Математическая грамотность"

8. Найдите значение X по заданной таблице:



A) 4; B) 6; C) 15; D) 2; E) 12.

9. Используя таблицу, задайте функцию формулой.

Таблица 18

x	1	2	3	4	5	...
y	5	2	−1	−4	−7	...

A) $y = -3x + 4$; B) $y = x^2 + 1$; C) $y = x^2 - 2$;
D) $y = -x^2 + 2$; E) $y = -3x + 8$.

10. На графике указано содержание водяного пара в 1 м^3 воздуха при разных температурах:

Таблица 19

Графа A	*Графа B*
Содержание водяного пара при 10°С	8 г

Выберите верное утверждение:

A) $A = B$; B) $A > B$; C) значение графы A на 3 г больше;
D) $A < B$; E) значение графы B на 2 г больше.

11. Настенные часы опаздывают за сутки на 3 минуты. Сегодня в полдень они показывали правильное время. Через сколько дней они вновь покажут правильное время:

A) 440; B) 460; C) 354; D) 240; E) 480?

12. Какое количество кирпича можно уложить в помещении, имеющем размеры 4 м × 1,2 м × 3 м, если размеры кирпича 25 см × 12 см × 8 см:

A) 3000; B) 4800; C) 5600; D) 6000; E) 7500?

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Выражение, степень числа, основание степени, показатель степени, корень числа, арифметический корень, свойства корня, рациональные и иррациональные числа.

СТЕПЕНИ И КОРНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

§ 9. КОРЕНЬ n-й СТЕПЕНИ ИЗ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА И ЕГО СВОЙСТВА

Вы ознакомитесь с понятием корня n-ой степени и арифметического корня n-ой степени.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Степень, показатель степени, корень, квадратный корень, арифметический квадратный корень, значение корня

Вы знаете: Квадратный корень из числа a означает такое число, квадрат которого равен числу a.

Также можно найти кубический корень (корень 3-й степени) из числа a. Кубический корень из числа a есть число, куб (3-я степень) которого равен числу a.

Сформулируем определение корня n-й степени из числа a, где n — любое натуральное число.

Определение. ***Корнем n-й степени из числа*** *a называется число b, n-я степень которого равна числу a.*

По определению

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ где } b^n = a. \qquad (1)$$

Здесь число n называется показателем корня и n — натуральное число, отличное от 1, a — подкоренным числом (выражением).

Например, корень третьей степени из числа 8 равен 2, так как $2^3 = 8$, т. е. $\sqrt[3]{8} = 2$.

Нахождение корня n-й степени из числа a называют *извлечением корня*.

Пусть корень n-й степени из числа a равен x, тогда по определению имеем уравнение $x^n = a$. Уравнение $x^n = a$ (где $a > 0$, $n \in N$, $n > 1$) в случае четного n имеет два корня: $-\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{a}$; в случае нечетного n — один корень $\sqrt[n]{a}$.

Например, числа 3 и -3 являются корнями уравнения $x^4 = 81$, поскольку $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$.

Определение. ***Арифметическим корнем n-й степени*** *из числа a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a.*

Вы узнаете свойства корня n-ой степени.

вы знаете: Свойства арифметического корня 2-й степени.

Эти же свойства имеют место и для случаев когда $n > 2$.

Если n и m — произвольные натуральные числа, a и b — любые неотрицательные действительные числа, тогда выполняются следующие равенства, выражающие основные свойства корня n-й степени.

1. *При извлечении корня из произведения можно извлечь корень той же степени из каждого множителя и полученные результаты перемножить* (***правило извлечения корня из произведения***):

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \qquad (1)$$

ПРИМЕР

1. Вычислим $\sqrt[3]{1000 \cdot 64 \cdot (-27)}$.

Решение. Используя формулу (1) получим:

$$\sqrt[3]{1000 \cdot 64 \cdot (-27)} = \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{-27} = 10 \cdot 4 \cdot (-3) = -120.$$

Ответ: -120.

Как сформулировать равенство (1) в обратном направлении (справа налево)?

2. *Чтобы извлечь корень из дроби (частного), нужно извлечь корень той же степени по отдельности из числителя и знаменателя и первый результат разделить на второй* (***правило извлечения корня из дроби***):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

Прочитайте равенство (2) справа налево и сделайте вывод.

ПРИМЕР

2. Вычислим 1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$.

Решение. Используя формулу (2) получим:

1) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$.

Ответ: 1) $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{2}{5}$.

3. *Правило сокращения показателя корня и показателя подкоренного выражения:*

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}. \qquad (3)$$

Попытайтесь самостоятельно сформулировать равенство (3).

ПРИМЕР

3. Упростим 1) $\sqrt[6]{8}$; 2) $\sqrt[12]{b^8}$.

Решение. Используя формулу (3) получим:

1) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$; 2) $\sqrt[12]{b^8} = \sqrt[3]{b^2}$.

Ответ: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[3]{b^2}$.

4. *При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное число, оставляя показатель корня без изменения* (***правило возведения корня в степень***):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \tag{4}$$

ПРИМЕР

4. Упростим 1) $\left(\sqrt{3}\right)^4$; 2) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5$.

Решение. Используя формулу (4) получим:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9$;

2) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = 2\sqrt[3]{4}$.

Ответ: 1) 9; 2) $2\sqrt[3]{4}$.

5. *При извлечении корня из корня нужно извлечь корень, показатель которого равен произведению показателей данных двух корней, оставив подкоренное число без изменения* (***правило извлечения корня из корня***):

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

ПРИМЕР

5. Вычислим $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$.

Решение. Используя формулу (5) получим:

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Ответ: 2.

Теперь перейдем к сравнению корней. Для того, чтобы выяснить какой из корней $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[m]{b}$ больше, приведем эти два корня к общему показателю и получим:

$$\sqrt[nm]{a^m} \text{ или } \sqrt[mn]{b^n}. \tag{5}$$

Далее остается сравнить между собой лишь выражения, стоящие под знаком корня, a^m и b^n и сделать соответствующий вывод.

ПРИМЕР

6. Сравним числа: 1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[5]{2}$.

Решение. 1) корни $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{4}$ приведем к общему показателю 6: $\sqrt{3} = \sqrt[2\cdot 3]{3^3} = \sqrt[6]{27}$ и $\sqrt[3\cdot 2]{4^2} = \sqrt[6]{16}$. Теперь сравним числа 27 и 16. Так как $27 > 16$, то $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$.

2) Корни $\sqrt{5}$ и $\sqrt[5]{2}$ приведем к общему показателю 10:

$\sqrt{5} = \sqrt[2\cdot 5]{5^5} = \sqrt[10]{3125}$ и $\sqrt[5]{2} = \sqrt[2\cdot 5]{2^2} = \sqrt[10]{4}$. Так как $3125 > 4$, имеем: $\sqrt{5} > \sqrt[5]{2}$.

Ответ: 1) $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt{5} > \sqrt[5]{2}$.

Указанные выше свойства (1)—(5) часто применяются и в обратном порядке (т. е. справа налево).

?

1. Какие значения могут принимать подкоренные выражения? Приведите примеры.
2. Всегда ли можно извлечь корень n-й степени из любого действительного числа? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

9.1. Найдите корень из произведения:

1) $\sqrt{49\cdot 64\cdot 100}$; 2) $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 125}$;

3) $\sqrt{a^4\cdot b^2\cdot c^6}$; 4) $\sqrt[4]{m^8\cdot k^{12}\cdot t^4}$.

9.2. Вычислите значение числового выражения:

1) $\sqrt{\dfrac{49}{225}}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot 125}{343}}$;

3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}\cdot 5\dfrac{1}{16}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{2}}$.

9.3. Упростите выражение:

1) $\sqrt[5]{32\cdot a^{10}}$; 2) $\sqrt[6]{128\cdot a^{12}b^{18}c^6}$;

3) $\sqrt[3]{64\cdot m^6n^9p^3}$; 4) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}x^8y^{12}}$.

9.4. Упростите:

1) $\sqrt{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$; 4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{11}}$;

5) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 6) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^5}}$; 7) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{mn}}$; 8) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$.

Выполните действия (9.5—9.6):

9.5. 1) $\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{486}}+\sqrt[3]{27\cdot 2^6}$; 2) $\sqrt[3]{216\cdot 7^3}-\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$;

3) $\sqrt[3]{27\cdot 4^3}-\sqrt{\frac{81}{256}}$; 4) $5-\left(3\cdot\sqrt[4]{\frac{16}{81}}+\sqrt[3]{0{,}125}\right)$.

9.6. 1) $1-\sqrt{2\frac{7}{9}}+0{,}3\cdot\sqrt[4]{256}$;

2) $2\cdot\sqrt{1\frac{11}{25}}-1\frac{2}{5}+0{,}7\cdot\sqrt[3]{0{,}216}$;

3) $11:(0{,}15\cdot\sqrt[3]{64000}-0{,}29\cdot\sqrt[3]{8000})$;

4) $2{,}5\cdot\sqrt[4]{10000}+\frac{3}{4}\sqrt{1{,}44}-2{,}09:\sqrt[3]{1{,}331}$.

B

Выполните действия (9.7—9.8):

9.7. 1) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$;

2) $\sqrt[3]{7-\sqrt{41}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{41}}$;

3) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2\cdot 0{,}2^{-2}$;

4) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$.

9.8. 1) $2\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{-125}+\sqrt[6]{64}$;

2) $5\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{16}-\sqrt[6]{729}$;

3) $\sqrt[3]{375}-\frac{2}{7}\cdot\sqrt[3]{1029}+0{,}75\sqrt[3]{192}-0{,}2\sqrt[3]{3000}$;

4) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{162}-0{,}2\sqrt[4]{1250}+0{,}75\sqrt[4]{512}-7\sqrt[4]{2}$.

9.9. Докажите равенство:

1) $\left(2\sqrt{175}-3\sqrt{28}+2\sqrt{63}\right)^2-60\sqrt[3]{1000}=100$;

2) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{150}+3\sqrt{24}-5\sqrt{54}\right)^2+15\sqrt[4]{625}=77$;

3) $\left(\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-2$;

4) $\sqrt{20{,}25}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[4]{0{,}1296}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{375}+\frac{1}{3}\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}=4{,}4$.

9.10. Вычислите:

1) $\sqrt{47-4\sqrt{33}}+\sqrt{47+4\sqrt{33}}$; 2) $\sqrt{31-6\sqrt{26}}-\sqrt{31+6\sqrt{26}}$;

3) $\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}\right):\sqrt[3]{7}$; 4) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

C

9.11. Упростите:

1) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; 2) $\sqrt[4]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt[3]{b^2\sqrt[4]{b}}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{a}{b}}}$; 4) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}\cdot\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$.

9.12. Вычислите:

1) $\sqrt{\frac{67^2-58^2}{\sqrt{53^2-28^2}}}$;

2) $\sqrt{\frac{\sqrt{113^2-112^2}}{19^2-11^2}}$;

3) $\left(3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{24}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

4) $\left(\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{54}\right)\cdot\left(5\sqrt[3]{4}-3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

9.13. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}-\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{\sqrt{5}}:\left(\sqrt{5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{200}\right)$; 4) $\sqrt{3\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{1125}:\left(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5\sqrt[3]{5}}\right)$;

5) $\sqrt{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[4]{3}}\right)^2$; 6) $\sqrt{5\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}}$;

7) $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{4\ldots}}}}$; 8) $\sqrt[5]{3\cdot\sqrt[5]{9\cdot\sqrt[5]{3\cdot\sqrt[5]{9\ldots}}}}$.

9.14. Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{\sqrt[9]{a^{-2}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{a^{-1}b^2\sqrt{ab}}}{\sqrt[3]{a^2b^{-2}\sqrt[4]{a^3b}}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{x^{-2}y\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{xy^{-1}\sqrt[5]{x^2y^{-1}}}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}}}$; 6) $\sqrt{\sqrt[4]{x}}\cdot x^{-1}\cdot y:(y^2x)$;

7) $\dfrac{\sqrt{b^2 \cdot \sqrt[4]{ab^2}}}{\sqrt[4]{\left(ab^{-2}\right)^3}} : (a \cdot b^{-2})^{-2}$;

8) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{b}}}{\sqrt[4]{\left(a^{-1}b^2\right)^{-3}}} \cdot \sqrt[12]{ab^{16}}$.

9.15. Докажите равенство:

1) $\dfrac{\sqrt[10]{27^4} \cdot \sqrt[5]{9}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^4 \cdot \sqrt{27}}} - \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{1\dfrac{91}{125}} = -1$;

2) $\dfrac{\sqrt{5\sqrt[4]{80}}}{\sqrt[8]{20} \cdot \sqrt[4]{50}} + \dfrac{2}{5}\sqrt[3]{1\dfrac{61}{64}} = 1{,}5$.

ПОВТОРИТЕ

9.16. Постройте график уравнения:

1) $2y - 2 + x^2 = 0$;

2) $y^2 + x^2 = 4$;

3) $x^2 - 2x + y^2 = 0$;

4) $y - \sqrt{9 - x^2} = 0$.

9.17. Является ли корнем уравнения $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$ число:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{2}$; 4) $-\sqrt{2}$?

9.18. Найдите значение выражения:

1) $4^3 \cdot 2^{-3} \cdot 32 : 8^3$;

2) $9^3 \cdot 3^{-3} \cdot 243 : 27^2$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Степень, основание степени, показатель степени, степень с натуральным показателем, степень с целым показателем, свойства степени с целым показателем, рациональное и иррациональное числа, приближенное значение числа, периодические и непериодические бесконечные десятичные дроби, корень n-й степени и его свойства.

§ 10. СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Вы ознакомитесь с понятием степени с рациональным показателем.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Степень, показатель степени, корень n-ой степени, рациональное число, выражение

ВЫ ЗНАЕТЕ: Способы возведения любого числа в натуральную степень, а также способы возведения любого, отличного от нуля числа ($a \neq 0$), в нулевую и целую отрицательную степень.

Теперь выясним как можно возвести любое неотрицательное число ($a \geqslant 0$) в положительную и отрицательную дробные степени, т. е. в любую рациональную степень.

Пусть a — неотрицательное число и требуется возвести его в дробную степень $\frac{m}{n}$. Вам известно равенство $(a^m)^n = a^{mn}$, т. е. правило возведения степени в степень.

В приведенном равенстве предположим, что $m = \frac{1}{n}$, тогда получим:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a.$$

Отсюда можно заключить, что $a^{\frac{1}{n}}$ является корнем n-й степени от числа a, т. е. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Из этого следует, что $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Заметим, что выражения $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ и $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ имеют одно и то же значение.

В самом деле: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ и $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Следовательно, $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, имеет место следующее равенство: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Определение 1. ***Степенью неотрицательного числа а с рациональным показателем*** $\frac{m}{n}$ *(где* $\frac{m}{n}$ *— несократимая дробь)* ***называется*** *значение корня n-й степени из числа* a^m.

Следовательно, по определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$.

ПРИМЕР **1.** Напишите степень с рациональным показателем в виде корня n-й степени: 1) $5^{\frac{2}{3}}$; 2) $3{,}7^{-0,7}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}}$.

Решение. 1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$; 2) $3{,}7^{-0,7} = 3{,}7^{-\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{3{,}7^{-7}}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}} = \sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Ответ: 1) $\sqrt[3]{25}$; 2) $\sqrt[10]{3{,}7^{-7}}$; 3) $\sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Степень с основанием, равным нулю, определяется только для положительного дробного показателя: если $\frac{m}{n} > 0$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$. Для отрицательных оснований степень с дробным показателем в школьном курсе математики не рассматривается.

Вы узнаете свойства степени с рациональным показателем.

Над степенями с рациональными показателями можно производить действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня по тем же правилам, как над степенями с целыми показателями и степенями с одинаковыми основаниями: 1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; 2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$; 3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$; 4) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$, где n, q — натуральные, m, p — целые числа.

Рассмотрим доказательство первого и второго свойств.

Докажем, что $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Доказательство. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, т. е. показатели степеней складываются так же, как и в случае умножения степеней с целыми показателями.

Докажем, что $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

Доказательство. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$, показатели степеней вычитаются так же, как и в случае деления степеней с целыми показателями.

ПРИМЕР

2. Вычислим: $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}}$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}}$.

Решение. 1) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}} = 16^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{16^9} = \sqrt[4]{2^{36}} = 2^9 = 512$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}} = 81^{\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$.

Ответ: 1) 5; 2) 512; 3) 3.

Вы научитесь применять свойства степени с рациональным показателем для преобразования алгебраических выражений.

ПРИМЕР

3. Вычислим: 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$; 3) $(0{,}15)^{\frac{8}{5}} : (0{,}15)^{-\frac{2}{5}}$.

Решение. 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 5^1 = 5$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; 3) $(0{,}15)^{\frac{8}{5}} : (0{,}15)^{-\frac{2}{5}} = (0{,}15)^{\frac{8}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)} = (0{,}15)^2 = 0{,}0225$.

Ответ: 1) 5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0,0225.

Вы ознакомитесь с понятием степени с иррациональным показателем.

вы знаете: Число $\sqrt{2}$ является иррациональным числом и его можно представить в виде бесконечной десятичной дроби: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ \ldots$. Любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби и любое иррациональное число — в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Пусть дано некоторое положительное иррациональное число α ($\alpha > 0$) и положительное рациональное число a ($a > 0$). Интересно узнать, что означает запись (степень) a^{α}. Рассмотрим три случая: $a = 1$, $a > 1$ и $0 < a < 1$.

1) Если $a = 1$, то полагают, что $1^{\alpha} = 1$;

2) Пусть $a > 1$. Возьмем любые два рациональные числа r_1 и r_2 такие, что $r_1 < \alpha$, $r_2 > \alpha$ (или $r_1 < \alpha < r_2$), тогда очевидно, что $a^{r_1} < a^{r_2}$.

В этом случае a^{α} будет такое число, которое заключено между a^{r_1} и a^{r_2}, т. е. $a^{r_1} < a^{\alpha} < a^{r_2}$, где r_1 — любое рациональное приближенное значение числа α, взятое с недостатком, r_2 — любое приближенное рациональное значение числа α, взятое с избытком. Теперь можно утверждать, что степень a^{α} означает такое число, которое *больше всякой степени* a^{r_1}, *но меньше всякой степени* a^{r_2}. Можно доказать, что такое число существует и оно единственно.

3) Пусть $0 < a < 1$ (и по-прежнему $r_1 < r_2$ или $r_1 < \alpha < r_2$). В этом случае, наоборот, степень a^{α} будет означать такое число, которое меньше всякой степени a^{r_1}, но больше всякой степени a^{r_2}, т. е. $a^{r_2} < a^{\alpha} < a^{r_1}$.

Рассмотрение указанных трех случаев дает нам возможность сформулировать следующее определение.

Определение 2. ***Если $a > 1$, то степенью этого числа с положительным иррациональным показателем*** *α называется число, которое больше всех степеней числа a с показателями, равными десятичным приближениям числа α с недостатком, но меньше всех степеней числа a с показателями, равными десятичным приближениям числа α с избытком.*

Определение 3. ***Если $0 < a < 1$, то степенью этого числа с положительным иррациональным показателем*** *α называется число, которое больше всех степеней числа a с показателями, равными десятичным приближениям числа α с избытком, но меньше всех степеней числа a с показателями, равными десятичным приближениям числа α с недостатком.*

Выше рассмотрена степень с положительным иррациональным показателем.

Пусть α отрицательное иррациональное число, основание a — любое положительное число. Тогда выражение a^{α} принимает тот же смысл, какой имеет степень с отрицательным рациональным показателем, поскольку $a^{\alpha} = \dfrac{1}{a^{-\alpha}}$.

ПРИМЕР

4. $10^{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{10^{\sqrt{2}}}$.

Примечание. Все свойства степени с рациональным показателем имеют место и для степени с иррациональным показателем.

?

1. В чем сходство и различие степени с целым показателем и степени с дробным показателем?
2. Всегда ли можно вычислить точное значение степени с дробным показателем? Ответ обоснуйте.
3. Справедливо ли утверждать, что любое действительное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби? Ответ обоснуйте.
4. Чем отличается степень с иррациональным показателем от степени с рациональным показателем?

Упражнения

А

10.1. Запишите следующие степени с дробными показателями в виде корней:

1) $11^{\frac{2}{3}}$; 2) $0{,}7^{-\frac{5}{4}}$; 3) $\left(\dfrac{3}{10}\right)^{0{,}75}$; 4) $(-21)^{1\frac{1}{5}}$;

5) $a^{-2{,}5}$; 6) $(b+1)^{1{,}5}$; 7) $(a-2b)^{3\frac{1}{2}}$; 8) $\left(x-y^2\right)^{-\frac{7}{4}}$.

10.2. Вычислите:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $16^{\frac{3}{4}}$; 3) $64^{-\frac{1}{2}}$; 4) $0{,}25^{-\frac{1}{2}}$;

5) $0{,}36^{\frac{1}{2}}$; 6) $(-27)^{-\frac{4}{3}}$; 7) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; 8) $32^{-\frac{1}{5}}$.

10.3. Запишите следующие корни в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt[3]{a^2}$; 2) $\sqrt[5]{b^3}$; 3) $\sqrt[3]{a^2+b^2}$; 4) $\sqrt[3]{x-y}$;

5) $\sqrt[5]{a^2b^3}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$; 7) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$; 8) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{a-b}}$.

10.4. Вычислите:

1) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{-\frac{3}{4}} \cdot 32^{-\frac{4}{5}} \cdot 2^3$; 2) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$;

3) $64^{\frac{2}{3}} : 64^{\frac{1}{2}}$; 4) $729^{\frac{1}{2}} : 729^{\frac{1}{3}}$.

10.5. Упростите:

1) $a^{1\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}}$; 2) $(x+y)^{\frac{4}{5}} : (x+y)^{\frac{2}{5}}$;

3) $a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$; 4) $b^{\frac{7}{12}} \cdot y^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}}$.

10.6. Найдите значение выражения:

1) $4^{1,5} - 9^{-0,5} + \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 2) $8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{4}\right)^{1,5}$;

3) $\left(125^{-\frac{1}{3}} - 36^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(16^{\frac{1}{4}} + 216^{\frac{1}{3}}\right)^0$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \cdot \left(6\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

10.7. Упростите:

1) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{6}}$; 2) $\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{10}}$; 3) $\left((a+x)^{\frac{2}{5}}\right)^{1\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

10.8. Вычислите:

1) $\left(49^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; 2) $\left(625^{-\frac{3}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(64^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

4) $\left(\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; 5) $\left(\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{15}}$; 6) $\left(\left(3\frac{6}{25}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

10.9. Сравните:

1) $12^{\frac{3}{4}}$ и $12^{\frac{3}{2}}$; 2) $8^{\frac{3}{2}}$ и $8^{\frac{4}{3}}$;

3) $\left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{5}{4}}$ и $\left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{6}{5}}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,5}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$.

B

Вычислите (10.10—10.11):

10.10. 1) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$; 2) $\left(\left(\sqrt[3]{6}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-3\sqrt{3}}$;

3) $8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{9}\right)^{1,5}$; 4) $\left(64^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\right)^{0} \cdot \left(343^{\frac{1}{3}} - 81^{\frac{1}{2}}\right)$.

10.11. 1) $-0,027^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} - 3^{-1} + (5,5)^{0}$;

2) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right)^{-0,5} - 7,5 - \left(\sqrt[4]{4^{3}}\right)^{2} - 2 \cdot (-2)^{4}$;

3) $(0,008)^{\frac{2}{3}} \cdot (0,64)^{0,5} : (0,04)^{-0,5} : (0,25)^{-1,5}$;

4) $0,125^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} + (1,2)^{0}$.

10.12. Упростите:

1) $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a^{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{7}{6}}}$; 2) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{4}{3}}}$; 3) $\dfrac{a - 16a^{0,5}}{5a^{0,25} + 20}$; 4) $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}y + xy^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$.

10.13. Докажите равенство:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^{3} = \left(4^{\sqrt{3}}\right)^{-4}$;

2) $\dfrac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}} \cdot \dfrac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}} = \left(6 \cdot 2^{19}\right)^{\sqrt{3}}$.

C

10.14. Вычислите:

1) $\left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} + 198^{0} - \left(9^{-0,4} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}\right)^{-2} + (0,0081)^{\frac{1}{4}}$;

2) $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + 27^{-\frac{2}{3}} \cdot (9^{0,5})^{5} \cdot 3^{-2} + \left(\left(\frac{7}{9}\right)^{3}\right)^{0} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

3) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$;

4) $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - \left(25^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{10}} + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right)^{0} : (36)^{-\frac{1}{2}}$;

5) $\left(4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(4^{-0,25} - \left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$;

6) $\left(\frac{1}{3}\left(0,027^{\frac{2}{3}} + 15 \cdot 0,0016^{\frac{3}{4}} + 0,1 \cdot 243^{\frac{3}{5}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

10.15. Сравните:

1) $\left(\frac{2}{9}\right)^{\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{2}{8}\right)^{\sqrt{5}}$;

2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)^{-\sqrt{3}}$;

3) $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{1,2}$ и $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1,2}$;

4) $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{3}\right)^{-2,8}$ и $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right)^{-2,8}$.

Упростите (10.16—10.17):

10.16. 1) $$\frac{\left(a^{\frac{1}{3}} - b\right)^{2} \cdot \left(\frac{b}{a^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b} + 1\right)}{\frac{b^{2}}{a^{\frac{2}{3}}} - \frac{b}{a^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{2}} - \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b}};$$

2) $$\frac{1}{a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{8}} + 1} + \frac{1}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{8}} + 1} - \frac{2\sqrt[4]{a} - 2}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} + 1}.$$

10.17. 1) $$\frac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{-\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{2}{3}}} - \frac{a+1}{a^{2} - 4a + 3};$$

2) $$\left(\frac{x^{\frac{4}{3}} + 8x^{\frac{1}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{xy} + 4y^{\frac{2}{3}}} - 2\sqrt[3]{xy}\right)^{6}.$$

10.18. Какое значение принимает выражение:

1) $\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ при $x=\left(1-a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

2) $\left(\dfrac{\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$ при $x=\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$, если

а) $n>m>0$; б) $m>n>0$; в) $m=n=1$.

10.19. Докажите равенство:

1) $\dfrac{x^{\frac{3}{p}}-x^{\frac{3}{q}}}{\left(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}\right)^2-2x^{\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{1}{q}}+x^{\frac{1}{p}}\right)}+\dfrac{x^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{q-p}{pq}}+1}=\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$;

2) $\left(\dfrac{9-4a^{-2}}{3a^{-\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{3}{2}}}-\dfrac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{3}{2}}}\right)^4-16a^2=0$.

ПОВТОРИТЕ

10.20. Найдите значение производной функции

$f(x)=\begin{cases}x^2-4x, \text{ при } x>2,\\ -x^2+2x, \text{ при } x<2.\end{cases}$ в точке:

1) -1; 2) 0; 3) 2; 4) 5.

10.21. Решите неравенство:

1) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-2}>0$; 2) $(x-2)^2(x+3)(x-4)<0$.

10.22. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_0^4 |x-2|dx$; 2) $\int\limits_2^6 |x-4|dx$;

3) $\int\limits_{-6}^0 |x+2|dx$; 4) $\int\limits_0^2 |x^2-2x|dx$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Выражение, область допустимых значений переменной, тождественное преобразование выражений, полный квадрат, тождество, доказательство тождеств, корень n-й степени и его свойства, степень с рациональным показателем и ее свойства.

§ 11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вы научитесь применять свойства корня n-ой степени для преобразования иррациональных выражений.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Степень, корень n-ой степени, иррациональное выражение, свойства, преобразование

ВЫ ЗНАЕТЕ: Способы вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня, освобождение дроби от иррациональности в знаменателе.

В предыдущих параграфах данной главы рассмотрены понятия о корне n-й степени, степени с рациональным показателем и ее свойствах. Теперь рассмотрим их использование при тождественных преобразованиях иррациональных выражений.

ПРИМЕР

1. Выполним указанные действия: $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})$.

Решение. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3} -$
$- 2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} = 21\cdot 2 - 14\sqrt{6} + 15\sqrt{6} - 10\cdot 3 = 12+\sqrt{6}$.

Ответ: $12+\sqrt{6}$.

ПРИМЕР

2. Выполним деление: $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx}$.

Решение. $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} : \sqrt[3]{bx} - x\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{bx} =$

$= 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}} - x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}} = 2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

Ответ: $2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

При преобразовании иррациональных выражений иногда необходимо извлечь корень n-й степени из выражения, значение которого может быть положительным или отрицательным.

При извлечении корня n-ой степени из выражения необходимо руководствоваться следующими правилами:

— если n — четное число, то значение корня берется со знаком модуля;

— если n — нечетное число, то значение корня берется без знака модуля.

ПРИМЕР

3. Вычислим значение выражения: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что $27+10\sqrt{2}=(\sqrt{2}+5)^2$; $27-10\sqrt{2}=(\sqrt{2}-5)^2$. Отсюда

$$\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2}=|\sqrt{2}+5|+|\sqrt{2}-5|=$$
$$=\sqrt{2}+5+5-\sqrt{2}=10.$$

Ответ: 10.

ПРИМЕР

4. Найдем значение выражения: $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$.

Решение. Первый способ. Возведем данное выражение в квадрат:

$$\left(\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}\right)^2=29-12\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{\left(29-12\sqrt{5}\right)\left(29+12\sqrt{5}\right)}+29+12\sqrt{5}=$$
$$=58-2\sqrt{841-144\cdot5}=58-2\sqrt{121}=58-22=36.$$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 6 или -6; так как $\sqrt{29+12\sqrt{5}}>\sqrt{29-12\sqrt{5}}$, то данное выражение отрицательно.

Второй способ. Подкоренное выражение является полным квадратом.

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot6\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}+3^2}=$$
$$=\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}=|2\sqrt{5}-3|=2\sqrt{5}-3.$$

Тогда наше выражение преобразуется следующим образом: $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3-(2\sqrt{5}+3)=-6$.

Ответ: -6.

ПРИМЕР

5. Найдем значение выражения:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}\text{ при } x=3.$$

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) переменной $(2\sqrt{2};+\infty)$. Вначале упростим данное выражение:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\left|x-2\sqrt{2}\right|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\left|x+2\sqrt{2}\right|}.$$

В области допустимых значений данного выражения выполняются оба неравенства $x-2\sqrt{2}>0, x+2\sqrt{2}>0$, поэтому можно записать, что $|x-2\sqrt{2}|=x-2\sqrt{2}$ и $|x+2\sqrt{2}|=x+2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\left|x-2\sqrt{2}\right|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\left|x+2\sqrt{2}\right|}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{x-2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{x+2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}.$$

Поскольку $x = 3$ лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо x его значение 3:

Тогда: $\dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1} = 2.$

Ответ: 2.

ПРИМЕР

6. Разложим на множители: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

Решение. Используем способ группировки: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) +$
$+ (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) =$
$= (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$.

Ответ: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

ПРИМЕР

7. Сократим дробь: $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(x+1-2\sqrt{x}\right)} =$

$= \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$.

ПРИМЕР

8. Докажем, что выражение

$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\dfrac{a\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}}{4}\right)^{-1}$ при допустимых значениях a не зависит от значения переменной a.

Решение. $\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\dfrac{a\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}}{4}\right)^{-1} = \dfrac{\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)^2 - \left(a-\sqrt{a^2-4}\right)^2}{a^2-\left(a^2-4\right)} \times$

$\times \dfrac{4}{a\sqrt{a^2-4}} = \dfrac{\left(a^2+2a\sqrt{a^2-4}+a^2-4-a^2+2a\sqrt{a^2-4}-a^2+4\right)\cdot 4}{\left(a^2-a^2+4\right)\cdot a\sqrt{a^2-4}} = \dfrac{4a\sqrt{a^2-4}\cdot 4}{4a\sqrt{a^2-4}} = 4,$

т. е. выражение действительно не зависит от значения переменной $a > 2$ или $a < -2$.

При преобразовании некоторых иррациональных выражений можно использовать способ *введения новой переменной.*

ПРИМЕР 9. Докажите тождество при допустимых значениях переменной: $\sqrt{\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\frac{2}{a}\right)^2+48}=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

Решение. Введем обозначение $a+\frac{2}{a}=t$. Тогда $a^2+\frac{4}{a^2}=t^2-4$.

В этом случае выражение в левой части примет вид:

$$\sqrt{(t^2-4)^2-8t^2+48}=\sqrt{t^4-8t^2+16-8t^2+48}=\sqrt{t^4-16t^2+64}=\sqrt{(t^2-8)^2}=|t^2-8|.$$

Перейдем к первоначальной переменной:

$$\left|\left(a+\frac{2}{a}\right)^2-8\right|=\left|a^2+4+\frac{4}{a^2}-8\right|=\left|a^2-4+\frac{4}{a^2}\right|=\left|\left(a-\frac{2}{a}\right)^2\right|=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2.$$

Ответ: $\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

Вы научитесь преобразовывать иррациональные выражения, содержащие корень вида $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

В отдельных случаях необходимо преобразовать иррациональное выражение, содержащее корень вида $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ (где A, B — положительные рациональные числа, B не является точным квадратом числа). Корень называют *сложным корнем* (*сложным радикалом*). Сложный корень $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ может быть преобразован таким образом:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (1)$$

Для доказательства равенства (1) возведем обе части равенства в квадрат, поскольку все корни арифметические.

Квадрат левой части: $\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2=A+\sqrt{B}$.

Квадрат правой части: $\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2=$

$$=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}+2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}=$$

$$=A+\sqrt{A^2-(A^2-B)}=A+\sqrt{B}.$$

Так как при возведении в квадрат левой и правой частей получили одинаковые выражения, то, следовательно, равенство (1) верно.

Аналогично можно получить равенство:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad (2)$$

Доказательство равенства (2) выполните самостоятельно.

ПРИМЕР **10.** Вычислим значение выражения: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Решение. Преобразуем второе слагаемое подкоренного выражения:

$2\sqrt{2}=\sqrt{2^2\cdot 2}=\sqrt{8}$. Тогда данное выражение примет вид $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, где $A=3$, $B=8$. Теперь, применяя формулу (1), имеем:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+1.$$

Ответ: $\sqrt{2}+1$.

1. В каких случаях удобно использовать каждый из указанных выше способов преобразования иррациональных выражений?
2. Есть ли отличия в преобразованиях рациональных и иррациональных выражений?
3. Какие известные знания были применены при доказательстве формулы (1)?

Упражнения

А

Выполните действия (11.1—11.2):

11.1. 1) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}+\frac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$;

3) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}-\frac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\frac{5}{3+2\sqrt{2}}+\frac{5}{3-2\sqrt{2}}$.

11.2. 1) $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}\cdot\sqrt[4]{6-\sqrt{20}}$; 2) $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt[4]{4-\sqrt{15}}$;

3) $\left(\sqrt{14}-3\sqrt{2}\right)^2+6\sqrt{28}$; 4) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2-10\sqrt{27}$.

11.3. Используя формулы сложных корней упростите выражение:

1) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; 3) $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; 4) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$;

5) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$; 6) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$; 7) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 8) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

11.4. Упростите выражение: $\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-3}-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+3}\right):\frac{2m}{m-6\sqrt{m}+9}$.

11.5. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{7}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{11}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{5}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 4) $\dfrac{6}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+5-\sqrt{15}}$.

B

11.6. Выполните действия:

1) $\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}$; 2) $\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}$;

3) $\left(2\sqrt{27}-\frac{1}{2}\sqrt{6}+4\sqrt{3}\right):\frac{1}{2}\sqrt{3}$; 4) $\left(5\sqrt{8}-\frac{1}{3}\sqrt{10}-2\sqrt{18}\right):\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

11.7. Используя формулы сложных корней (радикалов) упростите выражение: $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

11.8. Используя формулы сложных корней докажите, что значение выражения $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ при $x\geqslant 2$ не зависит от переменной x.

C

11.9. Докажите тождество:

1) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}=\dfrac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$, если $a\geqslant 2$;

2) $\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\right)^2=\dfrac{\sqrt[3]{x^{-2}}\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)}{2^{-1}}$,

если $x>1$.

11.10. Докажите, что при всех действительных значениях переменных значение выражения

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\left(\dfrac{x+\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}-\sqrt[4]{xy}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ неотрицательно и не зависит от x.

11.11. Упростите:

1) $\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}\right)^{-3}-\left(\left(x\sqrt{x}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{\sqrt{x^3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}-\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

3) $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{5}}-\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$; 4) $\sqrt{1+\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2}:\left(\left(x^2+1\right)\cdot\dfrac{1}{x}\right)$.

ПОВТОРИТЕ

11.12. 1) Длина пути между двумя городами по реке составляет 90 км. Теплоход на весь рейс туда и обратно затрачивает 7,5 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 20% от собственной скорости теплохода.

2) За полчаса катер проходит по течению реки такое же расстояние, что и за 40 мин против течения, причем 2 км против течения он проходит за 10 мин. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

11.13. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

1) $\frac{3x^3}{5y^3} : \frac{27x^5}{4y^4} \cdot \frac{45}{8y^2x^{-3}}$; 2) $\frac{25a(b-1)}{81d} : \frac{5cd^2}{27ab} : \frac{a^3(b-1)}{2c^3d^3}$.

11.14. Найдите период функции:

1) $y = \cos 4\pi x + \operatorname{ctg} 2\pi x$; 2) $y = \operatorname{ctg} 6x - 2\sin 3x$;

3) $y = \operatorname{tg} \pi x - 3\cos 2\pi x$; 4) $y = 4 - \cos\frac{\pi x}{3} + 5\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция; область определения функции; четные и нечетные функции и их графики; монотонная функция; периодическая функция; постоянная функция; линейная функция; функции вида $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ и их свойства; степень с действительным показателем; корень n-й степени и его свойства.

§ 12. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Вы ознакомитесь с понятием степенной функции с действительным показателем; научитесь строить график степенной функции с действительным показателем в зависимости от показателя степени.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

функция, график, степенная функция, показатель степени, действительное число

Определение. ***Степенной функцией*** *называется функция вида*

$$y = x^r,$$

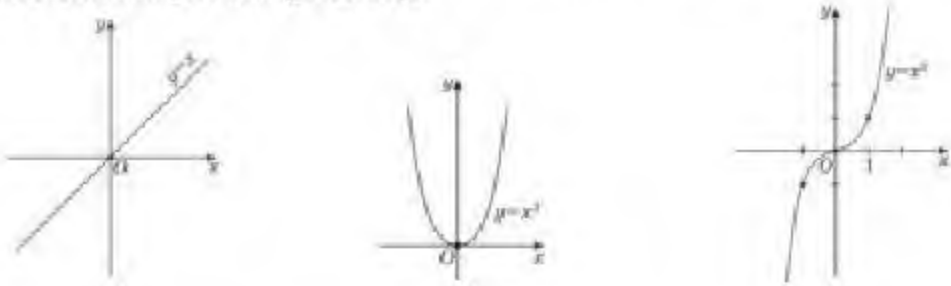
где x — *независимая переменная (аргумент)*, а r — *любое рациональное число.*

В зависимости от r существуют различные степенные функции.

Рассмотрим виды степенной функции в зависимости от показателя.

1. Если r — натуральное число, то имеем степенную функцию $y = x^n$ *с натуральным показателем.* Известно, что если $n = 1$, то получаем линейную функцию, графиком которой является прямая.

При $n = 2$ графиком функции $y = x^2$ является парабола, а если $n = 3$ — кубическая парабола (рис. 29).



1) 2) 3)

Рис. 29

Схематический график функции $y = x^{2n}$ имеет такой же вид как и график функции $y = x^2$, а график функции $y = x^{2n+1}$ имеет вид графика кубической параболы. Исходя из этого можно перечислить свойства функции $y = x^n$, $n \in N$ при $n = 2k$ и $n = 2k + 1$ (табл. 20.1).

Таблица 20.1

Свойства функции	$y = x^n$, $n \in N$	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Область определения	R	R
Множество значений	$[0; +\infty)$	R
Четность, нечетность	четная	нечетная
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Промежутки возрастания	$[0; +\infty)$	R
Промежутки убывания	$(-\infty; 0]$	—
Наибольшее значение	—	—
Наименьшее значение	$f(0) = 0$	—
Промежутки знакопостоянства	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ — $f(x) > 0$	$(-\infty; 0)$ — $f(x) < 0$; $(0; +\infty)$ — $f(x) > 0$

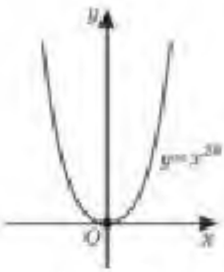


Рис. 30

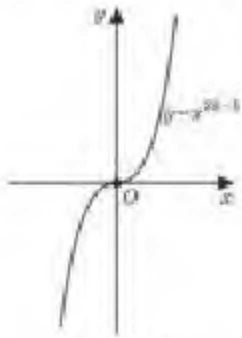


Рис. 31

Графики функции $y = x^n$, $n \in N$ при $n = 2k$ и при $n = 2k + 1$, соответственно, даны на рисунках 30, 31.

2. Если r — целое отрицательное число ($r = -n$, где n — натуральное число), то имеем $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ — *степенную функцию с целым отрицательным показателем*.

Рассмотрим пример когда n — четное и n — нечетное числа. Если $n = 2$, то имеем функцию $y = \frac{1}{x^2}$. График этой функции изображен на рисунке 32. Если $n = 1$, то имеем функцию $y = \frac{1}{x}$, графиком которой является гипербола (рис. 33).

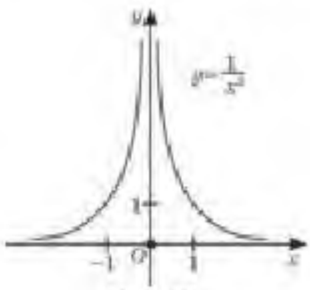


Рис. 32

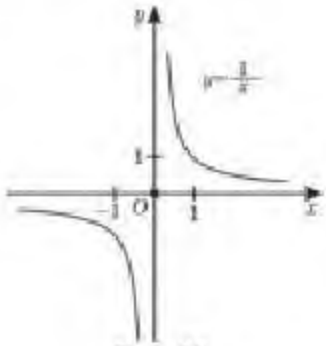


Рис. 33

Теперь, исходя из графиков функций $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = \frac{1}{x}$, перечислим свойства функции $y = \frac{1}{x^n}$ при $n = 2k$ и $n = 2k + 1$ (табл. 20.2).

Таблица 20.2

Свойства функции	$y = x^{-n}$, $n \in N$	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Область определения	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Множество значений	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Четность, нечетность	четная	нечетная
Нули функции	—	—
Промежутки возрастания	$(-\infty; 0)$	—
Промежутки убывания	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$
Наибольшее значение	—	—
Наименьшее значение	—	—
Промежутки знакопостоянства	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ — $f(x) > 0$	$(-\infty; 0)$ — $f(x) < 0$; $(0; +\infty)$ — $f(x) > 0$

Графики функции $y = x^{-n}$, $n \in N$ при $n = 2k$ и при $n = 2k + 1$ изображены, соответственно, на рисунках 34 и 35.

3. Если $r = \frac{1}{n}$, где n — натуральное число, больше единицы ($n > 1$), то имеем *степенную функцию с дробным показателем* $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

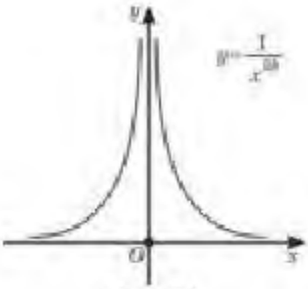


Рис. 34

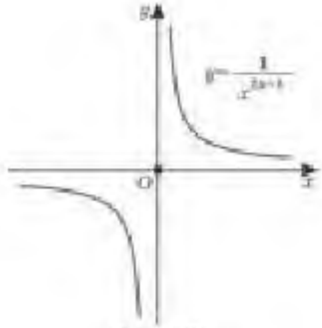


Рис. 35

В виде примера рассмотрим случай $n = 2$ и $n = 3$. Графики функций $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$ изображены, соответственно, на рисунке 36(1,2). Используя графики этих функций перечислим свойства функции $y = x^{\frac{1}{n}}$ при $n = 2k$ и $n = 2k + 1$ (табл. 21).

Таблица 21

Свойства функции	$y = x^{\frac{1}{n}}$, $n > 1$
	$n = 2k$ или $n = 2k + 1$
Область определения	$[0; +\infty)$
Множество значений	$[0; +\infty)$
Четность, нечетность	ни четная, ни нечетная
Нули функции	$x = 0$
Промежутки возрастания	$[0; +\infty)$
Промежутки убывания	—
Наибольшее значение	—
Наименьшее значение	$f(0) = 0$
Промежутки знакопостоянства	$(0; +\infty)$ — $f(x) > 0$

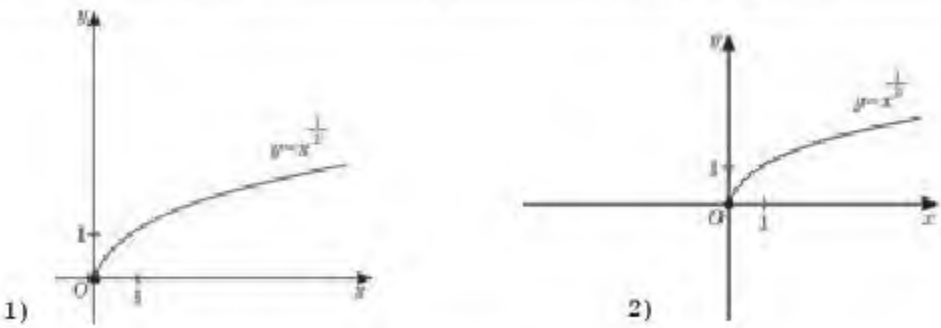


Рис. 36

Графики функции $y = x^{\frac{1}{n}}$, $n > 1$ при $n = 2k$ и при $n = 2k + 1$, соответственно, даны на рисунке 37 (1, 2).

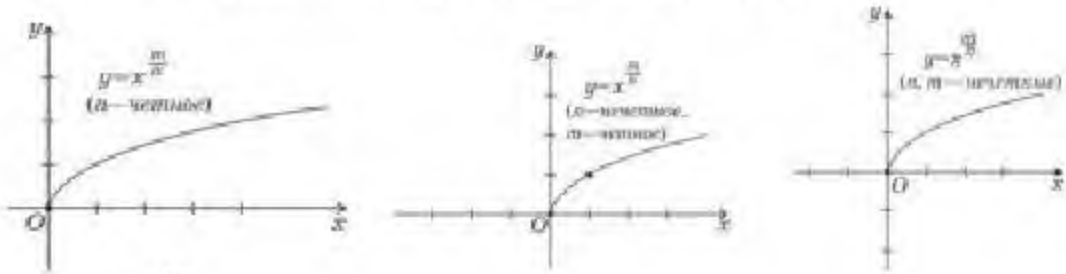
1) 2)

Рис. 37

4. Если $r = \frac{m}{n}$, где n, m — натуральные числа и $m < n$, то мы имеем *степенную функцию вида* $y = x^{\frac{m}{n}}$ *с положительным дробным показателем*, где $0 < \frac{m}{n} < 1$. Так как степенная функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ определена только при $x \geqslant 0$, то ее график имеет вид (рис. 38).

1) n — четное; 2) n — нечетное, m — четное; 3) n, m — нечетные.

Общий вид графика функции для каждого из вышеуказанных случаев, соответственно, дан на рисунке 38 (1, 2, 3).



1) 2) 3)

Рис. 38

5. Если $r = \frac{m}{n}$ (где n, m — натуральные числа) и $\frac{m}{n} > 1$, то вид графика степенной функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ является положительным дробным показателем (рис. 39).

6. Если $r = -\frac{m}{n}$, где n, m — взаимно простые натуральные числа, имеем *степенную функцию вида* $y = x^{-\frac{m}{n}}$ *с отрицательным дробным показателем.*

Рис. 39

Виды графиков функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$ рассматриваются также, как и для случаев степенной функции с положительным дробным показателем.

Общий вид графика $y = x^{-\frac{m}{n}}$ степенной функции с отрицательным дробным показателем для каждого случая изображен на рисунке 40 (1, 2, 3).

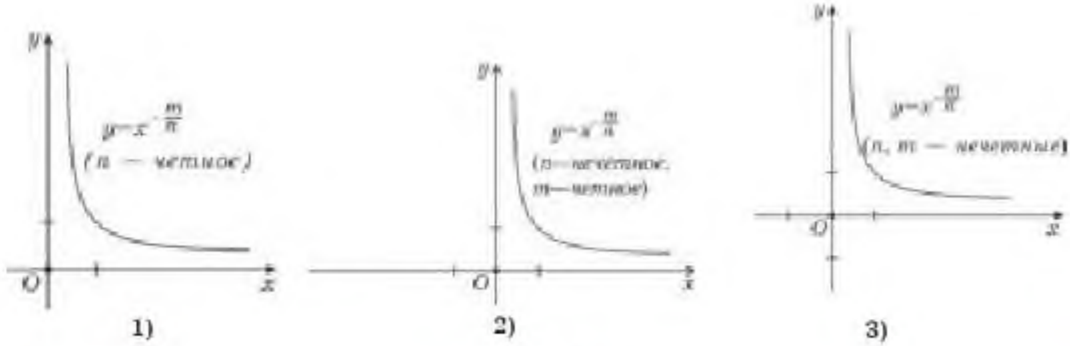


Рис. 40

ПРИМЕР 1. Определим свойства степенной функции $y = x^5$: область определения; нули функции; четность или нечетность; промежутки убывания и возрастания; наименьшее и наибольшее значения.

Решение. Вначале определим вид данной функции: $n = 5$, поэтому функция $y = x^5$ является степенной функцией с натуральным показателем. Следовательно, используем таблицу 1 для случая n — нечетное число.

Областью определения функции является множество всех действительных чисел, функция обращается в нуль при $x = 0$, функция нечетная, функция возрастает на всей числовой оси, функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

ПРИМЕР 2. Определим промежутки возрастания и убывания функции $y = x^{-4}$.

Решение. Функция $y = x^{-4}$ является функцией с целым отрицательным показателем, поэтому, согласно таблице 20.2 (случай $n = 2k$), данная функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывает на промежутке $(0; +\infty)$.

Остальные свойства функции $y = x^{-4}$ определите самостоятельно.

ПРИМЕР 3. Найдем область определения, наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{1}{7}}$.

Решение. Данная функция относится к степенной функции с дробным показателем, т. е. $y = x^{\frac{1}{n}}$. Областью определения данной функции является промежуток $[0; +\infty)$, функция не ограничена сверху, поэтому она не имеет наибольшего значения, а наименьшее значение равно нулю.

ПРИМЕР 4. Исследуем на четность или нечетность степенную функцию с положительным дробным показателем $y = x^{\frac{1}{9}}$.

Решение. Функция $y = x^{\frac{1}{9}}$ общего вида, так как степенная функция $y = x^{\frac{1}{9}}$ определена на множестве $[0; +\infty)$.

Остальные свойства функции $y = x^{\frac{4}{9}}$ постарайтесь определить самостоятельно.

ПРИМЕР

5. Определим промежутки знакопостоянства функции $y = x^{-\frac{5}{7}}$.

Решение. Функция $y = x^{-\frac{5}{7}}$ является степенной функцией с отрицательным дробным показателем. Показатель степени есть число $-\frac{5}{7}$, значит функция определена на $(0; +\infty)$ и принимает положительные значения.

Остальные свойства данной функции $y = x^{-\frac{5}{7}}$ постарайтесь определить самостоятельно.

1. От чего зависят виды степенной функции?
2. В каких случаях степенная функция будет ограничена сверху, а в каких — снизу?
3. Почему в степенной функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ дробь $\frac{m}{n}$ должна быть несократимой?

Упражнения

A

12.1. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^5$; 2) $f(x) = x^{-7}$; 3) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$;

4) $f(x) = x^{\frac{9}{10}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{4}{7}}$; 6) $f(x) = x^{\frac{11}{13}}$;

7) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$; 8) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$; 9) $f(x) = x^{-\frac{5}{7}}$.

12.2. Исследуйте на четность и нечетность функцию $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^{11}$; 2) $f(x) = x^{\frac{1}{9}}$; 3) $f(x) = x^{-5}$;

4) $f(x) = x^{\frac{11}{12}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{12}{13}}$; 6) $f(x) = x^{\frac{15}{17}}$;

7) $f(x) = x^{-\frac{7}{10}}$; 8) $f(x) = x^{-\frac{8}{13}}$; 9) $f(x) = x^{-\frac{11}{13}}$.

B

12.3. Определите промежутки знакопостоянства функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = x^{-4}$; 3) $f(x) = x^{\frac{1}{7}}$;

4) $f(x) = (1 + x)^{\frac{7}{9}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{5}{8}} + 2$; 6) $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 1$;

7) $f(x) = (3 - x)^{-\frac{5}{6}}$; 8) $f(x) = 1 - x^{-\frac{4}{7}}$; 9) $f(x) = (x + 2)^{-\frac{3}{5}}$.

12.4. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 1 + x^7$; 2) $f(x) = 2 - x^{-10}$; 3) $f(x) = 3 + x^{\frac{1}{9}}$;

4) $f(x) = 4 - x^{\frac{11}{16}}$; 5) $f(x) = 5 - x^{\frac{13}{15}}$; 6) $f(x) = (-x)^{\frac{11}{13}}$;

7) $f(x) = (-x)^{-\frac{7}{8}}$; 8) $f(x) = (-x)^{-\frac{8}{11}}$; 9) $f(x) = (-x + 0,5)^{-\frac{11}{17}}$.

12.5. Постройте схематически график функции $y = f(x)$ и найдите промежутки ее монотонности:

1) $f(x) = x^4 + 2$; 2) $f(x) = x^3 - 3$;

3) $f(x) = 1 - x^{\frac{1}{2}}$; 4) $f(x) = -1 + x^{-\frac{1}{3}}$.

C

12.6. Напишите не менее двух примеров четных и нечетных степенных функций: 1) с показателем, обратным натуральному числу; 2) с положительным дробным показателем; 3) с отрицательным дробным показателем.

12.7. Приведите примеры возрастающих степенных функций с дробными показателями для: 1) $x \in [0; +\infty)$; 2) $x \in (0; +\infty)$; 3) $x \in R$.

12.8. Приведите примеры убывающих степенных функций с дробными показателями для: 1) $x \in R$; 2) $x \in [0; +\infty)$; 3) $x \in (0; +\infty)$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

12.9. Знаки $\sqrt{\ }$ и $\sqrt[n]{\ }$ последовательно стали применять французский математик Альберт Жирар, немецкий философ и математик Гольфрид Вильгельм Лейбниц. Швейцарский математик Иоганн Бернулли вывел красивую формулу для определенного интеграла от функции x^x.

А. Жирар
(1595—1632)

И. Бернулли
(1667—1748)

ПОВТОРИТЕ

12.10. Решите относительно переменной x неравенство:

1) $\cos 3 \cdot (2x - 8) < 0$; 2) $\sin 2 \cdot \cos 6 \cdot (x^2 - 9) < 0$.

12.11. Методом понижения степени решите неравенство:

1) $\cos^2 x \geqslant 0{,}5$; 2) $\sin^2 x \geqslant 1$;
3) $\cos^2 x < 1$; 4) $\sin^2 2x < 1$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Производная, интеграл, степенная функция, формулы дифференцирования, таблица первообразных.

§ 13. ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вы научитесь применять правила нахождения производной степенной функции с действительным показателем.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, степенная функция, производная, первообразная, интеграл

ВЫ ЗНАЕТЕ: Формула $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, где n — натуральное число.

Докажем методом математической функции, что при любом целом n

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Доказательство. 1) При $n = 1$ формула (1) принимает вид $x' = 1$. Это равенство верно, поскольку, если рассмотрим нахождение производной функции $f(x) = x$, то имеем: $f(x) = x$, $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$.

Следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, откуда вытекает, что $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$.

Значит, при $n = 1$ формула (1) верна.

2) Предположим, что она верна при $n = k$, т. е. $(x^k)' = kx^{k-1}$.

3) Докажем, что она верна и при $n = k + 1$, т. е. $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$. Для этого представим x^{k+1} в виде произведения $(x^k \cdot x)$, и используем правило дифференцирования произведения. Тогда:

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)'.$$

Учитывая предположение о том, что $(x^k)' = kx^{k-1}$, а также $x' = 1$, получим: $(x^{k+1})' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k$, т. е. формула (1) верна при $n = k + 1$.

Следовательно, формула (1) верна для любого целого числа n.

Также для любого действительного числа α производная степенной функции $y = x^{\alpha}$ находится по формуле:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}. \qquad (2)$$

ПРИМЕР

1. Найдем производную функции: $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. $y' = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

ПРИМЕР

2. Составим уравнение касательной к графику функции $y = x^{-4}$ в точке с абсциссой $x = -1$.

Решение. Уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0, имеет вид: $y = y_0 + y'_0(x - x_0)$.

Найдем: $y(-1) = (-1)^{-4} = 1$; $y' = (x^{-4})' = -4x^{-5}$;

$y'(-1) = -4 \cdot (-1)^{-5} = 4$.

Тогда уравнение касательной: $y = 1 + 4(x + 1) = 4x + 5$.

Ответ: $y = 4x + 5$.

Вы научитесь находить интеграл от степенной функции с действительным показателем.

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Первообразная функции $f(x) = x^k$

$$F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \qquad (3)$$

где k — любое целое число и $k \neq -1$.

Аналогично нахождению производной степенной функции с действительным показателем можно доказать справедливость формулы (3) для случая степенной функции с действительным показателем, т. е. верность формулы:

$$\int x^{\beta}\,dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C,\ \beta \neq -1. \qquad (4)$$

ПРИМЕР

3. Найдем определенный интеграл функции $y = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ на промежутке от 1 до 4.

Решение. $\displaystyle\int_1^4 \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\left.\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right|_1^4 = -\frac{1}{2}\left|\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_1^4 = \left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_1^4 =$

$= \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

ПРИМЕР

4. Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^{-2}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $x = 4$, $x = 9$ (рис. 41).

Решение. В этом случае $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $g(x) = x^{-2}$, $a = 4$, $b = 9$.

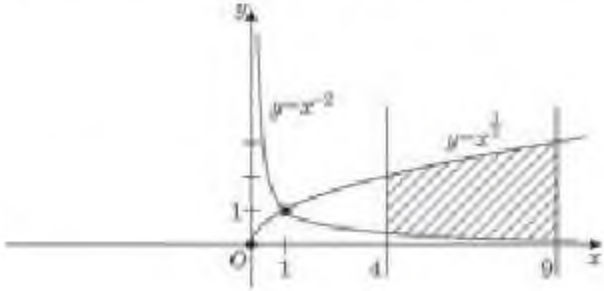


Рис. 41

Тогда: $S = \int\limits_4^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-2}\right)dx = \left(\frac{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_4^9 = \frac{2 \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{9} - \frac{2 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{4} =$

$= 18 + \frac{1}{9} - \frac{16}{3} - \frac{1}{4} = 12\frac{19}{36}.$

Ответ: $12\frac{19}{36}$ кв. ед.

?

1. Почему в формулах $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$ и $\int x^{\beta}dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C$, если α и β рациональные числа, причем $\alpha = \frac{m}{n}$ или $\beta = \frac{m}{n}$, то дробь $\frac{m}{n}$ обязательно должна быть несократимой?
2. Какие свойства степени были применены в примерах 1—4?

Упражнения

А

13.1. Найдите производные функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^9$; 2) $f(x) = x^{-1}$; 3) $f(x) = \frac{1}{7}x^7$; 4) $f(x) = x^{-\frac{11}{6}}$.

13.2. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = 1$:

1) $f(x) = 2x^4$; 2) $f(x) = x^{-3}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^{-3}}$; 4) $f(x) = x^{-2,5}$.

13.3. Найдите неопределенный интеграл функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{x^3}}$; 3) $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{5}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{7}{8}}$.

13.4. Вычислите производную функции $y = f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 9$;

3) $f(x) = -\frac{3}{x^2}$, $x_0 = 6$; 4) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $x_0 = 1$.

13.5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$, $x_0 = -1$.

13.6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 9$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -2$.

B

13.7. Найдите производную функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x\sqrt{x}$; 2) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$;

4) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$; 5) $f(x) = x\sqrt[3]{x^2}$; 6) $f(x) = \frac{x+5}{x^4}$.

13.8. Найдите неопределенный интеграл функции $y = f(x)$ и проверьте решение с помощью дифференцирования:

1) $f(x) = 5x^{-\frac{4}{5}}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$;

3) $f(x) = \frac{2x^{-1} + 3x}{4x^3}$; 4) $f(x) = (x^5 + x)^2$.

13.9. Вычислите:

1) $\int_1^9 (\sqrt{x} + x)dx$; 2) $\int_{-1}^1 (0,25x + 3)^3 dx$.

13.10. Докажите, что функция $F(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{6} \cdot \cos\frac{x}{6}$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{12}\cos\frac{x}{3}$.

13.11. Найдите первообразную для функции $f(x) = \left(\frac{x+3}{2}\right)^3$, график которой проходит через точку $M(0; 0)$.

13.12. Вычислите интеграл:

1) $\int_{-3}^{-2} 3x^{-2}dx$; 2) $\int_{1}^{32} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$; 3) $\int_{1}^{3} \left(x^3 + x\right)^2 dx$.

13.13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = -x^2 + 2x$, $y = -3$; 2) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$.

C

13.14. Найдите производные функции $y = f(x)$:

1) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{2x}}$; 3) $y = \frac{1 + 2x - x^4}{x\sqrt{x}}$; 4) $y = x^{-\sqrt{7}}$.

13.15. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^{-\frac{3}{5}} + 2x^2$ в точке с абсциссой $x = 32$.

13.16. Найдите общий вид первообразных для функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \sqrt[3]{2x\sqrt{3x}} + \pi$; 2) $f(x) = \frac{3x^3 - x + 1}{\sqrt{x}} - \sqrt{2}$.

13.17. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int \frac{dx}{7\cos^2(3 - x)}$; 2) $\int \frac{\cos^2 x dx}{1 - \sin x}$.

13.18. Найдите первообразную для функции $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$, график которой проходит через точку $M(1; 1,5)$.

13.19. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{1}^{8} \frac{5dx}{2x^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\int_{4}^{9} \frac{3}{x^{-\frac{1}{2}}}dx$; 3) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt[4]{2x - 1}dx$.

13.20. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 5$, $y = \frac{1}{x^2}$ $(x \geqslant 0)$;

2) $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, $x = -1$, $x = 0$.

13.21. При каком значении a, где $a \in (1; 2)$ площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, делится пополам прямой $x = a$?

ПОВТОРИТЕ

13.22. Решите уравнение:

1) $\frac{x}{x - 2} - \frac{7}{x + 2} - \frac{8}{x^2 - 4} = 0$; 2) $\frac{2}{x} + \frac{x^2 + 8}{x^2 - 4x} + \frac{6}{4 - x} = 0$;

3) $\frac{4x-14}{x-3}=x-2;$ 4) $\frac{x^2-2x}{x-1}-2=\frac{2x-1}{1-x}.$

13.23. Найдите значение выражения $4x^2+\frac{1}{4x^2}$, если:

1) $2x+\frac{1}{2x}=3;$ 2) $2x-\frac{1}{2x}=5;$

3) $2x+\frac{1}{2x}=2;$ 4) $2x-\frac{1}{2x}=4.$

13.24. Постройте график функции $y=|x^2-2x-8|$. Найдите:

1) промежутки монотонности функции;
2) ось симметрии графика функции;
3)значения параметра p, при которых уравнение $p=|x^2-2x-8|$ имеет четыре корня.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислите $\left(\frac{125}{512}\right)^{-\frac{1}{3}}$:

A) 0,8; B) $\frac{5}{8}$; C) $\frac{5}{4}$; D) 1,6.

2. Упростите выражение $\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}}$ и найдите значение при $x=0{,}008$:

A) $\frac{3}{2}$; B) $\frac{1}{6}$; C) $\frac{2}{3}$; D) $\frac{3}{4}$.

3. Упростите выражение $\left(\frac{b^{\frac{1}{3}}}{b-1}+\frac{b}{b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}\right)\cdot\left(b^{\frac{1}{3}}-1\right)\cdot\frac{b-1}{b^{\frac{1}{3}}}$:

A) b; B) $-b$; C) $b^{\frac{2}{3}}-1$; D) $b^{\frac{1}{3}}-1$.

4. Представьте выражение $\left(k^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(k^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}-(kq)^{\frac{1}{3}}\right)$ в виде алгебраической суммы:

A) $k-q$; B) $k+q$; C) k^3-q^3; D) k^3+q^3.

5. Вычислите $\frac{27^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{625^{-\frac{1}{4}}}$:

A) 10; B) $\frac{1}{5}$; C) 5; D) $-\frac{1}{5}$.

6. Вычислите $f'(8)$, если $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 5$:

A) $-\frac{1}{3}$; B) $6\frac{1}{3}$; C) $\frac{16}{3}$; D) $\frac{1}{3}$.

7. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^{-\frac{1}{3}} + 1$ в точке с абсциссой $x = \frac{1}{27}$:

A) $y = 27x + 5$; B) $y = -27x + 5$;

C) $y = -27x + 4$; D) $y = -9x + 5$.

8. Найдите точек экстремума функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x$:

A) $x_{min} = 1$; B) $x_{min} = 1$; $x_{max} = -1$;

C) нет точек экстремума; D) $x_{max} = 1$.

9. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x$:

A) на промежутке $[0; 4]$ возрастает, на промежутке $[4; +\infty)$ убывает;
B) на промежутке $(-\infty; 4)$ возрастает, на промежутке $(4; +\infty)$ убывает;
C) на промежутке $[0; 4]$ убывает, на промежутке $[4; +\infty)$ возрастает;
D) на промежутке $(-\infty; 4)$ убывает, на промежутке $(4; +\infty)$ возрастает.

10. Вычислите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{5}{2}}$ на отрезке $[1; 4]$:

A) 1; 0; B) 32; 0; C) 16; 32; D) 32; 1.

11. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^4}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$:

A) $\frac{28}{81}$; B) $\frac{26}{81}$; C) $\frac{8}{27}$; D) $\frac{29}{81}$.

12. Вычислите $\int\limits_0^{64}\left(\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)dx$:

A) 578; B) 576; C) 656; D) 568.

13. Вычислите объем тела, полученного вращением графика функции $y = \frac{3}{\sqrt{10}}x^{\frac{1}{3}}$ вокруг оси Ox от точки $x = 0$ до точки $x = 1$:

A) π; B) $\frac{9}{10}\pi$; C) $\frac{10}{9}\pi$; D) $\frac{27}{50}\pi$.

14. Цена на школьные портфели была снижена на 80 тенге. Изначально портфель стоил 800 тенге. На сколько процентов нужно поднять новую цену портфеля, чтобы вернуться к старой цене в 800 тг (ответ округлить до целых):

A) 10% ; B) 11% ; C) 12% ; D) 13% ; E)15% ?

15. Большой куб, окрашенный в зеленый цвет, распилили на 64 маленьких одинаковых кубика. Сколько маленьких кубиков не имеют окрашенных граней:

A) 6; B) 18; C) 16; D) 24; E) 8?

16. Азамат, Даурен и Абай играют в баскетбол. Каждый из них сделал по 16 бросков. Заполните таблицу 22 и найдите значения X и Y:

Таблица 22

	Количество попаданий	Процент попаданий
Азамат	8	50%
Даурен	12	Y%
Абай	X	25%

A) X=4, Y=75; B) X=4, Y=65; C) X=6, Y=75;
D) X=4, Y=50; E) X=8, Y=50.

17. Заработок официанта составляет 15% от заказа клиента. Заполните таблицу 23 обслуживания клиентов официантом за день.

Таблица 23

Клиент	Заказ на сумму	Заработок официанта
Первый клиент	9 400 тг	
Второй клиент	10 200 тг	
Третий клиент	5 400 тг	
Четвертый клиент	7 600 тг	
Пятый клиент	9 200 тг	
Шестой клиент	12 200 тг	

Найдите заработок официанта за день:

A) 7941 тг; B) 8461 тг; C) 7351 тг;
D) 8240 тг; E) 8271 тг.

18. Через точку $M(1;\ 0)$ проведены касательные к графику функции $y = x^2 - 2x + 2$. Найдите координаты точек касания:

A) (0; 1) и (2; 2);
B) (0; 2) и (2; 0);
C) (0; 3) и (2; 3)
D) (0; 2) и (2; 2);
E) (1; 1) и (3; 3).

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Уравнение, корень уравнения, решение уравнения, система уравнений, решение системы уравнений, область допустимых значений (ОДЗ) переменной, тождественное преобразование выражения, равносильные уравнения, равносильные системы уравнений, корень n-й степени, свойства корня n-й степени.

ГЛАВА IV ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 14. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Вы ознакомитесь с понятием иррационального уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, иррациональное уравнение, область допустимых значений переменной, посторонний корень, решение уравнения

вы знаете: Способы решения рациональных уравнений и их систем.

Теперь перейдем к рассмотрению иррациональных уравнений и их систем.

Определение. ***Иррациональным уравнением*** *называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, или под знаком возведения в дробную степень.*

Так, иррациональными являются уравнения:

$$\sqrt{x+3} = 2x - 1; \qquad \sqrt{x-1} - 12\sqrt[3]{x} = 3;$$

$$2x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0; \qquad (2x - x)^{\frac{1}{3}} = (x+6)^{\frac{1}{4}} + 7x.$$

Для того, чтобы решить иррациональное уравнение, вначале нужно обратить внимание на вид данного уравнения. Это позволяет выяснить, есть ли смысл решать уравнение вообще, а если да, то каким способом. К примеру, нет смысла приступать к решению уравнения $\sqrt[4]{x+3} = -2$, так как значение арифметического корня не может быть отрицательным числом.

Вы расширите знания по нахождению области допустимых значений переменной.

При решении иррациональных уравнений корни (радикалы), входящие в уравнения, всегда рассматриваются как арифметические корни. Для выяснения этого факта нужно определить ОДЗ переменной, содержащейся под знаком корня.

Вы научитесь решать иррациональные уравнения методом возведения обеих частей уравнения в n-ю степень.

Общий метод решения иррациональных уравнений заключается в следующем:

а) если иррациональное уравнение содержит только один радикал, то нужно преобразовать уравнение так, чтобы в одной его части оказался только этот радикал. Затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, чтобы получилось рациональное уравнение;

б) если в иррациональном уравнении содержится два или более радикала, то сначала изолируется один из радикалов, затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень и повторяют операцию возведения в степень до тех пор, пока не получится рациональное уравнение.

При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень иногда получается уравнение, не равносильное данному. Поэтому необходимо проверить, удовлетворяют или не удовлетворяют найденные значения переменной искомому уравнению. Проверка является составной частью решения, поскольку некоторые найденные значения переменной могут не удовлетворять исходному уравнению.

Такие значения переменной называют посторонними корнями.

Рассмотрим примеры решения иррациональных уравнений.

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $\sqrt{x+2} = x$.

Решение. Возведем обе части уравнения $\sqrt{x+2} = x$ в квадрат. Тогда получим: $x + 2 = x^2$. Квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ имеет корни: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Проверка. 1) $x = 2$, тогда $\sqrt{2+2} = 2$; $2 = 2$ — верно.

2) $x = -1$, тогда $\sqrt{-1+2} = -1$; $1 = -1$ — неверно.

Следовательно, $x = -1$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $(x - 5)(x + 2)\sqrt{x-7} = 0$.

Решение. Найдем ОДЗ переменной $x - 7 \geq 0$ или $x \geq 7$. Следовательно, $x \in [7; +\infty)$. Исходное уравнение может быть заменено совокупностью уравнений $x - 5 = 0$, $x + 2 = 0$, $\sqrt{x-7} = 0$.

Решая эти уравнения получим: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 7$ (x_1 и x_2 не входят в область допустимых значений данного уравнения).

Ответ: 7.

ПРИМЕР

3. Решим уравнение $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x$.

Решение. Уравнение содержит всего один радикал; оставляем его в левой части равенства, или, как говорят, отделяем радикал, перенося единицу в правую часть: $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$. Возведем обе части полученного уравнения в квадрат и получим:

$x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2$ или $x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$.

Отсюда $3x^2 - 9x = 0$, $x^2 - 3x = 0$, $x(x-3) = 0$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$.

Проверка. $\sqrt{0^2 + 5 \cdot 0 + 1} + 1 \neq 2 \cdot 0$. Следовательно, первый корень $x = 0$ не удовлетворяет уравнению и является посторонним корнем (этот корень не принадлежит ОДЗ переменной, что легко проверить). Таким же путем убеждаемся, что второй корень $x_2 = 3$ удовлетворяет заданному уравнению.

Ответ: 3.

Вы научитесь решать иррациональные уравнения методом замены переменной.

При решении иррациональных уравнений в отдельных случаях используется *способ введения новых переменных*.

Этот способ применяется с целью приведения иррационального уравнения сложного вида к более простому.

ПРИМЕР

4. Решим уравнение $\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0$.

Решение. Обозначим: $y = \sqrt[8]{x}$. Получим уравнение: $y^2 + y - 2 = 0$, которое имеет корни: $y_1 = 1$, $y_2 = -2$.

Следовательно, $\sqrt[8]{x} = 1$ или $\sqrt[8]{x} = -2$. Корень первого уравнения: $x_1 = 1$. Второе уравнение не имеет корней, так как $\sqrt[8]{x} > 0$. Таким образом, решением исходного уравнения является число 1.

Ответ: 1.

ПРИМЕР

5. Решим уравнение $\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x + 1, \text{ или } -x\sqrt{x^2 - 1} = x(x-2).$$

Было бы ошибкой "сократить" обе части уравнения на x, так как при этом можно потерять корень, поэтому преобразуем:

$$-x\sqrt{x^2 - 1} - x(x-2) = 0, \text{ или } -x\left(\sqrt{x^2 - 1} + (x-2)\right) = 0,$$

$$-x = 0 \text{ или } \sqrt{x^2 - 1} + x - 2 = 0,$$

$$x = 0 \text{ или } \sqrt{x^2 - 1} = -x + 2.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ отсюда } x = \frac{5}{4}.$$

Проверка. Найденные значения переменной x подставляем в исходное уравнение. Выясняем, что $x = 0$ не удовлетворяет данному уравнению, а при $x = \frac{5}{4}$ получаем верное числовое равенство. Следовательно, корнем исходного уравнения является число $\frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

ПРИМЕР

6. Решим уравнение $(x+34)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{x-3} = 1$.

Решение. Вначале степень с дробным показателем запишем в виде корня. Тогда получим уравнение $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$. Последнее уравнение приведем к виду: $\sqrt[3]{x+34} = 1 + \sqrt[3]{x-3}$ и возведем обе части уравнения в третью степень:

$$x + 34 = 1 + 3\sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{(x-3)^2} + x - 3,$$

$$36 = 3\sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{(x-3)^2} \text{ или } \sqrt[3]{(x-3)^2} + \sqrt[3]{x-3} - 12 = 0.$$

Обозначив $y = \sqrt[3]{x-3}$, получим квадратное уравнение $y^2 + y - 12 = 0$, которое имеет корни: $y_1 = 3$, $y_2 = -4$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\sqrt[3]{x-3} = 3 \text{ или } \sqrt[3]{x-3} = -4.$$

Возведя обе части уравнений в третью степень соответственно получаем: $x - 3 = 27$ или $x - 3 = -64$; отсюда, $x = 30$ или $x = -61$.

При проверке убеждаемся, что оба значения x удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: 30; −61.

Вы научитесь решать системы иррациональных уравнений.

Определение. *Система уравнений, содержащая иррациональные уравнения, называется* ***системой иррациональных уравнений.***

При решении системы иррациональных уравнений в основном используются способы решения рациональных уравнений и систем рациональных уравнений.

ПРИМЕР

7. Решим систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35 \end{cases}$.

Решение. Вначале введем новые переменные: $\sqrt[3]{x} = a$, $\sqrt[3]{y} = b$. Тогда данная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a + b = 5, \\ a^2 - ab + b^2 = 7. \end{cases}$$

Решая методом подстановки последнюю систему уравнений получим $a = 2$, $b = 3$ и $a = 3$, $b = 2$. Перейдя к замене $\sqrt[3]{x} = a$ и $\sqrt[3]{y} = b$, имеем $\sqrt[3]{x} = 2$, $\sqrt[3]{y} = 3$ и $\sqrt[3]{x} = 3$, $\sqrt[3]{y} = 2$. Чтобы найти значения переменных x и y, каждое полученное иррациональное уравнение возводим в третью степень.

Тогда: $x_1 = 8$, $y_1 = 27$ и $x_2 = 27$, $y_2 = 8$.

Проверка: 1) $x = 8$ и $y = 27$, тогда $\begin{cases} \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 5, \\ 8 + 27 = 35; \end{cases}$

2) $x = 27$ и $y = 8$, тогда $\begin{cases} \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = 5, \\ 27 + 8 = 35. \end{cases}$

Все найденные значения переменных x и y удовлетворяют системе уравнений.

Ответ: (8; 27) и (27; 8).

1. Какие уравнения могут быть получены в ходе решения иррационального уравнения?
2. Почему при решении иррационального уравнения уделяется внимание области допустимых значений переменной?

Упражнения

А

Решите уравнения (**14.1—14.4**):

14.1. 1) $\sqrt{x} = 3$; 2) $\sqrt{x-3} = 2$;

3) $\sqrt{x} = 2 - x$; 4) $\sqrt{x-2} = \frac{x}{3}$.

14.2. 1) $\sqrt[3]{x+2} = 3$; 2) $\sqrt[4]{x-3} = 2$;

3) $3 + \sqrt{x+3} = x$; 4) $5 + \sqrt{x+1} = x$.

14.3. 1) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$; 2) $x + \sqrt{2x} - 4 = 0$;

3) $(x^2 - 4) \cdot \sqrt{x+5} = 0$; 4) $(x^2 - 9) \cdot \sqrt{x+5} = 0$.

14.4. 1) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0$; 2) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$;

3) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 10 = 0$; 4) $\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} - 18 = 0$.

14.5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ x + y = 13. \end{cases}$

B

Решите уравнения (14.6—14.10):

14.6. 1) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$; 2) $\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$;

3) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-2}+2$; 4) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$.

14.7. 1) $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$; 2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;

3) $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-16}=1$; 4) $\sqrt{3x+1}-2-\sqrt{x+1}=0$.

14.8. 1) $\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=1$; 2) $\sqrt[3]{5-\sqrt{x+15}}=1$;

3) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$; 4) $\dfrac{2x-5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}$.

14.9. 1) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=x+2$; 2) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=27-x$;

3) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{x+6}{(x-6)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{3x+2}$.

14.10. 1) $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$; 2) $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2$;

3) $\sqrt{3x^2+13}-\sqrt[4]{3x^2+13}=2$; 4) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

Решите систему уравнений (14.11—14.12):

14.11. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=72,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6.\end{cases}$

14.12. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4.\end{cases}$

C

Решите уравнения (14.13—14.15):

14.13. 1) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$; 2) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$;

3) $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x+17}=1$; 4) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

14.14. 1) $\sqrt[5]{\frac{x-3}{5-x}} + \sqrt[5]{\frac{5-x}{x-3}} = 2;$

2) $\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}} = 4;$

3) $\sqrt[5]{(5x+2)^3} - \frac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}} = 6;$

4) $\frac{(5-x)^{1,5} + (x-3)^{1,5}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2.$

14.15. 1) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \frac{36}{\sqrt{x-9}};$ 2) $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}};$

3) $\sqrt{2+x} + \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{2+x}};$ 4) $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

Решите системы уравнений (**14.16–14.18**):

14.16. 1) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ x \cdot y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 10. \end{cases}$

14.17. 1) $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 0. \end{cases}$

14.18. Выясните, являются ли равносильными уравнения:

1) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 2$ и $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = 2;$

2) $\sqrt{x^2-3x+2} = 4$ и $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-1} = 4;$

3) $\sqrt{x-5} = x$ и $x - 5 = x^2;$

4) $\sqrt[3]{2x+1} = x$ и $2x + 1 = x^3$

ПОВТОРИТЕ

14.19. Решите однородное уравнение:

1) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0;$

2) $3\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$

14.20. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 16}$;

2) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 8}}$.

14.21. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 < 0, \\ |x| > 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0, \\ |x| < 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 > 0, \\ |x| > 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2 + 5x - 8 \geq 0, \\ |x| \leq 5. \end{cases}$

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Неравенства, свойства неравенств, равносильные неравенства, система неравенств, функция, свойства функции, график функции, корень n-й степени из действительного числа, иррациональное уравнение, способы решения иррационального уравнения.

§ 15. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Вы ознакомитесь с понятием иррационального неравенства; научитесь решать иррациональные неравенства.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Неравенство, иррациональное неравенство, область допустимых значений переменной, система неравенств, равносильность, решение неравенства

Определение. *Неравенство, содержащее переменную под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень, называется* ***иррациональным неравенством.***

ПРИМЕР

$\sqrt{x+3} > x + 1$; $\sqrt{x^2 - 5x + 3} < \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$; $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}} < 2$.

При решении иррациональных неравенств, как и иррациональных уравнений, корни четной степени рассматриваются как арифметические, а корни нечетной степени — на всей числовой оси.

Иррациональные неравенства решаются в основном методом возведения в степень. Но при этом надо знать и использовать следующие утверждения:

1) Если неравенство, обе части которого неотрицательны при всех допустимых значениях переменной, возвести в квадрат (или в любую четную степень) и сохранить его знак, то получим неравенство, равносильное данному.

Другими словами, если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$, причем при всех x из ОДЗ (область допустимых значений) переменной $f_1(x) \geq 0$ и $f_2(x) \geq 0$, то неравенство $(f_1(x))^{2n} > (f_2(x))^{2n}$ равносильно данному.

2) Если обе части неравенства возвести в нечетную натуральную степень и сохранить его знак, то получим неравенство, равносильное исходному. Иначе говоря, если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$, то неравенство $(f_1(x))^{2n+1} > (f_2(x))^{2n+1}$ равносильно данному.

Используя эти два утверждения можно свести решение иррациональных неравенств к решению рациональных неравенств или систем рациональных неравенств.

ПРИМЕР

1. Решим неравенство $\sqrt{x-1} < 3 - x$.

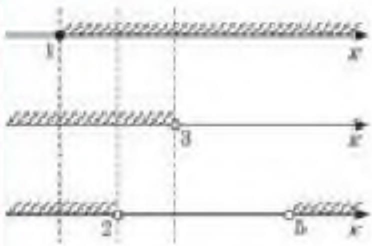


Рис. 42

Решение. Область допустимых значений переменной определяется из условия $x - 1 \geq 0$. Но по смыслу данного неравенства должно выполняться и условие $3 - x > 0$, поскольку левая его часть — арифметический корень. При этих условиях обе части неравенства неотрицательны, поэтому можно использовать метод возведения в квадрат. Если обе части исходного неравенства возвести в квадрат, то, учитывая указанные выше условия, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 3 - x > 0, \\ x - 1 < (3 - x)^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 3, \\ (x - 2)(x - 5) > 0. \end{cases}$$

Отсюда $1 \leq x < 2$, т. е. решением исходного неравенства является множество $[1; 2)$ (рис. 42).

Ответ: $[1; 2)$.

ПРИМЕР

2. Решим иррациональное неравенство $\sqrt{x-1} > 3 - x$.

Решение. Область определения неравенства задается условием $x - 1 \geq 0$, т. е. $x \geq 1$. Правая часть неравенства обращается в нуль при $x = 3$ и она отрицательна при $x > 3$. Учитывая эти условия утверждаем, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} 1 \leq x < 3, \\ x - 1 > (3 - x)^2; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x-1} > 3 - x. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} 1 < x < 3, \\ x - 1 > (3 - x)^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 < x < 3, \\ (x - 2)(x - 5) < 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является промежуток (2; 3].

Решим вторую систему: $\begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x - 1} > 3 - x. \end{cases}$

Решением этой системы являются все значения x из промежутка $(3; +\infty)$, так как значение выражения $(3 - x)$ отрицательно, а левая часть $\sqrt{x - 1}$ положительна. Объединяя решение первой системы с решением второй системы устанавливаем, что решением исходной системы будет промежуток $(2; +\infty)$ (рис. 43).

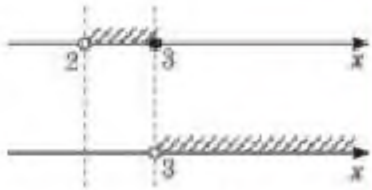


Рис. 43

Ответ: $(2; +\infty)$.

Ниже приведены основные равносильные соотношения, применяемые для решения иррациональных неравенств:

1. $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

2. $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

3. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$

4. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$

5. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < [g(x)]^{2n+1}.$

6. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > [g(x)]^{2n+1}.$

7. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < [g(x)]^{2n}. \end{cases}$

8. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > [g(x)]^{2n}. \end{cases} \end{array} \right.$

9. $\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)} > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 0, \\ \sqrt[n]{f(x)} > a \cdot g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ \sqrt[n]{f(x)} < a \cdot g(x). \end{cases} \end{array} \right.$

Приведем примеры решения иррациональных неравенств с использованием данных соотношений.

ПРИМЕР

3. Решим неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.

Решение. Применим соотношение (7), тогда получим:

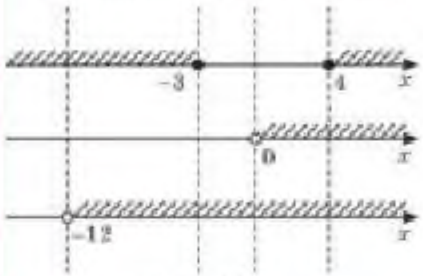


Рис. 44

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x-4)(x+3) \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x > -12. \end{cases}$$

Множество решений системы неравенств показано на рисунке 44.

Ответ: $[4; +\infty)$.

ПРИМЕР

4. Решим неравенство $\sqrt{x+2} > \sqrt{8 - x^2}$.

Решение. Применяя соотношение (2) получим:

Рис. 45

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ 8 - x^2 \geqslant 0, \\ x + 2 > 8 - x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2 - 8 \leqslant 0, \\ x^2 + x - 6 > 0 \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ \left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right) \leqslant 0, \\ (x-2)(x+3) > 0. \end{cases}$$

Множество решений системы неравенств показано на рисунке 45.

Ответ: $(2; 2\sqrt{2}]$.

ПРИМЕР

5. Решим неравенство $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$.

Решение. Применим соотношение (8), тогда данное неравенство сведется к совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geqslant 0, \\ 8 - 2x < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 8 - 2x > 0, \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2. \end{cases}$$

Решим каждую систему в отдельности.

1) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geqslant 0, \\ 8 - 2x < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \leqslant 0, \\ 2(4 - x) < 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} (x-1)(x-5) \leqslant 0, \\ 4 - x < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 5, \\ x > 4. \end{cases}$

Решением системы неравенств является промежуток (4; 5] (рис. 46).

2) $\begin{cases} 8 - 2x > 0, \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4 - x \geqslant 0, \\ 5x^2 - 38x + 69 < 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} x \leqslant 4, \\ 5(x-3)\left(x - \dfrac{23}{5}\right) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ 3 < x < \dfrac{23}{5}. \end{cases}$

Рис. 46

Рис. 47

Решением системы неравенств является промежуток (3; 4] (рис. 47). Объединив решения двух систем неравенств, получим решение исходного неравенства — промежуток (3; 5].

Ответ: (3; 5].

ПРИМЕР

6. Решим неравенство $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 7 - x^2 - 2x$.

Решение. ***Первый способ.*** Применим непосредственно соотношение (8), тогда получим неравенство четвертой степени. Поэтому данное неравенство предварительно запишем в следующем виде $\sqrt{5(x^2 + 2x) + 1} > 7 - (x^2 + 2x)$ и введем обозначение: $y = x^2 + 2x$. Тогда последнее неравенство примет вид $\sqrt{5y + 1} > 7 - y$.

Применяя соотношение (8) из последнего неравенства получим две системы неравенств:

1) $\begin{cases} 5y + 1 \geqslant 0, \\ 7 - y < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 5y \geqslant -1, \\ y > 7 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \geqslant -\dfrac{1}{5}, \\ y > 7. \end{cases}$

Отсюда получим $y > 7$. Решением системы неравенств является промежуток $(7; +\infty)$.

2) $\begin{cases} 7 - y \geqslant 0, \\ 5y + 1 > (7 - y)^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y < 7, \\ y^2 - 19y + 48 < 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} y < 7, \\ (y - 3)(y - 16) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y < 7, \\ 3 < y < 16. \end{cases}$

Множеством решений системы неравенств будет промежуток (3; 7] (рис. 48). Следовательно, объединив решения двух этих систем, имеем $y > 3$.

Подставив вместо y его обозначение $x^2 + 2x$, имеем: $x^2 + 2x > 3$. Решим последнее неравенство: $x^2 + 2x - 3 > 0$ или $(x - 1)(x + 3) > 0$. Решением неравенства является множество $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ (рис. 49).

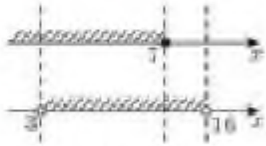


Рис. 48

Рис. 49

Второй способ. Умножим обе части неравенства $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 7 - 2x - x^2$ на число $5 > 0$, тогда получим равносильное неравенство $5\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 35 - 5x^2 - 10x$. Полученное неравенство запишем в виде:

$$5\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 36 - (5x^2 + 10x + 1).$$

Введем новую переменную: $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = a$ $(a > 0)$. Тогда последнее неравенство примет вид: $5a > 36 - a^2$ или $a^2 + 5a - 36 > 0$. Решением неравенства является множество $(-\infty; -9) \cup (4; +\infty)$.

Так как $a > 0$, то рассмотрим только множество $(4; +\infty)$. Итак $a > 4$, значит, $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 4$. Возведем обе части неравенства в квадрат, получим: $5x^2 + 10x + 1 > 16$ или $5x^2 + 10x - 15 > 0$. Сократим полученное неравенство на 5. $x^2 + 2x - 3 > 0$, решением этого неравенства является множество $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

ПРИМЕР

7. Докажем неравенство $\frac{x + y}{2} > \sqrt{xy}$, где $x > 0$, $y > 0$.

Доказательство. Первый способ. Сумму $x + y$ преобразуем следующим образом:

$$x + y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + 2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}.$$

Тогда $\frac{x + y}{2} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \sqrt{xy}$. Равенство достигается, если $x = y$.

Следовательно, правая часть данного неравенства состоит из суммы, где первое слагаемое неотрицательно, а второе слагаемое есть правая часть доказываемого неравенства.

Поэтому очевидно, что $\frac{x + y}{2} > \sqrt{xy}$. Равенство достигается, если $x = y$.

Второй способ. Составим разность $\frac{x + y}{2} - \sqrt{xy}$ и найдем ее знак: $\frac{x + y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{2} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2}{2}$. Неравенство $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 > 0$ верно при любых неотрицательных значениях x и y. Значит $\frac{x + y}{2} > \sqrt{xy}$.

Формулировка неравенства $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$: *среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел.* Это неравенство называют ***неравенством Коши***.

Из неравенства Коши следует неравенство $x + \frac{1}{x} > 2$.

В самом деле $\frac{x + \frac{1}{x}}{2} > \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$ или $x + \frac{1}{x} > 2$.

Примечание. Можно доказать утверждение о том, что среднее арифметическое любого количества неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел, т. е. если числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ неотрицательны, то

$\frac{x_1 + x_3 + x_3 + \ldots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$, причем знак равенства возможен только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

ПРИМЕР

8. Докажем неравенство $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$ при $n > 1$.

Доказательство. Выражение $\frac{1}{\sqrt{m}}$ можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{2}{2\sqrt{m}} = \frac{2}{\sqrt{m}+\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}}, \text{ т. е. } \frac{1}{\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}}.$$

Согласно последнему неравенству имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{2}+1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} < \frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{3}},$$

....

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

Почленно складывая эти неравенства получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right).$$

Освободимся от иррациональности в знаменателях дробей правой части неравенства, умножая числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующее сопряженное число. Тогда последнее неравенство можно записать так:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \ldots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-(n-1)}\right)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(-1+\sqrt{n}).$$

Если к обеим частям последнего неравенства прибавить 1, то получится:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(-1+\sqrt{n})+1$$

или

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

1. Почему считается важным предположить неотрицательными обе части иррационального неравенства?
2. В чем состоит принципиальное смысловое различие между двумя утверждениями, данными в начале параграфа и используемыми при решении иррациональных неравенств?
3. На каких свойствах функции основаны вышеприведенные 9 соотношений?

Упражнения

А

Решите неравенства (**15.1—15.3**):

15.1. 1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} < 5$; 3) $\sqrt[3]{x} > 3$; 4) $\sqrt[3]{x} \leqslant 2$.

15.2. 1) $\sqrt{x+1} > 2$; 2) $\sqrt{1-x} \leqslant 4$; 3) $\sqrt{3x+1} \geqslant 1$; 4) $\sqrt{2x-1} < 3$.

15.3. 1) $\sqrt{3x-8} < -2$; 2) $\sqrt[3]{x+2} \leqslant -5$;

3) $\sqrt{2x+1} > 8$; 4) $(x-12)\sqrt{x-3} \leqslant 0$.

В

Решите неравенства (**15.4—15.6**):

15.4. 1) $\sqrt{x^2+x-2} < 2$; 2) $\sqrt{x^2+x+1} < 1$;

3) $\sqrt{x^2+3x} > 4$; 4) $\sqrt{x^2-5x} > 3$.

15.5. 1) $\sqrt{2x-1} > x-2$; 2) $\sqrt{2x+1} < x-1$;

3) $x+2 < \sqrt{x+14}$; 4) $x-3 < \sqrt{x+27}$.

15.6. 1) $\sqrt{x-6}\cdot\sqrt{x-12} < x-1$; 2) $\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x} < 0$;

3) $\sqrt{x^3-x-2} < x$; 4) $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$.

C

Решите неравенства (**15.7—15.8**):

15.7. 1) $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x+4} > 0$.

15.8. 1) $\sqrt{5x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$;

2) $\sqrt{x^2-8x+15} > \sqrt{4x^2-18x+18} - \sqrt{x^2+2x-15}$.

15.9. 1) Разложите положительное число a на два положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим. *Указание*. Нужно использовать неравенство Коши.

2) Докажите, что $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$ при положительных a, b и c;

3) Докажите, что если x, y, a и b неотрицательные числа, то $\frac{x+y+a+b}{4} \geqslant \sqrt[4]{xyab}$.

15.10. Докажите неравенство $\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2}$ $(x>0,\ y>0)$.

***15.11.** Решите двойное неравенство $\sqrt{x^2-9x+20} \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2-13}$.

***15.12.** Решите систему неравенств $\begin{cases}\sqrt{4x-7} < x,\\ \sqrt{5+x}+\sqrt{5-x} > 4\end{cases}$

ПОВТОРИТЕ

15.13. Решите уравнение:

1) $\operatorname{arctg}4x = \frac{3\pi}{4}$; 2) $\arcsin\left(4-\frac{x}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

3) $\arcsin\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos(2-3x) = \pi$.

15.14. Вычислите:

1) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\operatorname{arctg}(-1)$;

2) $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\operatorname{arcctg}(-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \arcsin(-1) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

15.15. Найдите производную функции:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x + x^3$;   2) $f(x) = \arccos 4x - x^{-4} + 2$.

15.16. Постройте график функции и найдите ее множество значений:

1) $f(x) = 2x + x^2$;   2) $f(x) = 1 - \sqrt{4+x}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 6x}$:

A) $(-\infty; 0] \cup [2; 3]$;   B) $[0; 2) \cup (3; +\infty)$;

C) $[0; 2] \cup [3; +\infty)$;   D) $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$.

2. Найдите область допустимых значений переменных в выражении $\sqrt{x^2 - 6x} + \frac{1}{x-5}$:

A) $[0; 6]$;   B) $[0; 5) \cup (5; 6]$;

C) $(-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$;   D) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 5} = -9$:

A) 2;   B) ± 2;   C) -2;   D) $\varnothing$.

4. Найдите наибольший корень уравнения $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{4x}$:

A) -5;   B) 5;   C) -1;   D) 1.

5. Решите уравнение $\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 6\sqrt{\frac{x-2}{2}} = 5$:

A) 2; 3;   B) 1; 6;   C) $\frac{9}{4}$; $\frac{8}{3}$;   D) $\frac{4}{9}$; $\frac{3}{8}$.

6. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{4 - 3x} < 2$:

A) нет такого целого числа;   B) 1;

C) -1;   D) 0.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x + y} = 4, \\ x^2 - y + 5x = 0 \end{cases}$:

A) (2; 14), (8; -24);   B) (-2; 18), (8; -24);

C) (2; 14), (-8; 24);   D) (2; -18), (-8;24).

8. Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворящее неравенству $\sqrt{x - 3} \leqslant 4$:

A) 3;   B) 5;   C) 19;   D) 18.

9. Решите уравнение $(x - 5)\sqrt{9 - x^2} = 0$:

A) ± 3; 5;   B) ± 3;   C) 3; 5;   D) ± 3; -5.

10. Решите систему неравенств $\begin{cases} \sqrt{x-1} < 2, \\ 10 - x \leqslant 8 \end{cases}$:

A) (1; 5); B) (1; 2]; C) [2; 5); D) [2; 5].

Тестовые задания "Математическая грамотность"

11. Заработная плата продавца составляет 8 000 тг в день. При продаже пары ботинок ценой 5000 тг он по ошибке сделал скидку в 20% вместо 10%. Найдите заработную плату продавца за этот день:

A) 7800 тг; B) 7920 тг; C) 7850 тг;
D) 7900 тг; E) 7950 тг.

12. Известно, что кинотеатр работает с 10 ч до 22 ч и киносеансы начинаются через каждые 2 часа. График посещаемости кинотеатра задается уравнением $N(t) = 24t - t^2$, t — время в часах начала киносеанса, $N(t)$ — количество посетителей кинотеатра. Найдите наибольшее число зрителей в пик посещаемости и число посетителей за день:

A) 144 и 740; B) 146 и 780; C) 140 и 720;
D) 144 и 720; E) 140 и 740.

13. Асем занимается плаванием. На первой тренировке она плавала 15 минут. На каждой следующей тренировке Асем плавала на 5 мин больше. Через сколько занятий она будет плавать на тренировке 1 ч:

A) 20 занятий; B) 8 занятий; C) 6 занятий;
D) 10 занятий; E) 12 занятий?

14. Даурен проехал на велосипеде от дома до реки, которая находится на расстоянии 6 км, за 12 минут. Домой он возвратился по короткому маршруту в 3 км за 8 минут. Найдите среднюю скорость Даурена (в км/ч) до реки и обратно:

A) 25 км/ч; B) 27 км/ч; C) 24 км/ч;
D) 24,5 км/ч; E) 28 км/ч.

15. Угловой коэффициент касательной к графику функции в любой точке $(x; y)$ находится по формуле $f'(x) = 6x - 4$. График функции $f(x)$ проходит через точку $M(1; 2)$. Найдите функции $f(x)$:

A) $f(x) = 3x^2 - 4x$; B) $f(x) = x^2 - 4x$; C) $f(x) = 3x^2 + 4x$;
D) $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$; E) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество действительных чисел, модуль числа, координатная плоскость, координаты точки.

§ 16. МНИМЫЕ ЧИСЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Вы ознакомитесь с определением комплексного числа и его модуля.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Число, комплексное число, мнимое число, модуль числа, коплексная плоскость, сопряженные комплексные числа, алгебраическая форма записи комплексного числа

вы знаете: Множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел, умеете выполнять действия над этими числами.

Во множестве действительных чисел квадратное уравнение при $D > 0$ имеет два корня, при $D = 0$ имеет один корень, при $D < 0$ не имеет корней.

Рассмотрим множество комплексных чисел.

Комплексными числами называются числа вида $z = x + iy$, где x, y — действительные числа, i — мнимая единица, удовлетворяющая соотношению $i^2 = -1$.

Число x называется *действительной частью* комплексного числа z и имеет обозначение $x = Rez$.

Число y называется *мнимой частью* комплексного числа z и имеет обозначение $y = Imz$.

Комплексные числа образуют *множество комплексных чисел.*

Обозначение множества комплексных чисел: C.

Определение. Комплексное число, записанное в виде $z = x + iy$, является *алгебраической формой записи комплексного числа.*

ПРИМЕР

1. $z = 4 + 7i$ — комплексное число, действительной частью которого является число $x = \mathrm{Re}z = 4$, а мнимой частью — число $y = \mathrm{Im}z = 7$.

Заполните следующую таблицу:

Таблица 24

Комплексное число	Действительная часть	Мнимая часть
$z = -2 + 9i$		
$z = 15 - 13i$		
$z = -6 - 10i$		
$z = -25i$		
$z = 20$		

При заполнении таблицы 24 для комплексного числа $z = -25i$ написали, что действительная часть $x = \text{Re}z = 0$, а мнимая часть $y = \text{Im}z = -25$.

Если действительная часть комплексного числа равна нулю, т.е. $x = \text{Re}z = 0$, то комплексное число называется *чисто мнимым*.

ПРИМЕР

2. Число $z = -25i$ является мнимым числом.

При заполнении таблицы 24 для комплексного числа $z = 20$ написали, что действительная часть $x = \text{Re}z = 20$, а мнимая часть $y = \text{Im}z = 0$.

С другой стороны число 20 является действительным числом. Следовательно, любое действительное число может быть записано в форме комплексного числа $z = x + 0i$.

Таким образом, множество комплексных чисел являются расширением множества действительных чисел, т. е. $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

ПРИМЕР

3. Комплексные числа $z = -7 + 0i$, $z = -7 - 0i$ обозначают действительное число -7.

Вы научитесь изображать комплексное число на комплексной плоскости.

Комплексные числа можно изображать на комплексной плоскости, при этом действительные части располагаются на горизонтальной (вещественной) оси, мнимые части — на вертикальной (мнимой) оси (рис. 50).

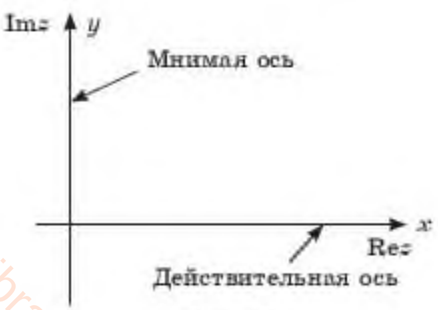


Рис. 50

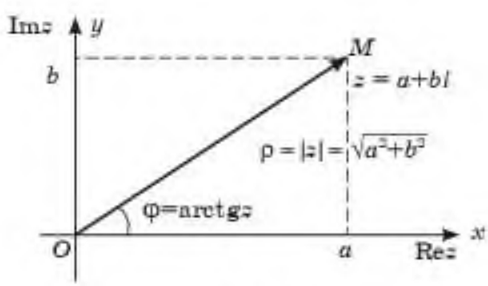


Рис. 51

Любому комплексному числу $z = x + iy$ можно сопоставить точку $M(a;\ b)$ на этой плоскости, и вектор, соединяющий начало координат с точкой на плоскости, соответствующей числу.

Обозначение вектора: r или $|z|$, или ρ (рис. 51).

Данную плоскость называют *комплексной плоскостью.*

ПРИМЕР

4. Изобразим на координатной плоскости числа:
1) $z = -4 + 3i$; 2) $z = 2 - 2i$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -2i$ (рис. 52).

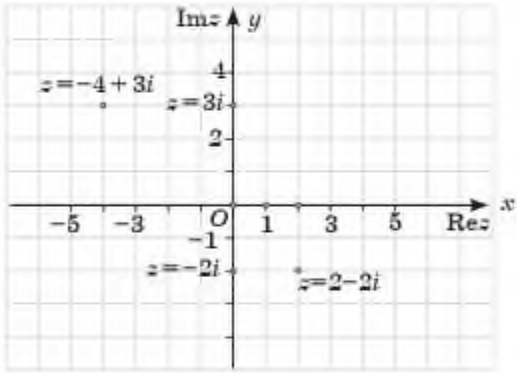


Рис. 52

Вы ознакомитесь с определением модуля комплексного числа.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется выражение $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ПРИМЕР

5. Найдем модуль комплексного числа: 1) $z = -4 + 3i$; 2) $z = 9 - 2i$.

Решение.

1) для комплексного числа $z = -4 + 3i$ действительная часть $x = \operatorname{Re} z = -4$, а мнимая часть $y = \operatorname{Im} z = 3$. Тогда: $|z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$;

2) для комплексного числа $z = 9 - 2i$ действительная часть $x = \operatorname{Re} z = 9$, а мнимая часть $y = \operatorname{Im} z = -2$. Тогда: $|z| = \sqrt{9^2 + (-2)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$.

Ответ: 1) 5; 2) $\sqrt{85}$.

Вы ознакомитесь с определением сопряженных комплексных чисел.

Сопряженным числом к комплексному числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = x - iy$.

ПРИМЕР **6. 1)** Для комплексного числа $z = 5 + 4i$ его сопряженным числом является число $\bar{z} = 5 - 4i$, а для комплексного числа $z = 5 - 4i$ сопряженным числом является число $\bar{z} = 5 + 4i$.

Заполните следующую таблицу:

Таблица 25

Комплексное число	Его сопряженное число
$z = -2 + 9i$	
	$\bar{z} = 15 - 13i$
$z = -6 - 10i$	
	$\bar{z} = -25i + 6i$
$z = 25 + 6i$	

1. Какое отличие имеет комплексное число от действительного числа?
2. Что означает модуль комплексного числа?
3. Что такое *комплексная плоскость*?
4. Как на комплексной плоскости расположены два сопряженных комплексных числа z и $\bar{z}$?
5. Верно ли равенство $z \cdot \bar{z} = |z|^2$?

Упражнения

А

16.1. Заполните таблицу:

Таблица 26

Комплексное число	Действительная часть (Rez)	Мнимая часть (Imz)
$z = -3 + 19i$		
$z = 12 - 7i$		
$z = -5 - 1{,}6i$		
$z = -23i$		
$z = 40$		

16.2. Заполните таблицу:

Таблица 27

Комплексное число	Действительная часть (Rez)	Мнимая часть (Imz)
$z = -1{,}2 + 0{,}9i$		
$z =$	13	14
$z = x - 10i$	8	
$z =$	0	-2
$z =$	13	0

16.3. Заполните таблицу:

Таблица 28

Комплексное число	Действительная часть (Rez)	Мнимая часть (Imz)
$z = -2\sqrt{3} + i(\sqrt{2} + 3)$		
$z = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\,i$		
$z = x - 21i$	$1 - 3\sqrt{3}$	
$z =$	0	$2 - 5\sqrt{3}$
$z =$	$\pi + 1$	$\sqrt{2} - 1$

16.4. Найдите модуль комплексного числа:

1) $2 + 3i$; 2) $-2 + 4i$; 3) $-2{,}5 + 1{,}5i$; 4) $2 + i\sqrt{3}$.

16.5. Заполните таблицу:

Таблица 29

Комплексное число (z)	Сопряженное комплексное число ($\bar{z}$)
$z = \sqrt{3} - \sqrt{2}\,i$	
$z = -\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\,i$	
$z = -4 - \sqrt{2}\,i$	
$z = -4\sqrt{2}\,i$	
$z = -5\sqrt{2}$	

B

16.6. Заполните таблицу:

Таблица 30

Комплексное число (z)	Сопряженное комплексное число ($\bar{z}$)
$z = 5 - 2i$	
$z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}\,i$	
$z = 3 + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\,i$	
$z = -4 - (1 + \sqrt{2})i$	
$z = -2\sqrt{3} - i(\sqrt{2} + 3)$	
$z = (1 - 4\sqrt{2})i$	
$z = -5\sqrt{2} + 2$	

16.7. Найдите модуль сопряженного комплексного числа к числу z:

1) $z = 2 - 5i$; 2) $z = -4 - 2i$;

3) $z = -\sqrt{5} + i\sqrt{3}$; 4) $z = -2\sqrt{5} - i\sqrt{3}$;

16.8. На координатной плоскости отметьте точки, соответствующие комплексным числам z и $\bar{z}$:

1) $z = -1 - 3i$; 2) $z = -3 - i$;

3) $z = -\sqrt{5} + i\sqrt{3}$; 4) $z = -2 - i\sqrt{8}$.

16.9. На координатной плоскости заданы координаты точек $M(a; b)$ (рис. 53).

1) Запишите соответствующее им комплексное число z и найдите его модуль.

2) Запишите комплексные числа, соответствующие точкам $M_8(a + 1; b - 1)$ и $M_9(a - 3; b - 2)$, если $a = 2$, $b = -3$.

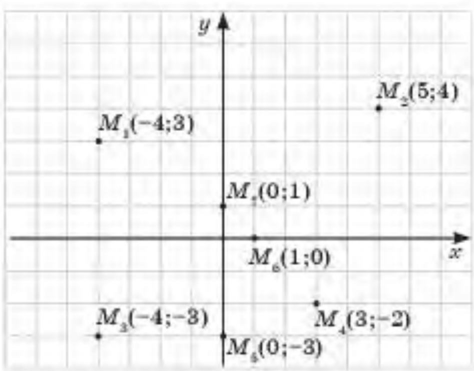


Рис. 53

16.10. Найдите модуль сопряженного комплексного числа $\bar{z}$ к числу z:

1) $z = 2 + \sqrt{2} - 3i$;
2) $z = -4 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5}\,i$;
3) $z = -\frac{2}{3} + i\sqrt{3}$;
4) $z = -\sqrt{2} - \frac{3-\sqrt{2}}{2}i$.

C

16.11. При каких действительных значениях x и y комплексные числа будут сопряженными:

1) $24 - yi$ и $2x - 3\sqrt{5}i$;
2) $-8 + yi$ и $\sqrt{2}x - 4i$.
3) $3 + \sqrt{2}yi$ и $2x + (4 + \sqrt{2})i$;
4) $3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}yi$ и $3x + 4i$?

16.12. Найдите значение модуля комплексного числа:

1) $\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha$;
2) $1 + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$;
3) $\sin 4\alpha - (1 + \cos 4\alpha)i$;
4) $\sin 6\alpha - (1 - \cos 6\alpha)i$.

16.13. На комплексной плоскости изобразите множество точек, для которых:

1) $|z| < 2$;
2) $|z - 4i| < 3$;
3) $|z - 2 - i| \leqslant 2$;
4) $\mathrm{Re}z > -2$;
5) $\mathrm{Im}z < 1$;
6) $\mathrm{Im}z > -2$.

16.14. Область внутренности круга, изображенного на рисунке 54, запишите в виде неравенства:

1) 2)

Рис. 54

ПОВТОРИТЕ

16.15. Найдите первообразную для функции $f(x)$:

1) $f(x) = x^3 - 2x + 2$;
2) $f(x) = \sin(1 - x)$;
3) $f(x) = x + \cos(1 - 4x)$;
4) $f(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 3x}$.

16.16. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

1) $f(x) = 3 - x^2$ и $f(x) = 1 + |x|$;
2) $f(x) = x^2$ и $f(x) = 2 - |x|$.

16.17. Решите неравенство $f'(x) \geqslant 0$:

1) $f(x) = 2\cos 3x + 3x$;
2) $f(x) = -x^3 + 12x + 1$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Число, комплексное число, мнимое число, модуль числа, комплексная плоскость, сопряженные комплексные числа, алгебраическая форма записи комплексного числа.

§ 17. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Вы научитесь определять равные комплексные числа в алгебраической форме.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Комплексное число, степень, квадратный корень, алгебраическая форма, арифметические действия

Рассмотрим два комплексных числа, записанных в алгебраической форме.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, т. е. равны их действительные и мнимые части.

Среди комплексных чисел $z_1 = -2 + 9i$; $z_2 = -2 - 9i$; $z_3 = 2 + 9i$; $z_4 = -9 + 2i$; $z_5 = -2 + 9i$; $z_6 = -2i + 9$; $z_7 = 9 - 2i$ укажите равные комплексные числа.

ПРИМЕР

1. Найдем при каких x и y два комплексных числа $z_1 = -4 + yi$ и $z_2 = x - 2i$ являются равными.

Решение. По определению два комплексных числа называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, поэтому $x = -4$ и $y = -2$.

Ответ: $x = -4$, $y = -2$.

Вы научитесь выполнять арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Рассмотрим выполнение действий над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

I. *Суммой комплексных чисел*

$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ является число

$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Доказательство. $z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (iy_1 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. ■

ПРИМЕР

2. Найдем сумму комплексных чисел: $z_1 = -4 + 5i$ и $z_2 = 3 - 2i$.

Решение. По условию $x_1 = -4$; $y_1 = 5$; $x_2 = 3$; $y_2 = -2$.

Тогда: $z = z_1 + z_2 = (-4 + 3) + i(5 - 2) = -1 + 3i$.

Ответ: $-1 + 3i$.

II. *Разностью комплексных чисел*

$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ является число $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

III. *Произведением комплексных чисел*

$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ является число
$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Формулы, полученные при выполнении разности и произведения комплексных чисел, докажите самостоятельно.

IV. *Частным комплексных чисел*

$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ является число

$$z = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Доказательство. $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \dfrac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)} =$

$$= \frac{x_1 x_2 + i \cdot x_2 y_1 - i \cdot x_1 y_2 - i^2 \cdot y_1 y_2}{x_2^2 - i^2 \cdot y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i \cdot (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

ПРИМЕР

3. Найдем частное комплексных чисел: $z_1 = -4 + 5i$ и $z_2 = 3 - 2i$.

Решение. По условию $x_1 = -4$; $y_1 = 5$; $x_2 = 3$; $y_2 = -2$.

Тогда:

$$z = \frac{-4 \cdot 3 + 5 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} + \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} i = \frac{-12 - 10}{9 + 4} + \frac{15 - 8}{9 + 4} i = -\frac{22}{13} + \frac{7}{13} i.$$

Ответ: $-\dfrac{22}{13} + \dfrac{7}{13} i$.

Примечание. Частное двух комплексных чисел удобнее находить не по формуле, а по алгоритму: числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю дроби, и произвести действия умножения в числителе и знаменателе.

$$\frac{-4+5i}{3-2i} = \frac{(-4+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{-12-8i+15i-10}{3^2+(-2)^2} = \frac{-22+7i}{13} = -\frac{22}{13} + \frac{7}{13} i.$$

Вы научитесь применять закономерность значения i^n при возведении в целую степень комплексного числа в алгебраической форме.

Известно, что $i^2 = -1$. Найдем значение степени i^n когда $n > 2$.

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i;$
$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1;$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i;$
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1;$
$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ и т. д.

Закономерность значения i^n при возведении в целую степень комплексного числа в алгебраической форме представлено в таблице 31:

Таблица 31

n	2	3	4	5	6	7	8	9
i^n	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

Вы научитесь извлекать квадратный корень из комплексного числа.

вы знаете: Квадратный корень из отрицательного числа нельзя извлекать на множестве действительных чисел.

Однако, во множестве комплексных чисел можно извлечь квадратный корень из отрицательного числа, так как во множестве комплексных чисел $-1 = i^2$.

ПРИМЕР

4. 1) $\sqrt{-1} = \sqrt{i^2} = i$, т. е. $\sqrt{-1} = \pm i$;
2) $\sqrt{-16} = \pm 4i$;
3) $\sqrt{-81} = \pm 9i$.

Выведем формулу извлечения квадратного корня из комплексного числа.

Положим, что $\sqrt{a+bi} = x + yi$. Возведем обе части равенства в квадрат.

Тогда. $a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Следовательно, $\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$ (1)

Из этой системы уравнений найдем x и y. Возведем обе части обоих уравнений в квадрат, затем сложим их, тогда получим:

$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$ или $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$ (2)

Складывая и вычитая уравнения системы (2) получим:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \text{ и } x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \text{ и } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Из второго уравнения системы (1) видим, что знаки у x и y должны быть одинаковые, если $b > 0$, и разные, если $b < 0$. Поэтому:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \text{ при } b > 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \text{ при } b < 0 \text{ или}$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot\operatorname{sign}b\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \text{ где}$$

$$\operatorname{sign}b = \begin{cases} 1, \text{ если } b > 0, \\ 0, \text{ если } b = 0, \\ -1, \text{ если } b < 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР

5. Найдем значение корня $\sqrt{3-4i}$.

Решение. $a = 3$, $b = -4$. Воспользуемся полученной формулой и найдем:

$$\sqrt{3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}+3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}-3}{2}}\right),$$

или $\sqrt{3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}}\right)$, или $\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$.

Ответ: $\pm(2-i)$.

?

1. Какие действия можно выполнять над комплексными числами в алгебраической форме?
2. Какие понятия, формулы, преобразования были использованы при доказательстве частного двух комплексных чисел?
3. Учитывается ли знак числа b при извлечении квадратного корня из комплексного числа $\sqrt{a+bi}$?

Упражнения

A

17.1. Выполните действия:

1) $2(2-3i)-3(3-i)$; 2) $4(1-3i)-(2-5i)$;

3) $(4{,}1-i)-(6{,}1-7i)$; 4) $3(2+3i)-4(2+5i)$;

5) $2(1-3i)-3(2-5i)$; 6) $2(2{,}2-i)-(6{,}4-7i)$.

17.2. Выполните действия над комплексными числами:

1) $(1+3i)(3-i)$; 2) $(1-3i)(2+2i)$;

3) $(2-i)^2$; 4) $(2+3i)^2-5i$.

17.3. Упростите выражение:

1) $\frac{3-i}{2+i}$; 2) $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$; 3) $\frac{2-3i}{1+2i}$;

4) $\frac{3-5i}{5-2i}$; 5) $\frac{3-2i}{-1-2i}$; 6) $\frac{-3-7i}{-3+2i}$.

B

17.4. Упростите выражение:

1) $\frac{3+i}{2-i}+(5-2i)^2$; 2) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-(\sqrt{3}-2i)^2$; 3) $2+3i-\frac{2-3i}{1+2i}$;

4) $\frac{3-4i}{3-2i}-\frac{4-i}{2+3i}$; 5) $\frac{3-2i}{1-2i}+\frac{5-2i}{2-i}$; 6) $\frac{7-i}{5i}+\frac{3-7i}{2i-1}$.

17.5. Выполните действия:

1) $\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^2+(1-2i)^3$; 2) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}-(\sqrt{3}+2i)^3$;

3) $(2+3i)^4-\frac{2-3i}{1+i}$; 4) $\frac{3-i}{1-2i}-(1-2i)^4$.

17.6. Выполните действия:

1) $\sqrt{-7-24i}$; 2) $\sqrt{24+70i}$; 3) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$;

4) $\sqrt{2-i\sqrt{2}}$; 5) $\sqrt{16i}$; 6) $\sqrt{-24i}$.

C

17.7. Преобразуйте выражение и найдите модуль полученного комплексного числа:

1) $\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^3+(2i)^5$; 2) $\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^5-(2+i)^3$;

3) $(2+i)^4-\left(\frac{2-3i}{1+i}\right)^2$;   4) $\left(\frac{3+i}{1-2i}\right)^3-(1-2i)^4$.

17.8. Найдите действительные числа x и y так, чтобы выполнялось равенство:

1) $(x+3i)(2-i)=3x+3yi$;   2) $(1-yi)(5+2i)=3x-2yi$;

3) $(3+i)x+y(2-i)^2=3-2i$;   4) $(2+3i)^2-5yi=5x-3xyi$.

17.9. Выполните действия над комплексными числами:

1) $(2+i)^4+(2-i)^4-i^{18}+\frac{3-i}{2+i}$;

2) $(1-i)^4-(2+i)^3-2(3+32i)-(2i)^7$;

3) $(3+i)^3+(2-i)^5-(2i)^6$;

4) $3(1-5i)+(2+i)^4-5i^{15}$.

ПОВТОРИТЕ

17.10. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\cos 2x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

17.11. Найдите значение интеграла, преобразуя подынтегральную функцию:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\cos^2 x)\,dx$;   2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos 3x\,dx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}10\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)dx$;   4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)dx$.

17.12. Используя метод интегрирования по частям, найдите неопределенный интеграл:

1) $\int(2x-3)\cos 2x\,dx$;   2) $\int(x^2+2x)\sin x\,dx$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Квадратное уравнение, комплексное число, степень, квадратный корень, алгебраическая форма, арифметические действия.

§18. КОМПЛЕКСНЫЕ КОРНИ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Вы научитесь решать квадратные уравнения на множестве комплексных чисел.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Комплексное число, множество комплексных чисел, основная теорема алгебры, квадратное уравнение

ВЫ ЗНАЕТЕ: Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$
— при $D > 0$ имеет два разных действительных корня;
— при $D = 0$ имеет два равных действительных корня;
— при $D < 0$ не имеет действительных корней.

При решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ на множестве комплексных чисел данное уравнение при $D < 0$ имеет два комплексных корня.

ВЫ ЗНАЕТЕ: На множестве комплексных чисел можно извлечь квадратный корень из отрицательного числа, так как на множестве комплексных чисел $-1 = i^2$.

ПРИМЕР

1. Решим уравнение. $5x^2 - 8x + 5 = 0$.

Решение. Тогда. $D = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 64 - 100 = -36$.

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{36 \cdot i^2}}{10} = \frac{8 \pm 6i}{10} = \frac{4 \pm 3i}{5}.$$

Ответ: $\frac{4 \pm 3i}{5}$.

При $D < 0$ корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ находятся по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a}.$$

Вы ознакомитесь с основной теоремой алгебры и ее следствиями.

Основная теорема алгебры. Любой многочлен на множестве комплексных чисел, не равный константе, имеет хотя бы один комплексный корень.

Следствие 1. Любой многочлен, не равный константе, на множестве комплексных чисел разлагается в произведение линейных множителей.

Следствие 2. Если комплексное (но не действительное) число является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то ему сопряженное число является корнем той же кратности.

В примере 1 корнями уравнения являются комплексные числа $\frac{4}{5}+\frac{3i}{5}$ и $\frac{4}{5}-\frac{3i}{5}$. Нетрудно заметить, что эти числа являются сопряженными.

ПРИМЕР

2. Составим квадратное уравнение, одним из корней которого является комплексное число $-4 + 5i$.

Решение. Если один из корней уравнения есть число $-4 + 5i$, то вторым корнем будет число, сопряженное числу $-4 + 5i$, а именно число $-4 - 5i$.

Чтобы составить квадратное уравнение, используем равенство $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 корни квадратного уравнения.

Тогда $(x - (-4 + 5i))(x - (-4 - 5i)) = x^2 - (-4 - 5i)x - (-4 + 5i)x + (-4 + 5i)(-4 - 5i) = x^2 + 4x + 5ix + 4x - 5ix + 16 - 25i^2 = x^2 + 8x + 16 + 25 = x^2 + 8x + 41 = 0$.

Ответ: $x^2 + 8x + 41 = 0$.

?

1. В каком множестве можно найти квадратный корень для любого числа?
2. Всегда ли корни квадратного уравнения являются сопряженными?
3. Какое множество точек на комплексной плоскости удовлетворяет неравенству $|z| < 2$?

Упражнения

А

18.1. Найдите корни квадратного уравнения:

1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^2 + 81 = 0$; 3) $x^2 + 11 = 0$;
4) $x^2 - 5x + 14 = 0$; 5) $x^2 + 4x + 9 = 0$; 6) $x^2 + 2x + 18 = 0$;
7) $2x^2 + x + 11 = 0$; 8) $3x^2 - 6x + 14 = 0$.

18.2. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число:

1) $3i$; 2) $2 - 3i$; 3) $-3 + 2i$; 4) $5 - 7i$.

18.3. Разложите квадратный трехчлен на линейные множители:

1) $x^2 + 2x + 10$; 2) $x^2 - 4x + 5$;
3) $x^2 - 4x + 16$; 4) $2x^2 - 6x + 9$.

B

18.4. Найдите корни квадратного уравнения:

1) $9x^2 + 14 = 0$; 2) $4x^2 + 31 = 0$;

3) $2x^2 + 11 = 0$; 4) $3x^2 + 13\sqrt{2} = 0$;

5) $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 11 = 0$; 6) $3x^2 - \sqrt{5}x + 14 = 0$.

18.5. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число:

1) $\sqrt{15}i$; 2) $\sqrt{3} - 2i$; 3) $-3\sqrt{5} + 2i$; 4) $2 - 3\sqrt{2}i$.

18.6. Разложите выражение на линейные множители:

1) $x^4 + 2x^2 - 8$; 2) $x^4 - 4x^2 - 5$;

3) $x^4 - 4x^2 + 12$; 4) $x^4 - 6x^2 + 8$.

18.7. Найдите корни уравнения:

1) $x^2 - 4i = 0$; 2) $x^2 - 9i = 0$; 3) $x^2 + 7i = 0$;

4) $x^2 + 13i = 0$; 5) $z^4 - 16 = 0$; 6) $z^6 - 1 = 0$.

C

18.8. Решите квадратное уравнение:

1) $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$; 2) $z^2 - (2 - i)z - 2i = 0$;

3) $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$; 4) $z^2 + (6 - 2i)z - 6i = 0$;

5) $z^2 - (5 + 2i)z + 5 + 5i = 0$; 6) $z^2 - 2(5 - 2i)z + 12 - 20i = 0$.

18.9. Решите уравнение:

1) $z = \bar{z}^2$; 2) $2z = \bar{z}^3$, где $z = x + yi$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

18.10. Подготовьте сообщение об истории развития комплексных чисел и их роль в науке и технике.

ПОВТОРИТЕ

18.11. При каких значениях параметра p квадратное уравнение не имеет действительных корней:

1) $x^2 + (2 - p)x + 2 + p = 0$; 2) $x^2 - 4(p - 2)x + 2p - 2 = 0$;

3) $x^2 + (3 - p)x + 7 - p = 0$; 4) $x^2 - 2(p - 2)x - 2p + 7 = 0$?

18.12. Упростите выражение:

1) $(x^2 - x^{0,5}) : \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x}{1 + \sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{x - 1}{x + \sqrt{x} + 1} : \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} - 1} + \dfrac{2}{x^{-0,5}}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \dfrac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right)$; 4) $\dfrac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{a^{-2} - a}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}$.

18.13. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x^2-16} \leqslant x-2$; 2) $\sqrt{x^2-x-6} \leqslant x+5$.

18.14. Постройте график функции:

1) $f(x) = (x-2)^{-2}$; 2) $f(x) = (x+1)^{-2}$;

3) $f(x) = -1 + \sqrt{x-2}$; 4) $f(x) = 2-\sqrt{2+x}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Упростите выражение $(3+i)(3-i) - 2(3-2i)$ и найдите модуль полученного числа:

A) $\sqrt{74}$; B) $2\sqrt{2}$; C) $4\sqrt{2}$; D) $\sqrt{58}$; E) $\sqrt{42}$.

2. Упростите выражение $(1-5i)^2 + \frac{5(1-i)}{2+i} + 4 + 12i^9$:

A) $20 - i$; B) $-19 - i$; C) $-20 + 2i$; D) $-20 - 2i$; E) $19 + i$.

3. Корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 25 = 0$ равны:

A) $-3 \pm 3i$; B) $3 \pm 2i$; C) $-3 \pm 4i$; D) $-3 \pm 2i$; E) $3 \pm 4i$.

4. Разложите трехчлен $x^2 + 4x + 13$ на линейные множители:

A) $(x-3i)(x+3i)$; B) $(x+2-3i)(x+2+3i)$;

C) $(x-2+3i)(x+3i)$; D) $(x-2-3i)(x-2+3i)$;

E) $(x-1-3i)(x+1+3i)$.

5. Найдите значение корня $\sqrt{4+2\sqrt{5}i}$:

A) $\pm(\sqrt{5}+i)$; B) $\pm(2\sqrt{5}+i)$;

C) $\pm(\sqrt{5}+2i)$; D) $\pm(\sqrt{5}-2i)$;

E) $\pm(\sqrt{5}-i)$.

6. На комплексной плоскости, для которых $|z-3-2i| \leqslant 2$, является:

A) множество точек круга радиуса 3 и центром в точке $M(3;\ 2)$;
B) множество точек круга радиуса 2 и центром в точке $M(0;\ 3)$;
C) множество точек круга радиуса 2 и центром в точке $M(0;\ 0)$;
D) множество точек круга радиуса 2 и центром в точке $M(3;\ 2)$;
E) множество точек круга радиуса 1 и центром в точке $M(2;\ 3)$.

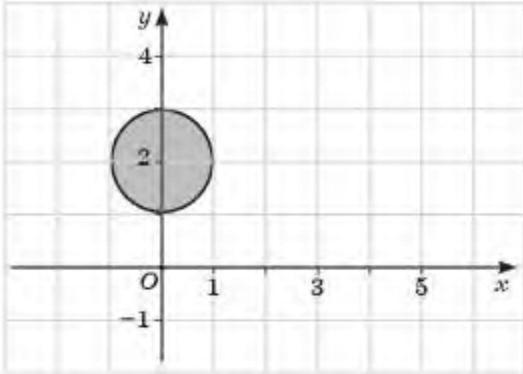
7. Если одним из корней квадратного уравнения является число $5-4i$, то это квадратное уравнение имеет вид:

A) $x^2 + 10x + 41 = 0$; B) $x^2 - 5x + 41 = 0$;

C) $x^2 + 10x + 42 = 0$; D) $x^2 - 5x - 41 = 0$;

E) $x^2 - 10x + 41 = 0$.

8. Область внутренности круга, изображенного на рисунке, задается неравенством:



A) $|z + 2i| < 1$; B) $|z - 2i| < 1$; C) $|z - i| < 2$;

D) $|z + i| < 2$; E) $|2z - 2i| < 1$.

9. Корни уравнения $x^2 - 5i = 0$ равны:

A) $\pm(\sqrt{5} + i)$; B) $5 \pm 2i$; C) $\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}i\right)$;

D) $\pm\left(2\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}i\right)$; E) $\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}i\right)$.

10. Корни уравнения $x^2 + 11i = 0$ равны:

A) $\pm(\sqrt{11} + i)$; B) $11 \pm 2i$; C) $\pm\left(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{11}{2}}i\right)$;

D) $\pm\left(2\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{11}{2}}i\right)$; E) $\pm\left(\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{11}{2}}i\right)$.

Тестовые задания "Математическая грамотность"

11. Вкладчик положил в банк на депозит 100 тыс. тенге под 8 % годовых. Какая сумма будет находиться на депозите через три года:

A) 124 400,2 тг; B) 124 260 тг; C) 125 971,2 тг;

D) 125 520,2 тг; E) 126 122,2 тг?

12. Ниже приведены утверждения пятерых подружек. Если Алия сказала правду, то кто из подружек наверняка сказала правду:

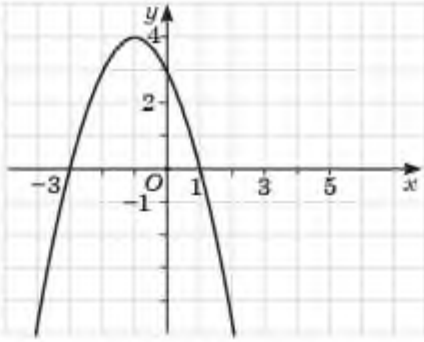
Алия: "Если мячик находится в гараже, значит он обязательно в корзине";

Асем: "Мячик не находится в гараже";

Анара: “Если мячик находится в гараже, то он не в корзине”;
Назым: “Если мячик не находится в гараже, то он в корзине”;
Салия: “Если мячик не находится в корзине, то он не в гараже”:

A) Асем; B) Анара; C) Назым;
D) Галия; E) все подруги сказали неправду.

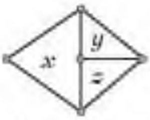
13. Используя график функции $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, найдите значение выражения $M = 2f(-4) + 5f(0) + 2f(-1) + 2f(2)$ и множество значений функции, если переменная $x \in [-2; 2]$:

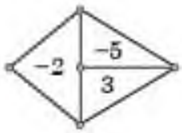


A) $M = 3$; $[-4; 4]$; B) $M = 3$; $[-4; 3]$; C) $M = 3$; $[-5; 3]$;
D) $M = 4$; $[-5; 4]$; E) $M = 3$; $[-5; 4]$.

14. Количество четырехзначных чисел, в записи которых две цифры 2 и по одной цифре 0 и 5, равно:

A) 7; B) 8; C) 9; D) 10; E) 12.

15. Если выражение 

равно $5x \cdot \frac{z}{y}$, то выражение 

принимает значение, равное:

A) $3\frac{1}{3}$; B) 6; C) 3; D) −6; E) $-3\frac{1}{3}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Степень, основание и показатель степени, функция, свойства функции, график функции.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§19. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Вы ознакомитесь с понятием показательной функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, график функции, показательная функция, область определения, множество значений, свойства функции

Во многих областях науки и техники при изучении самых различных явлений и процессов обнаруживается одна общая функциональная зависимость между двумя переменными величинами, участвующими в данном процессе. Приведем несколько примеров:

1) С изменением высоты h над уровнем моря атмосферное давление p изменяется по закону $p = p_0a^h$, где p_0 — давление на уровне моря, a — постоянная величина.

2) Промышленное потребление древесины в небольшой промежуток времени проходит по закону $A = A_0a^{kt}$, где t — время, A_0 — начальное количество древесины, A — изменяющееся со временем количество древесины, выражаемое обычно в $м_3$.

3) Распад радия протекает по закону $x = x_0a^{kt}$, где x_0 — начальное количество радия при $t = 0$, a и k — постоянные числа.

В приведенных примерах мы имеем дело с процессами, носящими общее название органического роста. Если отвлечься от физического смысла переменных, участвующих в процессах органического роста, и обозначить эти переменные буквами x и y, то можно сказать, что всякий органический рост выражается функцией вида:

$$y = Ca^{kx}.$$

Рассмотрим простейший случай такой функции. Пусть $C = k = 1$, тогда: $y = a^x$.

Определение. *Функция вида $y = a^x$ ($a \neq 1$, $a > 0$), x — переменная, называется* ***показательной функцией***.

Нужно обратить особое внимание на следующие положения, содержащиеся в формулировке определения:

1) Основание a не должно быть равным 1 ($a \neq 1$), так как при $a = 1$ степень a^x при любом значении x равнялась бы 1 и тогда она не зависела бы от x, т. е. $y = 1$;

2) основание a должно быть обязательно положительным ($a > 0$), так как при $a < 0$ степень a^x для многих значений x не была бы действи-

тельным числом. Например, при $a = -3$ и $x = \frac{1}{2}$ степень a^x обращается в $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$, что не является действительным числом;

3) предполагается, что когда показатель x равен дроби и, следовательно, когда a^x означает корень некоторой степени, то из всех значений корня берется только одно арифметическое, т. е. неотрицательное число.

Вы научитесь строить график показательной функции.

По определению, основание $a \neq 1$ и $a > 0$, поэтому функция $a^x > 0$ при любом действительном значении x, следовательно, ее график всегда расположен над осью абсцисс. Рассмотрим график функции $y = a^x$ для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$.

1) Для случая $a > 1$ возьмем $a = 2$ и $a = 10$. Построим графики функций $y = 2^x$ и $y = 10^x$ (рис. 55.1).

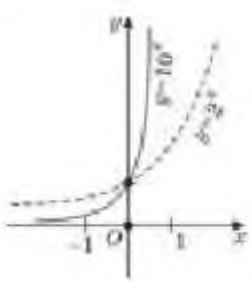
2) Для случая $0 < a < 1$ возьмем $a = \frac{1}{2}$ и $a = \frac{1}{10}$ и построим графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ (рис. 55.2).

Из построенных графиков показательных функций можно перечислить несколько ее свойств:

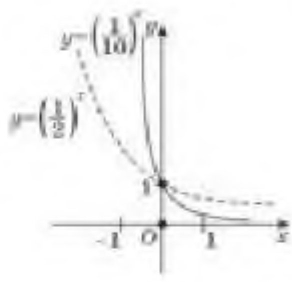
1) Область определения функции $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$ — множество всех действительных чисел; множество значений — $(0; +\infty)$;

2) графики всех показательных функций $y = a^x$ (независимо $a > 1$ или $0 < a < 1$) проходят через точку $(0; 1)$, так как $a^0 = 1$;

3) при $a > 1$ показательная функция монотонно возрастает на множестве действительных чисел, причем $a^x > 1$ при $x > 0$ и $a^x < 1$ при $x < 0$; при $0 < a < 1$ показательная функция монотонно убывает на множестве действительных чисел, причем $a^x > 1$ при $x < 0$ и $a^x < 1$ при $x > 0$;



1)

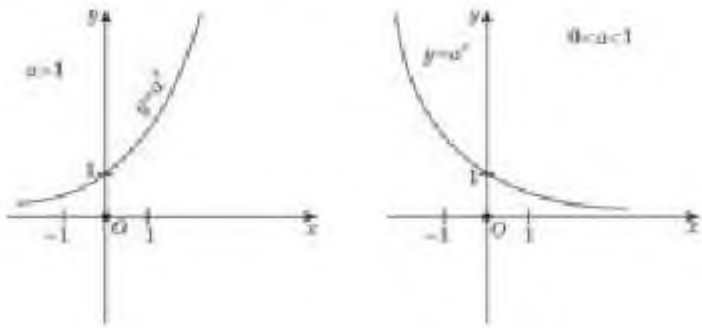


2)

Рис. 55

4) если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастает тем быстрее, чем больше основание a (сравните графики функций $y = 2^x$ и $y = 10^x$); если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ убывает тем быстрее, чем меньше a (сравните графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$).

На рисунке 56.1, 56.2 даны общие виды графиков функции $y = a^x$ соответственно для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$.



1) 2)

Рис. 56

Вы научитесь применять свойства показательной функции при решении задач.

ПРИМЕР **1.** Найдем область определения показательной функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Известно, что показательная функция $y = a^x$ определена на R. Но в данном случае знаменатель показателя степени не может быть равным нулю. Следовательно, область определения данной показательной функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ должна состоять из объединения двух интервалов $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

ПРИМЕР **2.** Используя свойства монотонности показательной функции проверим верность неравенства $\left(\frac{5}{7}\right)^{2,6} < \left(\frac{5}{7}\right)^{2,5}$.

Решение. В данном примере $a = \frac{5}{7}$. По свойству показательной функции при $0 < a < 1$ показательная функция $y = a^x$ монотонно убывает с возрастанием значения аргумента, поэтому данное неравенство верно.

ПРИМЕР 3. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = 3^x$ и $y = x + 2$.

Решение. Для решения данной задачи построим графики функций $y = 3^x$ и $y = x + 2$ на одной координатной плоскости (рис. 57). Из рисунка видно, что графики данных функций пересекаются в точках A и B.

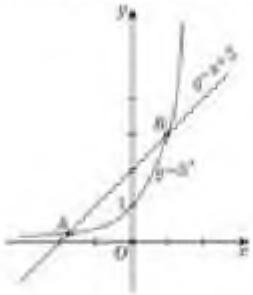


Рис. 57

Ответ: две точки.

1. Какие свойства показательной функции определяют основание показательной функции?
2. На чем основано утверждение о том, что график любой показательной функции проходит через точку (0;1)?
3. Графики каких двух показательных функций будут расположены симметрично относительно оси ординат?
4. Как изменяются значения функции $y = a^x$ при возрастании x во множестве действительных чисел, если: 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$?

Упражнения

А

19.1. Постройте графики функций $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ на одной координатной плоскости.

19.2. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 4^{\frac{1}{x}}$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 3) $f(x) = \frac{1}{7^x}$; 4) $f(x) = 0{,}35^x$.

19.3. Найдите область значения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2$; 2) $f(x) = 6^{x+2} + \frac{1}{4}$;

3) $f(x) = 2{,}5^x + 3$; 4) $f(x) = 0{,}7^{x-1} - 1$.

19.4. Какие значения принимает функция $y = 3^x$, если x принимает последовательно значения:

1) 0; 1; 2; 3; 4; ... ; 2) −1; −2; −3; −4; ... ;

3) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; ... ?

19.5. Какие из функций $y = f(x)$ являются возрастающими и какие убывающими:

1) $y = 4^x$; 2) $y = 10^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 4) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$?

19.6. 1) Какая из двух показательных функций возрастает быстрее при возрастании значений аргумента: $y = 2^x$ или $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$.

2) Какая из двух показательных функций убывает быстрее при возрастании значений аргумента: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ или $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

B

19.7. Используя свойства показательной функции, сравните следующие числа с единицей:

1) 11^{-5}; 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $(0{,}15)^{-3}$; 4) $(1{,}2)^{-2}$.

19.8. Сравните:

1) $(3{,}5)^{-\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3{,}5}\right)^{-\sqrt{2}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{1+\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$;

3) $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ и $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{3}-2}$; 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2\sqrt{3}}$ и $3^{\sqrt{3}}$.

19.9. Как расположены графики показательных функций относительно друг друга:

1) $y = 9^x$ и $y = 4^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

Рассмотрите случаи: $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$.

19.10. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1) $y = 2^x$ и $y = 4^x$; 2) $y = 2^x$ и $y = x^4$;
3) $y = 2^x$ и $y = x^2$; 4) $y = 2^x$ и $y = -3x^2$?

19.11. Какую числовую последовательность образуют значения показательной функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, соответствующие значениям аргумента x: 1; 2; 3; 4; ...?

19.12. Постройте графики функции посредством простейших преобразований:

1) $y = 2^{x+3} - 3$; 2) $y = 2 - 3^{x-1}$.

19.13. Сравните a^x при различных значениях x с 1, если:

1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$.

C

19.14. Каким образом можно построить график функции $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ используя график функции $y = a^x$?

19.15. Используя свойства показательной функции определите: верны ли следующие утверждения и обоснуйте свой ответ:

1) неравенства $a^x > a^3$ и $x > 3$ равносильны;

2) из неравенства $7^{x^2} > 7^x$ следует равносильное неравенство $x^2 < x$;

3) неравенства $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ и $2x < x - 1$ равносильны.

19.16. Можно ли среди всех значений функции $y = 3^{|x|}$ указать:

1) наибольшее значение; 2) наименьшее значение?

19.17. При каких значениях аргумента x соответствующие значения функции $y = 2^{2x}$ будут больше $\frac{1}{4}$?

19.18. Дана геометрическая прогрессия: 1; 3; 9; 27; 81; ... . Значениями какой показательной функции являются члены этой прогрессии и для каких значений аргумента?

ПОВТОРИТЕ

19.19. Решите уравнение:

1) $\sin^2 x - \cos x = 1$; 2) $\sin^2 x + 2\cos x = 0$.

19.20. Решите неравенство $f'(x) > 0$:

1) $f(x) = 2\cos 3x + 3x$; 2) $f(x) = -x^3 + 9x$.

19.21. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int\left(5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$; 2) $\int(\cos 2x - (2x + 1)^3)dx$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Степень, основание степени, показатель степени, уравнение, корень уравнения, возведение в степень, извлечение корня из действительного числа, показательная функция и ее свойства.

§ 20. ЛОГАРИФМ ЧИСЛА. ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Вы ознакомитесь с понятием логарифма числа.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Число, логарифм, десятичный логарифм, натуральный логарифм, число e

Если возвести число a в некоторую степень x, получим число b. Это можно записать в виде уравнения

$$a^x = b, \tag{1}$$

где a и b — заданные числа, x — переменная величина.

Следует отметить, что данное уравнение не всегда имеет корни.

Например, если в данном уравнении число a положительно, а число b отрицательно, то уравнение (1) не имеет корней, так как показательная функция всегда положительна, т. е. $a^x > 0$. Но если только a и b положительны и $a \neq 1$, то оно непременно имеет только один корень.

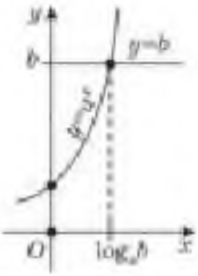


Рис. 58

Решим уравнение (1) графическим способом. Левая часть уравнения есть показательная функция, ее графиком служит кривая. Правую часть уравнения можно представить в виде линейной функции $y = b$, графиком которой служит прямая. Графики этих двух функций пересекаются в одной точке (рис. 58).

Абсцисса точки их пересечения является корнем уравнения (1). Корень уравнения (1) принято обозначать символом $\log_a b$, который читается: "Логарифм числа b по основанию a".

Определение. ***Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a*** *называется показатель степени x, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.*

Запись $\log_a b = x$ читается так: "Логарифм числа b по основанию a равен x".

ПРИМЕР

1. Найдем логарифмы чисел 25, 625 и $\frac{1}{125}$ по основанию 5.

Решение. Логарифм числа 25 по основанию 5 есть 2, так как $5^2 = 25$ или $\log_5 25 = 2$.

Логарифм числа 625 по основанию 5 есть 4, так как $5^4 = 625$ или $\log_5 625 = 4$.

Логарифм числа $\frac{1}{125}$ по основанию 5 есть -3, так как $5^{-3} = \frac{1}{125}$ или $\log_5 \frac{1}{125} = -3$.

Ответ: 2; 4; -3.

Итак, из определения логарифма числа следует, что

$$a^{\log_a b} = b \qquad (2)$$

Равенство (2) принято называть *основным логарифмическим тождеством*.

ПРИМЕР

2. 1) $3^{\log_3 27} = 27$; 2) $5^{\log_5 125} = 125$; 3) $10^{\log_{10}\frac{1}{100}} = \frac{1}{100}$.

Теперь рассмотрим решение примеров вида: 1) $a^x = b$; 2) $x^a = b$; 3) $a^c = x$, где по двум данным числам требуется найти третье число.

ПРИМЕР

3. Найдем логарифм числа 27 по основанию 9.

Решение. Пусть $\log_9 27 = x$, тогда $9^x = 27$ или $(3^2)^x = 3^3$, откуда $2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

ПРИМЕР

4. Найдем, при каком основании логарифм числа 16 равен 4.

Решение. Поскольку основание логарифма неизвестно, то можно написать: $\log_x 16 = 4$. По определению логарифма имеем: $16 = x^4$ или $2^4 = x^4$, откуда $x = 2$.

Ответ: 2.

ПРИМЕР

5. Найдем число, логарифм которого при основании 81 равен $-\frac{3}{4}$.

Решение. Обозначим искомое число через x, тогда $\log_{81} x = -\frac{3}{4}$. По определению логарифма числа можно записать: $x = 81^{-\frac{3}{4}}$ или $x = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3^{12}}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$, т. е. $x = \frac{1}{27}$.

Ответ: $\frac{1}{27}$.

ПРИМЕР

6. Найдем логарифмы следующих чисел:

1) 0,125 по основанию 2; 2) $\sqrt{2}$ по основанию $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ по основанию 3.

Решение. 1) $\log_2 0{,}125 = -3$, так как $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$, так как $\sqrt{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$.

Ответ: 1) -3; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$.

Вы узнаете свойства логарифма.

Свойства логарифма:

1) *Логарифм числа a по основанию a (a — любое положительное число) равен единице:*

$$\log_a a = 1.$$

2) *Логарифм числа 1 по основанию a равен нулю:*

$$\log_a 1 = 0.$$

3) *Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей:*

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

4) *Логарифм частного или дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя:*

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, \text{ где } b \text{ и } c \text{ — положительные числа.}$$

5) *Логарифм степени равен показателю степени, умноженному на логарифм основания степени:*

$$\log_a b^n = n \log_a b.$$

6) *Формула перехода к новому основанию:*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Приведем доказательства третьего и пятого свойств.

Докажем свойство 3 : $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Доказательство. Пусть b и c — два положительных числа, тогда по основному свойству логарифма имеем: $b = a^{\log_a b}$, $c = a^{\log_a c}$.

Перемножив почленно эти равенства получим: $bc = a^{\log_a b + \log_a c}$.

По определению логарифма имеем: $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Докажем свойство 5: $\log_a b^n = n\log_a b$.

Доказательство. В самом деле, если обе части тождества $b = a^{\log_a b}$ возведем в n-ю степень, то получим: $b^n = a^{n\log_a b}$, откуда: $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$.

Самостоятельно обосновать справедливость остальных свойств.

Вы научитесь применять свойства логарифма для преобразования логарифмических выражений.

ПРИМЕР

7. Найдем: 1) $\log_3(243 \cdot 729)$; 2) $\log_5 \dfrac{0{,}008}{125}$; 3) $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$.

Решение. 1) $\log_3(243 \cdot 729) = \log_3 243 + \log_3 729 = 5 + 6 = 11$;

2) $\log_5 \dfrac{0{,}008}{125} = \log_5 0{,}008 - \log_5 125 = -3 - 3 = -6$; 3) $\log_3 \log_4 4^{\frac{1}{9}} =$

$= \log_3\left(\dfrac{1}{9}\log_4 4\right) = \log_3\left(\dfrac{1}{9} \cdot 1\right) = \log_3 3^{-2} = -2$.

Ответ: 1) 11; 2) −6; 3) −2.

Объяснить ход решения данного примера самостоятельно.

ПРИМЕР

8. Дан логарифм числа N по основанию a^k. Нужно найти логарифм этого же числа по другому основанию a.

Решение. По формуле перехода к новому основанию имеем:

$$\log_{a^k} N = \frac{\log_a N}{\log_a a^k} = \frac{\log_a N}{k} = \frac{1}{k} \cdot \log_a N.$$

Следовательно, можем записать равенство $\log_{a^k} N = \dfrac{1}{k}\log_a N$.

Все вышеперечисленные свойства позволяют осуществить действие “нахождение логарифма” — логарифмирование любого алгебраического выражения.

Умение логарифмировать выражения позволяет по данному результату логарифмирования обратно найти то выражение, от которого получился этот результат.

Например, если $\log_a x = \log_a b + 3\log_a c - 4\log_a d$, то нетрудно сообразить, что $x = \dfrac{bc^3}{d^4}$.

Эту операцию называют *потенцированием.*

Одна из особенностей логарифма заключается в том, что если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа $k \neq 0$ имеет место равенство: $\log_a b = \log_{a^k} b^k$.

Например, $\log_3 4 = \log_{3^2} 4^2 = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{4}$ и т. д.

Вы ознакомитесь с понятиями десятичного и натурального логарифмов.

Для удобства в практике часто используются отдельные виды логарифмов.

Определение. *Логарифм числа по основанию* 10 *называется* ***десятичным логарифмом.***

Для обозначения десятичных логарифмов используется знак lg, при этом число 10, указывающее основание, не пишется.

Например, вместо $\log_{10}217$ пишется $\lg 217$; вместо $\log_{10}9$ пишется $\lg 9$ и т. д.

Десятичные логарифмы обладают тремя специфическими свойствами:

1) десятичный логарифм целого положительного числа, изображенного единицей с последующими нулями, есть целое положительное число, равное количеству нулей в записи данного числа, т. е. если $a = 10^n$, то $\lg a = \lg 10^n = n$;

2) десятичный логарифм положительной десятичной дроби, изображенной единицей с предшествующими нулями, равен n, где n — число нулей в записи этого числа, считая и нуль целых, т. е. при $a = 10^{-n}$, то $\lg a = \lg 10^{-n} = -n$;

3) десятичный логарифм рационального числа, не равного целой или нулевой степени числа 10, есть число иррациональное.

Например, $\lg 3$, $\lg 7$, $\lg 0{,}34$, $\lg 15$ — числа иррациональные.

Десятичные логарифмы являются очень удобными для упрощения вычислений. Однако при изучении высшей математики более удобными оказываются логарифмы по основанию $e = 2{,}7182818289...$.

(Доказано, что число e записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, т. е. число e — иррациональное).

Определение. *Логарифм по основанию числа e называется* ***натуральным логарифмом.***

Для обозначения натурального логарифма используется знак ln.

Например, вместо $\log_e 13$ пишется $\ln 13$.

Самостоятельно написать формулу перехода от натурального логарифма числа N к десятичному логарифму этого же числа.

1. Чем отличаются логарифмы взаимообратных чисел по одному и тому же основанию? Ответ обоснуйте.
2. Существуют ли логарифмы отрицательных чисел в области действительных чисел? Ответ обоснуйте.
3. Логарифмы каких чисел нужно знать, чтобы вычислить десятичные логарифмы всех натуральных чисел первого десятка?
4. Как можно вычислить $\ln 10$ зная значение $\lg e$?
5. Что больше: десятичный или натуральный логарифм данного числа N?
6. Какие из общих свойств логарифма присущи натуральному логарифму?

Упражнения

А

20.1. Найдите логарифмы чисел 1; 9; 81; 243; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{27}$ по основанию 3.

Вычислите **(20.2—20.3):**

20.2. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_{0,2} 0{,}04$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; 5) $\log_{23} 1$; 6) $\log_5 \frac{1}{125}$.

20.3. 1) $\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$;

2) $\log_2 7 - \log_2 63 + \log_2 36$;

3) $\log_3 8 - \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{2}$;

4) $\log_7 64 - \log_7 256 + \log_7 28$.

20.4. Напишите следующие показательные равенства в виде логарифмических:

1) $3^6 = 729$; 2) $4^5 = 1024$; 3) $10^4 = 10\,000$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; 6) $10^{3} = 0{,}001$.

20.5. Напишите следующие логарифмические равенства в виде показательных:

1) $\log_2 64 = 6$; 2) $\log_3 81 = 4$; 3) $\log_5 125 = 3$;

4) $\lg 100000 = 5$; 5) $\lg 0{,}01 = -2$; 6) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64} = 3$.

20.6. Чему равны логарифмы следующих чисел по основанию 10:

1) 100; 2) 0,001; 3) 10^n;

4) $\sqrt{10}$; 5) $\sqrt[3]{10^2}$; 6) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$?

20.7. Вычислите десятичные логарифмы:

1) $\lg 10000$; 2) $\lg 0{,}1$; 3) $\lg 0{,}0001$; 4) $\lg \sqrt{10}$.

20.8. Вычислите натуральные логарифмы:

1) $\ln e$; 2) $\ln e^{\frac{1}{3}}$; 3) $\ln \sqrt{e}$; 4) $\ln(\lg 10)$.

20.9. 1) Известно, что $\lg 5 \approx 0{,}699$. Найдите: $\lg \frac{1}{5}$; $\lg 0{,}05$; $-\lg 0{,}005$;

2) Известно, что $\lg 29 \approx 1{,}462$. Найдите: $\lg 29\,000$; $\lg 2{,}9$; $\lg 0{,}29$.

B

20.10. Вычислите:

1) $\log_{\frac{1}{5}} 9 + 2\log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{3}$; 2) $\log_3 8 + 3\log_3 \frac{9}{2}$;

3) $\log_7 196 - 2\log_7 2$; 4) $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3}$.

20.11. Прологарифмируйте следующие выражения:

1) $\lg(a^2 b^3)$; 2) $\lg(5a^2 x^2)$; 3) $\lg(mn)^3$;

4) $\lg\sqrt[3]{7a^3 b}$; 5) $\lg\left(4\sqrt[5]{2ab^3}\right)$; 6) $\lg\left(7a^8 b\sqrt[8]{c}\right)$.

20.12. Найдите неизвестное, используя определение логарифма:

1) $x = \log_3 27$; 2) $y = \log_2 16$; 3) $z = \log_5 625$;

4) $x = \log_2 0{,}125$; 5) $\log_{\frac{3}{2}} y = 2$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} z = -3$.

Найдите значения выражений (20.13—20.14):

20.13. 1) $\dfrac{25^{\log_5 2} + 1}{49^{\log_7 4}}$; 2) $\dfrac{16^{0,5\log_4 10}}{10^{\lg 4} + 1}$;

3) $25^{2 \cdot \log_5 2} + 7^{-\log_7 3}$; 4) $\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 36 + \frac{1}{2}\log_4 \frac{25}{81}$.

20.14. 1) $\log_2 12 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{4}{5}$; 2) $(\log_5 128)\left(\log_2 \frac{1}{125}\right)$;

3) $3^{2-\log_3 5} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 5}$; 4) $9^{3 \cdot \log_3 54} + 7^{\cdot \log_7 4}$.

20.15. Сравните:

1) $9^{\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{2}{3}\right)}$ и $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt[3]{3}$ и $\left(\frac{1}{36}\right)^{\log_6 2}$.

20.16. При каком основании выполняется равенство:

1) $\log_x 36 = 0{,}5$; 2) $\log_x 27 = \dfrac{3}{2}$;

3) $\log_x 64 = 1{,}2$; 4) $\log_x 2 = -0{,}5$?

20.17. Логарифмы каких натуральных чисел, не превосходящих 100, можно вычислить, зная значения $\lg 2$ и $\lg 3$?

20.18. Разность десятичных логарифмов двух чисел равна:

1) 1; 2) 2; 3) 3.

Найдите отношение этих чисел.

C

20.19. Выразите: 1) $\lg 25$, если $\lg 2 = a$;

2) $\log_{50} 8$, если $\lg 5 = a$ и $\lg 2 = c$;

3) $3\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} b$, если $\log_b a = 3$;

4) $\log_{\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}}\right) + \log_{\sqrt{ab}}(a\sqrt{a})$, если $\log_a b = 4$.

Вычислите (20.20—20.21):

20.20. 1) $343^{2\log_{49} 2}$; 2) $4^{2\log_{32} 10}$; 3) $\sqrt{5}^{2\log_5 3}$;

4) $9^{\log_{27}\sqrt{5}}$; 5) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\log_{\frac{1}{9}} 4}$; 6) $4^{\log_8 125}$.

20.21. 1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$; 2) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; 3) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$;

4) $\log_{\sqrt{3}} \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; 5) $\log_{\frac{8}{27}} \log_{25} 125$; 6) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

20.22. Между какими целыми числами заключается значение логарифма числа:

1) 7, 30, 120, 495 — по основанию 2;

2) 3, 18, 134 и 1782 — по основанию 10?

20.23. Между какими отрицательными целыми числами заключаются логарифмы чисел:

1) 0,07; 0,018; 0,00125; 0,00005 — по основанию 10;

2) $\frac{1}{15}$; $\frac{3}{80}$; $\frac{1}{120}$ — по основанию 2?

20.24. 1) Чему равен логарифм числа $\sqrt[5]{8}$ по основанию: 2; $\frac{1}{2}$; 4; 16; 64?

2) При каком основании a значение $\log_a \sqrt{27}$ равно: $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$?

20.25. Показать в общем виде, что если числа образуют геометрическую прогрессию с положительными членами, то логарифмы этих чисел образуют арифметическую прогрессию.

Найдите значения выражений **(20.26—20.28)**:

20.26. 1) $0{,}25(1 + 4^{\log_2 5})^{\log_{26} 4}$; 2) $10^{2 - \lg 2} - 25^{\log_5 4}$;

3) $81^{\log_9 2 - 0{,}25\log_3 2}$; 4) $81^{-\log_{0,5} 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 4 + 2{,}5}$;

5) $$\frac{\log_2^2 14 + (\log_2 14)(\log_2 56) - 2\log_2^2 56}{\log_2 14 - \log_2 56};$$

6) $$\frac{\log_5^2 7\sqrt{5} + 2\log_5^2 7 - 3\left(\log_5 7\sqrt{5}\right)(\log_5 7)}{\log_5 7\sqrt{5} - \log_5 49};$$

7) $$\frac{\log_4^2 12 + 3\log_4^2 \frac{1}{3} + 4(\log_4 12)\left(\log_4 \frac{1}{3}\right)}{\log_4 12 + 3\log_4 \frac{1}{3}};$$

8) $$\frac{2\log_2^2 3 - \log_2^2 12 - \log_2 3 \cdot \log_2 12}{2\log_2 3 + \log_2 12}.$$

20.27. 1) $27^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{3}} + 4 \cdot 5^{\log_{0,04} 9} - 2^{\log_8 125} \cdot \log_{32} 16$;

2) $7^{\frac{2}{\log_2 7}} \cdot 4^{\log_4 6} + 4 \cdot 6^{\frac{1}{\log_4 6}} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\log_3 27}$;

3) $\left(3^{\log^2_{\sqrt{3}} 2} - 4^{\log^2_{\sqrt{3}} 2}\right)^2 - 3^{\frac{1}{\log_5 3}}$;

4) $\left(3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}} - 5^{\frac{1}{\log_5 3}} + 0{,}008^{\log_{343} 49}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

5) $\left(2^{\frac{\log_2 5}{\log_5 2}} - 5^{\frac{1}{\log_5 2}} + 5^{\log_5 25}\right)^{\frac{1}{2}}$.

20.28. 1) $(\log_3 2 + \log_2 81 + 4)(\log_3 2 - 2\log_{18} 2)\log_2 3 - \log_3 2$;
2) $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7)\log_7 2 - \log_2 7$;
3) $(\log_6 3 + \log_3 1296 + 4)(\log_6 3 - \log_{108} 9)\log_3 6 - \log_6 3$;
4) $(\log_5 7 + 9\log_7 5 + 6)(\log_5 7 - 3\log_{875} 7)\log_7 5 - \log_5 7$;
5) $(\log_2 5 + 16\log_5 2 + 8)(\log_2 5 - 4\log_{80} 5)\log_5 2 - \log_2 5$;
6) $(\log_4 6 + \log_6 4 + 2)(\log_4 6 - \log_{24} 6)\log_6 4 - \log_4 6$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

20.29. 1) Подготовьте сообщение об истории развития понятия логарифма числа.

2) Подготовьте сообщение об ученом-математике Джоне Непере и его "удивительной таблице логарифмов".

Дж. Непер
(1550—1617)

ПОВТОРИТЕ

20.30. Найдите значение углового коэффициента касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $y = x^2 - x$, $x_0 = 2$; 2) $y = \sqrt{4 - x}$, $x_0 = 3$;

3) $y = \dfrac{3x}{x+1}$, $x_0 = 2$.

20.31. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$; 2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$;
3) $f(x) = x - 2\sin x$.

20.32. Постройте график функции в программе "Живая геометрия" и найдите множество значений:

1) $f(x) = 2^{x+1}$; 2) $f(x) = 2^{x-2}$;
3) $f(x) = -e^{x}$; 4) $f(x) = -e^{2x}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, график функции, обратная функция, показательная функция и ее график, свойства показательной функции, логарифм числа, нахождение логарифма, основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов.

§21. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Вы ознакомитесь с понятием логарифмической функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, график функции, логарифмическая функция, область определения, множество значений, свойства функции

Вы знаете: Функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию, если всякая прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = f(x)$ не более, чем в одной точке (если y_0 не принадлежит множеству значений функции $f(x)$, то прямая $y = y_0$ не пересекает график функции $y = f(x)$, значит $y = f(x)$ обратима).

Очевидно, если функция $y = f(x)$ возрастает или убывает, то она обратима, а значит имеет обратную функцию.

Показательная функция $y = a^x$ монотонна, следовательно, она имеет обратную функцию.

Если $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, то по определению логарифма $x = \log_a y$. Поменяв местами переменные x и y получим функцию $y = \log_a x$. Эта функция является обратной функцией показательной функции.

Определение. *Функция, обратная показательной функции, называется* ***логарифмической функцией.***

Логарифмическая функция имеет вид $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

С помощью логарифмических функций выражаются многие зависимости, имеющие важное научно-практическое значение.

Например, формула:

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p},$$

где p_0 — атмосферное давление над уровнем моря, k — некоторая известная постоянная, $e \approx 2{,}718$, h — высота над уровнем моря, p — атмосферное давление на высоте h над уровнем моря. Данная формула используется для определения высоты над уровнем моря.

Здесь p — независимая переменная, или аргумент, а h — зависимая переменная, или функция. По этой формуле можно определить высоту h над уровнем моря по данному атмосферному давлению p на этой высоте. Эту формулу можно получить, решив уравнение относительно h:

$$p = p_0\, e^{-kh},$$

или другая формула:

$$t = \frac{100}{p} \ln \frac{A}{a},$$

образовавшаяся при органическом росте вклада через t лет, где a обозначает первоначальный вклад; p — число годовых процентов; A — сумма.

Здесь A можно рассматривать как независимую переменную, а t как зависимую. По этой формуле можно определить t по данному значению A. Эту формулу можно получить, решив уравнение относительно t:

$$A = ae^{\frac{pt}{100}}.$$

Перечислим свойства логарифмической функции $y = \log_a x$:

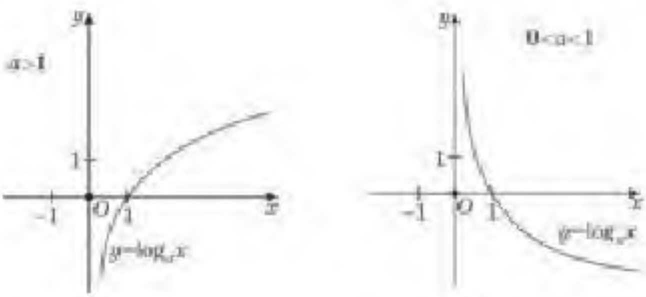
1) область определения функции — множество положительных чисел, т. е. R_+;

2) множество значений — множество всех действительных чисел, т. е. R;

3) при $a > 1$ функция возрастает, при $0 < a < 1$ функция убывает;

4) в области определения функция непрерывна.

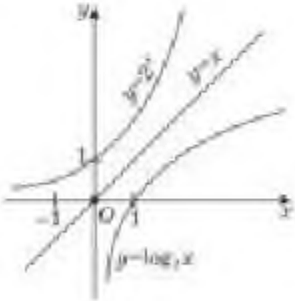
Общий вид графика логарифмической функции показан на рисунке 58.1, 2.



1) 2)

Рис. 58

На рисунке (рис. 59.1, 2) представлены графики показательной функции $y = 2^x$ и обратной ей функции $y = \log_2 x$ (где $a = 2$), а также графики показательной функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и обратной ей функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (где $a = \frac{1}{2}$).



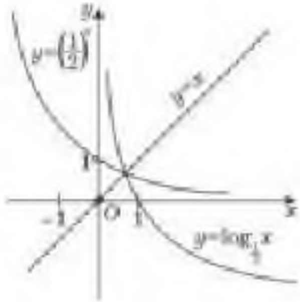


Рис. 59

Используя рисунки 59.1 и 59.2 можно сравнить график функции $y = \log_a x$ с графиком соответствующей ей показательной функции $y = a^x$. Сравнивая представленные рисунки, можно утверждать, что графики логарифмической функции и соответствующей ей показательной функции симметричны относительно прямой $y = x$.

ПРИМЕР

1. На одной координатной плоскости построим графики функций $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ и $y = \lg x$. Выясним как расположены графики.

Решение. Чтобы получить представление о поведении рассматриваемых функций, вначале составим таблицу приближенных значений функций $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ и $y = \lg x$:

Таблица 32

x	0,1	1	10	...
$\lg x$	−1	0	1	...

Таблица 33

x	0,1	1	10	...
$\log_{\frac{1}{10}} x$	1	0	−1	...

По найденным значениям координат точек построим на одном и том же рисунке графики указанных двух функций (табл. 32, 33). По рисунку видно, что графики логарифмических функций, основания которых взаимообратны, расположены симметрично относительно оси Ox (рис. 60.1).

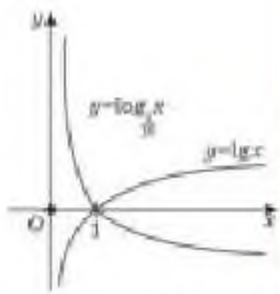


Рис. 60.1

Вы научитесь находить область определения логарифмической функции.

ПРИМЕР

2. Найдем область определения функции

$$y = \lg(x^2 - 5x + 6) + \frac{\log_2 \sqrt{x - 5}}{17}.$$

Решение. Учитывая, что область определения логарифмической функции только положительные числа, составим следующую систему:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0, \\ x - 5 > 0. \end{cases}$$

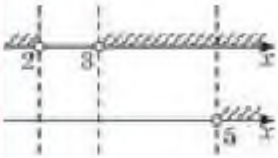


Рис. 60.2

Изобразим отдельно решение каждого неравенства системы на координатной прямой (рис. 60.2). Пересечение множеств решений этих неравенств, т. е. промежуток $(5; +\infty)$ является областью определения данной функции.

Ответ: $(5; +\infty)$.

?

1. Что общего и каковы различия в свойствах логарифмической и показательной функций?
2. С помощью какого вида движения (геометрического преобразования) можно получить график логарифмической функции ($y = \log_a x$) из графика показательной функции ($y = a^x$)?
3. Через какую точку проходят графики всех логарифмических функций? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

21.1. Постройте схематически график функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \log_5 x$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$;

3) $f(x) = \log_{12,4} x$; 4) $f(x) = \log_{0,9} x$.

21.2. Определите, является ли функция $y = f(x)$ возрастающей или убывающей:

1) $f(x) = \log_8 x$; 2) $f(x) = \log_{0,1} x$;

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; 4) $f(x) = \lg x$.

21.3. Для каких значений аргумента соответствующие значения функции $y = \log_a x$ положительны и для каких отрицательны? Рассмотрите случаи: 1) $0 < a < 1$; 2) $a > 1$.

21.4. На основании какого свойства логарифмической функции можно утверждать, что:

1) $\lg 7 > \lg 5$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 7 < \log_{\frac{1}{3}} 5$?

Найдите области определений функции $y = f(x)$ (21.5–21.7):

21.5. 1) $f(x) = \log_2(x + 1)$; 2) $f(x) = \log_{0,7}(x - 8)$;

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3x + 4)$; 4) $f(x) = \log_5(2x - 1)$.

21.6. 1) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(2 - x)$; 2) $f(x) = \log_{2,5}(5 - 2x)$;

3) $f(x) = \log_5(11 - 4x)$; 4) $f(x) = \log_7(6 - 5x)$.

21.7. 1) $f(x) = \lg(3x - 1) + \lg(x^2 + x + 1)$;

2) $f(x) = \lg(x - 5) + \lg(x^2 + x + 2)$;

3) $f(x) = \log_3(x - 1) + \log_2(x + 5)$;

4) $f(x) = \log_7(3 - x) - \log_{0,3}(x + 2)$.

B

21.8. Постройте схематически график функции $y = f(x)$ и перечислите ее свойства:

1) $f(x) = \log_3 x + 2$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 4$;

3) $f(x) = -\log_2 x$; 4) $f(x) = 2 - \log_4(x + 3)$.

21.9. Постройте график обратной функции к функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 4^x$; 2) $f(x) = 0,2^x$; 3) $f(x) = 2^{x+1}$; 4) $f(x) = 3^x - 2$.

Найдите области определения функции $y = f(x)$ (21.10—21.12):

21.10. 1) $f(x) = \sqrt{x+2} - \log_{1,1}(6 - 2x)$;

2) $f(x) = \sqrt{3-x} + \log_5(9 + 4x)$;

3) $f(x) = \log_2(x^2 - 1) + \sqrt{5-x}$;

4) $f(x) = \log_{0,8}(1 - x^4) - \sqrt{x-0,7}$.

21.11. 1) $f(x) = \log_3(x(x - 3)) - \log_3(x + 4)$;

2) $f(x) = \ln(3 + 5x) - \ln(4 - 9x^2)$;

3) $f(x) = \log_{0,5}(x^2 + x) + \sqrt{2-x}$;

4) $f(x) = \sqrt{1-x} + \ln(9 - x^2)$.

21.12. 1) $f(x) = \dfrac{\lg(3 + 2x - x^2)}{2 - x}$; 2) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 5x)}{x - 7}$;

3) $f(x) = \lg|x - 3| + \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$; 4) $f(x) = 10\lg|x + 4| - \dfrac{3}{\sqrt{8-x}}$.

C

21.13. Какую числовую последовательность составляют значения логарифмической функции $y = \log_{\sqrt{2}} x$ для значений аргумента 1; 2; 4; 8; ... , образующих геометрическую прогрессию? Запишите последовательность. Сделайте вывод.

21.14. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \log_{x-2}\left(\frac{2x}{x+1} - 1\right)$; 2) $f(x) = \log_{x+5}\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)$;

3) $f(x) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{9-x^2}\right)$; 4) $f(x) = \log_{3-x}\frac{x^2-4}{x}$.

21.15. Постройте график функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \lg|x^2 - 1|$; 2) $f(x) = \lg|x - 3|$;

3) $f(x) = |\lg|x||$; 4) $f(x) = 4 - |\log_3|x - 1||$.

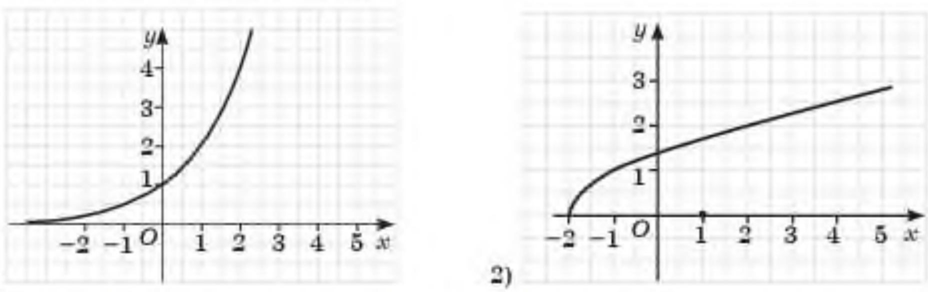
ПОВТОРИТЕ

21.16. Решите уравнение с помощью замены переменной на множестве комплексных чисел:

1) $z^4 - z^2 - 12 = 0$; 2) $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$;

3) $z - 3 + 2\sqrt{z-3} = 8$; 4) $(z + 1)^2(z^2 + 2z) = 12$.

21.17. Запишите аналитическую формулу функции, график которой изображен на рисунке 61:



1) 2)

Рис. 61

21.18. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность того, что значение произведения выпавших очков равно: 1) 6; 2) 3.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, обратная функция, графики взаимообратных функций, касательная к графику функции, угловой коэффициент касательной, непрерывная функция, производная функции, показательная функция, ее свойства и график, логарифмическая функция, ее свойства и график.

§22. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Вы научитесь находить производную показательной функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Показательная функция, логарифмическая функция, производная, первообразная, определенный интеграл

вы знаете: График показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) представляет собой непрерывную (гладкую) кривую, через каждую точку которой можно провести касательную. Существование касательной к графику функции в точке равносильно дифференцируемости функции в этой точке, поэтому показательная функция дифференцируема. График любой показательной функции проходит через точку (0; 1).

Рассмотрим угол, образованный касательной к графику функции $y = a^x$ в точке (0; 1) и положительным направлением оси Ox. Величина этого угла зависит от значения a. Например, при $a = 2$ он приблизительно равен 34°, а при $a = 3$ равен 48°. Другими словами, с возрастанием a от 2 до 3 угол, а значит и угловой коэффициент касательной к графику функции $y = a^x$ в точке (0; 1) постепенно увеличивается от $\mathrm{tg}34^\circ$ до $\mathrm{tg}48^\circ$.

Следовательно, можно предположить, что существует график такой показательной функции, для которого рассматриваемый угол равен 45°. Основанием этой функции является число e. Получаем показательную функцию $y = e^x$ (рис. 62.1).

Таким образом, существует значение основания a, для которого график функции $y = a^x$ обладает следующим свойством: касательная к нему в точке (1; 0) образует с положительным направлением оси Ox угол в 45°. Этим самым выделяется функция $y = e^x$.

Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = e^x$ в точке (0; 1) равен $\mathrm{tg}45^\circ$, т. е. 1. Но он может быть выражен и иначе. Значению x в точке $x_0 = 0$ дадим приращение Δx. Соответствующее значение Δy будет равно $e^{\Delta x}$.

Через две точки $A(0;\ 1)$ и $B(\Delta x;\ e^{\Delta x})$ проведем секущую. Угол, образованный секущей и положительным направлением оси Ox, обозначим через β (рис. 62.2).

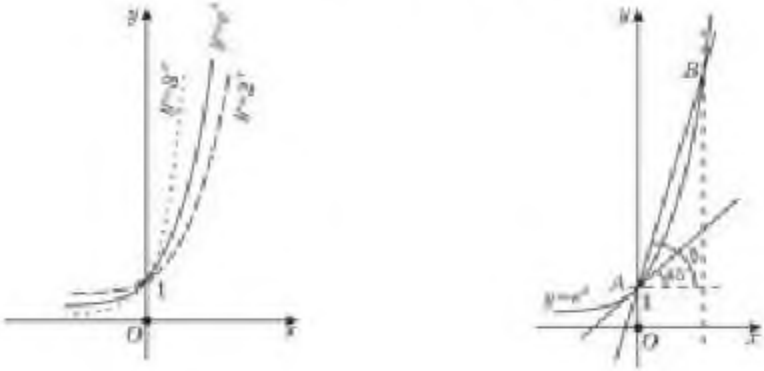
Тогда имеем: $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

При $\Delta x \to 0$ секущая стремится занять положение касательной к графику функции $y = e^x$ в точке $A(0;\ 1)$, и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \operatorname{tg}45^\circ = 1.$$

Таким образом, мы получили важное равенство:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 \text{ или } \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1. \qquad (1)$$



1) 2)

Рис. 62

Теорема 1. *Показательная функция $y = e^x$ дифференцируема в каждой точке области определения и ее производная находится по формуле:*

$$y' = (e^x)' = e^x. \qquad (2)$$

Доказательство. Найдем сначала приращение функции $y = e^x$ в точке x_0:

$$\Delta y = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1).$$

Пользуясь равенством (1) найдем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$$

Итак, по определению производной следует, что

$$y' = e^x \text{ или } (e^x)' = e^x. \ \blacksquare$$

ПРИМЕР

1. Найдем производную функции $f(x) = e^{5x}$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, воспользуемся формулой (2) и формулой производной сложной функции:

$$f'(x) = (e^{5x})' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x}.$$

Ответ: $5e^{5x}$.

Нам известно, что *натуральным логарифмом* называется логарифм по основанию e: $\ln x = \log_e x$.

Заметим, что $e^{\ln a} = a$, так как $e^{\ln a} = e^{\log_e a} = a$ (основное логарифмическое тождество), поэтому любую показательную функцию $y = a^x$ можно записать в виде: $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$ или

$$a^x = e^{x \ln a}. \qquad (3)$$

Теорема 2. *При любом положительном a функция $y = a^x$ дифференцируема в каждой точке области определения и*

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (4)$$

Доказательство. Функцию $y = a^x$ запишем в виде: $a^x = e^{x \ln a}$. Используем формулу (2) и формулу производной сложной функции.

Тогда:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

ПРИМЕР 2. Найдем производную функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 7^x$; 2) $f(x) = 4^{-3x}$.

Решение. Для решения примеров используем формулу производной показательной функции (4) и формулу производной сложной функции. Тогда имеем:

1) $(7^x)' = 7^x \ln 7$; 2) $(4^{-3x})' = 4^{-3x} \cdot \ln 4 \cdot (-3x)' = -3 \cdot 4^{-3x} \ln 4$.

Ответ: 1) $7^x \ln 7$; 2) $-3 \cdot 4^{-3x} \ln 4$.

ПРИМЕР 3. Исследуем функцию $y = xe^x$ на возрастание, убывание и экстремум.

Решение. Для этого найдем производную этой функции:

$y' = (xe^x)' = x' \cdot e^x + x\,(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$ или $y' = e^x(1 + x)$.

Так как $e^x > 0$ для любого x, то знак y' совпадает со знаком $1 + x$. Следовательно, $y' > 0$ на промежутке $(-1; +\infty)$. Так как функция $y = xe^x$ непрерывна на R, значит она непрерывна и в точке $x = -1$. Следовательно, данная функция возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$. На промежутке $(-\infty; -1)$ имеем $y' < 0$, поэтому функция убывает на промежутке $(-\infty; -1]$. В точке $x_0 = -1$ производная равна 0 и в ее окрестности меняет знак с "$-$" на "$+$". Значит, точка $x_0 = -1$ является точкой минимума.

Ответ: функция возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; -1]$, $x = -1$ точка минимума.

Вы научитесь находить производную логарифмической функции.

Через каждую точку графика показательной функции $y = a^x$ можно провести касательную, а существование касательной к графику функции означает ее дифференцируемость в каждой точке. Но функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ взаимообратны, поэтому график логарифмической функции симметричен графику показательной функции относительно прямой $y = x$. Значит, функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ является непрерывной функцией. Тогда через каждую точку графика логарифмической функции тоже можно провести касательную. Следовательно, логарифмическая функция дифференцируема в каждой точке области определения.

Прежде чем вывести формулу производной логарифмической функции, рассмотрим производные взаимообратных функций.

Теорема 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимообратны, и одна из них, допустим, функция $f(x)$, имеет производную в точке x_0, отличную от нуля, то обратная ей функция $g(x)$ также в точке x_0 имеет производную, отличную от нуля, равную обратной величине производной функции $f(x)$, т. е.*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (5)$$

Доказательство.

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Значит, производная логарифмической функции находится по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (6)$$

Самостоятельно доказать правильность формулы (6), используя соотношение производных взаимообратных функций (5).

Так как $\ln e = 1$, то формула производной $y = \ln x$ имеет вид:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (7)$$

ПРИМЕР

4. Найдем производные функции $y = f(x)$:
1) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$; 2) $f(x) = \ln(2 + 5x)$.

Решение. 1) По формуле производной логарифмической функции (6) имеем:

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)' = \frac{1}{x \ln \frac{1}{3}}.$$

2) Используя формулу (7) и формулу производной сложной функции получим:

$$(\ln(2 + 5x))' = \frac{5}{2 + 5x}.$$

Ответ: 1) $\frac{1}{x \ln \frac{1}{3}}$; 2) $\frac{5}{2 + 5x}$.

ПРИМЕР

5. Исследуем функцию $y = x^2 \ln x$ на возрастание, убывание и найдем точки экстремума.

Решение. Используем алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания. Вначале найдем производную функции:

$$y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = 2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right).$$

Найдем точки, в которых производная функции равна нулю.

$$2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right) = 0, \text{ тогда } x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Учитывая, что $x > 0$, получаем два промежутка: $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$. Определяя знак производной на полученных промежутках имеем: $y' > 0$ на промежутке $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ и поэтому функция на этом промежутке возрастает. На промежутке $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ производная отрицательна, поэтому функция на этом промежутке убывает. При переходе через точку $\frac{1}{\sqrt{e}}$ производная меняет знак с "–" на "+". Значит, в этой точке функция имеет минимум.

Ответ: на промежутке $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ функция убывает, на промежутке $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ — возрастает, $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ точка минимума.

Вы научитесь находить первообразную показательной функции.

Выведенные формулы производных показательной и логарифмической функций позволяют получить следующие табличные интегралы:

$\int e^x dx = e^x + C$; $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

ПРИМЕР

6. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -\frac{4}{x}$, $y = -1$, $x = 1$ и $x = 3$.

Решение. Плоская фигура, ограниченная данными линиями, изображена на рисунке 63.

Для решения данного примера прежде всего определим пределы интегрирования: $a = 1$, $b = 3$.

Данная фигура сверху ограничена графиком функции $y = -1$, а снизу — графиком функции $y = -\frac{4}{x}$ (рис. 63). поэтому искомая площадь:

$$S = \int_1^3 \left(-1 + \frac{4}{x}\right)dx = (-x + 4\ln|x|)\Big|_1^3 =$$

$$= -3 + 4\ln 3 + 1 - 4\ln 1 = 4\ln 3 - 2.$$

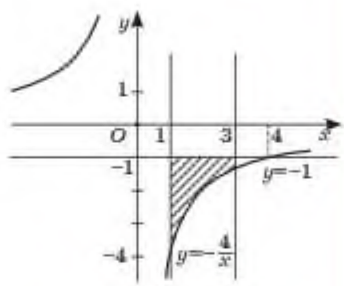


Рис. 63

Ответ: $4\ln 3 - 2$ (кв. ед.).

1. Почему для вывода формулы производной показательной функции из семейства функции $y = a^x$ специально выделяется функция $y = e^x$?
2. На чем основан вывод формулы производной логарифмической функции?
3. Каково соотношение между производными функций $y = e^x$ и $y = \ln x$?

Упражнения

A

22.1. Найдите производную заданной функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 3^{x^2 - 7x}$; 2) $f(x) = 2^{x + 3x^2}$;

3) $f(x) = 0{,}8^{1 - x^3}$; 4) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x}$.

22.2. Вычислите:

1) $f'(1)$, если $f(x) = 7 + x - 5\ln x$;

2) $f'(3)$, если $f(x) = 4 + \frac{1}{8}\ln 2x$.

22.3. Сравните с нулем:

1) $f'(1)$, если $f(x) = \log_{0,5}(2 + x)$;

2) $f'(4)$, если $f(x) = \log_3(5 + x)$;

3) $f'(4)$, если $f(x) = 0{,}2^{x - 3}$;

4) $f'(2)$, если $f(x) = 2{,}5^{x - 1}$.

22.4. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x\ln x$, $x_0 = 0{,}5$;

2) $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$, $x_0 = 2$.

22.5. Найдите промежутки возрастания, убывания функции $f(x)$:

1) $f(x) = 2\ln x + x^{-2}$; 2) $f(x) = x^2 \cdot e^x$;

3) $f(x) = x^3 \cdot e^{-3x}$; 4) $f(x) = x^3 - 3\ln(2x)$.

22.6. Докажите, что функция $y = f(x)$ убывает на заданном промежутке:

1) $f(x) = x\ln x$ и $\left(0; \frac{1}{e}\right)$;

2) $f(x) = x - \ln(2x - 1)$ и $(0{,}5;\ 1{,}5)$.

22.7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 10$;

3) $y = -\frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -0{,}3$, $x = -1$;

4) $y = -\frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -2$.

B

22.8. Вычислите значение производной функции $f(x)$ в данной точке:

1) $f(x) = \frac{5^x}{x^2 + 1}$, $f'(1)$;

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$, $f'(e)$;

3) $f(x) = e^{-x^2}$, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

22.9. Найдите общий вид первообразных функции $f(x)$:

1) $f(x) = \frac{2}{2x - 1}$;

2) $f(x) = e^{3x+2}$.

22.10. Сравните с нулем:

1) $f'(1)$, если $f(x) = \frac{x^2}{0{,}5^{1-2x}}$;

2) $f'(2)$, если $f(x) = \frac{3^{1-2x}}{x^{-4}}$;

3) $f'(1)$, если $f(x) = \ln(1{,}5 - x) - e^{x-1}$;

4) $f'\left(\frac{1}{3}\right)$, если $f(x) = \ln(2 - 3x) + x$.

22.11. Докажите, что функция:

1) $f(x) = x \cdot e^{2x-1}$ возрастает на промежутке $[-0{,}5; +\infty)$;

2) $f(x) = \log_5(1 - 3x)$ убывает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

22.12. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \ln(2x) + x^{-1}$, $x_0 = 0{,}5$;

2) $f(x) = e^{1+2x} - 4x^3$, $x_0 = -0{,}5$;

3) $f(x) = \ln(-0{,}5x) - x^2$, $x_0 = -2$;

4) $f(x) = e^{1-2x} - x^{-2}$, $x_0 = 0{,}5$.

22.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = x + \ln(-x)$ — на отрезке $[-4; 0{,}5]$;

2) $y = x + e^{-x}$ — на отрезке $[-\ln 4; \ln 2]$.

Можно считать, что $\ln 2 \approx 0{,}7$.

22.14. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $y = 4$, $x = e$; 2) $y = 1 + e^x$, $x = 0$, $x = -4$, $y = 3$.

C

22.15. Сравните с нулем:

1) $f'(-1)$, если $f(x) = e^{-1-x} + \ln(1 - e^x)$;
2) $f'(-0,5)$, если $f(x) = e^{1+2x} \ln(-x)$.

22.16. Докажите, что функция:

1) $y = 0,4^{1-5x}$ на множестве действительных чисел возрастает;
2) $f(x) = 2^{1-2x}$ на множестве действительных чисел убывает;
3) $\varphi(x) = x^3 + e^{2+3x}$ на множестве действительных чисел возрастает;
4) $h(x) = e^{-x} - x^5$ на множестве действительных чисел убывает.

22.17. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $g(x) = e^{3x-6}$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = x^{-2} \cdot \ln(4x + 3)$, $x_0 = -0,5$;
3) $f(x) = x^{-2} \cdot \ln(2x - 3)$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = x^{-2} \cdot e^{1+2x}$, $x_0 = -0,5$.

22.18. Найдите значения x, при которых производная функции $y = x + 2\ln x$:

1) равна нулю; 2) положительна;
3) отрицательна; 4) неотрицательна.

22.19. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 - 2\ln x$ на промежутке $[2; e^2]$.

22.20. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = e^{2x}$, касательной к ней в точке (0; 1) и прямой $x = 1$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

22.21. Подготовьте сообщение о развитии понятий *показательная* и *логарифмическая функции*.

ПОВТОРИТЕ

22.22. Упростите выражение:

1) $((b^{-\frac{3}{7}} \cdot y^{-0,8})^3 \cdot b^{\frac{3}{7}} \cdot y^{0,4})^{-1}$; 2) $((a^{-\frac{2}{7}} \cdot y^{\frac{3}{14}})^{3,5} \cdot y^{\frac{7}{4}} \cdot a^{-3})^{-1}$.

22.23. Найдите значение выражения:

1) $4^{1-\log_2 1,5-\log_2\frac{1}{3}} - \log_3 243$; 2) $\log_9 27 + \dfrac{\log_3 6}{\log_{18} 3} - \dfrac{\log_3 2}{\log_{54} 3}$.

22.24. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $f(x) = (3x-1)^2 - 2\sqrt{x^5}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 6x^{\frac{7}{3}} - 5\sqrt[5]{x^2} - 3x + 1$, $x_0 = 1$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{x+2}{343-49^x}$:

A) $(-\infty; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$; B) $(-\infty; 1,5) \cup (1,5; 2) \cup (2; +\infty)$;

C) R; D) $(-\infty; -1,5) \cup (-1,5; +\infty)$.

2. Вычислите $\log_{1,2}\left[\dfrac{25}{36}\cdot\left(\dfrac{6}{5}\right)^{3,2}\right]$:

A) $-1,2$; B) $1,2$; C) $-\dfrac{5}{6}$; D) $-5,2$.

3. Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{625}\right)^{-\log_5 a} - 49^{1+\log_7 a}$:

A) $49a^2 - a^4$; B) $a^2 - 49a^4$; C) $a^4 - 49a^2$; D) $a^4 + 49a^2$.

4. Найдите область определения функции $y = \log_{3,4}(-2x^2 + 3x - 1)$:

A) $(-1; -0,5)$; B) $(-\infty; 0,5) \cup (1; +\infty)$;

C) $(0,5; 1)$; D) $(-\infty; 0,5] \cup [1; +\infty)$.

5. Расположите числа $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; 1; $4^{-\sqrt{3}}$; 8 в порядке возрастания:

A) $4^{-\sqrt{3}}$; 8; 1; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; B) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; $4^{-\sqrt{3}}$; 1; 8;

C) 8; 1; $4^{-\sqrt{3}}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; D) $4^{-\sqrt{3}}$; 1; 8; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$.

6. Дано: $\log_{22} 9 = a$ и $\log_{22} 46 = b$. Найдите $\log_{81} 414$:

A) $\dfrac{a+b}{2a}$; B) $\dfrac{a+b}{2b}$; C) $\dfrac{b-a}{2b}$; D) $\dfrac{a+b}{b}$.

7. Найдите значение производной функции $y = \log_7(\cos 2x)$ при $x = \dfrac{\pi}{8}$:

A) $-\dfrac{2}{\ln 7}$; B) $\dfrac{2}{\ln 7}$; C) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{\ln 7}$; D) $2\ln 7$.

8. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = xe^{-3x} + 4$ в точке с абсциссой $x = -1$:

A) $y = 4e^3x + 3e^3 + 4$; B) $y = 2e^3x + 3e^3$;

C) $y = 4e^3x - 5e^3 + 4$; D) $y = e^3x + 3e^3 - 4$.

9. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = x^3 - 3\ln x$:

A) R — возрастает;

B) $[1; +\infty)$ — возрастает, $(0; 1]$ — убывает;

C) $(0; 1]$ — возрастает, $[1; +\infty)$ — убывает;

D) $(0; +\infty)$ — возрастает.

10. Найдите точки экстремума функции $y = 0{,}5x^2 - 6x + 2\ln x^4$:

A) $x_{max} = 4$, $x_{min} = 2$; B) не имеет точек экстремума;

C) $x_{max} = 2$, $x_{min} = 4$; D) $x_{max} = 1$, $x_{min} = 8$.

11. Вычислите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2e^x$ на отрезке $[-1; 2]$:

A) $4e^2$; $\frac{1}{e}$; B) $\frac{1}{e}$; 0; C) e; 0; D) $4e^2$; 0.

12. Вычислите интеграл $\int_1^2 \left(3^x - \frac{3}{x}\right)dx$:

A) $\frac{6}{\ln 3} + 3\ln 2$; B) $\frac{3}{\ln 3} - \ln 8$;

C) $\frac{6}{\ln 3} - 3\ln 2$; D) $\frac{9}{\ln 3} - 3\ln 2$.

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y = 0{,}5^x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$:

A) $2\ln 2 + 0{,}75$; B) $\frac{2\ln 2 + 1}{4\ln 2}$; C) $\frac{1}{4\ln 2}$; D) $\frac{\ln 4 - 1}{4\ln 2}$.

Тестовые задания "Математическая грамотность"

14. В начале рабочего дня Шолпан, Айгуль и Раушан получили одинаковые заказы на изготовление салфеток. Айгуль может выполнить это задание за 8 ч, Шолпан за 9 ч, а Раушан за 12 часов. Мастер поручил объединить заказы и выполнить всю работу за 8 ч к концу рабочего дня. Найдите совместную производительность в час. Смогут ли они выполнить эту работу за 8 часов:

A) $\frac{25}{72}$, нет; B) $\frac{23}{72}$, нет; C) $\frac{23}{72}$, да;

D) $\frac{25}{72}$, да; E) $\frac{7}{36}$, нет?

15. Вкладчик решил положить в банк на депозит 100 000 тенге. Известно, что в первом банке вклад возрастает один раз в год на 12%, а во втором он возрастает ежемесячно на 1% от находящейся на депозите суммы. В каком из банков доход будет больше и на сколько:
A) в первом банке больше на 680 тг;
B) в первом банке больше на 775 тг;
C) в обоих банках доход одинаков;
D) во втором банке больше примерно на 682 тг;
E) во втором банке больше примерно на 648 тг?

16. Четыре ученика — Марат, Даурен, Азамат и Сергей — заняли на математической олимпиаде четыре первых места. На вопрос, какие места они заняли, были даны ответы:
1) Даурен — второе, Марат — третье;
2) Сергей — второе, Даурен — первое;
3) Азамат — второе, Марат — четвертое.
Какое место занял каждый из них, если в каждом ответе правильной оказалась лишь одна часть:
A) Марат занял III место, Азамат — II, Даурен — I и Сергей — IV место.
B) Марат занял III место, Азамат — I место, Даурен — II и Сергей — IV место.
C) Марат занял IV место, Азамат — I место, Даурен — II и Сергей — III место.
D) Марат занял III место, Азамат — I место, Даурен IV и Сергей — II место.
E) Марат занял IV место, Азамат — II место, Даурен — I и Сергей — III место?

17. Известно, что функция $f(x)$ периодическая, с периодом $T = 4$ и $f(1) = 3$, $f(4) = 5$. Тогда значение выражения $2f(0) - 3f(9)$ равно:
A) 4; B) –1; C) –3; D) 2; E) 1.

18. Каждое простейшее животное инфузория-туфелька размножается делением на 2 части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 320:
A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Выражение, тождественное преобразование выражения, показательная функция и ее свойства, уравнение, система уравнений, равносильные уравнения, равносильные системы уравнений.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 23. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Вы ознакомитесь с понятием показательного уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, показательное уравнение, основание степени, показатель степени, посторонний корень, решение уравнения

Определение. *Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется* ***показательным уравнением.***

Например:

$2^x = \frac{1}{16}$; $\sqrt[3]{5^x} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}}$; $3^{x+1} + 3^x = 108$ и т. д.

Показательные уравнения в основном решаются тремя способами:

1) способ приведения к одинаковому основанию;
2) способ введения новой переменной;
3) графический способ.

Вы научитесь решать показательные уравнения способом приведения к одинаковому основанию.

АЛГОРИТМ

Способ приведения к одинаковому основанию.

При решении показательных уравнений данным способом применяется следующий алгоритм:

1) обе части уравнения приводим к одинаковому основанию;
2) приравниваем показатели степеней левой и правой частей уравнения, в результате чего получаем равносильное уравнение, способ решения которого известен;
3) решаем полученное уравнение;
4) с помощью проверки определяем, какие из полученных значений переменной являются корнями данного показательного уравнения;
5) записываем решение исходного показательного уравнения.

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $27^x = \frac{1}{81}$.

Решение. Обе части уравнения приводим к основанию 3, тогда $3^{3x} = 3^{-4}$.

Приравниваем показатели степеней левой и правой частей последнего уравнения, т. е. получим равносильное уравнение: $3x = -4$.

Решив полученное уравнение имеем: $x = -\frac{4}{3}$.

Проверим, удовлетворяет ли найденное значение переменной данному показательному уравнению: $27^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81}$ или $\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{3^{12}}} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{81} = \frac{1}{81}$. Значит, удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

Вы научитесь решать показательные уравнения способом введения новой переменной.

АЛГОРИТМ

Способ введения новой переменной.

При решении показательного уравнения данным способом используется следующий алгоритм:

1) делаем замену переменной, приводящую к алгебраическому уравнению;

2) решаем полученное алгебраическое уравнение;

3) найденные значения корней алгебраического уравнения подставим в равенство, определяющее замену; найдем корни полученного уравнения;

4) с помощью проверки определяем, какие из этих корней являются корнями данного показательного уравнения;

5) записываем ответ.

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

Решение. Прежде всего степени, входящие в уравнение, запишем в следующем виде:

$3^{2x+5} = 3^{2x} \cdot 3^5 = 243 \cdot 3^{2x}$; $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$.

Тогда данное уравнение примет вид: $243 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x - 2 = 0$.

Положим, что $y = 3^x$. Тогда последнее показательное уравнение можно записать в виде: $243y^2 - 9y - 2 = 0$.

Решив это уравнение имеем: $y_1 = \frac{1}{9}$, $y_2 = -\frac{2}{27}$.

По условию замены в качестве решения последнего уравнения можем взять только первый корень $y_1 = \frac{1}{9}$. Второй корень $y_2 = -\frac{2}{27}$ отрицателен, а значение 3^x положительно при любом x.

Подставим найденное значение $y = \frac{1}{9}$ в равенство $y = 3^x$: $\frac{1}{9} = 3^x$ или $3^{-2} = 3^x$, отсюда следует, что $x = -2$.

Сделаем проверку: $3^{2 \cdot (-2) + 5} = 3^{-2+2} + 2$ или $3^1 = 1 + 2$, $3 = 3$.

Ответ: -2.

Вы научитесь решать показательные уравнения графическим способом.

Графический способ решения. Данный способ используется в тех случаях, когда в показательном уравнении $a^x = b$ число b нельзя представить в виде степени числа a. Для решения уравнения на одной координатной плоскости строят графики функций $y = a^x$ и $y = b$. Абсциссы точек пересечения графиков указанных функций будут решениями показательного уравнения.

Вы научитесь решать системы показательных уравнений.

Перейдем к рассмотрению решения системы показательных уравнений.

ПРИМЕР

3. Решим систему $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2^x - 3^y = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Решение. Умножив обе части второго уравнения системы на 2, имеем:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -\dfrac{6}{4}. \end{cases}$$

Почленно сложим уравнения и получим: $5 \cdot 2^x = \dfrac{5}{4}$ или

$2^x = 2^{-2}$, откуда $x = -2$.

Подставив значение $x = -2$ во второе уравнение системы, найдем значение переменной y: $2^{-2} - 3^y = -\dfrac{3}{4}$, $3^y = 1$, $3^y = 3^0$, $y = 0$.

Ответ: $(-2; 0)$.

ПРИМЕР

4. Решим систему показательных уравнений $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$

Решение. Первый способ. Первое уравнение системы почленно умножим на второе, тогда получится:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 2^y \cdot 3^x = 12 \cdot 18,$$
$$2^{x+y} 3^{x+y} = 216,$$
$$(2 \cdot 3)^{x+y} = (2 \cdot 3)^3.$$

Отсюда имеем:

$$x + y = 3.$$

y выразим через x, тогда: $y = 3 - x$.

Подставив в первое уравнение системы найденное выражение y, имеем:

$2^x \cdot 3^{3-x} = 12$, $\dfrac{2^x}{3^{x-3}} = 12$, $\dfrac{2^x}{3^x \cdot 3^{-3}} = 12$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{12}{27}$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ или

$x = 2$. Теперь найдем значение y : $y = 3 - 2 = 1$.

Решением системы является пара чисел $(2; 1)$.

Второй способ. Первое уравнение системы почленно разделим на второе, тогда получается:

$\dfrac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \dfrac{12}{18}$, $2^x \cdot 3^y \cdot 2^{-y} \cdot 3^{-x} = \dfrac{2}{3}$, $2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \dfrac{2}{3}$,

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^1$ или $x - y = 1$.

Далее выразив y через x и подставив найденное значение $y = x - 1$ в одно из уравнений системы, окончательно найдем решение системы.

Ответ: $(2; 1)$.

1. На какое свойство степени с положительным и отличным от единицы основанием опирается решение показательного уравнения способом приведения к одинаковым основаниям?
2. Всегда ли можно решить показательное уравнение способом приведения степеней к одинаковым основаниям? Ответ обоснуйте.
3. Справедливо ли утверждение о том, что если $a > 0$, $a \neq 1$ и p — любое положительное число, то уравнение $a^x = p$ имеет только один действительный корень (рациональный или иррациональный)? Ответ обоснуйте и приведите пример.
4. Согласны ли вы с утверждением, что действия над выражениями вида a^x, в которых x является любым действительным числом, можно выполнять по тем же правилам, по которым они выполняются над степенями с целым положительным показателем? Ответ обоснуйте.
5. В чем заключается основной смысл способа решения показательного уравнения введением новой переменной?

Упражнения

A

Решите уравнения (23.1—23.4):

23.1. 1) $3^x = 81$; 2) $4^x = 256$; 3) $2^x = \frac{1}{32}$; 4) $5^{x+1} = 125$.

23.2. 1) $8^x = 16$; 2) $25^x = \frac{1}{5}$; 3) $4^{3-2x} = 4^{2-x}$; 4) $2^{x-2} = 1$.

23.3. 1) $2^x + 2^{x+1} = 12$; 2) $7^{x+2} - 7^x = 336$;
3) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$; 4) $5^{x-2} - 5^{x-1} + 5^x = 21$.

23.4. 1) $3^{2x+1} = 9^{2x}$; 2) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$;
3) $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 9 = 0$; 4) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$.

Решите системы уравнений (23.5—23.6):

23.5. 1) $\begin{cases} 5^x + 5^y = 30, \\ 5^x - 5^y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1; \end{cases}$

23.6. 1) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 12, \\ 2^x - 3^y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32, \\ x - y = 2. \end{cases}$

B

Решите уравнения (23.7—23.9):

23.7. 1) $(0,1)^{4x^2-2x-2} = (0,1)^{2x-3}$; 2) $(0,3)^{x^2-2x+2} = 0,09$;
3) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} = 5^{x+1} - 5^{x+2}$; 4) $3^{x+2} - 7^{x+2} = 0$.

23.8. 1) $(0,25)^{x^2-4}=2^{x^2-1}$; 2) $27^{-1}\cdot 9^{2x}=243$;

3) $\sqrt[4]{5}\cdot 5^{3x}=125$; 4) $6^{x+1}\cdot\sqrt[3]{6}=216$.

23.9. 1) $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}=0$; 2) $x^2\cdot 5^x-5^{2+x}=0$;

3) $x^3\cdot 3^x+3^{x+3}=0$; 4) $x^3\cdot 8^x-8^{x+1}=0$.

Решите системы уравнений (23.10—23.11):

23.10. 1) $\begin{cases}2\cdot 4^x+3\cdot 5^y=11,\\5\cdot 4^x+4\cdot 5^y=24;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x-2^y=1,\\2^{3x}-2^{3y}=7.\end{cases}$

23.11. 1) $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=648,\\3^x\cdot 2^y=432;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576,\\y-x=4.\end{cases}$

C

Решите уравнения (23.12—23.15):

23.12. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=1$; 2) $\sqrt{6-x}\,(5^{x^2-7,2x+3,4}-25)=0$;

3) $4^{-x+0,5}-7\cdot 2^{-x}-4=0$; 4) $\sqrt{x+3}\,(7^{x^2-6,5x+5}-49)=0$.

23.13. 1) $8^x+3\cdot 4^x=12+2^{x+2}$;

2) $3^{1+3x}-9^x=3^{x+2}-3$;

3) $16^x+8^x-4\cdot 4^x+2^x+1=0$;

4) $3\cdot 8^x+4\cdot 12^x-18^x-2\cdot 27^x=0$.

23.14. 1) $5^x\cdot\sqrt[3]{8^{x-1}}=500$;

2) $x^2+4x+2^{\sqrt{x+2}}+3=0$;

3) $\sqrt{4^{2x}-3\cdot 2^{2x}}=10-2^{2x+1}$;

4) $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x=6$;

5) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x-\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x=14$;

6) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2$.

23.15. 1) $9\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{\left|1+\frac{1}{2}x\right|}=\frac{1}{81^x}$; 2) $2^{|x-1|}=0,5^{1-x}$;

3) $27^{|x+2|}=81^{x^2-1}$; 4) $(0,2)^{|x+3|}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$.

Решите системы уравнений (23.16—23.17):

23.16. 1) $\begin{cases} \sqrt[x-1]{49} = \sqrt[y-1]{343}, \\ 3^y = 9^{2x-y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5\cdot 3^{x-1} - 3\cdot 2^y = -1, \\ 3^{x+1} + 5\cdot 2^{y-1} = 14. \end{cases}$

23.17. 1) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 16^y - 4^x = 12, \\ 2^{x+1} - 4^y = 0. \end{cases}$

ПОВТОРИТЕ

23.18. Найдите производную функции $f(x)$:

1) $f(x) = \sin^2 3x + \cos^2 3x + e^{3x} - 3^{2x}$;

2) $f(x) = \sin^3 x + 2^{3x} - e^{3-x}$.

23.19. Найдите производную функции:

1) $f(x) = \ln\frac{x-1}{2x+1}$; 2) $f(x) = \ln\frac{(x-1)^2}{x+2}$;

3) $f(x) = \ln\frac{(2x-3)^3}{(x+1)^2}$; 4) $f(x) = x^3 + \ln\frac{(2x-5)^5}{(2x+3)^4}$.

23.20. Методом интегрирования по частям найдите:

1) $\int (x-3)\sin x dx$; 2) $\int x^2 \sin x dx$;

3) $\int xe^{2x} dx$; 4) $\int x\sin^2\frac{x}{2} dx$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Уравнение, корень уравнения, равносильные уравнения, система уравнений, равносильная система уравнений, способы решения системы алгебраических уравнений, показательные уравнения и способы их решения, логарифмы чисел и их свойства, логарифмическая функция, график и свойства логарифмической функции.

§24. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Вы ознакомитесь с понятием логарифмического уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, логарифмическое уравнение, логарифм числа, основание логарифма, выражение под логарифмом, область допустимых значений переменной, решение уравнения

Определение. *Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется* ***логарифмическим уравнением.***

Примерами логарифмических уравнений являются:

1) $\log_2(9^{x-1} + 5) = 4 + \log_2(3^{x-1} + 2)$;

2) $\lg(x + 6) - \lg(x - 3) = 5 - \lg125$;

3) $\lg\sqrt{x} = 4 - \sqrt{\lg x}$;

4) $\ln x = 3\ln(x + 1)$;

5) $\log_x 5 = 7$.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение

$$\log_a x = b, \qquad (1)$$

где a и b — данные числа, x — переменная величина.

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то такое уравнение имеет единственный корень

$$x = a^b.$$

Решение более сложных логарифмических уравнений, как правило, сводится либо к решению алгебраических уравнений, либо к решению уравнений вида (1).

Вы научитесь решать логарифмические уравнения способом непосредственного применения определения логарифма.

1. *Способ непосредственного применения определения логарифма.*

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $\log_x(x^3 - 5x + 10) = 3$.

Решение. По определению логарифма можно написать:

$$x^3 - 5x + 10 = x^3, \text{ откуда } x = 2.$$

Проверим найденное значение переменной:

$$\log_2(2^3 - 5 \cdot 2 + 10) = \log_2 8 = 3.$$

Значит, значение $x = 2$ удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: 2.

Вам известно, что областью определения логарифмической функции является множество положительных действительных чисел. Поэтому часто при решении логарифмических уравнений вначале определяется область допустимых значений переменной (ОДЗ). Затем решается данное уравнение и найденные значения переменной проверяются на принадлежность ОДЗ.

Вы научитесь решать логарифмические уравнения способом приведения к одинаковому основанию.

2. *Способ приведения уравнения к виду* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *с последующим применением потенцирования.*

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $\lg(x+5) - \lg(x^2 - 25) = 0$.

Решение. Найдем область допустимых значений переменной x. Для этого решим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x+5>0, \\ x^2-25>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+5>0. \\ (x-5)(x+5)>0. \end{cases}$$

Областью допустимых значений переменной x является промежуток $(5; +\infty)$. Преобразуя данное уравнение имеем: $\lg(x+5) = \lg(x^2-25)$.

Потенцируя уравнение имеем: $x+5 = x^2 - 25$ или $x^2 - x - 30 = 0$, откуда $x_1 = 6$ и $x_2 = -5$ (рис. 64). Число $x_2 = -5$ не принадлежит промежутку $(5; +\infty)$. Число $x_1 = 6$ принадлежит ОДЗ.

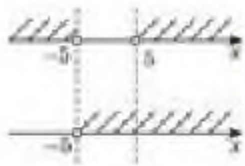


Рис. 64

Ответ: 6.

Вы научитесь решать логарифмические уравнения способом введения новой переменной.

3. *Способ введения новой переменной.*

ПРИМЕР

3. Решим уравнение $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$.

Решение. Обозначим $\log_2 x$ через y, тогда вместо исходного уравнения получим: $y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_1 = 2$; $y_2 = -1$.

Найдем теперь искомые значения x:

$$\log_2 x = 2,\ x_1 = 4;\ \log_2 x = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Оба эти значения x удовлетворяют исходному уравнению. В этом вы можете убедиться сами с помощью проверки.

Ответ: 4; $\frac{1}{2}$.

Вы научитесь решать логарифмические уравнения способом почленного логарифмирования.

4. *Способ почленного логарифмирования.*

ПРИМЕР

4. Решим уравнение $x^{\log_2 x - 2} = 8$.

Решение. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$x^{\log_2 x} \cdot x^{-2} = 8 \text{ или } x^{\log_2 x} = 8x^2.$$

Теперь почленно прологарифмируем это уравнение по основанию 2:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2,$$
$$\log_2^2 x = 3 + 2\log_2 x,$$
$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0.$$

Следовательно: 1) $\log_2 x = 3$, откуда $x_1 = 8$;

2) $\log_2 x = -1$, откуда $x_2 = \frac{1}{2}$.

Проверка: 1) $8^{\log_2 8 - 2} = 8$ или $8^{3-2} = 8$, $8 = 8$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)-2} = 8$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$, $8 = 8$.

Ответ: 8; $\frac{1}{2}$.

В практике встречаются логарифмические уравнения, содержащие логарифмы с разными основаниями. В таких случаях применяется формула перехода к новому основанию.

ПРИМЕР

5. Решим уравнение $\log_2 x + \dfrac{4}{\log_x 2} = 5$.

Решение. Нетрудно заметить, что ОДЗ переменной x является промежуток $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. Используя формулы перехода к новому основанию, заменим $\log_x 2$ логарифмом по основанию 2: $\log_x 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}$.

Тогда данное уравнение примет вид:

$\log_2 x + \dfrac{4}{\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}} = 5$ или $\log_2 x + 4\log_2 x = 5$. Следовательно, $5\log_2 x = 5$ или $\log_2 x = 1$, откуда $x = 2$. Число 2 является корнем уравнения, так как $\in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: 2.

Если переменная в уравнении входит и в показатель степени, и под знак логарифма, то такое уравнение называют *показательно-логарифмическим*.

Показательно-логарифмические уравнения чаще всего решаются способом логарифмирования обеих частей уравнения и приведением их к логарифмическим уравнениям.

ПРИМЕР

6. Решим уравнение $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

Решение. Первый способ. Перепишем уравнение в виде: $\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$. Воспользуясь тождеством $a^{\log_a b} = b$, имеем: $x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$, откуда следует: $x^{\log_3 x} = 81$.

Прологарифмируем обе части этого уравнения по основанию 3, тогда $\log_3^2 x = 4$, откуда $\log_3 x = -2$ и $\log_3 x = 2$ или $x_1 = \frac{1}{9}$ и $x_2 = 9$.

Проверка: 1) $3^{\log_3^2 \frac{1}{9}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \frac{1}{9}} = \left(3^{\log_3 \frac{1}{9}}\right)^{\log_3 \frac{1}{9}} + 3^{-2\log_3 \frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} + 3^{-2(-2)} = 81 + 81 = 162$;

2) $3^{\log_3^2 9} + 9^{\log_3 9} = (3^2)^2 + (3^2)^2 = 81 + 81 = 162$.

Второй способ. Переменную x запишем в виде $x = 3^{\log_3 x}$. Тогда данное уравнение примет вид $3^{\log_3^2 x} + \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = 162$ или $3^{\log_3^2 x} + 3^{\log_3^2 x} = 162$. Следовательно, $2 \cdot 3^{\log_3^2 x} = 162$, или $3^{\log_3^2 x} = 81$, или $3^{\log_3^2 x} = 3^4$.

Полученное уравнение равносильно уравнению $\log_3^2 x = 4$ или совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2, \quad x_1 = 3^2 = 9, \\ \log_3 x = -2, \quad x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}. \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{1}{9}$; 9.

Вы научитесь решать системы логарифмических уравнений.

При решении систем логарифмических уравнений в основном применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (способы подстановки, алгебраического сложения, введения новых переменных и др.).

ПРИМЕР 7. Решим систему логарифмических уравнений

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases}$$

Решение. Для решения системы введем новые переменные: $\lg x = a$, $\lg y = b$. Тогда данная система примет вид:

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений способом подстановки, получим: $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ и $a_2 = -1$, $b_2 = -2$. Переходя к замене, вычислим значение переменных x и y.

$\lg x = 2$, $\lg y = 1$ и $\lg x = -1$, $\lg y = -2$. Тогда: $x_1 = 100$, $y_1 = 10$ и $x_2 = 0{,}1$, $y_2 = 0{,}01$.

Ответ: (100; 10) и (0,1; 0,01).

Правильность ответа примера 7 проверьте самостоятельно.

ПРИМЕР

8. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$

Решение. Для первого уравнения применяем свойства показательной функции, а второе уравнение потенцируем, тогда получим систему: $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$

Введя новые переменные $a = \sqrt{x}$ и $b = \sqrt{y}$ получим систему рациональных уравнений: $\begin{cases} 2a - b = 4, \\ a \cdot b = 30, \end{cases}$ которая имеет решение $a = 5$ и $b = 6$. Тогда $\sqrt{x} = 5$, $\sqrt{y} = 6$ или $x = 25$ и $y = 36$.

Подставляя эти значения переменных в уравнения данной системы, убеждаемся, что данная пара (25; 36) действительно является решением системы.

Следовательно, решением исходной системы является пара чисел (25; 36).

Ответ: (25; 36).

1. Какое свойство логарифмической функции необходимо учитывать при решении логарифмических уравнений?
2. Определите наиболее удобный способ решения уравнений $\log_a x = b$ и $\log_x a = b$.

Упражнения

А

Решите уравнения (**24.1—24.3**):

24.1. 1) $\log_3(2x - 1) = 2$; 2) $\ln(3x - 5) = 0$;
3) $\log_7(4 - x) = 1$; 4) $\lg(2x - 1) = \lg 3$.

24.2. 1) $\lg(3 - x) = \lg(x + 2)$; 2) $\lg x + \lg(x - 1) = \lg 2$;
3) $\log_5(x + 1) = \log_5(4x - 5)$; 4) $\log_2(4 - x) = \log_2(1 - 2x)$.

24.3. 1) $\lg(5 - x) + \lg x = \lg 4$; 2) $\lg(x + 1) + \lg(x - 1) = \lg 3$;
3) $\ln(6 - x) + \ln x = \ln 5$; 4) $\lg x + \lg(x - 3) = 1$.

24.4. Найдите наибольший целый корень уравнения:
1) $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$; 2) $\log_6(x^2 - 2x) = 1 - \log_6 2$;
3) $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0$; 4) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$.

Решите системы уравнений (24.5—24.7):

24.5. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 80, \\ \log_2 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

24.6. 1) $\begin{cases} \log_2 (x + y) = 3, \\ \log_{15} x = 1 - \log_{15} y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 (xy) = 2 + \log_3 2, \\ \log_3 (x + y) = 2. \end{cases}$

24.7. 1) $\begin{cases} 2^{\log_2 (3x - y)} = 5, \\ \log_9 \left(x^2 - y^2\right) - \log_9 (x - y) = 0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{\log_3 (x - y)} = 1, \\ \log_3 (2x - 1) + \log_3 y = 1. \end{cases}$

B

Решите уравнения (24.8—24.11):

24.8. 1) $\log_3 \sqrt{2x + 1} = 1;$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2x - 2} = -2;$

3) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2x + 3}{x - 2} = 1;$ 4) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3x - 5} = 0.$

24.9. 1) $\lg \sqrt{3x + 1} + \lg \sqrt{x + 4} = \lg 12;$

2) $\lg(x - 2) - \lg \sqrt{x - 4} = \lg 3;$

3) $(x^2 - 4) \log_3 (1 - x^2 - 3x) = 0;$

4) $(x^2 - x - 2) \log_2 (x^2 - 4x + 4) = 0.$

24.10. 1) $\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 = 6;$ 2) $\frac{\lg x}{1 - \lg x} = 3;$

3) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 0;$ 4) $10^{x \cdot \lg 2} = 20.$

24.11. 1) $\log_3 (5^{2x} - 2 \cdot 5^x) = 2 \cdot \log_9 15;$ 2) $\log_2 (2^{2(x+1)} + 2^{4x}) = 2\log_4 5;$

3) $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x;$ 4) $\log_7 (6 + 7^{-x}) = 1 + x.$

Решите системы уравнений (24.12—24.14):

24.12. 1) $\begin{cases} \log_3 (y - x) = 1, \\ 3^{x+1} \cdot 2^y = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72. \end{cases}$

24.13. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}} (x - y) = 2. \end{cases}$

24.14. 1) $\begin{cases} 10^{2 - \lg(x - y)} = 25, \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 1 + 2\lg 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10^{1 + \lg(x + y)} = 50, \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

C

Решите уравнения (24.15—24.17):

24.15. 1) $x^{\log_2 x - 2} = 27$; 2) $x^{\log_2 x - 3} = 16$;

3) $x^{3 - \log_3 x} = 9$; 4) $x^{\log_5 x + 2} = 125$.

24.16. 1) $\log_{2x+3} \frac{1}{4} + 2 = 0$; 2) $\log_{\frac{2x-1}{x+2}} 3 - 1 = 0$;

3) $\log_{\sqrt{6-x}} 3 - 2 = 0$; 4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{x+2}}} 5 + 2 = 0$.

24.17. 1) $4^{\log_8(2x-2)} \cdot 0,5^{\log_8(2x-2)} = \sqrt[3]{16}$;

2) $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - \frac{9}{4} = \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2$;

3) $\log_{x+4}(x^4 + x^3 + 2x)\log_{x+1}(x + 4) = 2$;

4) $(x + 1)^{\log_3(x-2)} + 2(x - 2)^{\log_3(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3$.

Решите системы уравнений (24.18—24.20):

24.18. 1) $\begin{cases} \log_8(x + y) + \log_8(7 - y) = 1 + \log_8 5, \\ 2^{\log_2(x-y)} = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{\log_3(3y-x+24)} = 27, \\ \log_2(2x - 2y) - \log_2\left(5 - y^2\right) = 1. \end{cases}$

24.19. 1) $\begin{cases} \log_2^2 y + \log_2 x \cdot \log_2 y - 2\log_2^2 x = 0, \\ 9x^2 y - xy^2 = 64; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\log_3^2 x + \log_3 x \cdot \log_3 y - \log_3^2 y = 0, \\ xy + \frac{x^2}{y} = 28. \end{cases}$

24.20. 1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 5, \\ 2\log_9 x - \log_3 y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_4 x = y - 1, \\ x^{\frac{y}{6}} = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^{\frac{1}{x}} = 10, \\ \lg y = \frac{1}{x}. \end{cases}$

ПОВТОРИТЕ

24.21. Постройте график функции:

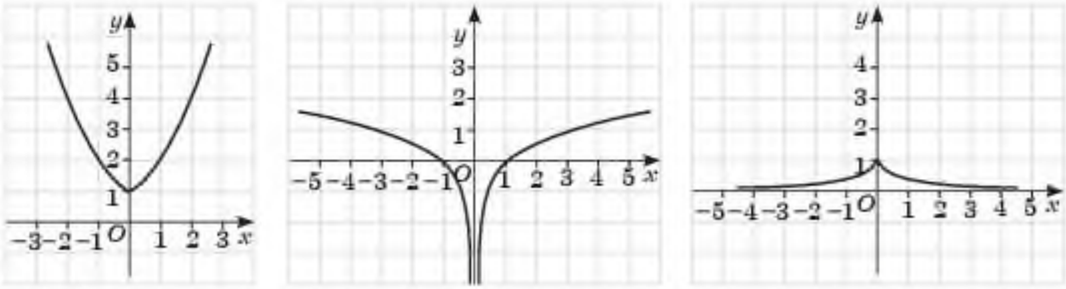
1) $y = \ln x - 1$; 2) $y = \ln|x - 1|$;

3) $y = \ln|2 - x|$; 4) $y = \ln|x + 2|$.

24.22. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

1) $y = 6 - x$, $x = 0$ и $y = 2^x$; 2) $y = 5 - 2x$, $x = 0$ и $y = 3^x$.

24.23. Найдите аналитическую формулу функции, график которой изображен на рисунке 65:



1) 2) 3)

Рис. 65

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Неравенство, свойства неравенств, система неравенств, показательная функция, свойства показательной функции, показательное уравнение.

§25. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Вы научитесь решать показательные неравенства.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Неравенство, показательное неравенство, основание степени, показатель степени, равносильность, область допустимых значений переменной, решение неравенства

Определение. *Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется* ***показательным неравенством***.

Решение показательных неравенств в основном сводится к решению неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$) или $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)}$). Для решения таких неравенств используются следующие утверждения:

1) если $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то при $a > 1$ следует $f(x) > g(x)$;

2) если $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то при $0 < a < 1$ следует $f(x) < g(x)$.

При решении показательных неравенств (или их систем) следует учитывать общие свойства неравенств, свойства монотонности показательной функции и допустимые значения переменных.

ПРИМЕР

1. Решим неравенство $5^{3x-2} < 5^{x+3}$.

Решение. Согласно свойству монотонности показательной функции при основании, большем 1, меньшему значению функции соответствует меньшее значение показателя степени, т. е. $3x - 2 < x + 3$. Отсюда $2x < 5$ или $x < 2{,}5$.

Ответ: $(-\infty; 2{,}5)$.

ПРИМЕР

2. Найдем наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $3^{\frac{x}{2}} < 9$.

Решение. Сделаем преобразование и получим неравенство, равносильное данному: $3^{\frac{x}{2}} < 3^2$. Отсюда следует, что $\frac{x}{2} < 2$ или $x < 4$.

Решением исходного неравенства является промежуток $(-\infty; 4)$, тогда наибольшим целым значением переменной, удовлетворяющим исходному неравенству, будет $x = 3$.

Ответ: 3.

ПРИМЕР

3. Найдем наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $(x + 1)^{x^2-36} < 1$.

Решение. Согласно определению показательной функции выражение, стоящее в левой части данного неравенства, имеет смысл лишь при условии, что $x + 1 > 0$, и причем, как основание степени оно должно быть отличным от 1, т. е. $x + 1 > 1$ или $0 < x + 1 < 1$. Из-за того, что $x + 1 > 0$, должно быть выполнено условие: $x > -1$.

Рассмотрим два случая, когда $x + 1 > 1$ и $0 < x + 1 < 1$.

1) При $x + 1 > 1$, т. е. при $x > 0$ имеем:

$$\begin{cases} (x+1)^{x^2-36} < 1, \\ x > 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} (x+1)^{x^2-36} < (x+1)^0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Из неравенства $(x + 1)^{x^2-36} < (x + 1)^0$ на основании свойства показательной функции можно заключить, что $x^2 - 36 < 0$.

Рассмотрим систему неравенств: $\begin{cases} x^2 - 36 < 0, \\ x > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x-6)(x+6) < 0, \\ x > 0. \end{cases}$

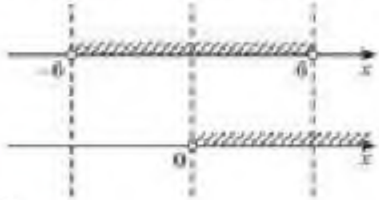
Изображая отдельно решение каждого неравенства системы на координатной прямой, определяем, что множеством решений системы является промежуток $(0; 6)$ (рис. 66.1).

2) При $0 < x + 1 < 1$, т. е. $-1 < x < 0$,

имеем: $\begin{cases} x^2 - 36 > 0, \\ -1 < x < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x-6)(x+6) > 0, \\ -1 < x < 0. \end{cases}$

Аналогично решаем систему как в первом случае.

Из рисунка 66.2 видно, что нет ни одного значения x, удовлетворяющего одновременно неравенствам системы.



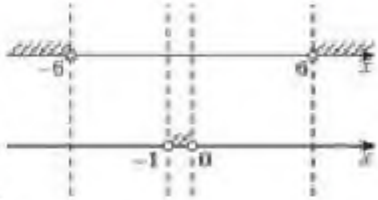


Рис. 66

Остается заключить, что наибольшее целое x находится только на промежутке $(0; 6)$, и оно равно 5.

Ответ: 5.

ПРИМЕР 4. Найдем наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $3^{\sqrt{x+1}+1} - 28 + 3^{2-\sqrt{x+1}} < 0$.

Решение. Введем обозначение $3^{\sqrt{x+1}} = y$, тогда исходное неравенство примет вид: $3y - 28 + \frac{9}{y} < 0$.

Обе части последнего неравенства умножим на y (при этом знак неравенства не изменится, так как y, по определению показательной функции, всегда больше нуля). Тогда получим: $3y^2 - 28y + 9 < 0$. Решая неравенство методом интервалов, получим: $\frac{1}{3} < y < 9$ (рис. 67).

Рис. 67

Следовательно, значение выражения $3^{\sqrt{x+1}}$ расположено на интервале $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$.

Чтобы найти значение x, решим двойное неравенство: $\frac{1}{3} < 3^{\sqrt{x+1}} < 9$ или $3^{-1} < 3^{\sqrt{x+1}} < 3^2$. Так как $3 > 1$, следовательно, показательная функция $y = 3^x$ — возрастающая, то получаем равносильное неравенство: $-1 < \sqrt{x+1} < 2$.

По свойству арифметического корня неравенство $\sqrt{x+1} > -1$ является очевидным при $x > -1$. Остается лишь рассмотреть неравенство $\sqrt{x+1} < 2$ или $x + 1 < 4$, решив которое, имеем: $x < 3$. Учитывая область допустимых значений исходного неравенства ($x > -1$), получим окончательный результат $-1 < x < 3$.

Наибольшее целое значение x на этом промежутке: $x = 2$.

Ответ: 2.

?

1. Что общего в ходе решения показательных уравнений и решения линейных уравнений с одной переменной?
2. Перечислите основные требования, соблюдение которых является обязательным в решении показательных неравенств и их систем.

Упражнения

А

25.1. Решите неравенства:

1) $3^x > \frac{1}{27}$; 2) $2^x < \frac{1}{8}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$;

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{16}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} < 25$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 9$.

25.2. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству:

1) $5^{x-1} < 25$; 2) $3^{3-x} > 9$; 3) $6^{2x} < \frac{1}{36}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} > 4$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} < 81$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

25.3. Решите системы неравенств:

1) $\begin{cases} 5^x > 25, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} < \frac{1}{27}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8 > \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}, \\ 3^{4x} > 81. \end{cases}$

В

Решите неравенства (25.4—25.5):

25.4. 1) $3^{-2x} < \sqrt{3}$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}} > 25$; 3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$;

4) $2^{\frac{3x}{2}+3} < 16$; 5) $5^{\frac{x+1}{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} > \frac{9}{4}$.

25.5. 1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1,5}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} > \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$;

3) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$; 4) $(0,2)^{\frac{6x-1}{3-x}} < \left(\frac{1}{5}\right)^2$;

5) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{x}{4-x}} > 49$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} > 4$.

Найдите наибольшие целые значения x, удовлетворяющие неравенствам (25.6—25.7):

25.6. 1) $2^{3x} < \sqrt[5]{2}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x+1}{2}} > 4$; 3) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} < 7$; 4) $3^{\frac{2x+1}{5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

25.7. 1) $5^{2x+1} - 5^{x+2} \leqslant 5^x - 5$; 2) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$;
3) $250 \cdot 5^{3-x} - 2 \cdot 5^{x-3} > 0$; 4) $147 \cdot 7^{x-2} - 3 \cdot 7^{2-x} \leqslant 0$.

25.8. Решите системы неравенств:

1) $\begin{cases} 7^{\frac{x-5}{2}} < 7\sqrt{7}, \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-3} < 3\dfrac{3}{8}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2+5x} > 1, \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-2x-2} < 27. \end{cases}$

C

25.9. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству:

1) $9^{x+1} - 3^{x+2} < 3^x - 3$; 2) $13 \cdot 2^{x+4} - 208 \cdot 2^{-2x-3} < 0$;
3) $7 \cdot 3^{x-2} + 20 \cdot 3^{2-x} < \dfrac{41}{3^{x-2}}$; 4) $\dfrac{440}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 8 \cdot 6^{-x}$.

Найдите наименьшие целые значения x, удовлетворяющие неравенствам (**25.10—25.11**):

25.10. 1) $7^{2x-1} - 7^{x+1} \leqslant 7^{x-1} - 7$; 2) $3^{2x-2} - 3^{x-4} < 3^x - 9$;
3) $2^{2x+1} - 2^{x+3} \leqslant 2^{x+1} - 8$; 4) $5^{2x} - 5^{x+2} < 5^x - 25$.

25.11. 1) $2^{x+2} + 3 \cdot 5^x < 3 \cdot 2^x + 5^{x+1}$; 2) $2^{2x+1} - 3^{2x+1} < 3^{2x} - 7 \cdot 2^{2x}$;
3) $5^{x-1} - 3^{x+2} > 2 \cdot 5^x - 2 \cdot 3^{x-1}$; 4) $3^x + 10^{x-2} > 19 \cdot 3^{x-2} + 10^{x-3}$.

Решите неравенства (**25.12—25.13**):

25.12. 1) $2^{\sqrt{x+1}} - 1 < 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}}$; 2) $2 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} - 5 > 3^{1-\sqrt{x+1}}$;
3) $5^{\sqrt{x-2}} > 5^{1-\sqrt{x-2}} + 4$; 4) $2 \cdot 7^{\sqrt{2x-3}} > 7^{1-\sqrt{3x-3}} + 13$.

25.13. 1) $(x-3)^{x^2-9} > 1$; 2) $(x-2)^{x^2-1} > 1$;
3) $(x-1)^{\frac{2x-7}{x+1}} \geqslant 1$; 4) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^{x^2-\frac{1}{4}} > 1$.

25.14. Решите системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2^{x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} > 1, \\ 0{,}2^x \leqslant 0{,}04^{x^2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)^{2x^2-11x+9} < 1, \\ (0{,}3)^{\sqrt{4x^2-3x+2}} > (0{,}3)^{\sqrt{x}}. \end{cases}$

ПОВТОРИТЕ

25.15. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x-2} > x - 2$; 2) $\sqrt{2x+1} > x - 2$;
3) $\sqrt{6x+16} > x$; 4) $\sqrt{4-x} < 2 - x$.

25.16. Найдите промежутки возрастания функции:

1) $y = xe^{3x}$; 2) $y = x\ln x$.

25.17. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$:

1) $y = x - 2\sqrt{x+4}$; 2) $y = \sqrt{2x+1}$;

3) $y = (x + 1)e^{3x}$; 4) $y = (x + e)\ln(x + e)$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Логарифм, неравенство, основные свойства неравенств, решение неравенства, равносильные неравенства, свойства логарифма, логарифмическая функция и ее свойства, логарифмическое уравнение, решение логарифмических уравнений и их систем.

§26. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Вы научитесь решать логарифмические неравенства.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Неравенство, логарифмическое неравенство, основание логарифма, показатель степени, область допустимых значений переменной, равносильность, решение неравенства

Определение. *Неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется* ***логарифмическим неравенством.***

Всякое значение переменной, при котором данное логарифмическое неравенство обращается в верное числовое неравенство, называется *решением логарифмического неравенства.*

Решить логарифмическое неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два логарифмических неравенства с одной переменной называются *равносильными*, если решения этих неравенств совпадают или оба не имеют решения.

Решение логарифмических неравенств в основном сводится к решению неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ($\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$) и $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ($\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$).

Для решения таких неравенств, учитывая область определения логарифмической функции и ее свойства, воспользуемся следующими утверждениями:

1) при $a > 1$ неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \qquad (1)$$

2) при $0 < a < 1$ неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \qquad (2)$$

ПРИМЕР 1. Решим неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < -2$.

Решение. Преобразуем правую часть неравенства, т. е. число -2 запишем через логарифм по основанию $\frac{1}{3}$. Тогда: $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$. Соответственно, исходное неравенство примет вид: $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < \log_{\frac{1}{3}} 9$. Здесь $a = \frac{1}{3}$, т. е. $a \in (0; 1)$, поэтому, используя систему неравенств вида (2), запишем:

$$\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 2x + 5 > 9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -\frac{5}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$

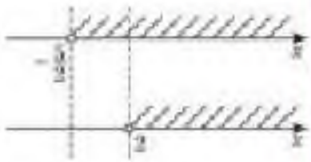


Рис. 68

Решением последней системы неравенств будет промежуток $(2; +\infty)$ (рис. 68).

Ответ: $(2; +\infty)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство $\lg(x + 1) < 1 - \lg(2x - 6)$.

Решение. Логарифмы имеют смысл при $x + 1 > 0$ и $2x - 6 > 0$.

Преобразуем данное неравенство, использовав свойства логарифмов:

$$\lg(x + 1) + \lg(2x - 6) < 1, \ \lg((x + 1)(2x - 6)) < \lg 10.$$

В полученном неравенстве $a = 10$, поэтому заданное неравенство будет равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ 2x - 6 > 0, \\ (x + 1)(2x - 6) \leq 10 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -1, \\ x > 3, \\ (x - 4)(x + 2) \leq 0. \end{cases}$$

Изображая решение каждого неравенства системы неравенств по отдельности на координатной прямой (рис. 69), находим общую часть. Таким образом, решением данного неравенства является промежуток $(3; 4]$.

Ответ: $(3; 4]$.

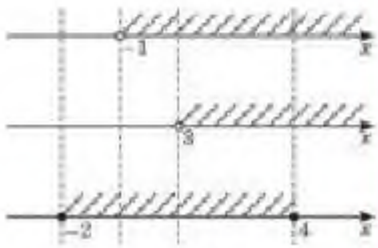


Рис. 69

ПРИМЕР 3. Решим неравенство $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$.

Решение. По определению логарифмической функции, основания x и $2x$ должны быть положительными и не равными 1, следовательно, $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$.

Приведем все логарифмы к одному основанию, равному 2:

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x};\ \log_{2x} 2 = \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{1 + \log_2 x}.$$

С учетом последних двух равенств исходное неравенство примет вид:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} \cdot (2 + \log_2 x) > 1,$$

поскольку $\log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$.

Введем обозначение $\log_2 x = t$, тогда: $\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t} \cdot (2 + t) > 1$, откуда

$$\frac{-t^2 + 2}{t(t+1)} > 0 \text{ или } \frac{t^2 - 2}{t(t+1)} < 0.$$

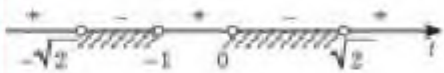


Рис. 70

Решив последнее неравенство методом интервалов, находим: $-\sqrt{2} < t < -1;\ 0 < t < \sqrt{2}$ (рис. 70).

Заменив t на $\log_2 x$, имеем:

1) $-\sqrt{2} < \log_2 x < -1$ или $\log_2 2^{-\sqrt{2}} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$, откуда $2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$;

2) $0 < \log_2 x < \sqrt{2}$ или $\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2^{\sqrt{2}}$, откуда $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left(2^{-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$.

ПРИМЕР 4. Найдем область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{10 + 3x - x^2}}{\log_3\left(x^2 - 2x\right) - 1}.$$

Решение. Данная функция является алгебраической дробью, поэтому $\log_3(x^2 - 2x) - 1 \neq 0$.

Выражение $10 + 3x - x^2$ находится под квадратным корнем, поэтому должно быть $10 + 3x - x^2 > 0$ или $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Учитывая область определения логарифмической функции, имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \log_3\left(x^2 - 2x\right) - 1 \neq 0, \\ x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 3x - 10 \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \neq 0, \\ x(x - 2) > 0, \\ (x + 2)(x - 5) < 0. \end{cases}$$

Из первого соотношения: $x \neq -1$ и $x \neq 3$.

Решая второе и третье неравенства последней системы неравенств методом интервалов, имеем: $x \in [-2; 0) \cup (2; 5]$ (рис. 71). Затем из этих промежутков, исключая $x = 3$ и $x = -1$, получим промежутки, являющиеся областью определения данной функции.

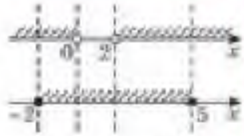


Рис. 71

Ответ: $[-2;-1) \cup (-1; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 5]$.

1. Что является основой для решения логарифмических неравенств?
2. Почему решение логарифмических неравенств в большинстве случаев сводится к рассмотрению системы неравенств?

Упражнения

А

Решите логарифмические неравенства (**26.1—26.4**):

26.1. 1) $\log_5(3 + 8x) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2$;

3) $\log_2(x - 3) \leqslant 3$; 4) $\lg(4x - 1) \leqslant 1$.

26.2. 1) $\log_2(2x + 5) > \log_2(x - 7)$; 2) $\log_5(3x - 2) > \log_5(x + 6)$;

3) $\log_3(3x - 1) < \log_3(2x + 3)$; 4) $\log_{\frac{1}{9}}(4x - 3) \geqslant \log_{\frac{1}{9}}(x + 3)$.

26.3. 1) $\log_2(2x - 1) > \log_2(x + 1)$; 2) $\log_5(3x + 1) > \log_5(x - 2)$;

3) $\log_{\frac{1}{7}}(12 - x) \geqslant -2$; 4) $\log_{0,2}(x - 2) > \log_{0,2}(3 - x)$.

26.4. 1) $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leqslant 0$; 2) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$;

3) $\log_{0,1}^2 x + 3\log_{0,1} x > 4$; 4) $2 - \lg^2 x \geqslant \lg x$.

26.5. Укажите неравенство, в котором неверно выполнена замена первого выражения вторым:

1) $\log_{0,5}(x - 2) > 1$, откуда следует $x - 2 < 0,5$;

2) $\log_{0,2}(x - 2) > \log_{0,2}3$, откуда следует $x - 2 < 3$;

3) $\ln(x + 5) > \ln 5$, откуда следует $x + 5 > 5$;

4) $\ln^2(x - 3) < 4$, откуда следует $-2 < \ln(x - 3) < 2$.

26.6. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x-1}}$; 2) $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{x-1}{x+5}}$.

B

Решите логарифмические неравенства (**26.7—26.9**):

26.7. 1) $\lg(x^2 + 2x + 2) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) > -2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 1) < -1$; 4) $\log_2(x^2 + 10) < 4$.

26.8. 1) $2^{\log_3 \frac{x-1}{3x+3}} \leqslant \frac{1}{4}$; 2) $3^{\log_2 \frac{x-1}{x+1}} < \frac{1}{9}$;

3) $(5x + 1)\lg(4 - x) \leqslant 0$; 4) $(3 - x)\lg(2x - 1) \geqslant 0$.

26.9. 1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(\log_2 \sqrt{6 - x}\right) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right) \geqslant 0$;

3) $\log_{0,5}\log_5 \frac{x-2}{x+2} \geqslant \log_{0,5}1$; 4) $\log_{2,5}(\log_3(9^x - 6)) \geqslant 0$.

26.10. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{2,1} \frac{3x-1}{5-x}} + \sqrt{x-4}$;

2) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \sqrt{\ln(x + x^2)}$;

3) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x - 2)} + \sqrt[4]{x+1}$.

26.11. Укажите неравенство, в котором неверно выполнена замена первого выражения вторым:

1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(x-1) + \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(x-2) > -2$, откуда следует $\begin{cases}(x-1)(x-2) > 0,\\(x-1)(x-2) < 5;\end{cases}$

2) $3^{3x} - 4 \cdot 3^x \leqslant 0$, откуда следует $0 < x \leqslant \log_9 4$;

3) $\sqrt{\log_5(x-2)} > 2$, откуда следует $x - 2 > 625$.

C

26.12. Решите логарифмические неравенства и укажите два значения x, являющиеся решениями неравенства:

1) $\log_{0,1}(x - 2) - \lg x > \log_{0,1}3$; 2) $\log_{0,5}x - \log_2(x - 3) < \log_{0,5}4$;

3) $\log_{0,2}x - \log_5(x - 2) < \log_{0,2}3$; 4) $\lg x - \log_{0,1}(x - 1) > \log_{0,1}0,5$.

Решите логарифмические неравенства (**26.13—26.15**):

26.13. 1) $(\log_2 x - 4)(5x^2 + x - 6) \geqslant 0$; 2) $(\log_3 x + 3)(x^2 + 2x - 8) \geqslant 0$;

3) $\frac{2 - x}{(x+4)\log_{0,3}(2x^2 + 6x + 5)} \leqslant 0$; 4) $\log_7\left(3 - \frac{1}{x-1}\right) + \log_7 \frac{1}{x} \geqslant 0$.

26.14. 1) $\log_{1-x}(2x+3) \geq 1$; 2) $\log_{x-1}(x-8) \leq 1$;

3) $2\log_{2x}\sqrt{x+1} < 0$; 4) $\log_{3x}(2{,}5x+1) \geq 0$.

26.15. 1) $8^{\log_2 x} - 2x^2 > x - 2$; 2) $x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1$;

3) $x^3 > 2^{15\log_{2\sqrt{2}} 3} \cdot 3^{\frac{1}{\log_{\sqrt{2}} 3}}$; 4) $x^{-64\log_5^3 x - 5\log_5 x^4} < \left(\frac{1}{5}\right)^{2+\log_{0,5} 8}$;

5) $x \cdot \log_2 x - \dfrac{4}{\log_x 2} < 0$; 6) $x \cdot \log_5 x < \dfrac{5-x}{\log_x 5}$.

Найдите области определений функции $y = f(x)$ (**26.16—26.17**):

26.16. 1) $f(x) = \lg(4 - x^2) + \sqrt{\dfrac{1+\lg^2 x}{\lg x^2} - 1}$;

2) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 (x-3)} + \sqrt{x^2 - 25}$.

26.17. 1) $f(x) = \dfrac{15 + x^2}{\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(5x - x^2\right) - 1}}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{17 + 15x - 2x^2}}{\log_x (x+3)}$.

ПОВТОРИТЕ

26.18. Используя программы "Живая математика" или "GeoGebra" постройте график функции $f(x)$ и запишите уравнения ее асимптот:

1) $f(x) = x\ln(x + 2e)$; 2) $f(x) = (2x - 3) \cdot \ln(x + 3)$;

3) $f(x) = (2x - 3) \cdot 2^x$; 4) $f(x) = (2x + 1) \cdot 3^x$.

26.19. Решите уравнение на множестве комплексных чисел:

1) $z^4 + 4z^2 - 12 = 0$; 2) $z^4 - 5z^2 - 14 = 0$.

26.20. Найдите вторую производную функции:

1) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$; 2) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{-x}$;

3) $f(x) = x \cdot \ln x$; 4) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Решите уравнение $11^{x-1} - 11^{x+2} + 1330 = 0$:

A) 4; B) −1; C) 3; D) 1.

2. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $0{,}25^{2+0,5x^2} > 32^x$:

A) −1; B) −2; C) 3; D) 4.

3. При каких значениях x функция $y = \log_6(x^2 + 6x) - 3$ принимает отрицательные значения:

A) $(-6; 0)$; B) $(-\infty; -18) \cup (12; +\infty)$;

C) $(-18; 12)$; D) $(-18; -6) \cup (0; 12)$?

4. Решите системы уравнений $\begin{cases} 3^y = 27^x, \\ \log_2(y - x^2) = 1 : \end{cases}$

A) $(-1; -3), (-2; -6)$; B) $(1; 3)$;

C) $(2; 6)$; D) $(1; 3), (2; 6)$.

5. Решите системы неравенств $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geqslant 0, \\ \log_4^2 x - \log_4 x - 6 < 0 : \end{cases}$

A) $(2; 64)$; B) $[2; 64)$;

C) $(-\infty; -3] \cup (64; +\infty)$; D) $\left(\frac{1}{16}; 2\right]$.

6. Сколько натуральных чисел являются решением неравенства $\frac{1}{125} \leqslant 5^{-x+5} < 3125$:

A) 7; B) 9; C) 8; D) 6?

7. Сколько целых чисел содержит решение неравенства $\lg(x^2 - 15x) \leqslant 2$:

A) 10; B) 12; C) 8; D) 26?

Тестовые задания "Математическая грамотность"

8. На диаграмме указаны средние цены (в тенге) на некоторые основные продукты питания (по данным на конец 2018 г.) в трех городах Казахстана:

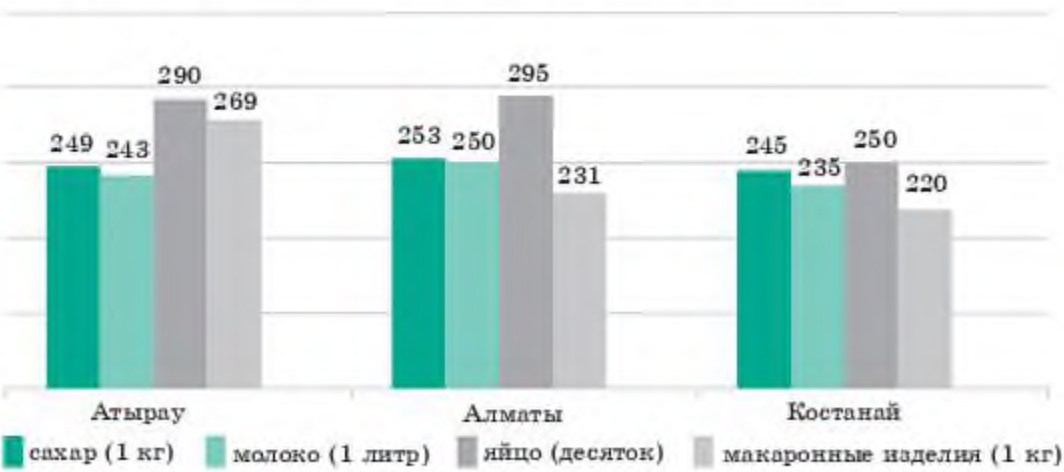


Рис. 72

Найдите стоимость следующего набора продуктов: 2 кг сахара, 1 л молока, 3 десятка яиц и 2 кг макаронных изделий в г. Алматы:

A) 2297тг; B) 2023 тг; C) 2103 тг;
D) 2263 тг; E) 2193 тг.

9. По дисконтной карте на АЗС действует 5% -ная скидка на бензин. Располагая определенной суммой денег, покупатель может приобрести 57 литров бензина. Сколько литров бензина он может купить на ту же сумму на этой АЗС, воспользовавшись дисконтной картой:

A) 61 л; B) 59 л; C) 58 л; D) 60 л; E) 62 л?

10. Рустам идет 7 шагов вперед и 3 шага назад. Он сделал 259 шагов. На сколько шагов Рустам продвинулся вперед:

A) 110; B) 108; C) 107; D) 106; E) 105?

11. На сколько процентов изменится значение произведения двух чисел, если одно из них уменьшить на 50%, а другое увеличить на 20%:

A) уменьшится на 40%; B) уменьшится на 30%;
C) уменьшится на 20%; D) уменьшится на 50%;
E) увеличится на 10%?

12. Пациенту прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,5 г 3 раза в день в течение 8 дней. В одной упаковке 10 таблеток по 0,25 г. Какое наименьшее количество упаковок надо купить на весь курс лечения:

A) 4; B) 5; C) 6; D) 7; E) 8?

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Уравнение, линейное уравнение, решение уравнения, производная, первообразная, интеграл, правила нахождения первообразных, свойства интеграла.

ГЛАВА VIII ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§27. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Вы ознакомитесь с основными понятиями о дифференциальных уравнениях

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, решение дифференциального уравнения, общее решение, частное решение

Дифференциальным уравнением *называется уравнение, связывающее аргумент, неизвестную функцию этого аргумента и производную этой функции.*

Наибольший порядок производных, входящих в дифференциальное уравнение, называют ***порядком дифференциального уравнения.***

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x;\ y;\ y') = 0 \text{ или } y' = f(x;\ y). \qquad (1)$$

ПРИМЕР 1. 1) $x^2y' + 2xy = y$ — дифференциальное уравнение первого порядка;

2) $y'' - 2xyy' = x$ — дифференциальное уравнение второго порядка;

3) $y^{(IV)} - xy'' + 2y' = 1 - x$ — дифференциальное уравнение четвертого порядка.

Решением дифференциального уравнения называется дифференцируемая функция $y = f(x)$, при подставлении которой вместо независимой переменной y в уравнение получается верное равенство.

ПРИМЕР 2. Функция $y = x^2$, где $x \in (-\infty;\ +\infty)$, является решением дифференциального уравнения $2y - xy' = 0$.

Действительно, при подстановке функции в уравнение, она обращает его в тождество: $2 \cdot x^2 - x \cdot (x^2)' = 0$ или $2x^2 - 2x^2 = 0$.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

Следовательно, в общем случае при решении дифференциального уравнения первого порядка получаем не одну функцию, а множество функций, зависящих от одного параметра.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение $y' = \cos x$.

Решение. Вначале производную запишем в следующем виде: $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Тогда данное уравнение примет вид $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ или $dy = \cos x dx$. Теперь из равенства $\int dy = \int \cos x dx$ получим $y = \sin x + C$.

Ответ: $y = \sin x + C$.

ЗАПОМНИТЕ!

$\int y'dx = \int dy$.

Вы ознакомитесь с определением частного и общего решений дифференциального уравнения.

В примере 1 ответ $y = \sin x + C$ является *общим решением уравнения* $y' = \cos x$.

Общим решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y = f(x; C)$, зависящая от x и произвольной постоянной, если она является решением уравнения (1) при любом значении постоянной C.

ПРИМЕР 4. Найдем общее решение уравнения $y' = x$.

Решение. Известно, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, поэтому данное уравнение примет вид $\dfrac{dy}{dx} = x$ или $dy = xdx$. Проинтегрируем обе части последнего равенства.

$$\int dy = \int xdx, \text{ или } y = \frac{x^3}{2} + C.$$

Ответ: $y = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Частным решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y = f(x; C_0)$, которая получается из общего решения $y = f(x; C)$ при определенном значении постоянной $C = C_0$.

ПРИМЕР 5. Найдем частное решение уравнения $y' = x^2$ при $y(2) = 3$.

Решение. Проинтегрируем обе части данного уравнения и учитывая $\int y'dx = \int dy$, найдем общее решение:

$$\int y'dx = \int x^2dx, \text{ или } \int dy = \int x^2dx, \text{ или } y = \frac{x^3}{3} + C.$$

Теперь, учитывая условие $y(2) = 3$, найдем частное решение данного уравнения: $3 = \dfrac{2^3}{3} + C$ или $C = \dfrac{1}{3}$.

Тогда частное решение имеет вид: $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{3}$.

Самостоятельно докажите, что частным решением уравнения $y' = \cos x$ при $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ является $y = \sin x + \frac{3}{2}$.

Вы научитесь решать дифференциальные уравнения с разделенными переменными.

Уравнение вида $\quad f(y)dy = g(x)dx \qquad (2)$

называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными.*

В уравнении (2) выражения, содержащие переменные x и y, разделены знаком равенства, т. е. находятся по разные стороны от него, где функции $f(y)$ и $g(x)$ непрерывны.

Общим интегралом уравнения с разделенными переменными является равенство $\int f(y)dy = \int g(x)dx$.

Если интегралы из этого равенства выражаются в элементарных функциях, то можно получить общее решение дифференциального уравнения как неявно заданную функцию $\Phi(x; y) = 0$, а иногда получается выразить функцию y в явном виде.

ПРИМЕР

6. Решим уравнение $ydy = x^3dx$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделенными переменными, поэтому проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int ydy = \int x^3dx.$$

Найдем каждый неопределенный интеграл.

$\int ydy = \frac{y^3}{2} + C_1$ и $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C_2$.

Значит, $\frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{x^4}{4} + C_2$. Отсюда: $y^2 = \frac{x^4}{2} + C$ или $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + C}$.

Ответ: $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + C}$.

Вы научитесь решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида:

$$f_1(x) \cdot g_1(y)dx + f_2(x) \cdot g_2(y)dy = 0. \qquad (3)$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, надо обе части уравнения (3) разделить на выражение $f_2(x) \cdot g_1(y)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \text{ или } \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy. \qquad (4)$$

ПРИМЕР

7. Решим уравнение $x(y-6)dx = dy$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющими переменными, поэтому обе части уравнения разделим на $y - 6 \neq 0$.

Тогда данное уравнение примет вид $xdx = \frac{dy}{y-6}$. Проинтегрируем обе части последнего уравнения: $\int xdx = \int \frac{dy}{y-6}$.

Отсюда $\frac{x^2}{2} = \ln|y-6| + C$ или $\ln|y-6| = \frac{x^2}{2} - C$. Так как C постоянное и может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то можем записать $\ln|y-6| = \frac{x^2}{2} + C$. Это общий интеграл дифференциального уравнения, а его общее решение имеет вид $y = 6 + e^{\frac{x^2}{2}+C}$ или $y = 6 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

Ответ: $y = 6 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

ПРИМЕР

8. Решим дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)\text{ctg}x = 0$.

Решение. Переписываем производную в другом виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)\text{ctg}x = 0.$$

Оцениваем, можно ли разделить переменные. Можно. Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака: $\frac{dy}{dx} = -(2y+1)\text{ctg}x$.

Записываем дифференциальное уравнение в виде уравнения с разделенными переменными: $\frac{dy}{2y+1} = -\text{ctg}x dx$.

Переменные разделены, интегрируем обе части уравнения $\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \text{ctg}x dx$.
Каждый интеграл найдем методом замены переменной.

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \left| \begin{matrix} 2y+1=t, \text{ отсюда } d(2y+1)=dt \text{ или} \\ 2dy=dt, \text{ или } dy=0{,}5dt \end{matrix} \right| = \int \frac{0{,}5dt}{t} = 0{,}5\ln|t| = 0{,}5\ln|2y+1|.$$

$$-\int \text{ctg}x dx = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \left| \begin{matrix} \sin x = t, \text{ отсюда } d(\sin x) = dt \\ \text{или } \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + \ln|C| =$$

$$= -\ln|\sin x| + \ln|C|.$$

Тогда получим: $0{,}5\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$. В правой части у нас получился логарифм, тогда константу тоже следует записать под логарифмом.

$\ln|2y+1|^{0{,}5} = -\ln|\sin x| + \ln|C|$, т. е. $\ln\sqrt{|2y+1|} = \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|$

или $\sqrt{|2y+1|} = \left|\frac{C}{\sin x}\right|$.

Следовательно, общий интеграл $\sqrt{|2y+1|} \cdot \sin x = C$, где C — константа.
Получили решение дифференциального уравнения в виде общего интеграла.

Ответ: $\sqrt{|2y+1|} \cdot \sin x = C$, где C — константа.

Вы научитесь применять дифференциальные уравнения при решении физических задач.

ПРИМЕР **9.** Распад радия происходит таким образом, что скорость распада пропорциональна имеющейся массе радия. Найдите закон распада радия, если известно, что через 1600 лет останется половина массы радия.

Решение. Пусть x — масса радия и t — время (в годах). Найдем закон $x = f(t)$.

Дифференциальное уравнение составляем по условию задачи $x' = kx$ или $\frac{dx}{dt} = kx$. Полученное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные $\frac{dx}{x} = kdt$.

$\ln x = kt + C$. Пусть в начальный момент $t = 0$ масса радия равна x_0. Тогда найдем соответствующее C. $\ln x_0 = k \cdot 0 + C$ или $C = \ln x_0$. Тогда: $\ln x - \ln x_0 = kt$, т. е. $\ln \frac{x}{x_0} = kt$. Найдем коэффициент k из условия, что через 1600 лет масса радия уменьшится наполовину, т. е. $\ln \frac{1}{2} = 1600k$ или $k = -\frac{\ln 2}{1600} \approx -0{,}00043$.

Тогда: $\ln \frac{x}{x_0} = -0{,}00043t$ или $\frac{x}{x_0} = e^{-0{,}00043t}$.

Следовательно, $x = x_0 \cdot e^{-0{,}00043t}$.

Ответ: $x = x_0 \cdot e^{-0{,}00043t}$.

1. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического?
2. В каких случаях можно найти частное решение дифференциального уравнения?
3. Какое дифференциальное уравнение называется *уравнением с разделенными переменными*?
4. Какое дифференциальное уравнение называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*?

Упражнения

А

27.1. Заполните таблицу:

Таблица 34

Дифференциальное уравнение	Порядок дифференциального уравнения
$y''' - 3xyy' = x - y$	
$xy'' + xy' = 2x - y$	
$4y^{(IV)} - 3xy'' = x^3 - y$	
$y - x^2y' = 2x - 1$	

27.2. Заполните таблицу:

Таблица 35

Дифференциальное уравнение	Дифференциальное уравнение с разделенными переменными	Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
$yy' = x - 1$		
$xy' = (x^2 + x)y$		
$ydy = (2x^2 - x + 3)dx$		
$x^2dy = 2dx$		
$ydy = (x^2 - x)(1 + y^2)dx$		
$(y + 1)dy = (3x^2 - 2x)dx$		
$dy = xe^x dx$		

27.3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

1) $y' = y$;
2) $y' = 2x \cdot y$;
3) $y' = 2x - 3$;
4) $y' = 3x^2 + 2x - \pi$.

27.4. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

1) $y' = 2x - 1$ при условии $y(2) = 3$;
2) $y' = 3x^2 - 4$ при условии $y(1) = 2$;
3) $y' = 3x^2 - 4x$ при условии $y(0) = -2$;
4) $y' = 2x - 3x^2$ при условии $y(-1) = 4$.

B

27.5. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

1) $y' = \frac{x}{y}$ при условии $y(1) = -2$;
2) $y' = 3yx^2$ при условии $y(1) = 1$;
3) $2y' = y^{-1}\cos x$ при условии $y(0) = 2$;
4) $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ при условии $y(1) = \pi$.

27.6. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

1) $y' = 2x\cos^2 y$;
2) $y' = 4x\sin^2 y$;
3) $y' = e^{2x} + 4x$;
4) $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$.

27.7. 1) Докажите, что функция $y = 5e^{3x}$ является решением уравнения $y' = -2y$.

2) Докажите, что функция $y = 1{,}7e^{-2x}$ является решением уравнения $y' = -2y$.

3) Докажите, что функция $y = \pi e^{-5x}$ является решением уравнения $y' = -5y$.

27.8. В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных мер) описывается следующим уравнением $\frac{dy}{dt} = 0{,}001y(3000 - y)$, где y — число заболевших в момент времени t, t — число недель. Найдите число больных в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных ($e \approx 2{,}72$)?

C

27.9. В комнате при температуре в 20° С некоторое тело остывает за 20 мин от 100° С до 60° С. Найдите закон охлаждения тела. Через сколько минут тело остынет до 30° С? (Температура в комнате не изменяется. По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур)?

27.10. 1) Моторная лодка движется по озеру со скоростью 20 км/ч. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до 8 км/ч. Сопротивление воды прямо пропорционально скорости движения лодки. Найдите скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

2) Моторная лодка движется со скоростью 30 км/ч. Найдите скорость лодки через 3 мин после выключения мотора, если сопротивление воды прямо пропорционально скорости движения лодки и коэффициент пропорциональности равен $\left(-1\frac{2}{3}\right)$.

27.11. Конденсатор емкостью C включается в сеть с напряжением тока U и сопротивлением R. Найдите заряд q конденсатора в момент времени t после включения.

27.12. 1) От m миллиграммов радиоактивного вещества C через 20 мин радиоактивного распада осталось n миллиграммов. Найдите период полураспада радиоактивного вещества C.

2) Имеется 1 г радиоактивного вещества A. Через сколько минут его масса станет равной 0,125 г, если период полураспада A равен 3 мин?

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

27.13. Подготовьте сообщение о применении теории дифференциальных уравнений при решении практических задач по биологии (химии, физики).

ПОВТОРИТЕ

27.14. Найдите первообразную для функции:

1) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} + 2x$; 2) $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2 2x} + e^{4x}$;

3) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1} + e^{-x}$; 4) $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} - 2e^{-x}$.

27.15. 1) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 4x + 5$, касательной к параболе, проходящей через точку $M(4;\ 5)$, и осью ординат.

2) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y = \sin^2 x$, $y = \cos^2 x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

27.16. Решите неравенство:

1) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5(x) > 0$; 2) $\log_3(3x + 5) \le 3$;

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-3x+2} > 1$; 4) $7^{x^2} < \left(\dfrac{1}{49}\right)^{x-4}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Уравнение, линейное уравнение, решение уравнения, производная, первообразная, интеграл, правила нахождения первообразных, свойства интеграла, дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, решение дифференциального уравнения, общее решение, частное решение.

§ 28. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Вы научитесь решать линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (вида $ay'' + by' + cy = 0$, где a, b, c — постоянные).

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, решение дифференциального уравнения, общее решение, частное решение

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида $ay'' + by' + cy = 0$ (1) где a, b, c — постоянные.

Решением этого дифференциального уравнения может быть только такая функция, производные которой подобны этой функции. Такой особенностью обладает, например, показательная функция $y(x) = e^{kx}$.

Теорема. Если число k_0 является корнем уравнения $ak^2 + bk + c = 0$ (2), то функция $y(x) = e^{k_0x}$ является решением уравнения (1).

Доказательство. Пусть $y(x) = e^{k_0x}$. Найдем производные: $y'(x) = (e^{k_0x})' = k_0 \cdot e^{k_0x}$ и $y''(x) = (k_0e^{k_0x})' = k_0^2 \cdot e^{k_0x}$. Поставив y'', y' и y в уравнение (1), получим: $ak_0^2 \cdot e^{k_0x} + bk_0 \cdot e^{k_0x} + c \cdot e^{k_0x} = 0$ или $e^{k_0x} \cdot (ak_0^2 + bk_0 + c) = 0$.

Так как k_0 является решением уравнения (2), то выражение $e^{k_0x} \cdot (ak_0^2 + bk_0 + c)$ тождественно равно нулю. Следовательно, $y(x) = e^{k_0x}$ является решением уравнения (1).

Уравнение $ak^2 + bk + c = 0$ называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (1).

Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения $ak^2 + bk + c = 0$, которое в данном случае является квадратным уравнением, его корни могут быть или действительными различными, или действительными равными, или комплексными.

Возможные случаи общего решения однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (1) представлены в таблице 36 (Доказательство этого утверждения изучается в курсе высшей математики высшей школы).

Таблица 36

Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами		
Корни характеристического уравнения $ak^2 + bk + c = 0$	Дискриминант характеристического уравнения $ak^2 + bk + c = 0$	Общее решение
Корни k_1; k_2 действительные и различные	$D > 0$	$y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
Корни k_1; k_2 действительные и равные	$D = 0$	$y(x) = (C_1x + C_2)e^{k_1x}$
Корни k_1; k_2 комплексные $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$	$D < 0$	$y(x) = e^{\alpha x}\,[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]$

ПРИМЕР

1. Решим дифференциальное уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Решение. Запишем сначала соответствующее характеристическое уравнение: $k^2 - 7k + 6 = 0$. Данное уравнение имеет два корня: $k_1 = 1$ и $k_2 = 6$, поэтому общее решение будет иметь следующий вид: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{6x}$, где C_1 и C_2 — произвольные действительные числа.

Ответ: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

ПРИМЕР

2. Решим дифференциальное уравнение: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение. Запишем сначала соответствующее характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 4 = 0$. Данное уравнение имеет один корень $k_1 = -2$, поэтому общее решение будет иметь следующий вид: $y(x) = (C_1x + C_2)e^{-2x}$, где C_1 и C_2 — произвольные действительные числа.

Ответ: $y(x) = (C_1x + C_2)e^{-2x}$.

ПРИМЕР

3. Решим дифференциальное уравнение $y'' + 6y' + 58y = 0$.

Решение. Запишем сначала соответствующее характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 58 = 0$. Данное уравнение имеет два комплексных корня: $k_{1,2} = -3 \pm 7i$, поэтому общее решение будет иметь следующий вид: $y(x) = e^{-3x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x)$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Ответ: $y = e^{-3x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x)$.

Вы научитесь составлять и решать уравнение гармонического колебания.

Уравнение $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ (1) дает зависимость колеблющейся величины S от времени t; это и есть уравнение свободных гармонических колебаний в явном виде.

Однако, обычно под уравнением колебаний понимают иную запись этого уравнения, в дифференциальной форме.

Уравнение (1) дважды продифференцируем по времени:

$$\frac{ds}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ или } \frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *уравнением свободных гармонических колебаний в дифференциальной форме.*

Уравнение (1) является решением дифференциального уравнения (2).

Поскольку уравнение (2) — дифференциальное уравнение второго порядка, необходимы два начальных условия для получения полного решения (т. е. определения, входящие в уравнение (1) констант A и φ_0); например, положение и скорость колебательной системы при $t = 0$.

1. Какие возможны случаи общего решения однородного дифференциального уравнения второго порядка?
2. От чего зависит вид общего решения однородного дифференциального уравнения второго порядка?
3. Когда решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами представляет собой уравнение гармонического колебания?

Упражнения

A

28.1. Заполните таблицу:

Таблица 37

Дифференциальное уравнение	Характеристическое уравнение
$y'' - 4y = 0$	
$y'' - 23y = 0$	
$y'' + 25y = 0$	
	$k^2 + 8k = 0$
$y'' + 6y' - 16y = 0$	
	$2k^2 - 8k + 24 = 0$
$2y'' + 4y' + 19y = 0$	
$3y'' - 8y' + 28y = 0$	

28.2. Решите дифференциальные уравнения (**28.2—28.4**):

1) $y'' - 4y = 0$;
2) $y'' - 16y = 0$;
3) $y'' + 25y = 0$;
4) $y'' + 36y = 0$.

28.3. 1) $y'' - 6y' + 9y = 0$;
2) $y'' + 8y' + 16y = 0$;
3) $y'' - 2y' - 8y = 0$;
4) $y'' + 4y' - 12y = 0$.

28.4. 1) $y'' - 2y' + 10y = 0$;
2) $y'' + 8y' + 25y = 0$;
3) $y'' + 6y' + 45y = 0$;
4) $y'' - 4y' + 53y = 0$.

28.5. Решите линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + 5y' - 6y = 0$;
2) $y'' - 3y' - 10y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 12y = 0$;
4) $y'' + 8y' + 36y = 0$.

B

28.6. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

1) $y'' - 6y' + 9y = 0$ при условии $y(0) = 1$, $y(1) = 2$;
2) $y'' + 2y' + y = 0$ при условии $y(0) = 3$, $y(1) = 4$;
3) $y'' - y' - 2y = 0$ при условии $y(0) = 2$, $y(1) = 1$;
4) $y'' - 2y' - 8y = 0$ при условии $y(0) = 2$, $y(1) = 0$.

28.7. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

1) $y'' + y = 0$ при условии $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$;

2) $y'' + 16y = 0$ при условии $y(0) = 2$, $y(\frac{\pi}{8}) = -1$.

28.8. Составьте соответствующее однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, имеющее решение:

1) $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; 2) $y = e^{-x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$;

3) $y = e^{x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$; 4) $y = e^{2x}(C_1\cos 2\sqrt{3}x + C_2\sin 2\sqrt{3}x)$.

28.9. Напишите однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решением которого является уравнение гармонического колебания:

1) $y = \cos(2x - 1)$; 2) $y = 2\sin(2x - 3)$;

3) $y = e^{2x} \cdot \sin(\sqrt{3}x - 5)$; 4) $y = e^{-x} \cdot \sin(2\sqrt{2}x - 1)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Решением дифференциального уравнения $y' = 3 - 2x - 3x^2$ является функция:

A) $y = 3x - x^2 - 3x^3 + C$; B) $y = 3x - 2x^2 - x^3 + C$;

C) $y = 3x - x^2 - x^3 + C$; D) $y = 3x^{-1} - x^2 - x^3 + C$;

E) $y = x - 2x^2 - x^3 + C$.

2. Решением дифференциального уравнения $y' = 5y$ является функция:

A) $y = 5x$; B) $y = e^{5x+C}$; C) $y = 3 - e^{5x}$;

D) $y = C - e^{5x}$; E) $y = x - e^{5x}$.

3. Решением дифференциального уравнения $y' = y\cos x$ является функция:

A) $y = xe^{\sin x}$; B) $y = e^{2\sin x + C}$; C) $y = e^{-\sin x}$;

D) $y = C \cdot e^{\sin x}$; E) $y = C \cdot e^{\cos x}$.

4. Найдите частное решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 4xe^{-y}$ при условии $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$:

A) $y = 4e^{x}$; B) $y = 2e^{2x}$; C) $y = \ln x$;

D) $y = \ln x^2$; E) $y = \ln 2x^2$.

5. Для дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 5y' + 20y = 0$ характеристическим уравнением является:

A) $2k^2 - 5k - 20 = 0$; B) $2k^2 - 5k + 20 = 0$;

C) $k^2 - 5k + 20 = 0$; D) $2k^2 - 5k + 10 = 0$;

E) $k^2 + 5k - 20 = 0$.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' + 32y = 0$:

A) $y = C_1\cos 4\sqrt{2}x + C_2\sin 4\sqrt{2}x$; B) $y = C_1\cos 2\sqrt{2}x + C_2\sin 2\sqrt{2}x$;

C) $y = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x$; D) $y = C_1\cos 8\sqrt{2}x + C_2\sin 8\sqrt{2}x$;

E) $y = e^{x}(C_1\cos 4\sqrt{2}x + C_2\sin 4\sqrt{2}x)$.

7. Составьте соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, имеющее общее решение $y = e^{5x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$:

A) $y'' - 10y' + 25y = 0$;
B) $y'' - 10y' + 41y = 0$;
C) $y'' - 10y' + 42y = 0$;
D) $y'' + 10y' + 41y = 0$;
E) $y'' - 10y' + 45y = 0$.

8. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 34y = 0$:

A) $y = e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$;
B) $y = e^{3x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$;
C) $y = e^{3x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$;
D) $y = e^{-3x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$;
E) $y = e^{6x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$.

Тестовые задания "Математическая грамотность"

9. Перед зданием фирмы разбили клумбу прямоугольной формы размерами $8,5 \times 4,5$ м. Какое количество кустов роз надо купить для посадки их по периметру клумбы, если расстояние между кустами составляет 50 см:

A) 50; B) 56; C) 54; D) 53; E) 52?

10. На рисунке по определенному закону находятся числа в меньшем круге. Найдите значение X:

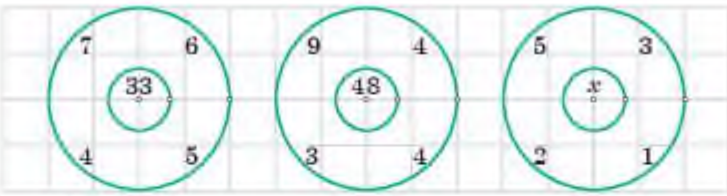


Рис. 73

A) 13; B) 10; C) 16; D) 12; E) 14.

11. Сауле написала подряд все натуральные числа от 1 до 10 000 включительно. Сколько цифр написала Сауле:

A) 39 884; B) 38 894; C) 38 584; D) 38 694; E) 38 889?

12. Из середины книжки выпало несколько листов. Оказалось, что левая страница пронумерована как 62, а правая — как 87. Какой номер последней страницы книги:

A) 144; B) 146; C) 148; D) 152; E) 150?

13. Асем и Куаныш ходят в одну и ту же школу. Куаныш живет в двух километрах от школы, а Асем — в 1 км. На каком расстоянии друг от друга живут Асем и Куаныш, если они живут на одной улице:

A) 2 км; B) 1 км или 3 км; C) 1 км;
D) 3 км; E) 4 км?

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА ЗА 10—11 КЛАССЫ

Вычисления

1. Найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{2\sqrt{30}+11} - \frac{1}{2\sqrt{30}-11}$;

2) $(\sqrt{15} + \sqrt{45})^2 - 30\sqrt{3}$;

3) $\left(\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \cdot ((\sqrt{2})^{-1} - (2\sqrt{2})^{-1})^2$;

4) $5^{\log_2 4 - \lg 20 - \lg 5}$;

5) $9^{2 \cdot \log_3 4{,}5 - \log_3 2} + \log_3 243$;

6) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[256]{2}$;

7) $\log_9 3 + \frac{\log_3 6}{\log_{18} 3} - \frac{\log_3 2}{\log_{54} 3}$;

8) $\log_6 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - \log_6 2$.

2. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = (2x - 1)^2 - 4\sqrt{x^5}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}} - 5\sqrt[5]{x^2} + 2x$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = (3x + 4) \cdot e^{2x}$, $x_0 = -1$.

3. Найдите значение углового коэффициента касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $y = e^{2x}$, $x_0 = 2$;

2) $y = \frac{x}{x+1} - \sqrt{6 - x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \ln\frac{x}{x+1}$, $x_0 = 3$;

4) $y = e^{2x^3 - x}$, $x_0 = 1$.

4. Найдите значение $f''(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = e^{2x-1}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \ln 4x$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \sin^2 3x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$:

1) $y = xe^x$, на промежутке $[0; 3]$;

2) $y = x\ln x$, на промежутке $[2; 3]$;

3) $y = \sqrt{x} - x$, на промежутке $[0; 4]$;

4) $y = \frac{1}{x} + x$, на промежутке $[0{,}5; 4]$.

Тождественные преобразования

Упростите выражение (6—10):

6. 1) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} + \frac{\sqrt{a}}{3+\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{a + 6\sqrt{a} + 9}{a}$;

2) $\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{y}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$.

7. 1) $\left(\frac{\sqrt{1+a^2}}{1+b+a^2}-\frac{\sqrt{b}\cdot(\sqrt{1+a^2}-\sqrt{b})^2}{(1+a^2)^2-b^2}\right)^{-1}-10^{\log_{100}(1+a^2)}$;

2) $2^{\log_2 x}+\sqrt{\frac{4}{x}-2+\frac{1}{4x^{-1}}}+\sqrt{\frac{x}{4}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}}$.

8. 1) $((a^{-\frac{3}{7}}\cdot y^{-0,4})^3\cdot a^{\frac{3}{7}}\cdot y^{0,2})^{-1}$; 2) $((a^{-\frac{2}{7}}\cdot y^{\frac{1}{14}})^{3,5}\cdot y^{\frac{5}{4}}\cdot a^{-1})^{-1}$.

9. 1) $\frac{x-y}{x^{0,5}-y^{0,5}}-\frac{x^{1,5}-y^{1,5}}{x-y}$; 2) $\frac{\sqrt{y}}{x^{0,5}-y^{0,5}}+\frac{\sqrt{x}}{x^{0,5}+y^{0,5}}$.

10. 1) $(\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}})^2-2a$; 2) $(\sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}})^2+2\sqrt{y^2-x}$.

Найдите значения выражений (11—12):

11. 1) $2\log_{\frac{a^2}{b}}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\frac{a^2}{b}}b$, если $\log_a b=-2$;

2) $\log_{\sqrt{ab}}\left(\frac{a}{b}\right)+\log_{a^2b^2}b+\log_{ab}\sqrt{a}$, если $\log_a b=2$.

12. 1) $\log_7 12$, если $\log_7 2=a$, $\log_7 3=b$;

2) $\log_{12}14$, если $\log_7 2=a$, $\log_7 3=b$;

3) $\log_5 60$, если $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$;

4) $\log_3 1500$, если $\log_3 5=a$, $\log_3 2=b$.

Предел и производная функции

13. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{4x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 2x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\ln(1+4x^2)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\ln^2(1+2x)}$.

14. Найдите значение a, при котором функция $y=f(x)$ является непрерывной в области определения:

1) $f(x)=\begin{cases}x^2-4, \text{ при } x\leqslant 2,\\ ax-6, \text{ при } x>2;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}4+x, \text{ при } x\leqslant 1,\\ 2x^2-a, \text{ при } x>1;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{2x}, \text{ при } x\neq 0,\\ a, \quad \text{ при } x=0;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2}, \text{ при } x\neq 0,\\ a, \quad \text{ при } x=0.\end{cases}$

15. Найдите производную функции $f(x)$:

1) $f(x) = 2x(|x| - 1)$; 2) $f(x) = x^2|x - 2| + 2x^2$.

16. Найдите производную функции $f(x)$:

1) $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x - 2^{2x}$; 2) $f(x) = \sin^3 2x + \cos 3x - e^{2-x}$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}^2 2x + \mathrm{ctg} 3x + e^x$; 4) $f(x) = \mathrm{arctg} 2x + \arccos x + \sqrt{x}$.

17. Найдите значение второй производной функции $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ при $x = 2$.

18. Найдите производную функции $f(x)$:

1) $f(x) = \ln\frac{2x - 1}{3x + 2}$; 2) $f(x) = \ln\frac{(x - 1)^3}{x + 3}$;

3) $f(x) = \ln\frac{(x + 3)^4}{(x - 1)^2}$; 4) $f(x) = x + \ln\frac{(x - 5)^5}{(x + 1)^4}$.

19. Найдите точки, в которых $f'(x) = 0$:

1) $f(x) = \sqrt{3} + 3x^2 - x^3$; 2) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{2x}$;

3) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 2\pi$; 4) $f(x) = \pi + x + \sin^2 2x$.

Интеграл

20. Для функции $y = f(x)$ найдите первообразную функцию, график которой проходит через начало координат:

1) $f(x) = 2x - 3$; 2) $f(x) = -3x^2 + 1$;

3) $f(x) = 5 - 3\sin x$; 4) $f(x) = 2\cos x - 3x^2$.

21. Найдите неопределенный интеграл:

1) $\int(2x - 1)^4 dx$; 2) $\int(5 - 2x)^{-3} dx$; 3) $\int\sqrt{\sin x}\cos x dx$;

4) $\int(x + e^{2x})dx$; 5) $\int\sin(2 - 3x)dx$; 6) $\int\cos^2(x - 3)dx$;

7) $\int\frac{3}{\cos^2 3x}dx$; 8) $\int\frac{2x}{3 + x^2}dx$.

22. Методом интегрирования по частям найдите:

1) $\int(x + 1)e^x dx$; 2) $\int x^5 e^{x^2} dx$; 3) $\int x\sin x dx$;

4) $\int x e^{2x} dx$; 5) $\int x^2 \sin x dx$; 6) $\int x\cos^2\frac{x}{2} dx$.

23. Вычислите интегралы:

1) $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^4}$; 2) $\int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos 5x dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx$; 5) $\int_1^2 \frac{dx}{x + x^2}$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx$.

24. а) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

1) $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$;

2) $y = 2^x - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $y = \frac{1}{x^2}$;

3) $y = 3 - x^2$, $y = 1 + |x|$.

б) Найдите объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной графиками функций, вокруг оси Ox:

1) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$;

2) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$.

Уравнения и неравенства

25. Решите уравнение:

1) $(x + 1)^{x^2 - x} = (x+1)^2$;

2) $(x - 1)^{x^2 + x} = (x - 1)^6$;

3) $|x - 3|^{3-x} = |3 - x|^2$;

4) $\log_{x+2}(3x^2 - 12) = 2$;

5) $\log_{5-x^2}(2x^2-8x-2) = 1+\log_{5-x^2}2$;

6) $\log_{\frac{x-3}{x+1}} 2 = 1$.

26. Решите неравенство:

1) $x^{4x^2} < x$, $x > 0$;

2) $|x + 5|^{x^2 - 4x + 3} > 1$;

3) $\log_{2x-3} x > 1$;

4) $\log_{x^2}(3x + 4) \geqslant 1$.

27. Решите неравенство:

1) $\sqrt{2x - 1} > x - 2$;

2) $\sqrt{x + 1} > x - 1$;

3) $\sqrt{9x - 20} > x$;

4) $\sqrt{14 - x} > 2 - x$;

5) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$;

6) $\sqrt{x^2 - 10x + 24} > x - 4$.

28. 1) Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{x - 3}{2} \geqslant \frac{(\sqrt{x} - 5)^2}{x - 6}$.

2) Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{6 - x}{\sqrt{x^2 - 8x + 7}} \geqslant 0$.

3) Решите неравенство $(x^2 + 2x - 8) \cdot \sqrt{x^2 + x - 2} \leqslant 0$.

4) Решите неравенство $5^{0,5\log_5^2 x} \geqslant 5 \cdot x^{0,25\log_5 x}$.

29. Решите неравенство $f'(x) \geqslant 0$:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x + \sin x$;

2) $f(x) = 2\sin\frac{1}{2}x - \sqrt{3}x$;

3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x - x$;

4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos 6x + x$;

5) $f(x) = \arccos 3x + 2x + 3$;

6) $f(x) = \mathrm{arcctg}\, 2x + 2x - 1$.

30. Решите уравнение $f'(x) = a$, если:

1) $f(x) = 3e^{x+4}$, $a = \frac{3}{e}$;

2) $f(x) = 4 + \frac{1}{3}e^{-6x-13}$, $a = -2$;

3) $f(x) = 2e^{-7x+9}$, $a = -14$;

4) $f(x) = 7 - e^{0,1x-3}$, $a = 0,1$.

Функция и ее график

31. Найдите асимптоты графика функции:

1) $y = \frac{x-2}{x-1}$; 2) $y = \frac{5-x}{x+3}$; 3) $y = \frac{x^2+5}{x-2}$; 4) $y = \frac{2x^2-x}{x+2}$.

32. Найдите координаты точки перегиба графика функции:

1) $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$; 2) $y = \frac{2x^2}{x-1}$; 3) $y = \frac{2x^3}{5-x^2}$; 4) $y = 2 - 5x + 2x^3$.

33. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 + 10x - 10\sqrt{3}$; 2) $y = \lg(x^2 - 4x)$;

3) $y = x^3 - 6x^2 + 9$; 4) $y = xe^x$.

34. Докажите, что функция:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ возрастает при $x > 2$;

2) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ убывает при $x < 0$ и при $0 < x < 2$.

35. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 0$:

1) $y = x - 2\sqrt{x+1}$; 2) $y = \sqrt{3x+1}$;

3) $y = xe^{2x}$; 4) $y = x\ln(x + e)$.

36. Найдите критические точки функции:

1) $f(x) = x - 2\sin x$; 2) $f(x) = x + \cos 2x$;

3) $f(x) = (x + 2)e^{1-x}$; 4) $f(x) = \cos x \cdot e^{2x}$.

37. Используя программу "Живая математика" или "GeoGebra" постройте график функции $f(x)$ и запишите уравнения ее асимптот:

1) $y = \frac{\sqrt{x+4}}{x-1}$; 2) $f(x) = x \cdot \ln(x + 2)$.

38. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$:

1) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, параллельной прямой $y = \frac{3}{4}x + 2$;

2) $f(x) = \sqrt{3-2x}$, параллельной прямой $y = -x - 6$.

39. Исследуйте функцию и постройте ее график:

1) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$; 2) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;

3) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$; 4) $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x$.

40. Дан график функции $y = f'(x)$ (рис. 74). По графику функции найдите:

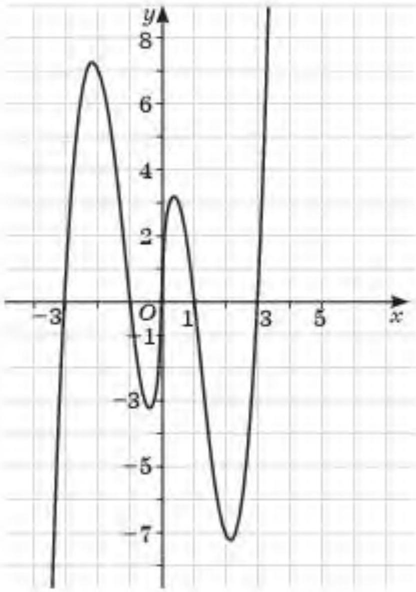


Рис. 74

1) точки, в которых $f'(x)$ равна 0;
2) промежутки, в которых $f(x)$ возрастает;
3) промежутки, в которых $f(x)$ убывает;
4) точки минимума функции $f(x)$.

41. Для функции $y = f'(x)$, график которой дан на рисунке 75, запишите:

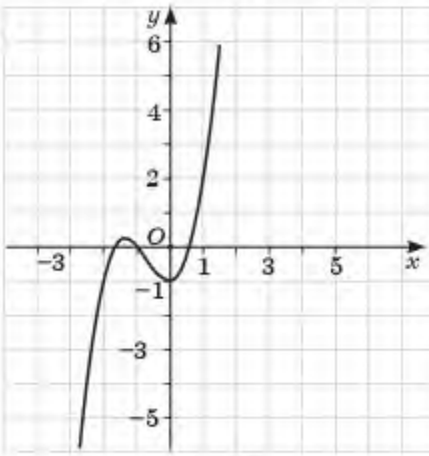


Рис. 75

1) точки минимума функции;
2) точки максимума;
3) экстремумы функции.

42. Исследуйте функцию и постройте ее график, используя программу "Живая геометрия" или "GeoGebra":

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

3) $y = x + \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$;

5) $y = (x + 3) \cdot e^{x-1}$; 6) $y = (x^2 + 2x) \cdot \ln x$.

43. Дан график производной функции $y = f'(x)$ (рис. 76).

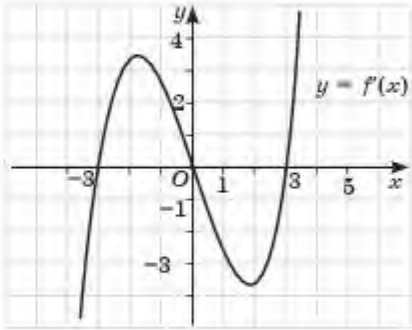


Рис. 76

Найдите точки максимума и точки минимума функции.

44. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s = 3t^2 - \frac{3}{2}t$, где $s(t)$ — путь в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени из промежутка [1;5] скорость движения точки будет наибольшей и чему равна величина этой скорости?

45. 1) Проволоку длиной 120 см требуется согнуть в прямоугольник так, чтобы площадь этого прямоугольника была максимальной. Найдите длины сторон этого прямоугольника.
2) Найдите длины сторон прямоугольника периметра a, имеющего наибольшую площадь.

46. 1) Разложите число 12 на два положительных слагаемых, чтобы сумма квадратов этих слагаемых была наименьшей.
2) Разложите число 18 на два положительных слагаемых, чтобы значение их произведения было наибольшим.
3) Число 16 представьте в виде произведения двух положительных чисел, сумма квадратов которых будет наименьшей.

47. 1) Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + 2t + 5$, t — время. Найдите скорость движения точки в конце пятой секунды.
2) Материальная точка движется по закону $x(t) = 5t + 6t^2 - t^3$. Найдите ускорение точки в момент $t = 2$ с.

48. Участок площадью в 800 м^2 имеет форму прямоугольника. Участок огорожен изгородью с трех сторон. Найдите наименьшую длину изгороди.

49. Витринное окно площадью в 12,5 м^2 имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Какой должна быть длина радиуса полукруга, чтобы периметр окна был наименьшим?

50. Через какую точку графика функции $f(x) = \sqrt{2 - x}$ надо провести касательную, чтобы площадь треугольника, образованного осями координат и этой касательной, была наименьшей?

Дифференциальные уравнения

51. Решите дифференциальное уравнение:

1) $y' = \dfrac{x^4 - 2}{x^3}$; 2) $y' = (1 + x^2)(1 + y^2)$;

3) $y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}$; 4) $y\cos y \cdot y' = -2x$.

52. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего условию:

1) $x^2y' = -y^2$, $y(-1) = 1$; 2) $(1 + e^x)yy' - 0{,}5e^x = 0$, $y(0) = 0$;

3) $ydx + \mathrm{ctg}\,xdy = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = -1$; 4) $\cos^2 x \cdot \ln ydy = ydx$, $y(\pi) = 1$.

53. Решите дифференциальное уравнение:

1) $y' - y \cdot \mathrm{ctg}\,x = \sin x$; 2) $yy' = 1 + 3x\ln x$;

3) $y' - y = e^x$; 4) $(1 + x^2)y' + 4xy = 3$.

54. Решите линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 5y' - 6y = 0$; 2) $y'' - 2y' - 8y = 0$;

3) $y'' + 3y' - 10y = 0$; 4) $y'' + 4y' - 12y = 0$.

55. 1) Скорость поезда на горизонтальном участке пути равна 72 км/ч. За сколько секунд и на каком расстоянии поезд будет остановлен, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса?

2) Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(3; 4)$, у которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

3) В воде, температура которой 20°С, в течение 10 мин тело охлаждается от 100°С до 60°С. За какое время тело охладится до 30°С, если по закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и охлаждающей среды?

Комплексные числа

56. Выполните действия:

1) $3(2 + 3i) - (3 - 5i)$; 2) $4(1 + 3i) - (2 + 5i)$;

3) $(2{,}1 - i) - (3{,}1 - 5i)$; 4) $6(2 + 3i) - 2(2 + 5i)$.

57. Выполните действия над комплексными числами:

1) $(2 + 3i)(3 - i)$;
2) $(1 - 3i)(3 - 2i)$;
3) $(1 - 2i)^2$;
4) $(2 - i)^2 + 5i$.

58. При каких действительных значениях x и y комплексные числа будут сопряженными:

1) $5 - yi$ и $x + 2i$;
2) $3 + 2yi$ и $2x + 4i$?

59. Разложите на множители выражение:

1) $25 + 9x^2$;
2) $4x^2 + 16y^2$;
3) $x^2 - 4x + 5$;
4) $x^2 - 6x + 25$.

60. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число:

1) $2i$; 2) $2 - i$; 3) $3 - 2i$; 4) $-2 + 4i$.

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

61. 1) Сколько чисел, меньших 10 000, можно составить из цифр 2, 6, 7? Сколько из них нечетных?

2) Сколько чисел, меньших 10 000, можно составить из цифр 4, 5, 9? Сколько из них четных?

62. 1) Найдите значение суммы четырехзначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 3, 5, 5, 7.

2) Найдите значение суммы четырехзначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 3, 3, 4, 8.

63. В партии из 20 изделий имеются четыре изделия с дефектами. Для проверки их качества случайно выбирают три изделия. Составьте ряд распределения числа дефектных изделий, содержащихся в этой выборке.

64. 1) Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 2, 3, 4 при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды?

2) Сколько можно составить четырехзначных чисел из цифр 0, 2, 3, 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется дважды?

3) Из 100 подарочных наборов в 50 находятся конфеты, в 45 — яблоки, в 35 — мандарины, в 20 — конфеты, яблоки и мандарины, в 25 — конфеты и яблоки, в 15 — яблоки и мандарины. Найдите число наборов с конфетами и мандаринами.

65. Решите уравнение:

1) $C_{2n+1}^{n-1} : C_{2n}^{n+1} = 1\frac{2}{3}$; 2) $A_{2x}^{x-1} : A_{2x}^{x+1} = \frac{1}{30}$; 3) $C_n^3 : A_n^2 = 2$.

66. Используя формулу $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, вычислите приближенно значение выражения:

1) $1{,}02^8$; 2) $1{,}002^{15}$; 3) $0{,}998^{10}$; 4) $0{,}97^{11}$.

67. Из 200 лотерейных билетов 25 выигрышных. Приобретен один билет. Найдите вероятность того, что лотерейный билет: 1) выигрышный; 2) не выигрышный.

68. Из 200 лотерейных билетов 20 выигрышных. Приобретены 5 билетов. Найдите вероятность того, что среди приобретенных билетов будут два выигрышных.

69. 1) При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,95. Какова вероятность того, что для запуска автомобиля придется включать зажигание не более трех раз?
2) На семи карточках записаны буквы *а*, *а*, *б*, *е*, *г*, *р*, *л*. Берут наугад одну карточку за другой и кладут в том порядке, в каком карточки были вынуты. Найдите вероятность того, что получится слово "алгебра".

70. 1) В круг, длина радиуса которого равна 4 см, наугад брошена точка В. Найдите вероятность того, что эта точка не попадает в круг, находящийся внутри первого круга, и длина радиуса которого равна 2 см.
2) Случайным образом выбирается число из промежутка $[-3; 11]$. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 5x - 6 < 0$.
3) Случайным образом выбирается число из промежутка $[-4; 11]$. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 2x - 8 \leqslant 0$.
4) Случайным образом выбирается целое число из промежутка $[-3; 10]$. Найдите вероятность того, что это число является решением неравенства $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$.

Практико-ориентированные задания

71. Если на каждую скамью в актовом зале посадить по 6 учеников, то четверо учеников останутся без места. Если же на каждую скамью посадить по 7 человек, то три места останутся свободными. Сколько учеников в актовом зале и сколько скамеек?

72. Семья из четырех человек решила поехать в г. Алматы. Если ехать поездом, тогда расходы на одного человека составят 3460 тенге. На автомобиле на 100 км пути расходуется 11 л бензина. Расстояние до Алматы — 600 км, стоимость бензина равна 176 тг/л.
а) Какая поездка в обоих направлениях для четырех человек окажется дешевле?
б) В случае, когда семья решила ехать на выставку поездом, выясните, насколько дороже окажется поездка.

73. Думан открыл учебник по алгебре и началам анализа и обнаружил, что сумма номеров левой и правой страниц — 49. Чему равно произведение этих номеров?

74. 1) На перерывах младший школьник в день, посещая столовую, покупает кашу, 1 стакан чая или 1 стакан яблочного сока с булочкой. Стоимость каши — 50 тг, булочки — 55 тг, сладкого чая — 35 тг, а яблочного сока — 165 тг. Проезд в городском транспорте — 40 тг.

1) Какую сумму должны дать родители школьнику на день учебы в школе (с учетом проезда)?

2) Школа работает по пятидневке. Какую сумму должны дать школьнику родители на неделю только на обеды, если ученик три дня покупает чай, а два дня — яблочный сок?

3) Если в семье два ученика начальных классов, то какие расходы несет семья за неделю, включая проезд?

75. Алия написала список продуктов и их количество. Сравнив цены в супермаркетах, она составила таблицу, включив стоимость цен по каждому наименованию за 1 килограмм (табл. 38).

1) В каком супермаркете Алие выгодно купить продукты и какая потребуется сумма?

2) В каком супермаркете этот набор продуктов будет стоить дороже и на сколько?

Таблица 38

	1	2	3	4	5
Копченая колбаса (200 г)	1250	1280	1250	1200	1300
Помидоры (2 кг)	590	540	570	590	560
Огурцы (1 кг)	660	670	720	680	700
Картофель (2 кг)	120	140	110	130	130
Морковь (0,5 кг)	90	100	80	100	90

76. В классе гимназии общественно-гуманитарного направления все учащиеся изучают иностранные языки: немецкий, французский и английский. Из них английский изучают все ученики, немецкий — 22 ученика, французский — 13 учеников, а 9 человек изучают немецкий и французский одновременно. Найдите число учащихся в классе.

Рис. 77

77. Даулет изобразил на рисунке 77 свои расходы (в тенге). Сколько процентов от общей суммы денег Даулет потратил на транспорт?

Задания повышенной сложности

78. Докажите, что для любых положительных a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства: $a(1 - b) > \frac{1}{4}$; $b(1 - c) > \frac{1}{4}$; $c(1 - a) > \frac{1}{4}$.

***79.** Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $ay + bx > 0$ и $x \neq y$, то имеет место неравенство: $\frac{(a + b)xy}{ay + bx} < \frac{ax + by}{a + b}$.

80. Докажите, если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$, то $\frac{a + c}{a - c} + \frac{b + c}{b - c} = -2$.

81. Учитель написал на листке бумаги число 100. 25 учеников класса передают листок друг другу, и каждый ученик прибавляет к числу или отнимает от него единицу — как желает. Может ли в результате получиться число 80?

***82.** Докажите неравенство $n! < \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n$, $n \geqslant 2$.

***83.** 1) При каких значениях параметра a неравенство $(a - 2)\sin 2x - 3 > 0$ выполняется при всех значениях x?

2) При каких значениях параметра a неравенство $(a - 1)\cos(x - 2) < 2$ выполняется при всех значениях x?

***84.** При каких значениях параметра a все решения неравенства $\log_{3x^2+2}(x^2 - 3x + 7) \geqslant 1$ одновременно являются решениями и неравенства $(x + 1)^2 - 4a^2(x + 1) + 3a^4 \geqslant 0$?

85. Решите уравнение $\log_{x+1}\log_3\log_{x+2}(x^3 + 10x^2 + 8x - 1) = 0$.

86. При каких действительных значениях параметра a неравенство $\log_{a-3}(|x| + 4) \geqslant 2$ справедливо при всех действительных значениях x?

87. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите:

1) $\int\limits_0^2 \left||x - 1| - 1\right| dx$; 2) $\int\limits_0^2 \sqrt{4x - x^2dx}$; 3) $\int\limits_3^6 \sqrt{6x - x^2dx}$.

ГЛОССАРИЙ

Алгебраическая форма записи комплексного числа	Комплексное число, записанное в виде $z = x + iy$, является *алгебраической формой записи комплексного числа*
Арифметический корень n-й степени	*Арифметическим корнем n-й степени из числа a* называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a
Выборка	*Выборочной совокупностью* или *выборкой* называется совокупность объектов или результатов наблюдения над объектом, отобранных случайным образом из генеральной совокупности
Генеральная совокупность	*Генеральной совокупностью* называется совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех наблюдений, производимых в одинаковых условиях над одним объектом
Десятичный логарифм	Логарифм числа по основанию 10 называется *десятичным логарифмом*
Дискретный вариационный ряд	*Дискретным вариационным рядом* распределения называется ранжированная совокупность вариантов с соответствующими им частотами или частностями
Дифференциальное уравнение	*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее аргумент, неизвестную функцию этого аргумента и производную этой функции
Интервальный вариационный ряд	*Интервальным вариационным рядом* называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частотами попаданий в каждый из них значений величины
Интегрирование	Операцию нахождения неопределенного интеграла называют *интегрированием функции*
Иррациональное неравенство	Неравенство, содержащее переменную под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень, называется *иррациональным неравенством*
Иррациональное уравнение	*Иррациональным уравнением* называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, или под знаком возведения в дробную степень
Комплексное число	*Комплексными числами* называются числа вида $z = x + iy$, где x, y — действительные числа, i — мнимая единица, удовлетворяющая соотношению $i^2 = -1$
Корень n-й степени	*Корнем n-й степени из числа a* называется число b, n-я степень которого равна числу a
Криволинейная трапеция	Фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, называется *криволинейной трапецией*
Логарифм числа	*Логарифмом положительного числа b* по положительному и отличному от 1 основанию a называется показатель степени x, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b

Логарифмическое неравенство	Неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим неравенством*
Логарифмическое уравнение	Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим уравнением*
Логарифмическая функция	Функция, обратная показательной функции, называется *логарифмической функцией*
Мнимое число	Если действительная часть комплексного числа равна нулю, т. е. $x = \mathrm{Re}\, z = 0$, то комплексное число называется *чисто мнимым*
Натуральный логарифм	Логарифм по основанию числа e называется *натуральным логарифмом*
Неопределенный интеграл	Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом функции* $f(x)$
Объем выборки	*Объемом выборки* называется число объектов или наблюдений в выборке
Определенный интеграл	Выражение $\int_a^b f(x)dx$ называют *определенным интегралом функции* $f(x)$ от a до b
Первообразная функции	Если для любого x из множества X выполняется $F'(x) = f(x)$, то функцию $F(x)$ называют *первообразной* для функции $f(x)$ на данном множестве
Показательное неравенство	Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется *показательным неравенством*
Показательное уравнение	Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется *показательным уравнением*
Показательная функция	Функция вида $y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$, x — переменная, называется *показательной функцией*
Порядок дифференциального уравнения	Наибольший порядок производных, входящих в дифференциальное уравнение, называют *порядком дифференциального уравнения*
Равные комплексные числа	Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, т. е. равны их действительные и мнимые части
Решение дифференциального уравнения	*Решением дифференциального уравнения* называется дифференцируемая функция $y = f(x)$, при подставлении которой вместо независимой переменной y в уравнение получается верное равенство
Система иррациональных уравнений	Система уравнений, содержащая иррациональные уравнения, называется *системой иррациональных уравнений*
Сопряженное комплексное число	*Сопряженным числом* к комплексному числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = x - iy$

Степенная функция	*Степенной функцией* называется функция вида $y = x^r$, где x — независимая переменная (аргумент), а r — любое рациональное число
Степень с рациональным показателем	*Степенью неотрицательного числа a с рациональным показателем* $\frac{m}{n}$ (где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь) называется значение корня n-й степени из числа a^m
Формула нахождения объема тела	$V = \pi\int_a^b y^2dx$
Формула Ньютона—Лейбница	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Число e	$e = 2{,}7182818289...$

ОТВЕТЫ

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛА АНАЛИЗА ЗА 10 КЛАСС

1. 1) $\frac{5\pi}{12}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) $-\frac{5\pi}{4}$. **2.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{9\pi}{14}$; 5) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $7-2\pi$; 7) $\frac{5\pi}{2}-8$; 8) $4\pi-12$. **3.** 1) $\frac{3\sqrt{2}}{2}+8$; 2) -18; 3) -3; 4) 2. **4.** 1) 3; 2) $-\frac{7}{18}$. **5.** 1) 9; 2) 16; 3) -18. **6.** 1) $y_{наиб}(3)=0$; $y_{наим}(2)=-25$; 2) $y_{наиб}(3)=596$; $y_{наим}(2)=58$; 3) $y_{наим}(4)=-2$; $y_{наиб}(0)=0$; 4) $y_{наим}(1)=2$; $y_{наиб}(4)=4{,}25$. **7.** 1) $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2x}}$; 2) $f'(x)=6\sin^2 2x\cdot\cos 2x-3\sin 3x+\frac{2}{x^2}$; 3) $f'(x)=4\operatorname{tg}2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}-\frac{3}{\sin^2 3x}$; 4) $f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 5) $\frac{7}{(3x+2)^2}+3$; 6) $\sin 2x+2x\cos 2x-\frac{3}{2\sqrt{2-3x}}$. **8.** $\frac{\sqrt{5}}{25}$. **9.** 1) 0; 2; 2) -1; 0; 1; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$. **10.** 1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) -3. **11.** 1) 6; 2) 0; 3) $[-6;-3]\cup[1;2]$. **12.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; 2) $\varnothing$; 3) R; 5) $\varnothing$; 6) R. **13.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{4}+0{,}5\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **14.** 1) $\left\{\pm\arccos\frac{1}{4}+(2n\mp 1)\pi, n\in Z\right\}$; 3) $\left\{\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z\right\}$; 5) $\{-1;3\}$; 6) $\varnothing$; 7) $\{0;3\}$; 8) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$; 9) $\left\{-1;\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$; *указание*: произвести замену $y=x+\frac{1}{x}$, тогда $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$; 10) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2};\ 2\pm\sqrt{6}\right\}$. **15.** 1) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$; 3) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **16.** 1) $y=1$, $x=2$; 2) $y=-3$, $x=-3$; 3) $x=2$, $y=x+2$; 4) $x=-1$, $y=x-3$. **17.** 1) $M(0;0)$; 2) точек перегиба нет; 3) $M(0;0)$; 4) $M(0;4)$. **18.** 1) возрастает на $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$; убывает — $\varnothing$; 2) возрастает — $\varnothing$, убывает на $(-\infty;-3)$, $(-3;3)$ и $(3;+\infty)$; 3) возрастает на $(-\infty;-5)$, $(-5;5)$ и $(5;+\infty)$; убывает – $\varnothing$; 4) убывает на $(-\infty;-2)$ и $(-2;0]$; возрастает — $[0;2)$ и $(2;+\infty)$; **19.** а) 1) $y=2{,}5x+1$; 2) $y=1{,}5x+1$; 3) $y=-\frac{1}{4}x+1{,}5$; 4) $y=\frac{1}{2}x+1$. б) 1) $y=\frac{3}{4}x+1\frac{1}{4}$; 2) $y=-x+2$. **20.** 1) $\approx\pm 2$; 2) -3 и 0; 3) $M(-1;-3{,}8)$, $T(1;-3{,}8)$; 4) -7; -2; -1. **21.** *min* — (-3); 3, *max* — 0. **23.** $t=8$ с, $v=63{,}5$ м/с. **24.** 1) квадрат со стороной $a=60$ м; 2) 30 см. **25.** 150 м; 300 м. **26.** 384 м^2. **27.** 4 см; 2 см. **28.** 1) 22; 22; 2) 49; 49. **29.** $K(-2;2)$ или $K(2;2)$. **30.** 1) $a=-2$; 2) $a=1$. **31.** Частное z^4-3z^2-4z-8; остаток — (-9). **32.** 1) $(y-3)(y+3)(y-1)(y+1)$; 2) $(y-2)(y+2)(y+3)$; **33.** 1) $a=-1$; $c=-4$; 2) $a=4$; $c=3$. **34.** 1) -1; 2,5; 2) 2; 3. **35.** 1) -4; 2) 42. **36.** 1) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$; *указание*: разделить обе части уравнения на $y^3\neq 0$ и после группировки произвести замену $z=y+\frac{1}{y}$, тогда $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$; 2) $\varnothing$. **37.** 1) $3\cdot 3\cdot 4=36$; 2) 24; 3) 27. **38.** 1) 15; 2) 14. **39.** 1) $27\cdot C_6^3=540$; 2) 2835. **40.** 1) $\frac{C_4^2}{C_6^2}=0{,}4$; 2) $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}99\cdot 0{,}99\cdot 0{,}98=0{,}990\,498$. **41.** 1)

$\frac{10}{200}\cdot\frac{9}{199}\cdot\frac{8}{198}=\frac{1}{55\cdot199}=\frac{1}{10\,945}$; 2) $\frac{10}{200}\cdot\frac{190}{199}+\frac{90}{200}\cdot\frac{10}{199}=\frac{19}{2\cdot199}+\frac{9}{2\cdot199}=\frac{14}{199}$.
42. 1) 40; 2) 24 с — 33 с; 3) 27; 4) 13. **43.** 1) 1 450 000 тг; 2) у поставщика Y, 1 695 000 тг. **45.** 4. **46.** 1) 600 000 тг; 2) 24%. **47.** 1) 220 тг или 235 тг; 2) 2260 тг. **48.** 1) 13 синих шаров; 2) 11 шаров. **49.** $y=z^2-3$, $y(10)=97$. **50.** 1) 850 см³; 2) 2550 см³; 3) на 10 см.

Глава I. Первообразная и интеграл

1.1. 1) $1{,}5x^2+C$; 2) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+C$; 3) $\frac{x^4}{12}+x+C$; 4) $-\frac{1}{x}+C$. **1.2.** 1) $-2\cos x+C$; 3) $3\sin x+4\cos x+C$; 4) $-5\cos x+2\sin x+C$; 5) $\frac{x^8}{8}+6\sqrt{x}+C$; 6) $\frac{x^4}{4}-8\sqrt{x}+C$; 7) $\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)+C$; 8) $\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)+C$. **1.3.** 1) $\frac{1}{2}x^6+7\sqrt{x}+C$; 2) $\frac{3}{5}\sin 5x+\frac{1}{x}+C$; 3) $-8\cos x+\mathrm{ctg}\,2x+C$; 5) $-\frac{1}{2x^6}-7\mathrm{tg}\,x+C$. **1.5.** 1) $\frac{x^2}{2}+x+3$; 2) $\frac{x^3}{3}+4x+9$; 3) $-\cos x+1$; 4) $\sin x-1$. **1.6.** 1) $-\frac{1}{x}$. **1.8.** 3) $\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{2x-3}+2x+C$; 4) $-\sqrt{5-3x}-\frac{1}{5}\cos 5x+x+C$. **1.11.** 1) $\frac{(x-1)^4}{4}+C$; 2) $-\frac{1}{6}(1-2x)^3+C$. **1.12.** 1) $\frac{x^3}{3}-\mathrm{tg}\,x+1$. **1.14.** 2) $x^5-x^4-x^2+5$; 3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\sin 2x+1$. **1.15.** 1) $\frac{1}{4}\sin(4x-5)-\frac{1}{8}x^{-6}+3x+C$; 2) $\cos(2-x)+\frac{1}{5}\mathrm{tg}\,5x+C$; 4) $\sqrt{2x}+1{,}5\mathrm{ctg}\,2x-0{,}5x^2+C$. **1.20.** 1) $(-\infty;-5]\cup[0;\infty)$; 2) R; 3) $(-\infty;-3]\cup[1;4)$; 4) $[-4;-1)\cup(1;4]$. **1.21.** 1) $10(2x-7)^4+8x$; 2) $12(3x^2-5x)^3(6x-5)-6x^5$; 3) $2+3\sin 6x$; 4) $-3\sin 6x-3x^2$. **2.1.** 1) $\frac{(1+x)^6}{6}-\frac{(1+x)^5}{5}+C$; 2) $\frac{(x-3)^7}{7}+\frac{(x-3)^6}{2}+C$. **2.2.** 1) $2\sin\sqrt{x}+C$; 2) $-10\cos\sqrt{x}+C$. **2.3.** 1) $x\sin x+\cos x+C$; 2) $-2x\cos x+2\sin x+C$. **2.4.** 1) $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$; 2) $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$. **2.5.** 1) $\frac{(2x-1)^9}{36}+\frac{(2x-1)^8}{32}+C$; 2) $\frac{(3x+1)^{10}}{90}-\frac{(3x+1)^9}{81}+C$. **2.6.** 1) $\frac{2}{5}\sqrt{(4+x)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{(4+x)^3}+C$; 2) $\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C$. **2.7.** 1) $\frac{x^2}{4}\sin 4x+\frac{x}{8}\cos 4x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 2) $x\sin(x+2)+\cos(x+2)+C$; 3) $-\frac{1}{2}(x^2-3x)\cos 2x+\frac{1}{4}(2x-3)\cdot\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$. **2.8.** 1) $\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$; 2) $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$. **2.9.** 1) $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$; 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **2.10.** 1) $0{,}5\cdot(x^2-1)\cdot\arcsin x+\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{4}+C$; 2) $0{,}5\cdot(x^2-1)\cdot\arccos x-\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{4}+C$. **2.11.** 1) $\frac{\pi x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{2}(x-\mathrm{arctg}\,x)+C$. **2.13.** 1) R; 2) $[-0{,}5;0{,}5]$; 3) $[1;+\infty)$; 4) 1. **2.14.** 1) $5\mathrm{tg}^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-2x^{-3}$; 2) $-2\sin 4x-2$; 3) $3x^2\sin 2x+2x^3\cos 2x$; 4) $2x(x^{-2}-1)\sin 2x^2-2x^{-3}\sin^2 x^2$. **3.1.** 1) $2\frac{1}{3}$ кв. ед. **3.2.** 3) $\sqrt{3}$ кв. ед. **3.3.** 2) 4 кв. ед. **3.4.** 2) $10\frac{2}{3}$ кв. ед. **3.5.** 1) $\sqrt{2}$ кв. ед. **3.6.** 1) $\frac{1}{12}$ кв. ед. **3.7.** 1) $20\frac{1}{4}$ кв. ед; 7) 8 кв. ед; 8) $21\frac{3}{32}$ кв. ед. **3.9.** 1) $15\frac{1}{3}$ кв. ед. **3.12.** 1) 24,5 кв. ед; 2) 36 кв. ед. **3.13.** 1) $4\frac{2}{3}$ кв. ед; 2) $2\sqrt{3}$ кв. ед.; 3) 54 кв. ед. **3.17.** 1)

$\frac{2}{1+4x^2} - x^{-2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$; 3) $\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 1$; 4) $\frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2} - \frac{1}{3x^2}$. **4.1.** 1) −20; 2) 21; 3) 28. **4.3.** 1) $\frac{1-\sqrt{2}}{6}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 2. **4.4.** 1) $\frac{1}{6}$. **4.5.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.6.** 1) $-\frac{15}{8}$; 4) $\frac{31}{35}$. **4.7.** 1) 10; 4) 24. **4.9.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $-\frac{2}{3}$. **4.12.** 1) $-\frac{4}{3}$. **4.13.** 1) 119,25; 4) $\frac{10}{81}$. **4.14.** 4) −3,5. **4.15.** 4) (−3; 3,5). **4.16.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) 2. **4.17.** 1) π; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) π. **4.18.** 1) $f'(x) = \begin{cases} 4x \text{ при } x > 3, \\ -2x \text{ при } x < 3 \end{cases}$ 2) $f'(x) = \begin{cases} 5 - 2x \text{ при } x > 2, \\ \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \text{ при } x < 2. \end{cases}$ **4.20.** 1) $F(x) = x^2 + 1{,}5x^4 + C$; 2) $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x+1)^3} - x^4 + C$; 3) $F(x) = 2\sin 3x - 2x^2 + C$; 4) $F(x) = -\cos 2x - x^2 + C$. **5.1.** 1) 9 кв. ед; 2) 8 кв. ед. **5.3.** 1) $\frac{8}{3}$ кв. ед; 4) $\frac{1}{9}$ кв. ед. **5.5.** 1) $\frac{8}{3}$ кв. ед. **5.6.** 1) ≈2,59 кв. ед; 2) ≈2,66 кв. ед. **5.7.** 1) $\frac{32\pi}{5}$ куб. ед. **5.9.** 2) $\frac{4}{27}$ кв. ед. **5.10.** 1) 4,5 кв. ед. **5.13.** 2) $\frac{1}{3}$ кв. ед. **5.14.** $\frac{2\pi}{3}$ куб. ед. **5.15.** $8R + \frac{16}{3}a$. **5.17.** $\frac{4}{3}$ кв. ед. **5.18.** $\frac{4}{3}$ кв. ед. **5.20.** 5π куб. ед. **5.24.** 0,5 кв. ед. **5.25.** 2 : 7. **5.26.** 1) 324 т; 2) $\frac{a+2b}{6}h^2$ т. **5.29.** 1) $y_{наиб.} = -\frac{2}{7}$; $y_{наим.} = -\frac{4}{31}$. 2) $y_{наиб.} = 2$; $y_{наим.} = -2$. **5.30.** 1) $\frac{9\pi}{4}$; 2) 2π; 3) 2π; 4) $\frac{\pi}{4}$. *Указание.* 4) Подинтегральную функцию запишем в виде $y = \sqrt{2x - x^2}$, или $y^2 = 2x - x^2$, где $y > 0$. Запишем полученное уравнение в виде $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Прибавим к обеим частям уравнения единицу и выделим квадрат двучлена. $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$ или $(x-1)^2 + y^2 = 1$, где $y > 0$. Это уравнение окружности радиуса 1 и центром в точке $A(1; 0)$, причем $y > 0$. Так как пределы интегрирования от 1 до 2, то это четверть круга радиуса 1, т. е. $\int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Глава II. Элементы математической статистики

6.1. $n = 25$;

Варианты	1	2	3	4	5
Частота (кратность) варианты	6	4	6	5	4
Относительные частоты	0,24	0,16	0,24	0,2	0,16

6.2. $n = 25$;

Варианты	4	5	6	7	8	9
Частота варианты	5	5	3	0	7	7
Относительные частоты	0,2	0,2	0,12	0	0,28	0,2
Частоты в %	20%	20%	12%	0	28%	20%

6.3. 1) 2; 3; 4; 5, объем выборки — 50.

2) Составим таблицу распределения кратностей, а затем найдем вариационный ряд относительных частот.

Варианты	2	3	4	5	Всего: 4
Частота варианты	3	20	22	5	Сумма: 50
Относительные частоты	0,06	0,40	0,44	0,1	Сумма: 1

6.4. 1) 3; 4; 5, объем выборки — 50.

2) Составим таблицу распределения кратностей, а затем найдем вариационный ряд относительных частот и вариационный ряд относительных частот в процентах.

Варианты	3	4	5	Всего: 4
Частота варианты	20	23	7	Сумма: 50
Относительные частоты	0,40	0,46	0,14	Сумма: 1
Частоты в %	40%	46%	14%	Сумма: 100%

6.5. 1) $n = 25$; 2) $n = 30$.

6.6. 1) 54;55; 56; 57; 58; 59; 60, объем выборки — 25.

2) Составим таблицу распределения кратностей, а затем вариационный ряд относительных частот и вариационный ряд относительных частот в процентах.

Варианты	54	55	56	57	58	59	60	Всего: 7
Частота варианты	3	3	5	5	4	4	1	Сумма: 25
Относительные частоты	0,12	0,12	0,2	0,2	0,16	0,16	0,04	Сумма: 1
Частоты в %	12	12	20	20	16	16	4	Сумма: 100%

Вариационный ряд относительных частот: 0,04; 0,12; 0,16; 0,2.

3) Вариационный ряд относительных частот в процентах: 4%; 12%; 16%; 20%.

4) Полигон(многоугольник распределения) относительных частот в процентах (рис. 78).

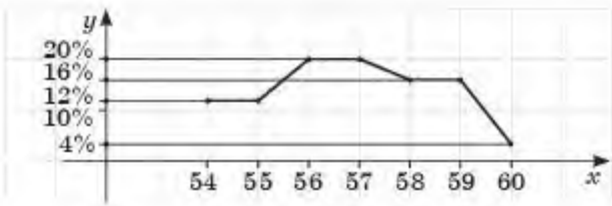


Рис. 78

6.7. 1) 56; 57; 58; 59; 60; 61; 62, объем выборки — 25.

2) Составим таблицу распределения кратностей, а затем вариационный ряд относительных частот и вариационный ряд относительных частот в процентах.

Варианты	56	57	58	59	60	61	62	Всего: 7
Частота варианты	3	3	5	6	3	3	2	Сумма: 25
Относительные частоты	0,12	0,12	0,2	0,24	0,12	0,12	0,08	Сумма: 1
Частоты в %	12	12	20	24	12	12	8	Сумма: 100%

Вариационный ряд относительных частот: 0,08; 0,12; 0,2; 0,24.

3) Вариационный ряд относительных частот в процентах: 8%; 12%; 20%; 24%.

4) Полигон(многоугольник распределения) относительных частот в процентах (рис.79).

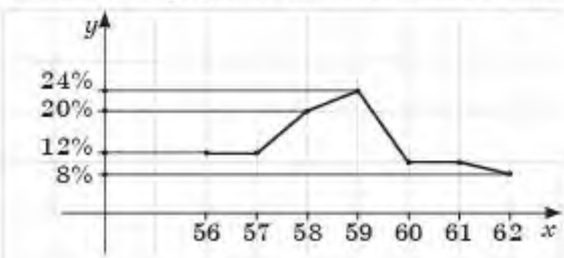


Рис. 79

6.8. 1) $x + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$; 2) $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x-1} + C$;

3) $-\frac{x^{-2}}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + C$; 4) $x^2 - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + C$.

6.9. 1) четная; 2) четная; 3) общего вида; 4) четная.

6.10. 1) $12 - 2\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi^3}{36} - \frac{1}{4}$.

7.1.

Категория учителей (x)	0	1	2	3
Количество учителей (n)	6	5	9	5

7.2. $n = 50$. Мода — 3.

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Частота варианты	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50

7.3. 4.42.
7.4. Рис. 80

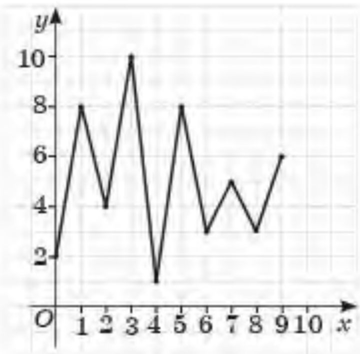


Рис. 80

7.5. Найдем длину шага интервала $i = \frac{54 - 30}{3} = 8$.

Масса учащихся	[30 ; 38)	[38; 46)	[46; 54]
Число учащихся (n)	4	6	5

Теперь проведем подсчет общей массы учащихся по каждому интервалу и в целом. Для этого сложим массы по каждому интервалу и получим суммарное значение массы.

По первому интервалу: 30 + 30 + 35 + 36 = 131;
по второму интервалу: 38 + 44 + 40 + 42 + 39 + 46 = 249;
по третьему интервалу: 46 + 48 + 50 + 52 + 54 = 250.

Масса учащихся	[30; 38)	[38; 46)	[46; 54]
Число учащихся (n)	4	6	5
Общая масса	131	249	250

7.6.

Масса учащихся	[30 ; 38)	[38; 46)	[46; 54]	Всего 3
Число учащихся (кратность) (n)	4	6	5	Сумма: 15
Относительные частоты	$\frac{4}{15} \approx 0,27$	$\frac{6}{15} = 0,4$	$\frac{5}{15} \approx 0,33$	Сумма: 1
Частоты в %	27%	40%	33%	Сумма: 100%

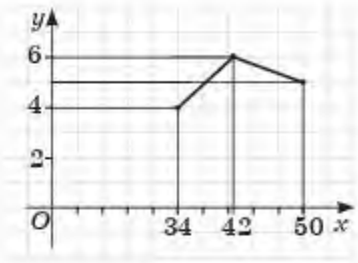


Рис. 81

7.7.

Цена (тыс. тг.)	[2 – 3)	[3 – 6)	[6 – 9)	[9 – 12)	[12 – 15)	[15 – 18]
Количество видов	3	8	19	7	11	2
Относительные частоты	0,06	0,16	0,38	0,14	0,22	0,04
Относительные частоты в %	6	16	38	14	22	4

7.8. 1) возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, убывает на $[1; \infty)$ и $[-1; 0]$.

7.9. 1) асимптот нет; 2) $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$; 3) $y = -\frac{1}{5}x$, $x = 0$; 4) $y = -\frac{1}{4}x$, $x = 0$.

7.10. 1) 4 кв.ед; 2) $\frac{64}{15}\pi$ куб ед.

8.1. Составим таблицу распределения кратностей, а затем вариационный ряд относительных частот и вариационный ряд относительных частот в процентах.

Варианты	8	9	10	11	12	13	14	Всего: 7
Частота варианты	4	5	5	10	7	6	3	Сумма: 40
Относительные частоты	0,1	0,125	0,125	0,25	0,175	0,15	0,075	Сумма: 1
Частоты в %	10	12,5	12,5	25	17,5	15	7,5	Сумма: 100%

Объем выборки – 40.

8.2. Составим таблицу распределения кратностей, вариационный ряд относительных частот и вариационный ряд относительных частот в процентах.

Варианты	8	9	10	11	12	13	14	Всего: 7
Частота варианты	4	5	5	10	7	6	3	Сумма: 40
Относительные частоты	0,1	0,125	0,125	0,25	0,175	0,15	0,075	Сумма: 1
Частоты в %	10	12,5	12,5	25	17,5	15	7,5	Сумма: 100%

4) мода — 11; медиана — 11; математическое ожидание — $\overline{X} = 11,025$.

5) Полигон(многоугольник распределения) относительных частот в процентах (рис. 82)

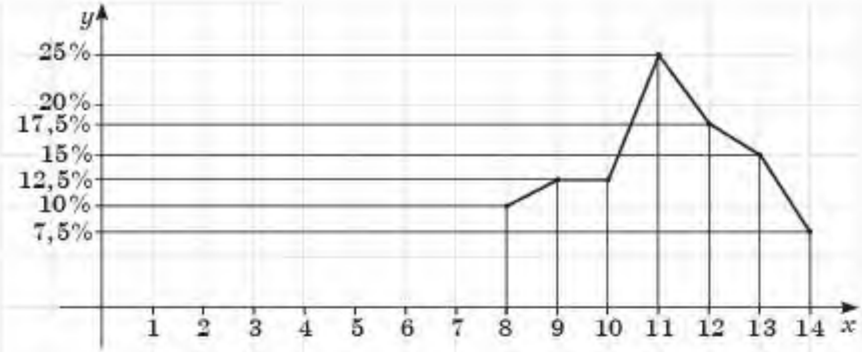


Рис. 82

8.3. $\overline{D} = 2{,}9744$; $\overline{\sigma} = 1{,}7246$. *Указание.* Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение, используя данные таблицы относительной частоты вариант:

Варианты	8	9	10	11	12	13	14
Частота варианты	4	5	5	10	7	6	3
Относительные частоты	0,1	0,125	0,125	0,25	0,175	0,15	0,075

$\overline{X} = 8 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}125 + 10 \cdot 0{,}125 + 11 \cdot 0{,}25 + 12 \cdot 0{,}175 + 13 \cdot 0{,}15 + 14 \cdot 0{,}075 = 11{,}025$.

$\overline{X^2} = \frac{1}{40}(8^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 5 + 10^2 \cdot 5 + 11^2 \cdot 10 + 12^2 \cdot 7 + 13^2 \cdot 6 + 14^2 \cdot 3) =$

$= 64 \cdot 0{,}1 + 81 \cdot 0{,}125 + 100 \cdot 0{,}125 + 121 \cdot 0{,}25 + 144 \cdot 0{,}175 + 169 \cdot 0{,}15 +$
$+ 196 \cdot 0{,}075 \approx 124{,}525$.

Тогда по формуле

$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 124{,}525 - 11{,}025^2 = 124{,}525 - 121{,}5506 \approx 2{,}9744$.

$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = 1{,}7246$.

8.4. 1) 19; 2) размах — 14; мода — 8; медиана — 13;

3) $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \approx 36{,}8$. *Указание.* Составим таблицу распределения.

Варианта	5	8	18	19
Частота варианты	15	11	19	5
Относительная частота	0,3	0,22	0,38	0,1

Найдем $\overline{X} = 5 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}22 + 18 \cdot 0{,}38 + 19 \cdot 0{,}1 = 12$.

$\overline{X^2} = \frac{1}{50}(5^2 \cdot 15 + 8^2 \cdot 11 + 18^2 \cdot 19 + 19^2 \cdot 5) = 25 \cdot 0{,}3 + 64 \cdot 0{,}22 + 324 \cdot 0{,}38 +$
$+ 361 \cdot 0{,}1 = 180{,}8$.

Тогда по формуле $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 180{,}8 - 12^2 \approx 36{,}8$.

8.5. 1) 9; 2) объем выборки — 16; размах — 8; мода — 12; медиана — 12;

3) $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 13$. $\overline{\sigma} \approx 3{,}61$. *Указание.* Составим таблицу распределения.

Варианта	4	8	12
Частота варианты	5	2	9
Относительная частота	0,3125	0,125	0,5625

Найдем $\overline{X} = 4 \cdot 0{,}3125 + 8 \cdot 0{,}125 + 12 \cdot 0{,}5625 = 9$.

$$\overline{X^2} = \frac{1}{16}(4^2 \cdot 5 + 8^2 \cdot 2 + 12^2 \cdot 9) = 16 \cdot 0{,}3125 + 64 \cdot 0{,}125 + 144 \cdot 0{,}5625 =$$
$$= 5 + 8 + 81 = 94.$$

Тогда по формуле $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 94 - 9^2 = 13$. $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$.

8.6. $\approx 39{,}8034$; $\approx 6{,}0309$. *Указание.* Найдем средние значения и составим средний вариационный ряд относительных частот:

$$x_1^* = \frac{0+6}{2} = 3,\ x_2^* = \frac{6+12}{2} = 9,\ x_3^* = \frac{12+18}{2} = 15,\ x_4^* = \frac{18+24}{2} = 21.$$

Средние значения	3	9	15	21
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

Найдем $\overline{X} = 3 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}3 + 21 \cdot 0{,}2 = 12$.

$$\overline{X^2} = \frac{1}{20}(3^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 6 + 15^2 \cdot 6 + 21^2 \cdot 4) = 9 \cdot 0{,}2 + 81 \cdot 0{,}3 + 225 \cdot 0{,}3 + 441 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 181{,}8.$$

Тогда по формуле $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 181{,}8 - 12^2 = 37{,}8$.

Так как $n = 20 < 30$, то найдем уточненную выборочную дисперсию

$$\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} = \frac{20}{19} \cdot 37{,}8 \approx 39{,}8034.$$

Значит, $\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} = \sqrt{39{,}8034} \approx 6{,}0309$.

8.7. $\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} \approx 169{,}054$; $\approx 13{,}0021$. *Указание.* Составим таблицу интервальных частот.

Интервалы	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90]
n_i	3	4	7	6	5
$\frac{n_i}{n}$	0,12	0,16	0,28	0,24	0,2

Найдем средние значения и составим средний вариационный ряд относительных частот:

$$x_1^* = \frac{40+50}{2} = 45,\ x_2^* = \frac{50+60}{2} = 55,\ x_3^* = \frac{60+70}{2} = 65,$$

$$x_4^* = \frac{70+80}{2} = 75,\ x_5^* = \frac{80+80}{2} = 85.$$

Средние значения	45	55	65	75	85
$\frac{n_i}{n}$	0,12	0,16	0,28	0,24	0,2

Найдем $\overline{X} = 45 \cdot 0{,}12 + 55 \cdot 0{,}16 + 65 \cdot 0{,}28 + 75 \cdot 0{,}24 + 85 \cdot 0{,}2 = 67{,}4$.

$\overline{X^2} = 2025 \cdot 0{,}12 + 3025 \cdot 0{,}16 + 4225 \cdot 0{,}28 + 5625 \cdot 0{,}24 + 7225 \cdot 0{,}2 = 4705$.

Тогда по формуле $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 4705 - 4542{,}76 = 162{,}24$.

Так как $n = 25 < 30$, то найдем уточненную выборочную дисперсию

$$\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} = \frac{25}{24} \cdot 162{,}24 = 1{,}042 \cdot 162{,}24 \approx 169{,}054.$$

Значит, $\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} = \sqrt{169{,}054} \approx 13{,}0021.$

8.9. 1) 9938; 2) 3136; 3) 41; 4) 137.

8.10. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{18}$.

8.11. 1) 4; 2) 36 и 49; 3) 18 ; 4) 12.

Глава III. Степени и корни. Степенная функция

9.1. 1) 560; 2) 30; 3) $a^2|bc^3|$; 4) $m^2|k^3t|$. **9.2.** 1) $\frac{7}{15}$; 2) [illegible]; 3) $\frac{3}{10}$; 4) 3. **9.3.** 1) $2a^2$; 2) $2\sqrt[6]{2}\,a^2|b^3c|$; 3) $4m^2n^3p$; 4) [illegible] $x^2|y^3|$. **9.4.** 1) $\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt[3]{7}$; 4) $\sqrt[15]{11}$; 5) $\sqrt[4]{a^3}$; 6) $\sqrt[12]{a^5}$; 7) $\sqrt[15]{mn}$; 8) [illegible]. **9.5.** 1) $12\frac{1}{3}$; 2) $41\frac{1}{3}$; 3) $11\frac{7}{16}$; 4) 2,5. **9.6.** 1) $\frac{8}{15}$; 2) 1,42; 3) 55; 4) 24. **9.7.** 1) 3; 2) 2; 3) 250; 4) 3. **9.8.** 1) 3; 2) −11; 3) $4\sqrt[4]{3}$; 4) $-\sqrt[3]{2}$. **9.10.** 1) $4\sqrt{11}$; 2) $-2\sqrt{13}$; 3) 0; 4) 1. **9.11.** 1) $a\sqrt[3]{a}$; 3) [illegible]. **9.12.** 1) 5; 2) 0,25; 3) 0; 4) 84. **9.13.** 1) $2\sqrt{5}$; 2) 4; 3) 0,5; 4) 3; 7) $2^{\frac{5}{8}}$; 8) $3^{\frac{7}{24}}$. **9.14.** 1) $\sqrt[4]{a}$; 2) $\sqrt{x}$; 8) b^3. **9.17.** 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) да. **9.18.** 1) 0,5; 2) 9. **10.4.** 1) 1; 2) 16; 3) 2; 4) 3. **10.6.** 1) $23\frac{[illegible]}{[illegible]}$; 3) $-\frac{29}{5}$. **10.8.** 1) 7; 2) 0,2; 3) 0,5; 4) 0,4; 5) [illegible]; 6) [illegible]. **10.10.** 2) $\frac{1}{216}$. **10.11.** 1) $\frac{10}{3}$; 2) −46,5; 4) 31. **10.12.** 1) $\sqrt[12]{a}$; 4) xy. **10.14.** 1) 1,74; 2) [illegible]; 3) 0. **10.16.** 1) [illegible]; 2) $\frac{4}{a+\sqrt{a}+1}$. **10.17.** 1) 0; 2) x^4. **10.20.** 1) 4; 2) 2; 3) не существует; 4) 6. **10.21.** 1) $(0; 1) \cup (2; 4]$; 2) $(-3; 2) \cup (2; 4)$. **10.22.** 1) 4; 2) 4; 3) 10; 4) $1\frac{1}{3}$. **11.1.** 1) 8; 2) $\frac{71}{25}$; 4) 30. **11.2.** 1) 2; 3) 32; 4) 60. **11.3.** 2) $\sqrt{5}-1$; 4) $1+\sqrt{7}$; 7) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 8) $-1+\sqrt{10}$. **11.5.** 1) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$; 3) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{10}-2)}{12}$. **11.6.** 1) 5; 2) 2. **11.12.** 1) 25 км/ч; 2) 14 км/ч и 2 км/ч. **11.13.** 1) $\frac{x}{2y}$; 2) $\frac{10bc^2}{3a}$. **11.14.** 1) 0,5; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 1; 4) 6. **12.10.** 1) $(4; +\infty)$; 2) $(-3; 3)$. **12.11.** 1) $[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n]$, $n \in Z$; 2) $\{\frac{\pi}{2}+\pi n\}$, $n \in Z$; 3) $(\pi n; \pi+\pi n)$, $n \in Z$. **13.6.** 2) [illegible]. **13.8.** 2) $-3x^{-\frac{1}{3}}+C$; 3) $-\frac{1}{6x^3}-\frac{3}{4x}+C$. **13.13.** 2) [illegible] кв. ед. **13.16.** 1) $\frac{2\sqrt[6]{12}}{3}x^{1,5}+\pi x+C$. **13.20.** 1) $\frac{17}{15}$ кв. ед; 2) 0,5 кв. ед. **13.21.** $a =$ [illegible]. **13.22.** 1) $\{3\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{4; 5\}$; 4) $\varnothing$. **13.23.** 1) 7; 2) 27; 3) 2; 4) 18. **13.24.** 1) убывает при $x \in (-\infty; -2]$ и $x \in [1; 4]$, возрастает при $x \in (-2; 1]$ и $x \in [4; +\infty]$; 2) $x = 1$; 3) $p \in (0; 9)$.

Глава IV. Иррациональные уравнения и неравенства

14.1. 3) 1; 4) 3; 6. **14.2.** 3) 6; 4) 8. **14.3.** 1) 9; 2) 2. **14.4.** 2) 1; 3) 625. **14.5.** 1) (4; 1); 2) (4; 9); (9; 4). **14.6.** 1) 3; 2) 7; 3) 2; 6; 4) 6. **14.7.** 1) $\varnothing$; 2) 6; 9; 3) 25. **14.8.** 2) 1; 3) 5; 4) 7. **14.9.** 1) 0; 1; 4) $7+\sqrt{73}$. **14.10.** 2) $\frac{125}{27}$; −1; 3) ±1; 4) 64. **14.11.** 1) (1; 27), (27; 1). **14.12.** 2) (1; 81); (81; 1).

14.13. 1) 3; 2) 1024; 3) $\varnothing$; 4) 9. **14.14.** 1) 4; 4) 3; 5. **14.15.** 1) 25. **14.16.** 2) (2; 8); (8; 2). **14.17.** 1) (5; 7); 2) (3; 1,5); $\left(\frac{24}{23}; 24\right)$. **14.19.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n \in Z$; 2) $\operatorname{arctg}5+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in Z$. **14.20.** 1) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$. **14.21.** 1) $[-3; -2)$; 2) $[-2; 3)$; 3) $(-\infty; -2,5) \cup (1; +\infty)$; 4) $\left[-5; -2\frac{2}{3}\right] \cup [1; 5]$. **15.1.** 1) $[4; +\infty)$; 3) $(27; +\infty)$. **15.2.** 2) $[-15; 1]$; 4) $[0,5; 5)$. **15.3.** 3) $(31,5; +\infty)$; 4) $[3; 12]$. **15.4.** 1) $(-3; -2] \cup [1; 2)$. **15.5.** 2) $(4; +\infty)$; 4) $[-27; 9)$. **15.6.** 1) $[12; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{7}{9}\right]$. **15.7.** 2) $\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{34}-1\right); +\infty\right)$. **15.8.** 1) $[2,5; 15)$; 2) $\left(\frac{17}{3}; +\infty\right)$. **15.11.** $\{4\} \cup [5; 7]$. **15.12.** $\left(\frac{7}{4}; 4\right)$. **15.13.** 1) $-0,25$; 2) 9; 3) $\sqrt{2}-2$; 4) 1. **15.14.** 1) $-\frac{4\pi}{3}$; 2) $-\frac{9\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$. **15.15.** 1) $f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}+3x^2$; 2) $f'(x)=-\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}+4x^{-5}$. **15.16.** 1) $[-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1]$.

Глава V. Комплексные числа

16.4. 1) $\sqrt{11}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{8,5}$; 4) $\sqrt{7}$. **16.7.** 1) $\sqrt{29}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{23}$. **16.9.** 1) $z_1=-4+3i$, $|z_1|=5$; $z_2=5+4i$, $|z_2|=\sqrt{41}$; $z_3=-4-3i$, $|z_3|=5$; $z_4=3-2i$, $|z_4|=\sqrt{13}$; $z_5=-3i$, $|z_5|=3$; $z_6=1$, $|z_6|=1$; $z_7=i$, $|z_7|=1$. 2) $z_8=3-4i$; $z_9=-1-5i$. **16.10.** 1) $\sqrt{16+4\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{41-8\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\sqrt{31}}{3}$; 4) $0,5\sqrt{19-6\sqrt{2}}$. **16.11.** 1) $x=12$, $y=-3\sqrt{5}$; 2) $x=-4\sqrt{2}$, $y=4$; 3) $x=1,5$, $y=-2\sqrt{2}-1$; 4) $x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$, $y=2\sqrt{2}$. **16.12.** 1) 1; 2) $2\cdot|\cos\alpha|$; 3) $2\cdot|\cos2\alpha|$; 4) $2\cdot|\sin3\alpha|$. **16.14.** 1) $|z-3|<2$; 2) $|z-3-2i|<2$. **16.15.** 1) $\frac{x^4}{4}-x^2+2x+C$; 2) $\cos(1-x)+C$; 3) $\frac{x^2}{2}-\frac{\sin(1-4x)}{4}+C$; 4) $2x-\frac{\operatorname{tg}3x}{3}+C$. **16.16.** 1) $2\frac{1}{3}$ кв. ед.; 2) $2\frac{1}{3}$ кв. ед. **16.17.** 1) $\left[-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$; 2) $[0; 4]$. **17.1.** 1) $-5-3i$; 2) $2-7i$; 3) $-2+6i$; 4) $-2-11i$; 5) $-4+9i$; 6) $-2+5i$. **17.2.** 1) $6+8i$; 2) $8-4i$; 3) $3-4i$; 4) $-5+7i$. **17.3.** 1) $\frac{7-5i}{5}$; 2) $\frac{1}{3}\cdot(1-2\sqrt{2}\,i)$; 3) $\frac{-7+7i}{5}$; 4) $\frac{25-19i}{29}$; 5) $\frac{1+8i}{5}$; 6) $\frac{-5+27i}{13}$. **17.4.** 1) $22-9i$; 2) $1,5+\frac{9\sqrt{3}}{2}i$; 3) $\frac{14}{5}+\frac{22}{5}i$; 4) $\frac{12+8i}{13}$; 5) $\frac{19+5i}{5}$; 6) $\frac{-18-6i}{5}$. **17.5.** 1) -11; 2) $\frac{1+63\sqrt{3}}{7}-\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}+10\right)i$. **17.6.** 1) $\pm(3-4i)$; 2) $\pm(7+5\sqrt{2}\,i)$; 3) $\pm(\sqrt{1,5}+0,5i)$; 4) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2}}\right)$; 5) $\pm(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i)$; 6) $\pm(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\,i)$. **17.7.** 1) $\sqrt{1160}$; 2) $\sqrt{148}$. **17.8.** 1) $x=3$, $y=1$; 2) $x=\frac{19}{9}$, $y=\frac{2}{3}$; 3) $x=0,4$, $y=0,6$; 4) $x=-1$, $y=1,5$. **17.9.** 1) $-14-i$; 2) $-12+53i$; 4) $-4+14i$. **17.10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ кв.ед.; **17.11.** 1) $-0,5$; 2) -1; 4) $\frac{1}{4}(1-\sqrt{3})$. **17.12.** 1) $\frac{(2x-3)\sin2x+\cos2x}{2}+C$; 2) $(2-x^2-2x)\cos x+(2x+2)\sin x+C$. **18.1.** 1) $\pm2i$; 3) $\pm\sqrt{11}\,i$; 7) $\frac{-1\pm\sqrt{87}i}{4}$; 8) $\frac{3\pm\sqrt{33}i}{3}$.

18.2. 1) $x^2 + 9 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 13 = 0$; 3) $x^2 + 6x + 13 = 0$; 4) $x^2 - 10x + 74 = 0$. **18.3.** 1) $(x + 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$; 2) $(x - 2 - i)(x - 2 + i)$; 4) $(x - 1,5 - 1,5i)(x - 1,5 + 1,5i)$. **18.4.** 1) $\pm\frac{\sqrt{14}}{3}i$; 2) $\pm\frac{\sqrt{31}}{2}i$; 3) $\pm\sqrt{5,5}\,i$; 4) $\frac{\pm\sqrt{13\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}i$; 6) $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{163}i}{6}$. **18.5.** 1) $x^2 + 15 = 0$; 2) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 7 = 0$; 3) $x^2 + 6\sqrt{5}x + 49 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 22 = 0$. **18.6.** 1) $(x + 2i)(x - 2i)\times$ $\times(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; 2) $(x + i)(x - i)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$. **18.7.** 1) $\pm(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$; 2) $\pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{9}{2}}i\right)$; 3) $\pm\left(\sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}}i\right)$; 4) $\pm\left(\sqrt{\frac{13}{2}} - \sqrt{\frac{13}{2}}i\right)$; 5) ±2; $\pm2i$; 6) ±1; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* 6) Разложим выражение, стоящее в левой части уравнения на множители $(z^3 - 1)\times$ $\times(z^3 + 1) = 0$, или $(z - 1)(z^2 + z + 1)(z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$. Приравнивая каждый множитель к нулю, находим корни уравнения на множестве комплексных чисел. **18.8.** 1) $\{2; i\}$; 2) $\{2; -i\}$; 3) $\{3; 2i\}$; 4) $\{-3 \pm 2\sqrt{2} + i\}$; 5) $\{3 + i; 2 + i\}$; 6) $\{8 - 2i; 2 - 2i\}$. **18.9.** 1) $\{0; 1; -0,5 \pm 0,5\sqrt{3}\,i\}$; 2) $\{0; 2; -1 \pm i\sqrt{3}\}$. *Указание.* 1) Составим уравнение $x + iy = (x - iy)^2$, или $x + iy = x^2 - 2xyi - y^2$. Два комплексных числа равны, если равны их действительная и мнимая части. Составим систему уравнений: $\begin{cases} x = x^2 - y^2, \\ y = -2xy. \end{cases}$ Решая полученную систему, находим: если $y = 0$, то $x = 0$ или $x = 1$.

Если $y \ne 0$, то сократив второе уравнение на y, получим $1 = -2x$, или $x = -0,5$.

Подставив найденное значение x в первое уравнение системы, получим уравнение $-0,5 = 0,25 - y^2$. Отсюда $y = \pm0,5\sqrt{3}$. Следовательно, корень уравнения: $-0,5 \pm 0,5\sqrt{3}\,i$. **18.11.** 1) $(4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3})$; 2) $(1,5; 3)$; 3) $(1 - 2\sqrt{5}; 1 + 2\sqrt{5})$. **18.12.** 1) $x - 1$; 2) $x + 1$; 3) $\frac{1 - a}{\sqrt{a}}$; 4) $-a^{0,5} - 2a^{-1,5}$. **18.13.** 1) $[4; 5]$; 2) $\left[-2\frac{9}{11}; -2\right] \cup [3; +\infty)$.

Глава VI. Показательная и логарифмическая функции

19.2. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$. **19.3.** 1) $(-2; +\infty)$; 2) [illegible]; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$. **19.4.** 1) 1; 3; 9; 27; 81; ...; 2) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; ...; 3) $\sqrt{3}$; [illegible]; [illegible]; [illegible]; $\sqrt[4]{27}$; ... . **19.5.** 1) возрастает; 2) возрастает; 3) убывает; 4) возрастает. **19.6.** 1) $y = 2^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **19.19.** 1) $\{\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + 2\pi n\}$; $n \in Z$; 2) $\{\pm\arccos(1 - \sqrt{2}) + 2\pi n\}$, $n \in Z$. **19.20.** 1) $\left[-\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$; 2) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. **19.21.** 1) $x^5 - x^3 + \operatorname{arctg} x + C$; 2) $\frac{\sin 2x}{2} - \frac{(2x + 1)^4}{8} + C$. **20.2.** 4) -2; 6) -3. **20.3.** 3) 2; 4) 1. **20.4.** 5) $\log_{\frac{2}{3}}\frac{8}{27} = 3$; 6) $\lg 0,001 = -3$. **20.5.** 4) $10^5 = 100000$; 6) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$. **20.6.** 3) n; 5) [illegible]; 6) $-$[illegible]. **20.7.** 2) -1; 4) 0,5. **20.8.** 3) 0,5; 4) 0. **20.9.** 1) $\approx-0,699$; $\approx-1,301$; $\approx2,301$. **20.10.** 1) -2; 2) 6; 3) 2; 4) 1. **20.11.** 3) $3(\lg|m| + \lg|n|)$; 6) $\lg 7 + 8\lg|a| + \lg b + \frac{1}{8}\lg c$. **20.12.** 4) -3; 5) [illegible]; 6) 8. **20.13.** 1) $\frac{5}{16}$; 2) 2; 4) 1. **20.14.** 1) 4; 2) -21; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$. **20.16.** 2) 9; 4) 0,25. **20.19.** 1) $2 - 2a$; 2) [illegible]. **20.20.** 1) 8; 4) $\sqrt[3]{5}$; 5) 8; 6) 25. **20.21.** 1) -3; 3) 0,5; 5) $-$[illegible]. **20.26.** 1) 1; 4) 9; 7) 1. **20.27.** 1) [illegible];

4) 5. **20.28.** 1) 2; 3) 2; 5) 4. **20.30.** 1) $k = 3$; 2) $k = -0{,}5$; 3) $k = \frac{1}{3}$. **20.31.** 1) (0; 4); 2) (−3; −1); 3) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. **21.5.** 1) (−1; +∞); 2) (8; +∞); 3) $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$. **21.6.** 1) (−∞; 2); 2) (−∞; 2,5); 3) $\left(-\infty;\ \frac{11}{4}\right]$; 4) (−∞; 1,2). **21.7.** 1) $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$; 2) (5; +∞); 3) (1; +∞); 4) (−2; 3). **21.10.** 1) [−2; 3); 2) (−2,25; 3]; 3) (−∞; −1)∪(1; 5]; 4) [0,7; 1). **21.11.** 1) (−4; 0)∪(3; +∞); 2) [illegible]; 3) (−∞; −1)∪(0; 2]; 4) (−3; 1]. **21.12.** 1) (−1; 2)∪(2; 3); 2) (−∞; −5)∪(0; 7)∪(7; +∞); 3) (2; 3)∪(3; +∞); 4) (−∞; −4)∪(−4; 8). **21.14.** 1) (2; 3)∪(3; +∞). **21.16.** 1) $\{\pm 2; \pm i\sqrt{3}\}$; 2) $\{\pm 3; \pm 2i\}$; 3) {7}; 4) $\{-3; 1; -1 \pm i\sqrt{3}\}$. **21.17.** 1) $y = 2^x$; 2) $y = \sqrt{x+2}$. **21.18.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{18}$. **22.1.** 1) $3^{x^2-7x}(2x-7)\ln 3$. **22.2.** 2) $\frac{1}{24}$. **22.4.** 2) $y = \frac{3}{4}x - 1{,}5 + \ln 8$. **22.5.** 1) убывает на (0; 1], возрастает на [1; +∞); 2) возрастает на (−∞; −2] и [0; +∞); убывает на [−2; 0]. **22.7.** 3) $\ln\frac{10}{3}$ кв. ед. **22.8.** 1) 2,5 (ln5 − 1). **22.9.** 2) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$. **22.10.** 4) $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$. **22.12.** 2) $y = -x + 1$. **22.14.** 1) $4e - 5$ кв. ед; 2) $7 + \frac{1}{e^4}$ кв. ед. **22.17.** 2) $y = 16x + 8$. **22.20.** $\frac{e^2}{2} - 2{,}5$ кв. ед. **22.22.** 1) $y^2 b^{\frac{6}{7}}$; 2) $a^4 y^{-2,5}$. **22.23.** 1) 11; 2) 3,5. **22.24.** 1) $f'(1) = 7$; 2) $f'(1) = 9$.

Глава VII. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

23.1. 1) 4; 2) 4; 3) −5; 4) 2. **23.2.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 2. **23.3.** 1) 2; 2) 1; 3) 2; 4) 2. **23.4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 1; 4) 0; 2. **23.5.** 1) (2; 1); 2) (3; 2). **23.6.** 1) (1; 1); 2) (3; 1). **23.7.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 0; 2; 3) 0; 4) −2. **23.8.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) 2; 3) $\frac{11}{12}$; 4) $1\frac{2}{3}$. **23.9.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) ±5; 3) −3; 4) 2. **23.10.** 1) (1; 0); 2) (1; 0). **23.11.** 1) (3; 4); 2) (2; 6). **23.12.** 1) 0; 2) 6; 0,2; 3) −2; 4) −3; 0,5; 6. **23.13.** 3) 0; 4) 1. **23.14.** 1) 3; 3) 1; $\log_4\frac{25}{3}$; 4) ±2. **23.15.** 1) $\frac{8}{5}$; 2) [1; +∞); 3) $-\frac{5}{4}$; 2; 4) решений нет. **23.16.** 1) (3; 4); 2) (1; 1). **23.17.** 1) (3; 2); 2) (1; 1). **23.18.** 1) $f'(x) = 3e^{3x} - 2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3$; 2) $f'(x) = 3\sin^2 x\cos x + 3\cdot 2^{3x}\ln 2 + e^{3-x}$. **23.19.** 1) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+1}$; 2) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$; 3) $\frac{6}{2x-3} - \frac{2}{x+1}$; 4) $3x^2 + \frac{10}{2x-5} - \frac{8}{2x+3}$. *Указание*. Логарифмическую функцию преобразуем, используя свойства логарифмов степени и дроби. 3) $f(x) = \ln\frac{(2x-3)^3}{(x+1)^2} = 3\ln(2x-3) - 2\ln(x+1)$ и затем находим производную функции. **23.20.** 1) $(3 - x)\cos x + \sin x + C$; 2) $\frac{x^3}{3}\ln 3x - \frac{x^3}{9} + C$; 3) $\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + C$; 4) $\frac{x^2}{2} - x\sin x - \cos x + C$. **24.2.** 1) 0,5; 2) 2; 3) 2; 4) −3. **24.3.** 1) 1; 4; 2) 2; 3) 1; 5; 4) 5. **24.4.** 1) 2; 2) 3; 4) 9. **24.5.** 1) (8; 4); (4; 8); 2) (1; 2); (2; 1). **24.6.** 1) (5; 3); (3; 5); 2) (6; 3); (3; 6). **24.7.** 1) (2; 1); 2) (2; 1). **24.8.** 1) 4; 2) 33; 3) −3; 4) 2. **24.9.** 1) 5; 2) 5; 8. **24.10.** 1) 10; 2) $\sqrt[4]{1000}$; 3) 4; 4) 1. **24.11.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 0. **24.12.** 1) (0; 3); 2) (3; 1). **24.13.** 1) (2; 6); 2) (5; 2). **24.14.** 1) (7; 3); 2) (4,5; 0,5). **24.15.** 1) $\frac{1}{3}$; 27; 2) $\frac{1}{2}$; 16; 3) 3; 9;

4) $\frac{1}{125}$; 5. **24.16.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) -7; 3) 3; 4) 3. **24.17.** 1) 9; 2) $\sqrt[4]{5}$; 5; 3) 1; 4) 11. **24.18.** 1) (6; 2); (7; 3); 2) (3; 2). **24.19.** 1) (2; 2); 2) (3; 9). **24.20.** 1) (4; 16); 2) (27; 81); 4) (1; 10); (−1; 0,1). **24.22.** 1) $10 - \frac{3}{\ln 2}$; 2) $4 - \frac{2}{\ln 3}$. **24.23.** 1) $y = 2^{|x|}$; 2) $y = \ln|x|$; 3) $y = 2^{-|x|}$. **25.1.** 1) $(-3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3)$; 3) $(-\infty; -3)$; 4) $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 5)$; 6) $(-4; +\infty)$. **25.2.** 1) 2; 2) 1; 3) −1; 4) 0; 5) 3; 6) 2. **25.3.** 1) $(11; +\infty)$; 2) (1; 9). **25.4.** 1) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 2) $(3; +\infty)$; 3) $\left(\frac{5}{12}; +\infty\right)$; 4) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; 5) $[-2; +\infty)$; 6) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.
25.5. 1) (−1; 3); 2) [−3; 2]; 3) $\left(\frac{1}{5}; 3\right]$; 4) $\left[\frac{7}{8}; 3\right]$; 5) (4; 8); 6) (−2; −1]. **25.6.** 1) 0; 2) −3; 3) 1; 4) −2. **25.7.** 1) 1; 2) 1; 3) 4; 4) 1. **25.8.** 1) $(-\infty; 3)$; 2) (−5; 0). **25.9.** 1) 0; 2) −2; 3) 2; 4) 1. **25.10.** 1) 0; 2) −1; 3) 0; 4) 1. **25.11.** 1) 2; 2) 2; 3) 3; 4) 5. **25.12.** 1) [−1; 3); 3) $(3; +\infty)$; 4) $(2; +\infty)$. **25.13.** 3) $(1; 2]\cup[3,5; +\infty)$; 4) $(-0,5; 0,5)\cup(0,5; +\infty)$.
25.14. 1) (0; 0,5]; 2) ∅. **25.15.** 1) (2; 3); 2) $[-0,5; 3 + \sqrt{6})$; 3) $[-2\frac{2}{3}; 8)$; 4) $(-\infty; 0)$. **25.16.** 1) $[-0,5; +\infty)$; 2) $[\frac{1}{e}; +\infty)$. **25.17.** 1) $y = 0,5x - 4$; 2) $y = x + 1$; 3) $y = 4x + 1$; 4) $y = 2x + e$.
26.1. 1) $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 2) (−2; 7); 3) (3; 11]; 4) $\left(\frac{1}{4}; \frac{11}{4}\right]$. **26.2.** 3) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; 4) $\left(\frac{3}{4}; 2\right]$.
26.3. 1) $(2; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$; 3) [−37; 12); 4) (2; 2,5). **26.4.** 1) $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$; 2) (0,008; 0,04); 4) [0,01; 10]. **26.6.** 1) [−1; 0); 2) $(-\infty; -5)$. **26.7.** 1) (−4; 2); 2) $(-2; -1) \cup (2; 3)$; 4) $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. **26.8.** 1) (1; 2]; 2) $\left(1; \frac{5}{3}\right)$. **26.9.** 1) (2; 5); 2) $[2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $[1; +\infty)$.
26.10. 1) [4; 5); 2) [1; 2]. **26.13.** 1) $(0; 1]\cup[16; +\infty)$; 3) $(-4; -2)\cup(-1; 2)$. **26.14.** 1) $\left[-\frac{2}{3}; 0\right)$.
26.15. 1) $(0; 1)\cup(2; +\infty)$; 2) $(0; 1) \cup [1; \sqrt[10]{10})$; 5) (1; 4); 6) (1; 2,5). **26.16.** 1) (1; 2); 2) [5; 6]. **26.18.** 1) $x = -2e$; 2) $x = -3$; 3) $y = 0$; 4) $y = 0$. **26.19.** 1) $\{\pm\sqrt{2}; \pm i\sqrt{6}\}$; 2) $\{\pm\sqrt{7}; \pm i\sqrt{2}\}$. **26.20.** 1) $f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 + 4x + 1)$; 2) $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 5x + 1)$; 3) $f''(x) = \frac{1}{x}$; 4) $f''(x) = 2\ln x + 3$.

Глава VIII. Дифференциальные уравнения

27.3. 1) $y = e^x + C$; 3) $y = x^2 - 3x + C$; 4) $y = x^3 + x^2 - \pi x + C$. **27.4.** 1) $y = x^2 - x + 1$; 2) $y = x^3 - 4x + 5$; 3) $y = x^3 - 2x^2 - 2$; 4) $y = x^2 - x^3 + 2$. **27.5.** 1) $y = \pm\sqrt{3 + x^2}$; 2) $y = e^{x^3 - 1}$; 3) $y = \pm\sqrt{\sin x + 4}$; 4) $y = \operatorname{arctg} x + \frac{3\pi}{4}$. **27.6.** 1) $y = \operatorname{arctg}(x^2 + C)$; 2) $y = \operatorname{arcctg}(C - 2x^2)$; 3) $y = 0,5e^{2x} + 2x^2 + C$; 4) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + C)$. **27.8.** 865.
27.9. $T = 20^\circ + 80^\circ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, 60 мин. *Указание*. По закону Ньютона можем записать $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$, где t — время, T — температура тела, или $\frac{dT}{T - 20} = kdt$.

Отсюда находим $\ln(T - 20) = k \cdot t + \ln C$.

При $t = 0$, $T = 100^\circ$, тогда $\ln(100 - 20) = k \cdot 0 + \ln C$, откуда $C = 80$. При $t = 20$, $T = 60^\circ$, тогда $\ln(60 - 20) = k \cdot 20 + \ln 80$. Значит, $k = -\frac{1}{20}\ln 2$. Следовательно,

$T-20=80\cdot e^{-\frac{1}{20}t\cdot\ln 2}=80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, или $T=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. При T = 30° получим

$30=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Или $10=80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$,т.е. $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. $\frac{t}{20}=3$, или $t=60$ мин.

27.10. 1) ≈1,28 км/ч. 2) $500\cdot\text{м}^{-5}\approx 3,37$ м/мин.

Указание. 1) На движующуюся лодку действует сила сопротивления воды $F=-kv$, где k — коэффициент пропорциональности. С другой стороны по второму закону Ньютона $F=ma$, где $a=v'$ — ускорение.

Значит, $ma=-kv$, или $v'=-\frac{k}{m}v$. Решая полученное уравнение с разделяющимися переменными, находим $\ln v=-\frac{kt}{m}+C$, или $v=e^{-\frac{kt}{m}+C}$.

Используя начальные условия, что $v_0=20$ км/ч при $t=0$. Находим $C=\ln 20$ или $v=20e^{-\frac{kt}{m}}$.

Используя дополнительные условия, что при $t=40c=\frac{40}{3600}=\frac{1}{90}$ ч скорость лодки станет $v=8$ км/ч, получим $8=20e^{-\frac{k\cdot 1}{m\cdot 90}}$, или $e^{-\frac{k}{m}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{90}$.

Тогда $v=20\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-90t}$ км/ч. Найдем искомую скорость через 2 мин после остановки мотора. $t=2$ мин $=\frac{2}{60}$ час $=\frac{1}{30}$ с. $v=20\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-90\cdot\frac{1}{30}}=20\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{3}=20\cdot\frac{8}{125}=\frac{32}{25}\approx$

$\approx 1,28$ км/ч.

27.11. $q=UC\cdot(1-e^{-\frac{t}{CR}})$. *Решение.* Из физики известно, что сила тока I есть производная от количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени t. $I=q'$. В момент времени t на заряд конденсатора q, где сила тока I, действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\frac{q}{C}$.

Значит, $E=U-\frac{q}{C}$.

Согласно закону Ома $I=\frac{E}{R}$. Тогда $q'=\frac{U-\frac{q}{C}}{R}$, откуда $q'=\frac{1}{CR}\cdot(UC-q)$.

Обозначив $x=UC-q$, т. е. $-q'=x'$, получим уравнение $x'=-\frac{1}{CR}\cdot x$.

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными с начальными условиями $x=UC$ при $t_0=0$.

Решая полученное дифференциальное уравнение, находим $\ln x=\frac{1}{CR}\cdot t$, т. е. $x=UCe^{-\frac{t}{CR}}$ или $UC-q=UCe^{-\frac{t}{CR}}$. Следовательно $q=UC(1-e^{-\frac{t}{CR}})$.

27.12. 1) $T=\frac{20\ln 2}{\ln\frac{m}{n}}$; 2) 9 мин. **27.14.** 1) $F(x)=2\mathrm{tg}x+x^2+C$; 2) $F(x)=-2\mathrm{ctg}2x+\frac{1}{4}e^{4x}+C$; 3) $F(x)=2\ln(x^2+1)-e^{-x}+C$; 4) $F(x)=\ln^2x+2e^{-x}+C$. **27.15.** 1) $21\frac{1}{3}$ кв. ед;

2) 1 кв. ед. **27.16.** 1) $(1;\ \sqrt[3]{5})$; 2) $\left(-1\frac{2}{3};\ 7\frac{1}{3}\right]$; 3) $(1; 2)$; 4) $(-4; 2)$. **28.2.** 1) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$; 2) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$; 3) $y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x$; 4) $y = C_1\cos 6x + C_2\sin 6x$. **28.3.** 1) $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$; 2) $y = (C_1 + C_2x)e^{-4x}$; 3) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x}$; 4) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$. **28.4.** 1) $y = e^{x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$; 2) $y = e^{-4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$; 3) $y = e^{-3x}(C_1\cos 6x + C_2\sin 6x)$; 4) $y = e^{2x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x)$. **28.5.** 1) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{x}$; 2) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-2x}$; 3) $y = e^{2x}(C_1\cos 2\sqrt{2}\,x + C_2\sin 2\sqrt{2}\,x)$; 4) $y = e^{-4x}(C_1\cos 2\sqrt{5}\,x + C_2\sin 2\sqrt{5}\,x)$. **28.6.** 1) $y = e^{3x}(1 + (2e^{-3} - 1)x)$; 2) $y = e^{-x}(3 + (2e - 3)x)$; 3) $y = \frac{2e^3 - e}{e^3 - 1}e^{-x} + \frac{2 - e}{1 - e^3}e^{2x}$; 4) $y = \frac{2}{1 - e^6}e^{4x} + \frac{2e^6}{e^6 - 1}e^{-2x}$. **28.7.** 1) $y = \cos x + 2\sin x$; 2) $y = 2\cos 4x - \sin 4x$. **28.8.** 1) $y'' + 6y' + 13y = 0$; 2) $y'' + 2y' + 17y = 0$; 3) $y'' - 2y' + 26y = 0$; 4) $y'' - 4y' + 16y = 0$.

28.9. 1) $y'' + 4y = 0$; 2) $y'' + 2y = 0$; 3) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 4) $y'' - 2y' + 9y = 0$.

Указание. 4) в гармоническом колебании $y = e^{-x}\cdot\sin(2\sqrt{2}x - 1)$ разложим $\sin(2\sqrt{2}x - 1)$ по формуле $\sin(\alpha - \beta)$, тогда получим $y = e^{-x}\cdot\sin(2\sqrt{2}\,x - 1) = e^{-x}(\sin 2\sqrt{2}x\cdot\cos 1 - \sin 1\cdot\cos 2\sqrt{2}\,x)$. Очевидно, что $C_1 = -\sin 1$, $C_2 = \cos 1$ и корни характеристического уравнения $(-1 \pm 2\sqrt{2}\,i)$.

Значит, дифференциальное уравнение имеет вид $y'' - 2y' + 9y = 0$.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛА АНАЛИЗА ЗА 10—11 КЛАССЫ

1. 1) 22; 2) 60; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 1; 5) 6; 6) $2^{\frac{255}{256}}$; 7) 2,5; 8) 0. **2.** 1) $f'(1) = 2$; 2) $f'(1) = -6$; 3) $f'(1) = 7$; 4) $f'(-2) = 5 \cdot e^{-2}$. **3.** 1) $2e^4$; 2) $\frac{13}{36}$; 3) $\frac{1}{12}$. 4) $3e$. **4.** 1) $4e$; 2) -1; 3) -18. **5.** 1) $y_{\text{наиб.}}(3) = 3e^3$; $y_{\text{наим.}}(0) = 0$; 2) $y_{\text{наим.}}(2) = 2\ln 2$; $y_{\text{наиб.}}(3) = 3\ln 3$; 3) $y_{\text{наим.}}(4) = -2$; $y_{\text{наиб.}}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. **6.** 1) $\frac{2\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-3}$; 2) 2. **7.** 1) $\sqrt{b}$; 2) $x + \frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$, $x \in [4; +\infty)$, $x + \frac{5}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0; 4)$. **8.** 1) $ya^{\frac{6}{7}}$; 2) $a^2y^{-1,5}$. **9.** 1) $\frac{\sqrt{xy}}{x^{0,5}+y^{0,5}}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}$. **10.** 1) $2\sqrt{a^2-x}$; 2) $2y$. **11.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $-\frac{1}{6}$. **12.** 1) $2a + b$; 2) $\frac{a+1}{2a+b}$; 3) $1 + 2a + b$; 4) $1 + 3a + 2b$. **13.** 1) 1; 2) 2,5; 3) 2; 4) 4,5; 5) 1,5; 6) -1; 7) 2; 8) 0,5. **14.** 1) $a = 3$; 2) $a = -3$; 3) $a = 0$; 4) $a = 0,5$. **15.** 1) $f'(x) = \begin{cases} 4x-2, & x > 0, \\ -4x-2, & x < 0; \end{cases}$ 2) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 2, \\ -3x^2+8x, & x < 2. \end{cases}$ **16.** 1) $f'(x) = -2 \cdot 2^{2x} \cdot \ln 2$; 2) $f'(x) = 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x - 3\sin 3x + e^{2-x}$; 3) $f'(x) = 4\operatorname{tg}2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{3}{\sin^2 3x} + e^x$; 4) $f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **17.** $-\frac{2\sqrt{5}}{25}$. **18.** 1) $\frac{2}{2x-1} - \frac{3}{3x+2}$; 2) $\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+3}$; 3) $\frac{4}{x+3} - \frac{2}{x-1}$; 4) $1 + \frac{5}{x-5} - \frac{4}{x+1}$. **19.** 1) 0; 2; 2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $-(-1)^n\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **20.** 1) $x^2 - 3x$; 2) $x - x^3$; 3) $5x + \cos x - 3$; 4) $2\sin x - x^3$. **21.** 1) $\frac{(2x-1)^5}{10} + C$; 2) $\frac{(5-2x)^{-2}}{4} + C$; 3) $\frac{2\sin x\sqrt{\sin x}}{3} + C$; 4) $\frac{x^2}{2} + \frac{e^{2x}}{2} + C$; 5) $\frac{\cos(2-3x)}{3} + C$; 6) $\frac{2x + \sin(2x-6)}{4} + C$; 7) $\operatorname{tg}3x + C$; 8) $\ln(3 + x^2) + C$. **22.** 1) $xe^x + C$; 2) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4 - 2x^2 + 2) + C$; 3) $-x\cos x + \sin x + C$; 4) $\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + C$; 5) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$; 6) $0,25x^2 + 0,5x\sin x + 0,5\cos x + C$. **23.** 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) 0; 3) 31,8; 4) $\ln\frac{\pi}{2}$; 5) $\ln\frac{4}{3}$; 6) $0,5(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$. **24.** а) 1) $2 + \frac{1}{\ln 2}$; 2) $\frac{1}{\ln 2} - 0,5$; 3) $2\frac{1}{3}$; б) 1) $\frac{2\pi}{3}$ куб. ед.; 2) $21,6\pi$ куб. ед. **25.** 1) $\{-1; 0; 2\}$; 2) $\{-3; 0; 2\}$; 3) $\{1; 2; 4\}$; 4) $\{4\}$; 5) $\{-1\}$; 6) $\{-5\}$. **26.** 1) $(0,5; 1)$; 2) $(-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$; 3) $(2; 3)$; 4) $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4]$. **27.** 1) $[0,5; 5)$; 2) $[-1; 3)$; 3) $(4; 5)$; 4) $(-2; 14]$; 5) $(-\infty; -2] \cup \left[5; \frac{74}{13}\right)$; 6) $(-\infty; 4)$. **28.** 1) 5; 2) 0; 3) $[-4; -2] \cup [1; 2]$; 4) $(0; 0,4) \cup [25; +\infty)$. **29.** 2) $\varnothing$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 5) $\varnothing$; 6) R. **30.** 1) -5; 2) $-\frac{13}{6}$; 3) $\frac{9}{7}$; 4) $\varnothing$. **31.** 1) $y = 1$, $x = 1$; 2) $y = -1$, $x = -3$; 3) $x = 2$, $y = x + 2$; 4) $x = -2$, $y = 2x - 5$. **32.** 1) $M(0; 0)$; 2) точек перегиба нет; 3) $M(0; 0)$; 4) $M(0; 2)$. **33.** 1) возрастает — $[-5; +\infty)$; убывает — $(-\infty; -5]$; 2) возрастает $(4; +\infty)$; убывает — $(-\infty; 0)$; 3) возрастает — $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$; убывает — $[0; 4]$; 4) возрастает — $[-1; +\infty)$; убывает — $(-\infty; -1]$. **35.** 1) $y = -2$; 2) $y = 1,5x + 1$; 3) $y = x$; 4) $y = x$. **36.** 1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; 3) -1; 4) $\operatorname{arctg}2 + \pi n$, $n \in Z$. **37.** 1) $y = 0$, $x = 1$; 2) $y = 0$, $x = -2$. **38.** 1) $y = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{4}$; 2) $y = -x + 2$. **40.** 1) $-3, -1, 0, 1, 3$; 2) $[-3; -1]$, $[0; 1]$, $[3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3]$, $[-1; 0]$, $[1; 3]$; 4) $-3, 0, 3$. **43.** точки min — (-3), 3, max — 0. **44.** $t = 5$ с, $\upsilon = 28{,}5$ м/с. **45.** Квадрат, $a = 30$ см; 2) квадрат со стороной $\frac{a}{4}$. **46.** 1) 6; 6; 2) 9; 9; 3) $16 = 4 \cdot 4$. **47.** 1) 12 м/с; 2) $a = 0$. **48.** 80 м. **49.** $\frac{5}{\sqrt{4+\pi}}$ м². **50.** $M\left(\frac{4}{3}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **51.** 1) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$; 2) $\operatorname{arctg}y = x + \frac{x^3}{3} + C$; 3) $\operatorname{arctg}y = \operatorname{arctg}x + C$; 4) $x^2 + y\sin y + \cos y = C$. **52.** 1) $x + y = 0$; 2) $2e^{y^2} = 1 + e^x$; 3) $y = -2\cos x$; 4) $\ln^2 y = 2\operatorname{tg}x$. **53.** 1) $y = (C + x)\sin x$; 2) $\frac{y^2}{2} = x + \frac{3}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C$; 3) $y = (C + x)e^x$; 4) $y(1 + x^2)^2 = x^3 + 3x + C$. **54.** 1) $y = C_1e^{6x} + C_2e^{-x}$; 2) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}$; 3) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x}$; 4) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$. **55.** 1) $t \approx 10{,}2$ с; 2) $xy = 12$; 3) 30 мин. **56.** 1) $3 + 14i$; 2) $2 + 7i$; 3) $-1 + 4i$; 4) $8 + 8i$. **57.** 1) $9 + 7i$; 2) $-3 - 11i$; 3) $-3 - 4i$; 4) $3 + i$. **58.** 1) $x = 5$, $y = 2$; 2) $x = 1{,}5$, $y = -2$. **59.** 1) $(5 - 3xi)(5 + 3xi)$; 2) $(2x + 4yi)(2x - 4yi)$; 3) $(x - 2 - i)(x - 2 + i)$; 4) $(x - 3 - 4i)(x - 3 + 4i)$. **60.** 1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 5 = 0$; 3) $x^2 - 6x + 13 = 0$; 4) $x^2 + 4x + 20 = 0$. **61.** 1) 120, нечетных — 40; *Решение*. К числам, меньших 10^4, относятся все однозначные, двузначные, трехзначные и четырехзначные числа, составленные из цифр 2, 6 и 7. Их количество равно — $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$. Нечетных чисел будет — $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$; 2) 120, четных — 40. **62.** 1)73 326. *Решение*. Количество четырехзначных чисел равно $P(1; 2; 1) = \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 12$. Числа 3 и 5 в каждом разряде встретятся $P(2; 1) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ раза, а число 7 в каждом разряде встретится $P_3 = 3! = 6$ раз. Поэтому значение суммы всех четырехзначных чисел равно $1111 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 6) = 73\,326$. 2) 59 994.

63.

X	0	1	2	3
P	$\frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \approx 0{,}491$	0,421	0,084	$\frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} = \frac{1}{285} \approx 0{,}004$

64. 1) 6; 2) 18; 3) 10. **65.** 1) 7; 2) 5; 3) 14. **66.** 1) $\approx 1{,}16$; 2) $\approx 1{,}03$; 3) $\approx 0{,}98$; 4) $\approx 0{,}67$. **67.** 1) $P(A) = \frac{25}{C_{200}^1} = \frac{25 \cdot 1! \cdot 199!}{200!} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$; 2) $P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. **68.** $P(A) = \frac{C_{180}^3 \cdot C_{20}^2}{C_{200}^5} = \frac{5! \cdot 195!}{200!} \cdot \frac{180!}{3! \cdot 177!} \cdot \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{178 \cdot 179 \cdot 180 \cdot 19}{199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196} = 0{,}072$. **69.** 1) $P(A) = 0{,}95 + 0{,}05 \times 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}999\,875$; 2) $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2520}$. **70.** 1) 0,75; 2) 0,5; 3) 0,4; 4) $\frac{9}{14}$. **71.** 46 учеников и 7 скамеек. **72.** 1) 23 232 тг; 2) 4448 тг. **73.** 600. **74.** 1) 220 тг или 350 тг; 2) 960 тг; 3) 2720 тг. **75.** 1) во втором, потребуется 2336 тг; 2) в четвертом, на 74 тг. **76.** $22 + 13 - 9 = 26$ человек. **77.** 30%. **78.** *Решение*. Так как a, b, c положительные и произведение больше $\frac{1}{4}$, то $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$. Рассмотрим: $x(1 - x) = x - x^2 = -(x^2 - x) =$

$= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$; т. е. $x(1 - x) < \frac{1}{4}$. Тогда справедливы неравенства: $a(1 - a) < \frac{1}{4}$; $b(1 - b) < \frac{1}{4}$; $c(1 - c) < \frac{1}{4}$. Если перемножить данные неравенства, то получим: $a(1 - a) \cdot b(1 - b) \cdot c(1 - c) < \frac{1}{64}$, или $a(1 - b) \cdot b(1 - c) \cdot c(1 - a) < \frac{1}{64}$. Следовательно, неравенство $a(1 - b) \cdot b(1 - c) \cdot c(1 - a) > \frac{1}{64}$ невозможно. Неравенства $a(1 - b) > \frac{1}{4}$; $b(1 - c) > \frac{1}{4}$; $c(1 - a) > \frac{1}{4}$ не могут выполняться одновременно. **79.** *Решение.* Очевидно, что неравенство (1) $x^2 + y^2 > 2xy$, но т. к. $x \neq y$, то $x^2 + y^2 > 2xy$. Умножим обе части неравенства на $ab(ab > 0)$, получим $ab(x^2 + y^2) > 2abxy$ (2). Прибавим к обеим частям неравенства (2) выражение $(a^2 + b^2)xy$, получим $(a^2 + b^2)xy + ab(x^2 + y^2) > (a^2 + b^2)xy + 2abxy$ или $(a^2 + b^2)xy + ab(x^2 + y^2) = a^2xy + b^2xy + abxy^2\ aby^2 = ax(ay + bx) + by(bx + ay) = (ay + bx)(ax + by)$. Но выполняется равенство $(a^2 + b^2)xy + 2abxy = (a + b)^2xy$. Итак, $(ay + bx)(ax + by) > (a + b)^2xy$ (3). Если $a + b > 0$ и $ay + bx > 0$, то, поделив неравенство (3) на $(a + b)(ay + bx) > 0$, получим $\frac{(a + b)xy}{ay + bx} < \frac{ax + by}{a + b}$. **80.** *Решение.* Так как $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$, то найдем $c = \frac{2ab}{a + b}$.

Тогда $\frac{a + c}{a - c} = \frac{a + \frac{2ab}{a + b}}{a - \frac{2ab}{a + b}} = \frac{a^2 + 3ab}{a^2 - ab} = \frac{a + 3b}{a - b}$, т. е. $\frac{a + c}{a - c} = \frac{a + 3b}{a - b}$ (1)

Аналогично $\frac{b + c}{b - c} = \frac{b + \frac{2ab}{a + b}}{b - \frac{2ab}{a + b}} = \frac{b^2 + 3ab}{b^2 - ab} = \frac{b + 3a}{b - a}$, т. е. $\frac{b + c}{b - c} = \frac{b + 3a}{b - a}$ (2)

Складывая равенства (1) и (2), получим $\frac{a + c}{a - c} + \frac{b + c}{b - c} = \frac{a + 3b}{a - b} + \frac{b + 3a}{b - a} = \frac{2a - 2b}{b - a} = -2$. **81.** Нет. *Решение.* От прибавления или вычитания 1 меняется характер четкости числа. Таким образом, если 25 раз менять характер четкости числа 100, то в результате получится нечетное число. Следовательно, число 80 получиться не может. **82.** *Решение.* Пользуясь тем, что среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел, получим: $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n} = \frac{(n + 1)n}{2n} = \frac{n + 1}{2}$. Возведя в n-ую степень обе части последнего неравенства, получим неравенство: $n! < \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n$, $n > 2$. **83.** 1) $\varnothing$; 2) (1; 3). **84.** $(-\infty; -\sqrt{2}\,] \cup [\,\sqrt{2}; +\infty)$. *Решение.* Учитывая, что $3x^2 + 2 > 1$, решим первое неравенство: $x^2 - 3x + 7 > 3x^2 + 2$ или $2x^2 + 3x - 5 < 0$, т. е. $-2{,}5 < x < 1$. Решим второе неравенство относительно $(x + 1)$. Корни уравнения $(x + 1)^2 - 4a^2(x + 1) + 3a^4 = 0$ равны a^2 и $3a^2$. Следовательно, $x + 1 < a^2$ или $x + 1 > 3a^2$. Значит, $x < a^2 - 1$ или $x > 3a^2 - 1$. Множество решений первого неравенства должно попасть в множество решений второго неравенства. Следовательно, должны выполняться неравенства $a^2 - 1 > 1$ или $3a^2 - 1 < -2{,}5$. Решением второго неравенства является пустое множество, а решением первого неравенства является множество $-(-\infty; -\sqrt{2}\,] \cup [\,\sqrt{2}; +\infty)$. **85.** $\frac{1 + \sqrt{10}}{2}$. **86.** $4 < a < 5$. **87.** 1) 1; 2) 2π; 3) $2{,}25\pi$.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава VII. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Глава VIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ