АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник

11

Общественно-гуманитарное направление

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ:

- (!) — проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями
- — задания для самостоятельного выполнения
- — конец доказательства теоремы или свойства
- (?) — вопросы на закрепление материала
- (A) — упражнения, выполнение которых обязательно для каждого учащегося
- (B) — упражнения среднего уровня сложности
- — упражнения на использование электронных ресурсов

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие учащиеся! Предлагаемый учебник является продолжением курса "Алгебра и начала анализа" для 10 класса общественно-гуманитарного направления.

В 11 классе вы ознакомитесь с такими понятиями как первообразная, неопределенный и определенный интегралы, криволинейная трапеция, корень n-й степени, степень с рациональным показателем, логарифм, показательные и логарифмические функции, и свойствами этих понятий. Также расширите свои знания о степенной функции и элементах математической статистики.

Научитесь решать иррациональные уравнения, показательные и логарифмические уравнения и неравенства. Рассмотрите алгоритм нахождения площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла.

Учебник содержит 6 глав, 22 параграфа.

Перед каждым параграфом перечисляются ключевые понятия, необходимые для изучения данной темы.

При изложении материала предлагаются вопросы и задания для самостоятельного выполнения учащимися, что способствует активному включению их в процесс усвоения материала.

В конце параграфа даны вопросы для закрепления полученных знаний.

Упражнения разделены на уровни **А** и **В**. Вначале нужно выполнить полностью задания уровня **А**, затем приступить к выполнению заданий уровня **В**. Также в учебнике даны упражнения для повторения курса алгебры и начала анализа для 10—11 классов.

Для того, чтобы проверить степень усвоенности полученных знаний, в конце каждой главы в рубрике "Проверь себя!" приведены тестовые задания и задания по математической грамотности.

В конце учебника дан глоссарий.

Для проверки правильности решения упражнений в конце учебника даны ответы.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА "АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА" 10 КЛАССА

1. Постройте график функции:

1) $y = 1 - \cos\frac{x}{2}$; 2) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \cos^2x + \sin^2x + 1$; 4) $y = 2\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$.

2. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x}$;

3) $y = 4\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x - 5$; 4) $y = 3 - \frac{\sin 2x}{2\cos x}$.

3. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $2\sin0{,}25x + \sin\frac{\pi}{2}$; 2) $2\cos\left(\frac{x}{7} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos90^\circ - 2$;

3) $\operatorname{tg}0{,}125x + 4$; 4) $\operatorname{ctg}\left(0{,}5 + \frac{\pi}{4}\right) + 6\sin180^\circ$.

4. Решите уравнение:

1) $\sin^2x - 10\sin x = 0$; 2) $\sin3x = \sin x$;

3) $\cos^2x + 0{,}1\cos x = 0$; 4) $\cos15x = \cos3x$;

5) $4\cos^2x = \sin x \cos x$; 6) $2\sin^2x = 3\sin x$.

5. Решите уравнение:

1) $\sin x + \sin2x = 2\cos^2x + \cos x$; 2) $\sin^2x - 0{,}25 = 0$;

3) $\sin^2x - 1{,}5\sin x = -0{,}5$; 4) $\cos^2x - 0{,}5\cos x = 0{,}5$;

5) $\sin^2 2x - \sin4x = 3\cos^2 2x$; 6) $3\sin^2 3x + \sin6x - \cos^2 3x = 0$.

6. Решите неравенство:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) > \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\left(0{,}5 - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$;

5) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) > 0{,}5$; 6) $\operatorname{ctg}\left(2{,}5x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Найдите область определения функции:

1) $y = \arcsin\frac{1}{x} + \sqrt{4 - 3x - x^2}$; 2) $y = \arcsin(x - 3) + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

8. Если $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sin x$ и $q(x) = \sqrt{x + 1}$, то составьте следующие сложные функции:

1) $f(g(x))$; 2) $f(q(x))$; 3) $q(g(x))$;
4) $g(f(x))$; 5) $f(g(q(x)))$; 6) $g(q(f(x)))$.

9. Найдите производную функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 10 - 10x^7 + 2{,}5x^{10}$;
2) $f(x) = \dfrac{3x+5}{4-x}$;
3) $f(x) = \sqrt{11x - x^2}$;
4) $f(x) = (2x - x^3)\sqrt{2 - x^2}$;
5) $f(x) = 6\cos^3(4 - 3x)$;
6) $f(x) = \sin(4 - 3x)\mathrm{tg}(4 - 3x)$;
7) $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{1 + 3x}$;
8) $f(x) = \dfrac{2 - 5x}{\cos 10x}$.

10. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке:

1) $f(x) = 4x^3 - x^4 + 10$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$, $x_0 = 3$;
3) $f(x) = \cos^2 3x + \mathrm{tg}x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;
4) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4}$, $x_0 = 2\sqrt{2}$.

11. 1) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + x$ в точке с абсциссой $x = 2$.

2) На кривой $y = 3x^3 - 2$ найдите точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

3) Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 4$.

12. 1) Решите уравнение $f(x) + f'(x) = 0$, если $f(x) = x^2 + 3x - 36$;

2) решите неравенство $f(x) - f'(x) < 0$, если $f(x) = -x^2 - 6x + 6$.

13. Найдите промежутки монотонности функции:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$;
2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$;
3) $f(x) = \dfrac{2x}{16 - x^2}$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$;
5) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x + 4)$;
6) $f(x) = \sqrt{x - 1} \cdot (5 - x)$.

14. Найдите промежутки убывания и возрастания, точки максимума и точки минимума функции:

1) $y = 0{,}25x^4 - 0{,}25x + 9$;
2) $y = 5x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - 11$.

15. Найдите промежутки возрастания и убывания, экстремумы функции:

1) $y = 5x^2 + 3x - 2$;
2) $y = 4x^3 - 3x + 1$;
3) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$;
4) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$.

16. Найдите промежутки убывания, точки максимума и точки минимума функции:
1) $y = (x - 5)(x + 1)^3 \cdot (x - 2)^4$;
2) $y = (x + 1{,}5) \cdot (x - 1{,}5)^2 \cdot (x - 2)^3$.

17. Исследуйте функцию и постройте ее график:

1) $y = 2x^2 - 3x$; 2) $y = x^3 + 6x$;

3) $y = \frac{1}{1 - x^2}$; 4) $y = -\frac{2}{1 + x^2}$.

18. Постройте график функции в программе “Живая геометрия” или “GeoGebra”:

1) $y = \frac{1 + x}{x}$; 2) $y = \frac{x}{1 + x}$;

3) $y = 5 - 2\sqrt{x + 1}$; 4) $y = 3 + 2\sqrt{x - 1}$.

Используя график, перечислите свойства функции.

19. Постройте график функции в программе “Живая геометрия” или “GeoGebra”:

1) $y = -2\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$; 2) $y = -2 + 5\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = 4 - 2\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Практико-ориентированные задания

20. На диаграмме показано количество посетителей сайта “Новости спорта” с 1 по 20 августа 2019 г. (рис. 1). По горизонтали указаны дни месяца, а по вертикали — число посетителей сайта за данный день.

Рис. 1

1) Найдите по диаграмме, в какие числа месяца число посетителей сайта "Новости спорта" было наибольшим.
2) Найдите количество дней, когда посетителей сайта было менее 600 000 человек.
3) Найдите количество дней, когда число посетителей сайта было не менее 700 000 человек.
4) Найдите по диаграмме, какой процент составляет наименьшее количество посетителей от наибольшего в день.

21. Состав сплава массой 100 кг представлен на рисунке 2.

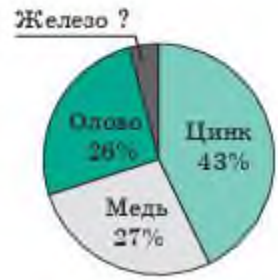


Рис. 2

1) Сколько килограммов меди и цинка находится в этом сплаве?
2) Сколько килограммов железа содержится в этом сплаве?
3) Сколько килограммов железа необходимо добавить к этому сплаву, чтобы его содержание в сплаве было 10% ?
4) Если масса железа в сплаве составляет 10% , то каким тогда будет процентное содержание олова в сплаве?

22. На диаграмме представлены данные о сумме первоначального вклада и сумме вклада с учетом годового прироста в банках А и В (рис. 3).

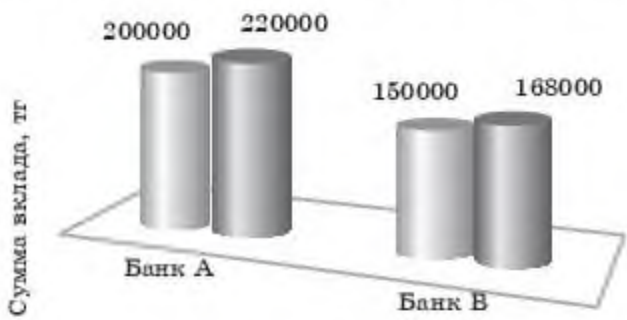


Рис. 3

1. Найдите годовой процентный прирост суммы вклада в банках А и В;
2. Найдите разницу между годовыми процентными приростами в банках А и В.

23. Количество квартир в жилом комплексе указано на рисунке 4.

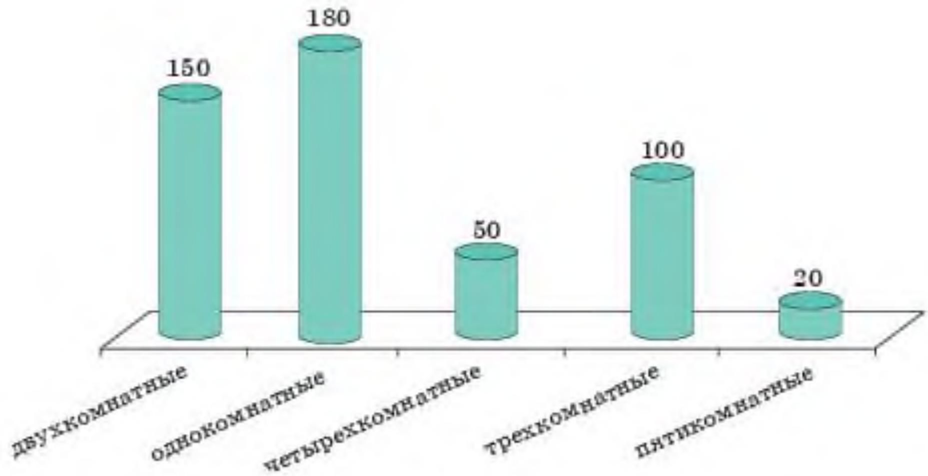


Рис. 4

1) Найдите, сколько процентов составляют однокомнатные квартиры от общего количества квартир:

A) 30%; B) 45%; C) 35%; D) 36%; E) 50%.

2) Во сколько раз количество однокомнатных квартир больше, чем четырехкомнатных:

A) в 3,5 раза; B) в 3,6 раза; C) в 4 раза; D) в 2,5 раза; E) в 4,5 раза?

24. На диаграмме даны сведения о пути туристов, который они прошли за четыре дня (рис. 5). Сколько километров прошли туристы в третий день, если за этот день они прошли одну пятую часть пути за четыре дня:

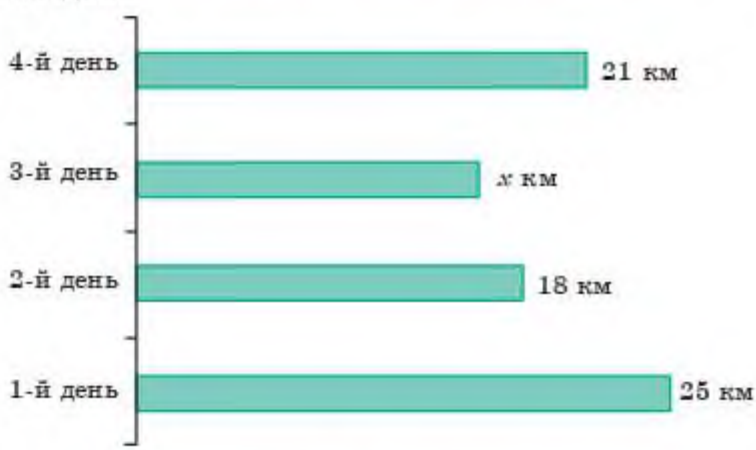


Рис. 5

A) 15 км; B) 20 км; C) 16 км; D) 15,5 км; E) 17 км?

25. На рисунке 6 приведены данные о длине дорог, отремонтированных четырьмя бригадами. Найдите, сколько километров отремонтировала вторая бригада, если эта длина составляет одну четвертую часть от всей длины отремонтированных дорог:

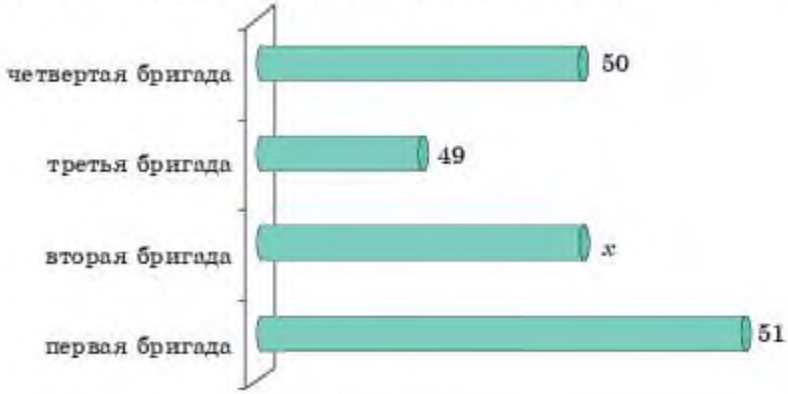


Рис. 6

A) 60; B) 55; C) 45; D) 50; E) 53.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Понятие функции, предел функции, производная, производная сложной функции, правила нахождения производных, геометрический и физический смысл производной, таблица производных.

§1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА I ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Вы ознакомитесь с понятием первообразной функции и научитесь находить первообразную функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, область определения, постоянное число, производная, график функции

ы знаете:

1. Производной функции $f(x) = x^9$ является функци

2. Допустим, дана производная $f'(x) = 6x^5$. Используя знания о производной выясняем, что это производная функции $f(x) = x^6$.

Функцию, которую можно найти по ее производной, называют ***первообразной.***

Определение. *Если для любого x из множества X выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

то функцию $F(x)$ называют ***первообразной для функции $f(x)$*** *на данном множестве.*

ПРИМЕР 1. Докажем, что для любого $x \in (-\infty; +\infty)$ функция $F(x) = x^5 - 5x$ является первообразной для функции $f(x) = 5x^4 - 5$.

Доказательство. Используя определение первообразной найдем производную функции $F(x) = x^5 - 5x$. Тогда

$$F'(x) = (x^5 - 5x)' = (x^5)' - (5x)' = 5x^4 - 5.$$

Следовательно, для любого $x \in (-\infty; +\infty)$ функция $F(x) = x^5 - 5x$ является первообразной для функции $f(x) = 5x^4 - 5$.

ПРИМЕР 2. Докажем, что для любого $x \in (0; +\infty)$ функция $F(x) = \frac{2}{x} + 1$ является первообразной для функции $f(x) = -\frac{2}{x^2}$.

Доказательство. По определению первообразной найдем производную функции $F(x) = \frac{2}{x} + 1$. Тогда

$$F'(x) = \left(\frac{2}{x} + 1\right)' = \left(\frac{2}{x}\right)' + 1' = -\frac{2}{x^2}, \text{ где } x \neq 0.$$

Следовательно, для любого $x \in (0; +\infty)$ функция $F(x) = \frac{2}{x} + 1$ является первообразной для функции $f(x) = -\frac{2}{x^2}$.

ПРИМЕР 3. Докажем, что на множестве всех действительных чисел функция $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ не является первообразной для функции $f(x) = \frac{6}{x^3}$.

Доказательство. По определению первообразной $F'(x) = f(x)$, поэтому найдем производную функции $F(x) = -\frac{3}{x^2}$. Тогда

$$F'(x) = \left(-\frac{3}{x^2}\right)' = -3 \cdot (x^{-2})' = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3} \text{ при } x \neq 0.$$

Следовательно, на множестве всех действительных чисел функция $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ не является первообразной для функции $f(x) = \frac{6}{x^3}$, так как $x = 0$ не входит в область определения функции.

Если же рассмотрим функции $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ и $f(x) = \frac{6}{x^3}$ на интервалах $(-\infty; 0)$ или $(0; +\infty)$, то функция $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{6}{x^3}$, так как равенство $F'(x) = f(x)$ выполняется в любой точке интервала $(-\infty; 0)$ или $(0; +\infty)$.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Нахождение производной называют *дифференцированием.*

Нахождение функции по ее производной называют *интегрированием.*

Целью интегрирования является нахождение всех первообразных данной функции.

Например, первообразной функции $f(x) = x^2$ является не только функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, но и функции $G(x) = \frac{x^3}{3} - 4$, $Q(x) = \frac{x^3}{3} + 0{,}9$, $K(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{10}{7}$ и т. д., так как при нахождении производных данных функций получим функцию $f(x) = x^2$. Таким образом, если для функции $f(x)$ существует одна первообразная, то для этой функции найдется бесконечное множество первообразных.

Сформулируем основное свойство первообразной.

Теорема. Если $F(x)$ — *одна из первообразных для функции* $f(x)$ *на промежутке* X, *то множество всех первообразных этой функции находится формулой*

$$G(x) = F(x) + C, \tag{1}$$

где C — действительное число.

Доказательство. Для доказательства найдем производную от каждой части равенства (1). Тогда получим $G'(x) = F'(x) + C'$. Из курса 10 класса нам известно, что производная постоянной равна нулю. Значит, $G'(x) = F'(x)$. По условию теоремы функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, поэтому по определению первообразной выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$. Тогда $G'(x) = f(x)$. Таким образом, функция $F(x) + C$ является первообразной для функции $f(x)$.

Формула (1) является *общим видом первообразной.*

Вы узнаете геометрический смысл первообразной.

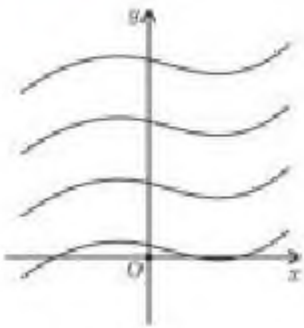


Рис. 7

Пусть постоянная C из формулы (1) будет равна нулю. Тогда получим функцию вида $y = F(x)$. Построим ее график. Остальные первообразные отличаются от полученной функции только на постоянную C. Следовательно, их графики можно получить из графика функции $y = F(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на C единиц. Таким образом, геометрическим смыслом первообразной является *совокупность кривых, расположенных параллельно относительно друг друга* (рис. 7).

Приведем таблицу первообразных.

Таблица 1

Функция	Общий вид первообразных
$f(x) = k$ (k — *постоянная*)	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in Z$, $\alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x + C$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x + C$

Рассмотрим правила нахождения первообразных.

Правило 1. *Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, а функция $P(x)$ — первообразная для функции $p(x)$, то функция $F(x) + P(x)$ будет первообразной для функции $f(x) + p(x)$.*

Доказательство. По условию $F(x)$, $P(x)$ являются, соответственно, первообразными функций $f(x)$ и $p(x)$, поэтому по определению первообразной выполняются равенства: $F'(x) = f(x)$ и $P'(x) = p(x)$. Тогда по правилу нахождения производной суммы функций получаем:

$$(F(x) + P(x))' = F'(x) + P'(x) = f(x) + p(x).$$

Правило 2. *Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, а k — постоянная, то функция $kF(x)$ является первообразной для функции $kf(x)$.*

Доказательство правила 2 рассмотрите самостоятельно.

Правило 3. *Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, а k, b — постоянные (где $k \neq 0$), то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$ является первообразной для функции $f(kx + b)$.*

Доказательство. По правилу нахождения производной сложной функции получаем:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b) \cdot (kx + b)' = \frac{1}{k}F'(kx + b)\ k = f(kx + b).$$

ПРИМЕР

4. Найдем общий вид первообразных данных функций:

1) $f(x) = x^4$; 2) $f(x) = \cos x - 2x^6$; 3) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{10 - 3x}} + \frac{5}{\sin^2(6x - 1)}$.

Решение. 1) Одной из первообразных функции $f(x) = x^4$ является $\frac{x^5}{5}$. Следовательно, $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$;

2) для нахождения первообразной функции $f(x) = \cos x - 2x^6$ используем таблицу первообразных и 1-е и 2-е правила нахождения первообразных. Тогда

$$F(x) = \sin x - 2 \cdot \frac{x^7}{7} = \sin x - \frac{2x^7}{7} + C;$$

3) чтобы найти первообразную функции $f(x) = \frac{2}{\sqrt{10 - 3x}} + \frac{5}{\sin^2(6x - 1)}$, используем все три правила нахождения первообразных и таблицу первообразных:

$$F(x) = 2 \cdot 2\sqrt{10 - 3x}\left(-\frac{1}{3}\right) + 5(-\mathrm{ctg}(6x - 1)) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{4}{3}\sqrt{10 - 3x} - \frac{5}{6}\mathrm{ctg}\,(6x - 1) + C.$$

Ответ: 1) $\frac{x^5}{5} + C$; 2) $\sin x - \frac{2x^7}{7} + C$;

3) $-\frac{4}{3}\sqrt{10 - 3x} - \frac{5}{6}\mathrm{ctg}(6x - 1) + C$.

Вы ознакомитесь с понятием неопределенного интеграла и научитесь находить неопределенный интеграл.

Определение. *Совокупность первообразных функции $f(x)$, т. е. выражение $F(x) + C$ называется* ***неопределенным интегралом.***

Формула нахождения неопределенного интеграла:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где $\int f(x)dx$ — неопределенный интеграл, символ $\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования.

Таблица нахождения неопределенного интеграла:

Таблица 2

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$

Вы узнаете свойства неопределенного интеграла.

Свойства неопределенного интеграла:

1) $\int(f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

2) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx$, где k — постоянная;

3) $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$.

ПРИМЕР 5. Найдем неопределенный интеграл: 1) $\int x^8dx$; 2) $\int 8\sin x\,dx$; 3) $\int(4x^3 - 1)dx$.

Решение. Используем определение неопределенного интеграла и его свойства, таблицу:

1) $\int x^8\,dx = \frac{x^9}{9} + C$;

2) $\int 8\sin x\,dx = 8\int \sin x\,dx = -8\cos x + C$;

3) $\int(4x^3 - 1)\,dx = x^4 - x + C$.

Ответ: 1) $\frac{x^9}{9} + C$; 2) $-8\cos x + C$; 3) $x^4 - x + C$.

ПРИМЕР 6. Найдем первообразную функции $f(x) = 4x - 6x^2$, график которой проходит через точку $M(2; -4)$.

Решение. Вначале определим общий вид первообразных данной функции:

$$F(x) = 4\cdot\frac{x^2}{2} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + C = 2x^2 - 2x^3 + C, \text{ т.е. } F(x) = 2x^2 - 2x^3 + C.$$

Теперь подставим координаты данной точки в общий вид первообразных и вычислим значение постоянной C:

$$-4 = 2\cdot 2^2 - 2\cdot 2^3 + C \text{ или } C = 4.$$

Тогда первообразная, проходящая через данную точку, имеет вид:

$$F(x) = 2x^2 - 2x^3 + 4.$$

Ответ: $2x^2 - 2x^3 + 4$.

1. Сколько функций рассматривается для введения определения первообразной? Каким условиям должны удовлетворять эти функции?
2. Как можно определить различие двух первообразных одной функции?
3. Имеется ли различие между нахождением первообразной и действием интегрирования?
4. Назовите формулу, связывающую общий вид первообразной и неопределенный интеграл.
5. Какие правила используются для нахождения первообразной функции $f(x) = 3(2x - 3) + \cos 2x - 5$?

Упражнения

А

Является ли функция $F(x)$ первообразной функции $f(x)$ на указанном промежутке (1.1—1.4):

1.1. 1) $F(x) = 2x^2 + x + 1$, $f(x) = 4x + 1$, $x \in R$;

2) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, $f(x) = x + 1$, $x \in R$.

1.2. 1) $F(x) = 3\sin x + \frac{2}{x}$, $f(x) = 3\cos x - \frac{2}{x^2}$, $x \in (-\infty; 0)$;

2) $F(x) = 2\cos x - \frac{3}{x}$, $f(x) = -2\sin x + \frac{3}{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$.

1.3. 1) $F(x) = \sqrt{x} + 1$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$;

2) $F(x) = 3 - 2\sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$.

1.4. 1) $F(x) = 3\operatorname{tg} x$, $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $F(x) = 5\operatorname{ctg} x$, $f(x) = -\frac{5}{\sin^2 x}$, $x \in (0; \pi)$?

Напишите общий вид первообразных для данных функций (1.5—1.7):

1.5. 1) $f(x) = 1 - x$; 2) $f(x) = 2x - 1$;

3) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$; 4) $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$.

1.6. 1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2$; 2) $f(x) = 4x^3 - 6x^5 + 1$;

3) $f(x) = x^{10} + \frac{13}{12}x^{12}$; 4) $f(x) = -x^9 + \frac{15}{14}x^{14}$.

1.7. 1) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$; 2) $f(x) = 5\sin x + 6\cos x$;

3) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + 8x^7$; 4) $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} - 9x^3$.

Найдите неопределенные интегралы (1.8—1.9):

1.8. 1) $\int x^{21}dx$; 2) $\int x^{-15}dx$;

3) $\int \frac{1}{4\sqrt{x}}dx$; 4) $\int \frac{5}{\sin^2 x}dx$.

1.9. 1) $\int (x^4 - x^3 + x^2)dx$; 2) $\int (4x^3 + 5x^4 + 6x^5)dx$;

3) $\int (\cos x - 2)dx$; 4) $\int (3 + \sin x)dx$.

Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, график которой проходит через точку $M(a; b)$ **(1.10—1.11):**

1.10. 1) $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$, $M(1; 3)$; 2) $f(x) = 2 + 4x$, $M(-1; 1)$;

3) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; 4) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{3\pi}{2}; 2\right)$.

1.11. 1) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$, $M(4; 5)$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$, $M\left(0; \frac{2}{3}\right)$;

3) $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$; 4) $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 3\right)$.

1.12. Скорость точки, находящейся в прямолинейном движении, изменяется по закону $v(t) = t + 3t^2$ (время измеряется в секундах, скорость — в м/с). Найдите изменение координаты точки в зависимости от времени.

1.13. Скорость точки, находящейся в прямолинейном движении, изменяется по закону $v(t) = 2t + 6t^2$ (время измеряется в секундах, скорость — в м/с). Найдите изменение координаты точки в зависимости от времени.

B

Выясните, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$ на указанном промежутке **(1.14—1.16):**

1.14. 1) $F(x) = x\sin x$, $f(x) = \sin x + x\cos x$, $x \in R$;

2) $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$, $x \in R$;

3) $F(x) = 2\sin 6x$, $f(x) = 12\cos 6x$, $x \in R$;

4) $F(x) = -5\cos\frac{x}{5}$, $f(x) = \sin\frac{x}{5}$, $x \in R$;

5) $F(x) = 2\cos 2x - \sin 4x$, $f(x) = -4(\sin 2x + \cos 4x)$, $x \in R$;

6) $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\cos 8x$, $f(x) = \cos 3x - 2\sin 8x$, $x \in R$.

1.15. 1) $F(x) = \frac{3}{x^2} + 2x$, $f(x) = 2 - \frac{6}{x^3}$, $x \in (0; +\infty)$;

2) $F(x) = 3x - \frac{2}{x^3}$, $f(x) = 3 + \frac{6}{x^4}$, $x \in (0; +\infty)$.

1.16. 1) $F(x) = \sqrt{4x-5}$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-5}}$, $x \in \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$;

2) $F(x) = \sqrt{5-4x}$, $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$, $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$.

Найдите неопределенный интеграл (**1.17—1.18**):

1.17. 1) $\int\left(0{,}75x^2 + \frac{x^9}{9}\right)dx$; 2) $\int\left(\frac{x^{-7}}{6} - 1{,}25x^4\right)dx$;

3) $\int\left(\frac{10}{\sqrt{5+2x}} - 3x^{-11}\right)dx$; 4) $\int\left(15x^{24} - \frac{28}{\sqrt{6-7x}}\right)dx$.

1.18. 1) $\int 18\sin 6x\,dx$; 2) $\int 27\cos 9x\,dx$;

3) $\int\frac{15}{\cos^2 10x}\,dx$; 4) $\int\frac{20}{\sin^2 2{,}5x}\,dx$.

Напишите общий вид первообразных для данных функций $y = f(x)$ (**1.19—1.23**):

1.19. 1) $f(x) = (2x+3)^3$; 2) $f(x) = (3x-2)^8$;

3) $f(x) = \sin(3x-4)$; 4) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

1.20. 1) $f(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)}$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{8}\right)}$;

3) $f(x) = 1 - \frac{5}{\sin^2\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)}$; 4) $f(x) = 1 + \frac{6}{\cos^2\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{5}\right)}$.

1.21. 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \sin\left(3 - \frac{x}{4}\right)$; 2) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-5}} + \cos\left(2 + \frac{x}{3}\right)$;

3) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3-4x}} + \frac{1}{(x+2)^3}$; 4) $f(x) = \frac{4}{5\sqrt{2+3x}} - \frac{1}{(2-x)^4}$.

1.22. 1) $f(x) = \cos^2\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3}$; 2) $f(x) = \sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}\frac{x}{8}\cdot\mathrm{ctg}\frac{x}{8} + x^2$; 4) $f(x) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{6}$.

1.23. 1) $f(x) = \cos^2 x$;

2) $f(x) = \sin^2 x$;

3) $f(x) = \cos\frac{x}{4}\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{x}{4}\cos\frac{\pi}{9}$;

4) $f(x) = \sin\frac{x}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{10} - \cos\frac{x}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{10}$.

Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, удовлетворяющую условию $F(a) = b$ (**1.24—1.25**):

1.24. 1) $f(x) = \frac{2}{(2x+5)^2}$, $F(-2) = \frac{1}{2}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{2}+3\right)^3}$, $\qquad F(-4)=3$.

1.25. 1) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$, $\qquad F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)}$, $\qquad F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

1.26. Ускорение прямолинейно движущейся точки изменяется по закону $a = 2t$ (время t измеряется в секундах, ускорение — в м/с^2). Как изменится закон движения тела, если:

1) через 1 с после начала движения точка пройдет 10 м и скорость будет 4 м/с;
2) через 2 с скорость будет 6 м/с, а после 3 с пройдет 40 м?

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

1.27. Использование символа $\int$ предложил Готфрид Вильгельм Лейбниц. Термин "интеграл" ввел Иоганн Бернулли, а появился он в работах Якоба Бернулли.

Я. Бернулли
(1655—1705)

Г.В Лейбниц
(1646—1716)

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция и ее график, непрерывность функции и ее предел, производная, первообразная и ее основное свойство, правила нахождения первообразных, таблица первообразных.

§ 2. КРИВОЛИНЕЙНАЯ ТРАПЕЦИЯ И ЕЕ ПЛОЩАДЬ

Вы ознакомитесь с понятием криволинейной трапеции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, первообразная, неопределенный интеграл, подынтегральная функция, трапеция, площадь, координатная плоскость

Из курса геометрии вы знаете как можно вычислить площадь многоугольника с помощью известных формул. Но иногда в математике встречаются плоские фигуры, площадь которых вычислить таким образом невозможно. Рассмотрим способ вычисления площади таких плоских фигур. Для этого сначала введем понятие криволинейной трапеции.

Определение. *Плоскую фигуру, ограниченную сверху графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, снизу — отрезком $[a; b]$ оси Ox, с боковых сторон — отрезками прямых $x = a$, $x = b$, называют* ***криволинейной трапецией.***

Здесь отрезок $[a; b]$ является *основанием криволинейной трапеции.*

На рисунке 8 изображена криволинейная трапеция $ABCD$.

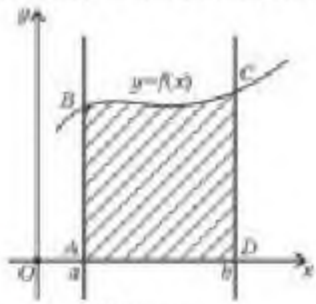


Рис. 8

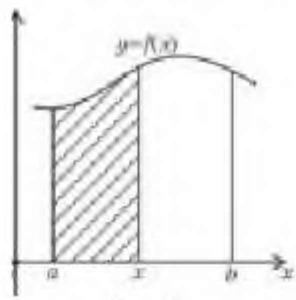


Рис. 9

Вы ознакомитесь с формулой нахождения площади криволинейной трапеции.

Площадь криволинейной трапеции можно вычислить через первообразную $F(x)$ функции $y = f(x)$. Обозначим площадь криволинейной трапеции через S.

Если через произвольную точку x отрезка $[a; b]$ проведем прямую, параллельную оси Oy до пересечения с графиком функции $y = f(x)$, то получим криволинейную трапецию с основанием $[a; x]$ (рис.9). Площадь этой криволинейной трапеции зависит от переменной x, поэтому рассматриваем эту площадь как функцию $S(x)$. Если $x = a$, то получаем $S(a) = 0$, а если $x = b$, то $S(b) = S$.

Докажем, что для переменной x на отрезке $[a; b]$ функция $S(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, т. е. на отрезке $[a; b]$ выполняется равенство $S'(x) = f(x)$.

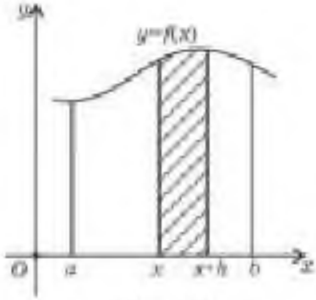


Рис. 10

Для доказательства возьмем еще одну внутреннюю точку $x + h > 0$ отрезка $[a; b]$ и проведем через эту точку прямую, параллельную оси Oy, до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ (рис. 10).

Получим две криволинейные трапеции соответственно с площадями $S(x)$ и $S(x + h)$, а разность $S(x + h) - S(x)$ дает площадь криволинейной трапеции с основанием $[x; x + h]$. При малом значении числа h площадь криволинейной трапеции можно заменить площадью прямоугольника, основанием которой является отрезок $[x; x + h]$, а высотой $f(x)$. Тогда получаем:

$$S(x + h) - S(x) \approx f(x) \cdot h,$$

отсюда имеем

$$\frac{S(x + h) - S(x)}{h} \approx f(x).$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $h \to 0$, тогда

$$\frac{S(x + h) - S(x)}{h} \to f(x).$$

По определению производной $\frac{S(x + h) - S(x)}{h} \to S'(x)$, т.е. $S'(x) = f(x)$. Следовательно,

$$F(x) = S(x) + C. \qquad (1)$$

Если в равенстве (1) $x = a$, то $F(a) = S(a) + C = C$, так как $S(a) = 0$. Если же $x = b$, то $F(b) = S(b) + C = S + F(a)$ или

$$F(b) = S + F(a), \qquad (2)$$

так как $S(b) = S$, $F(a) = C$. Тогда из равенства (2) можно получить следующее равенство: $S = F(b) - F(a)$.

Таким образом, площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S = F(b) - F(a), \qquad (3)$$

где функция $F(x)$ есть первообразная функции $y = f(x)$.

АЛГОРИТМ Для нахождения площади криволинейной трапеции используется следующий алгоритм:

1) строим на координатной плоскости графики данных линий;
2) находим концы отрезка, ограничивающего фигуру по оси Ox, значений a и b;
3) находим первообразную функции $y = f(x)$;
4) по формуле (3) вычисляем площадь криволинейной трапеции.

Рассмотрим примеры на вычисление площади криволинейной трапеции.

ПРИМЕР 1. Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

Решение. Вначале построим графики данных линий на координатной плоскости. Графиком функции $y=x^2$ является парабола с вершиной в точке (0; 0) и ветвями, направленными вверх; прямая $y = 0$ есть ось Ox; $x = 1$ и $x = 4$ — прямые, проходящие соответственно через точки (1; 0) и (4; 0), параллельно оси Oy (рис. 11). Получаем криволинейную трапецию $ABCD$. Здесь $f(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 4$. Тогда $F(x) = \frac{x^3}{3}$, поэтому по формуле (3) получаем:

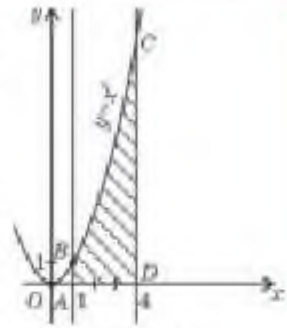


Рис. 11

$$S_{\text{кр. тр}} = F(4) - F(1) = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

Ответ: 21 кв. ед.

ПРИМЕР 2. Вычислим площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 2$.

Решение. Построим криволинейную трапецию. Графиком функции $y = x^3 + 1$ является кубическая парабола, проходящая через точку (0; 1); $y = 0$ — ось Ox; $x = 2$, прямая, проходящая через точку (2; 0) и параллельная оси Oy (рис. 12). Получаем криволинейную трапецию ABC. В данном случае $f(x) = x^3 + 1$ и $b = 2$. Тогда $F(x) = \frac{x^4}{4} + x$. Для определения значения a решим уравнение $x^3 + 1 = 0$. Отсюда $a = -1$. Использовав формулу (3), получим:

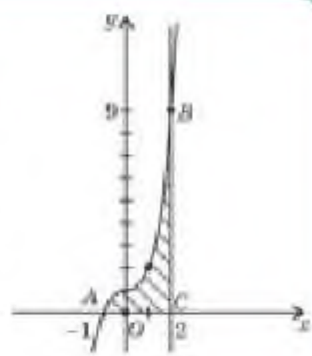


Рис. 12

$$S_{\text{кр.тр.}} = F(2) - F(-1) = \left(\frac{2^4}{4} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + (-1)\right) = 6 + \frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}.$$

Ответ: $6\frac{3}{4}$ кв. ед.

ПРИМЕР 3. Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. По алгоритму вначале строим криволинейную трапецию. Для построения графика функции $y = 2\cos x$ график функции $y = \cos x$ в два раза растягиваем вдоль оси Oy; $y = 0$ есть ось Ox; $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ — прямые, проходящие, соответственно, через точки

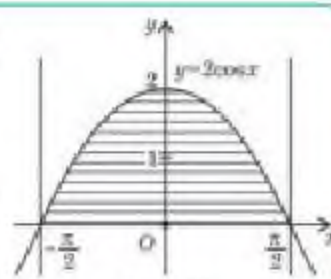


Рис. 13

$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ параллельные оси Oy. Получаем криволинейную трапецию, изображенную на рисунке 13. В данном случае $f(x) = 2\cos x$, $a = -\frac{\pi}{2}$ и $b = \frac{\pi}{2}$. Тогда $F(x) = 2\sin x$.

Площадь полученной криволинейной трапеции можно вычислить двумя способами.
I *способ.* Вычислим площадь криволинейной трапеции, используя формулу (3):

$$S_{\text{кр.тр.}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(1 + 1) = 4.$$

II *способ.* Изображенная на рисунке 13 фигура симметрична относительно оси Oy, поэтому можно вычислить площадь криволинейной трапеции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, где $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, а затем ее удвоить, т. е.

$$S_{\text{кр.тр.}} = 2 \cdot \left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right) = 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4\ (1 - 0) = 4.$$

Ответ: 4 кв. ед.

?

1. Чем отличается понятие криволинейной трапеции от понятия трапеции?
2. Можно ли вычислить площадь криволинейной трапеции с помощью известных формул из геометрии?
3. Какой должна быть функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$?

Упражнения

A

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной следующими линиями (**2.1— 2.3**):

2.1. 1) $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

2) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

2.2. 1) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

2) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$.

2.3. 1) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

2) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

2.4. Вычислите площади криволинейных трапеций, изображенных на рисунке 14:

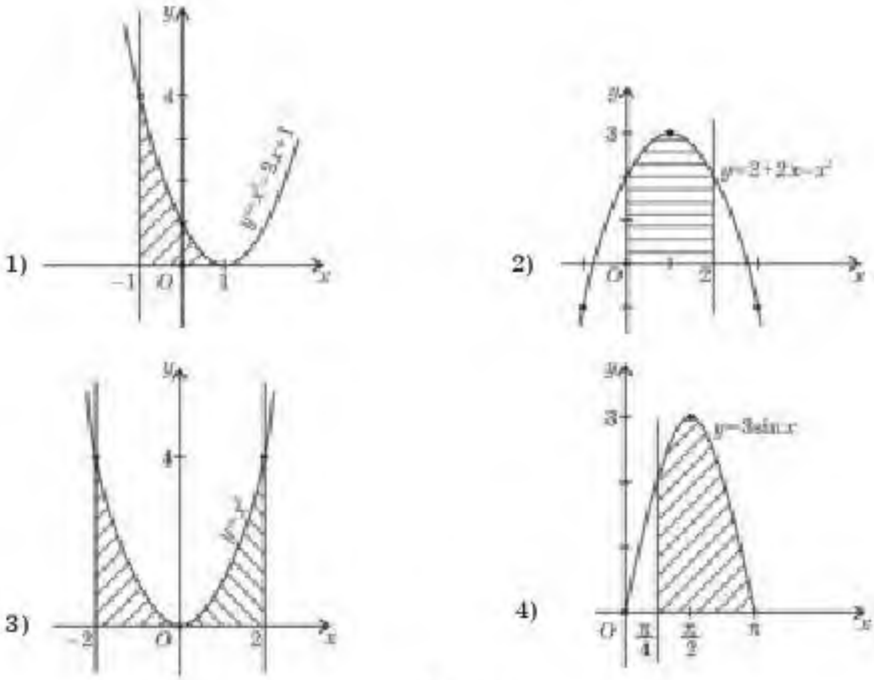


Рис. 14

В

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной следующими линиями (**2.5—2.8**):

2.5. 1) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

2) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$.

2.6. 1) $y = 3x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$;

2) $y = 3x - x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.

2.7. 1) $y = \sin\frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$;

2) $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

2.8. 1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $y = 0$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = 1$;

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -3$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной на отрезках $[a; b]$ и $[b; c]$, соответственно, графиками функций $f(x)$ и $g(x)$ и осью Ox **(2.9—2.10)**:

2.9. 1) $f(x) = -x^2 + 2x$, $[0; 1]$ и $g(x) = 1{,}5 - 0{,}5x$, $[1; 3]$;

2) $f(x) = x$, $[0; 1]$ и $g(x) = x^2 - 4x + 4$, $[1; 2]$.

2.10. 1) $f(x) = 0{,}5x + 1{,}5$, $[-3; -1]$ и $g(x) = -x^2 - 2x$, $[-1; 0]$;

2) $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $[-2; -1]$ и $g(x) = -x$, $[-1; 0]$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Понятие первообразной, основное свойство и правила нахождения первообразных, неопределенный интеграл и таблица нахождения первообразных, предел функции, криволинейная трапеция, формула вычисления и алгоритм нахождения площади криволинейной трапеции.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Вы ознакомитесь с понятием определенного интеграла.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, первообразная, определенный интеграл, подынтегральная функция

Вы знаете: Понятие неопределенного интеграла и формулу вычисления площади криволинейной трапеции.

Рассмотрим еще один способ нахождения площади криволинейной трапеции. Для этого введем понятие определенного интеграла.

Определение. *Разность $F(b) - F(a)$ называется **определенным интегралом** непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается*

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Чтение: “Интеграл от a до b эф от икс дэ икс”.

В обозначении определенного интеграла a называется *нижним пределом*, b — *верхним пределом*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением, x — переменной интегрирования.

Вы ознакомитесь с формулой Ньютона—Лейбница.

Из определения определенного интеграла получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Формулу (2) называют *формулой Ньютона—Лейбница.*

Формула Ньютона—Лейбница верна для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$.

Из предыдущего параграфа нам известно, что площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле $S = F(b) - F(a)$.

Следовательно, площадь криволинейной трапеции, рассматриваемой на отрезке $[a; b]$ при $f(x) > 0$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

Для вычисления определенного интеграла формулу Ньютона—Лейбница удобно записывать следующим образом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Если поменять местами пределы интегрирования, то получаем следующее равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Справедливость равенства (4) докажите самостоятельно.

Вы научитесь вычислять определенный интеграл.

ПРИМЕР

1. Вычислим интегралы: 1) $\int_0^3 x^2dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$; 3) $\int_{-1}^{1} \frac{8}{\sqrt{5+4x}}\,dx$.

Решение. 1) Одной из первообразных для функции $f(x) = x^2$ является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Теперь используем формулу Ньютона—Лейбница. Тогда:

$$\int_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9.$$

2) одной из первообразных для функции $f(x) = \sin x$ является функция $F(x) = -\cos x$. Тогда получаем:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

3) для того, чтобы найти первообразную функции $f(x) = \frac{8}{\sqrt{5+4x}}$, используем формулу первообразной функции $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, второе и третье правила нахождения первообразных. Тогда

$$\int_{-1}^{1} \frac{8}{\sqrt{5+4x}}\,dx = 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{5+4x}\,\Big|_{-1}^{1} = 4\left(\sqrt{5+4\cdot 1} - \sqrt{5+4\cdot(-1)}\right) = 4(3-1) = 8.$$

Ответ: 1) 9; 2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; 3) 8.

ПРИМЕР

2. Докажем справедливость равенства $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin x\,dx = \int_0^1 6x^2dx$.

Доказательство. Для доказательства вначале вычислим отдельно значение каждого определенного интеграла, затем сравним полученные числовые значения.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin x\,dx = -4\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -4\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -4\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2;$$

$$\int_0^1 6x^2dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2x^3\Big|_0^1 = 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 0^3 = 2.$$

Значения определенных интегралов равны. Следовательно, данное равенство верно.

ПРИМЕР

3. Выясним, при каких значениях x выполняется равенство

$$\int_0^x (6-2t)\,dt = 5.$$

Решение. Сначала, используя формулу Ньютона—Лейбница, найдем выражение интеграла:

$$\int_0^x (6-2t)dt = (6t - t^2)\Big|_0^x = (6x - x^2) - (6 \cdot 0 - 0^2) = 6x - x^2.$$

Теперь, приравнивая найденное выражение к пяти, решим уравнение $6x - x^2 = 5$.
Корни уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
Следовательно, данное равенство выполняется при значении x, равном 1 и 5.

Ответ: 1; 5.

?

1. Чем отличается определенный интеграл от неопределенного?
2. Почему $\int_a^b f(x)dx$ называется *определенным интегралом*?
3. Какому условию должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы можно было записать формулу Ньютона—Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$?

Упражнения

А

Вычислите интегралы (3.1—3.10):

3.1. 1) $\int\limits_0^1 x^5 dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$;

3) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^4} dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\, dx$.

3.2. 1) $\int\limits_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$; 4) $\int\limits_9^{16} \frac{3}{\sqrt{x}} dx$.

3.3. 1) $\int\limits_{-2}^1 4x^3\, dx$; 2) $\int\limits_{-1}^1 5x^4\, dx$;

3) $\int\limits_1^3 \frac{x^2}{5} dx$; 4) $\int\limits_{-2}^1 \frac{x^3}{2} dx$.

3.4. 1) $\int\limits_2^3 (2x - 1)dx$; 2) $\int\limits_0^1 (3x + 2)dx$;

3) $\int\limits_0^3 (x^3 - 2)dx$; 4) $\int\limits_2^4 (3x^2 + 1)dx$.

3.5. 1) $\int\limits_1^2 (2x - x^2)dx$; 2) $\int\limits_0^2 (2x + x^2)dx$;

3) $\int\limits_0^1 (1 + x^4)dx$; 4) $\int\limits_{-1}^0 (1 - x^5)dx$.

3.6. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1)dx$; 2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \sin x)dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0 (3 - 5\cos x)dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (4\sin x + 3)dx$.

3.7. 1) $\int\limits_0^1 (8x^7 + 2)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^0 (3 - 9x^8)dx$;

3) $\int\limits_{-1}^1 (6x^5 - 4)dx$; 4) $\int\limits_1^2 (7x^6 + 9)dx$.

3.8. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x - 3\cos x)dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x - 5\sin x)dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{4}\right)dx$; 4) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{2}\right)dx$.

3.9. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}dx$.

3.10. 1) $\int\limits_{1}^{4}\left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int\limits_{4}^{9}\left(6 - \frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int\limits_{-5}^{0}\left(\frac{4}{\sqrt{x+9}} + 5\right)dx$; 4) $\int\limits_{0}^{8}\left(7 - \frac{5}{\sqrt{1+x}}\right)dx$.

Докажите справедливость равенств **(3.11—3.12)**:

3.11. 1) $\int\limits_{1}^{2}3x^2dx = \int\limits_{0}^{1}14xdx$; 2) $\int\limits_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int\limits_{1}^{3}dx$.

3.12. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int\limits_{0}^{1}4x^3\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1}5x^4\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}dx$.

3.13. При каких значениях x выполняется равенство:

1) $\int\limits_{-1}^{x}3t^2\,dt = 2$; 2) $\int\limits_{x}^{1}4tdt = 2$;

3) $\int\limits_{0}^{x}15t^4\,dt = 96$; 4) $\int\limits_{x}^{0}9t^2\,dt = 3$?

B

Вычислите **(3.14—3.19)**:

3.14. 1) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(2x+1)^3\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{0}\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}(3x-2)^3\,dx$; 4) $\int\limits_{-4}^{0}\left(5 + \frac{x}{4}\right)^2dx$.

3.15. 1) $\int\limits_{3}^{4}\frac{dx}{(x-2)^2}$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x+3)^2}$;

3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(0{,}5x+1)^4}$;

4) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{(2-0{,}2x)^5}$.

3.16. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2\frac{x}{2}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi} 3\cos^2 2x\,dx$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{4}\sin^2 4x\,dx$.

3.17. 1) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1-x^2}{1-x}dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{16-x^4}{2-x}dx$;

3) $\int\limits_1^2 \frac{1-8x^3}{1-2x}dx$;

4) $\int\limits_0^2 \frac{x^3+2x^2+4x+3}{x+1}dx$.

3.18. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{12}\right)dx$;

4) $\int\limits_0^{\pi} \left(1-2\cos^2\frac{x}{6}\right)dx$.

3.19. 1) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$;

2) $\int\limits_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

3) $\int\limits_4^{20} \frac{dx}{2\cdot\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$;

4) $\int\limits_0^9 \frac{dx}{4\cdot\sqrt{\frac{x}{3}+1}}$.

При каких значениях x выполняются равенства (3.20—3.21):

3.20. 1) $\int\limits_0^x (5-2t)dt = 4$;

2) $\int\limits_0^x (8-2t)dt = 12$.

3.21. 1) $\int\limits_0^x (3-2t)dt = 4-2x$;

2) $\int\limits_0^x (1-4t)dt = 12-9x$?

При каких значениях x выполняются неравенства (3.22—3.23):

3.22. 1) $\int\limits_0^x 3dt > 1$;

2) $\int\limits_x^{x^3} 4dt < 0$.

3.23. 1) $\int\limits_x^1 5dt > 9$;

2) $\int\limits_x^2 (2t-1)dt > 0$?

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

3.24. Символ $\int\limits_a^b f(x)dx$ стал широко использоваться после работ французского математика и физика Жан-Батиста Жозефа Фурье.

Ж. Фурье
(1768—1830)

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция и ее график, первообразная, основное свойство и правила вычисления, таблица первообразных, криволинейная трапеция и алгоритм нахождения ее площади, определенный интеграл и формула Ньютона—Лейбница, многоугольники и формулы вычисления их площадей.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР И ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

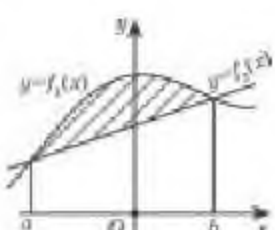
Вы научитесь вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

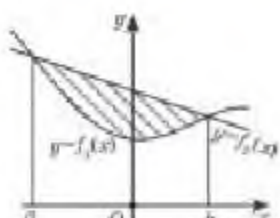
Функция, первообразная, определенный интеграл, плоская фигура, тело вращения, площадь, объем

Вы научились находить площадь криволинейной трапеции. В этом параграфе мы рассмотрим вычисление площади любой плоской фигуры, применяя определенный интеграл. На рисунке 15 даны различные виды плоских фигур.

1)



2)



3) 4)

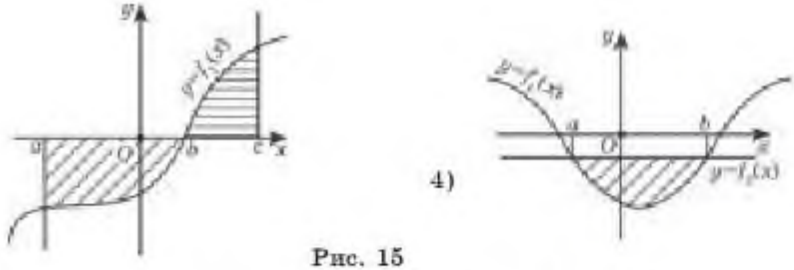


Рис. 15

Рассмотрим примеры вычисления площадей таких плоских фигур.

Пусть плоская фигура ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — графиком функции $y = g(x)$, слева — прямой $x = a$ и справа — прямой $x = b$ (рис.15).

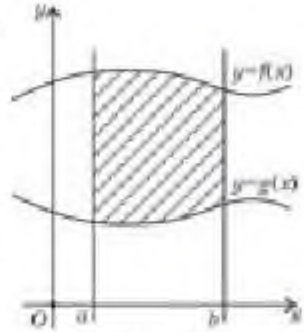


Рис. 16

На рисунке 16 видим две криволинейные трапеции. Чтобы вычислить площадь заштрихованной фигуры, надо от площади большей криволинейной трапеции вычесть площадь меньшей криволинейной трапеции, т. е.

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Таким образом,

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx. \qquad (1)$$

ПРИМЕР 1. Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 4$ и $y = 4$.

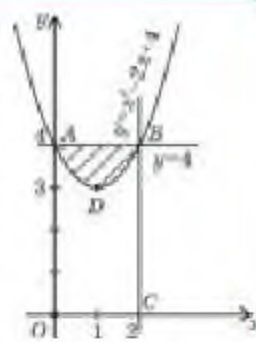


Рис. 17

Решение. Вначале построим на одной координатной плоскости графики данных функций. Графиком функции $y = x^2 - 2x + 4$ является парабола с вершиной в точке (1; 3) и ветви направлены вверх, а графиком функции $y = 4$ является прямая, проходящая через точку (0; 4) и параллельная оси Ox (рис.17).

Найдем точки пересечения графиков данных функций. Для этого решим уравнение $x^2 - 2x + 4 = 4$. Тогда $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Следовательно, пределы интегрирования будут равны: $a = 0$ и $b = 2$. В данном случае $f(x) = 4$ и $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

Площадь заштрихованной фигуры можно вычислить двумя способами.

I *способ.* Используем формулу (1):

$$S_ф = \int_0^2 (4 - x^2 + 2x - 4)\, dx = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

II *способ.* От площади прямоугольника $OABC$ отнимем площадь криволинейной трапеции $OADBC$: $S_ф = S_{OABC} - S_{кр.тр.}$. $S_{OABC} = AB \cdot BC = 2 \cdot 4 = 8$.

$$S_{\text{пр.тр.}} = \int_0^2 (x^2 - 2x + 4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 8 = \frac{20}{3}.$$

Тогда $S_ф = 8 - \frac{20}{3} = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$ кв. ед.

ПРИМЕР 2. Вычислим площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 2x + 5$, $y = x + 1$ и прямыми $x = 1$, $x = 3$.

Решение. На одной координатной плоскости строим графики данных функций. График функции $y = x^2 - 2x + 5$ есть парабола с вершиной в точке (1; 4), пересекающая ось Oy в точке (0; 5), ветви ее направлены вверх. Графиком функции $y = x + 1$ является прямая, проходящая через точки (−1; 0) и (0; 1), а $x = 1$, $x = 3$ — прямые, параллельные оси Oy и, соответственно, проходящие через точки (1; 0), (3; 0) (рис. 18).

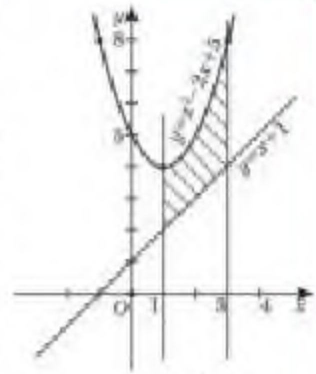


Рис. 18

Для вычисления площади полученной плоской фигуры используем формулу (1). В данном случае

$$f(x) = x^2 - 2x + 5,\ g(x) = x + 1,\ a = 1,\ b = 3.$$

Тогда

$$S_ф = \int_1^3 ((x^2 - 2x + 5) - (x + 1))dx = \int_1^3 (x^2 - 2x + 5 - x - 1)dx = \int_1^3 (x^2 - 3x + 4)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{3\cdot 3^2}{2} + 4\cdot 3 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 = \frac{14}{3}.$$

Ответ: $\frac{14}{3}$ кв. ед.

Вы узнаете формулу вычисления объема тела вращения с помощью определенного интеграла.

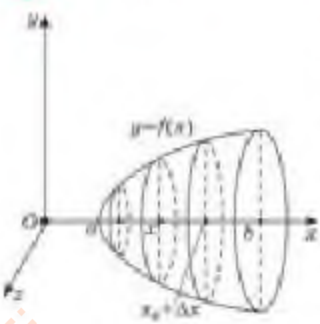


Рис. 19

Рассмотрим применение определенного интеграла при нахождении объема тела вращения. Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Требуется вычислить объем геометрического тела, получаемого при вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox (рис. 19).

На отрезке $[a; b]$ возьмем произвольную точку x. Если через эту точку x провести плоскость, перпендикулярную оси Ox, то она пересечет данное тело вращения по кругу. Радиус этого круга равен y. Следовательно, площадь круга $Q(x) = \pi y^2$.

Очевидно, что площадь сечения $Q(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Обозначим через $V(x)$ объем части тела, соответствующего отрезку $[a; x]$ (рис. 19).

Найдем производную функции $V(x)$. Для этого выберем какое-то значение x_0 и дадим ему приращение Δx. Значение Δx может быть больше 0 или меньше 0. Будем считать, что $\Delta x > 0$. Тогда $V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)$ будет объемом тела, заключенного между плоскостями, проходящими через точки x_0 и $x_0 + \Delta x$ на оси Ox (рис. 19). Из чертежа очевидно, что выполняется неравенство:

$$Q(x_0) \cdot \Delta x \leqslant V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) \leqslant Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

В данном случае $Q(x_0) \cdot \Delta x$ — объем цилиндрического тела, целиком лежащего внутри выведенного слоя, а $Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$ — объем цилиндрического тела, содержащего этот слой. Так как $\Delta x > 0$, то выполняется неравенство:

$$Q(x_0) \leqslant \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} \leqslant Q(x_0 + \Delta x).$$

Так как функция $Q(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она непрерывна и в точке x_0. Значит, если Δx стремится к нулю, то $Q(x_0 + \Delta x)$ стремится к $Q(x_0)$, а следовательно $\frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x}$ стремится к $Q(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, $V'(x_0) = \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = Q(x_0)$.

Значит, $V(x)$ является первообразной для функции $Q(x)$ на отрезке $[a; b]$. Но тогда:

$$\int_a^b Q(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a).$$

Теперь, чтобы найти объем тела вращения, достаточно вычислить интеграл от функции $Q(x)$ в пределах от a до b, т. е.

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx = \pi\int_a^b y^2dx. \qquad (2)$$

ПРИМЕР 3. Найдем объем тела, полученного при вращении параболы $y = 2x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = 2$ вокруг оси абсцисс.

Решение. По условию, $a = 0$, $b = 2$ и $y = 2x^2$. Применяя формулу (2), найдем объем тела:

$$V = \pi\int_0^2 (2x^2)^2dx = \pi\int_0^2 4x^4dx = 4\pi\int_0^2 x^4dx = 4\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = 4\pi \cdot \frac{2^5}{5} = 4\pi \cdot 6{,}4 = 25{,}6\pi.$$

Ответ: $25{,}6\pi$ куб. ед.

1. В каких случаях площадь фигуры вычисляется с помощью определенного интеграла?
2. Может ли плоская фигура состоять только из криволинейных трапеций? Обоснуйте ответ.

Упражнения

A

Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (**4.1—4.2**):

4.1. 1) $y = x^2$, $y = x$; 2) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$;
3) $y = x^2$, $y = 4$; 4) $y = -x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

4.2. 1) $y = (x + 1)^2$, $y = 1$; 2) $y = x^3$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$;
3) $y = x^2 + 1$, $y = 5$; 4) $y = 3 - x^2$, $y = 2$;
5) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$; 6) $y = x^3 + 1$, $y = 1$, $x = 1$.

4.3. Вычислите площади плоских фигур, изображенных на рисунке 20.

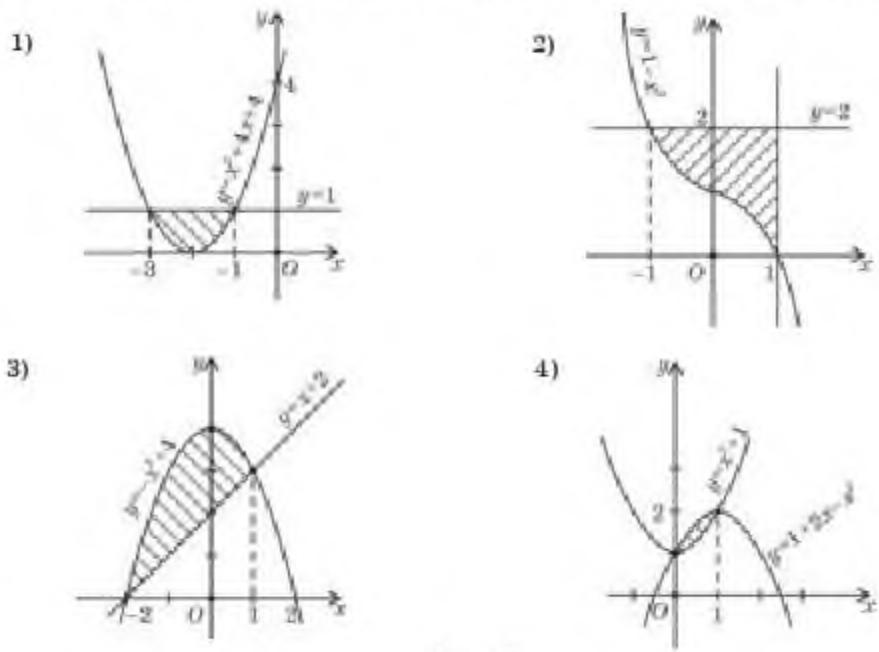


Рис. 20

4.4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$, и осью Ox:

1) $f(x) = \sin x$ и $[0; 2\pi]$; 2) $f(x) = \cos x$ и $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

4.5. Найдите объем тела, полученного при вращении параболы $y = x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = 3$ вокруг оси абсцисс.

4.6. Найдите объем тела, полученного при вращении параболы $y = 3x^2$ от точки $x = 1$ до точки $x = 2$ вокруг оси абсцисс.

4.7. 1) Найдите объем тела, полученного при вращении гиперболы $y = \frac{2}{x}$ от точки $x = 1$ до точки $x = 3$ вокруг оси абсцисс.

2) Найдите объем тела, полученного при вращении гиперболы $y = \frac{3}{x}$ от точки $x = 1$ до точки $x = 2$ вокруг оси абсцисс.

B

4.8. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = 2\cos x$, $y = 2\sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$;

3) $y = x$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$; 4) $y = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = \frac{1}{2}$.

4.9. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной:
1) графиком функции $y = 2x^3$, касательной к этому графику в точке $(-1; -2)$ и прямой $x = 1$;
2) прямой $y = 0$, параболой $y = 2x - x^2$ и касательной, проведенной к этой параболе в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями **(4.10—4.11)**:

4.10. 1) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$; 2) $y = x^2 + 2x + 4$, $y = x + 6$;
3) $y = -x^2 + 3$, $y = 2x - 6$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = 1 - 2x$.

4.11. 1) $y = x^2 - 8x + 12$, $y = -x^2 + 8x - 18$;
2) $y = x^2 + 6x + 5$, $y = x^2 - 6x - 11$;
3) $y = x^2 - 4x - 1$, $y = -x^2 - 4x + 7$;
4) $y = x^2 + 3x - 5$, $y = -x^2 + 3x - 3$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Укажите функцию $y = f(x)$, первообразная которой равна $F(x) = 9x^2 - 0{,}5x$:

A) $18x + \frac{1}{2}$; B) $4{,}5x - 0{,}5$; C) $4{,}5x + 0{,}5$; D) $18x - \frac{1}{2}$.

2. Определите общий вид первообразной для функции $y = 4x + 6x^3$:

A) $8x + 1{,}5x^2 + C$; B) $2x^2 + 1{,}5x^4 + C$;

C) $8x^2 + \frac{3}{2}x^4 + C$; D) $4 + 18x^2 + C$.

3. Найдите первообразную функции $y = 3x^2 - 1$, проходящую через точку $A(0;\ 0)$:

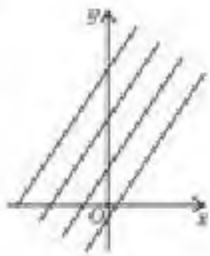
A) $x^3 - x + 1$; B) $x^3 - x$; C) $x^3 - x - 1$; D) $x^3 + x + 1$.

4. На каком промежутке функция $F(x) = \frac{2x^3}{9} + \frac{3}{2x}$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2x^2}$:

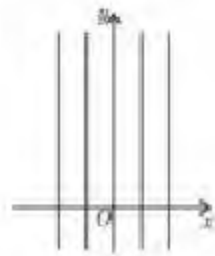
A) $(-\infty;\ +\infty)$; B) $(0;\ +\infty)$; C) $(-\infty;\ 1)$; D) $(-1;\ +\infty)$?

5. Какой из графиков, изображенных на рисунке, не дает геометрической интерпретации первообразной?

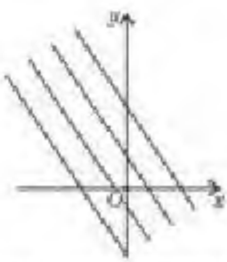
A)



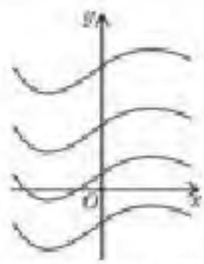
B)



C)

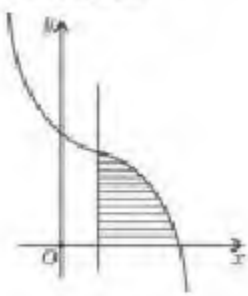


D)

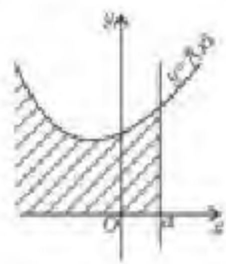


6. Какая из фигур, заштрихованных на рисунке, не является криволинейной трапецией?

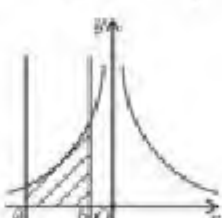
A)



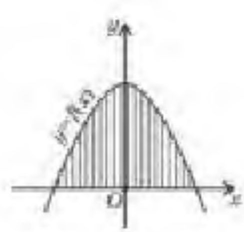
B)



C)



D)



7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$:

A) 3; B) 1; C) $\frac{7}{3}$; D) $\frac{5}{3}$.

8. Вычислите интеграл $\int\limits_{-1}^{1} x^{10}dx$:

A) 0; B) $\frac{2}{11}$; C) 22; D) $\frac{1}{22}$.

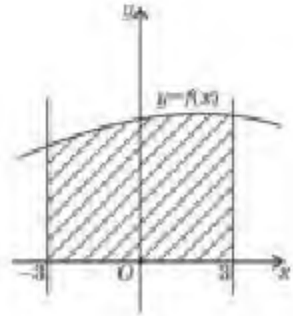
9. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется по формуле:

A) $S = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$;

B) $S = 2\int\limits_{-3}^{0} f(x)dx$;

C) $S = \int\limits_{3}^{-3} f(x)dx$;

D) $S = \int\limits_{-3}^{3} f(x)dx$.



10. Найдите значение интеграла $\int\limits_{4}^{9} \frac{25\sqrt{x}}{x}dx$:

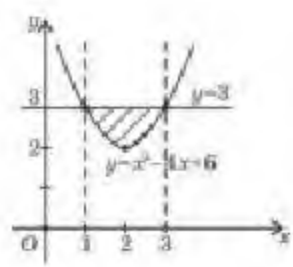
A) 50; B) 10; C) 5; D) 25.

11. Что означает определенный интеграл от непрерывной и неотрицательной функции на отрезке $[a; b]$:
A) площадь криволинейной функции;
B) общий вид первообразной;
C) производную функции;
D) объем тела вращения?

12. Вычислите площадь плоской фигуры, изображенной на рисунке:

A) $\frac{3}{4}$; B) $\frac{14}{3}$;

C) $\frac{4}{3}$; D) $\frac{32}{3}$.



13. Какое условие должно выполняться для того, чтобы функция $F(x)$ была первообразной для функции $f(x)$ на множестве D:

A) $F(x) = f(x)$; C) $F(x) = f'(x)$; B) $F'(x) = f(x)$; D) $F'(x)=f'(x)$?

14. При каком значении C график первообразной функции $f(x) = 5\sin 5x$ проходит через точку $K\left(\frac{\pi}{5}; 1\right)$:

A) 0; B) 2; C) −1; D) 1?

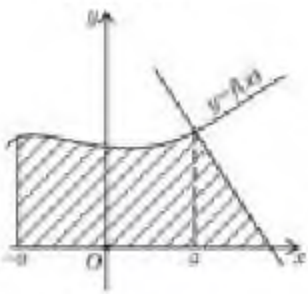
15. Найдите значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4}\cos x dx$:

A) $\frac{1}{16}$; B) $-\frac{1}{16}$; C) $-\frac{1}{8}$; D) $\frac{1}{8}$.

16. Вычислите $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^3 - 4x^2 - 5x}{x - 5} dx$:

A) $\frac{1}{6}$; B) $-\frac{1}{6}$; C) $\frac{5}{6}$; D) $-\frac{5}{6}$.

17. Площадь плоской фигуры, изображенной на рисунке, находится по формуле:



A) $S = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx + S_{\Delta}$;

B) $S = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$;

C) $S = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx - S_{\Delta}$;

D) $S = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx + S_{\Delta}$.

18. Какое из приведенных неравенств неверное:

A) $\int\limits_1^2 x^2dx < \int\limits_2^3 xdx$; B) $\int\limits_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx > \int\limits_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$;

C) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; D) $\frac{1}{7}\int\limits_3^4 dx < \int\limits_{100}^{101} dx$?

19. При каких значениях x выполняется равенство $\int\limits_0^x (2t - 5)dt = -6$:

A) таких значений не существует; B) -2; -3;
C) любое число; D) 2; 3?

20. При каких значениях x выполняется неравенство $\int\limits_0^x (2t - 4)dt < -3$:

A) $(1; 3)$; B) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$;
C) $[1; 3]$; D) $[-3; -1]$?

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Выражение, степень числа, основание степени, показатель степени, арифметический корень, свойства корня, рациональные и иррациональные числа.

ГЛАВА II

СТЕПЕНИ И КОРНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

§ 5. КОРЕНЬ n-й СТЕПЕНИ И ЕГО СВОЙСТВА

Вы ознакомитесь с понятием корня n-ой степени и арифметического корня n-ой степени.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Степень, показатель степени, корень, квадратный корень, арифметический квадратный корень, значение корня

Вы знаете: Квадратный корень из числа 25 равен 5, так как $5^2 = 25$, т. е. квадратный корень из числа a есть число, квадрат которого равен числу a.

Таким же образом можно дать определение корня n-й степени.

Определение. ***Корнем n-й степени*** *(n — натуральное число, отличное от 1) из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна числу a.*

По определению:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ где } a = b^n. \qquad (1)$$

Здесь a — число, находящееся под знаком корня, n — показатель корня, b — корень n-й степени числа a $(n \in N)$.

Например, корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как: $\sqrt[3]{27} = 3$, т. е. $3^3 = 27$.

Рассмотрим случаи, когда показатель корня четный и нечетный.

Пусть n — четное число, тогда $b^n = a \geqslant 0$, т. е. неотрицательное число, так как четная степень любого числа — неотрицательное число. Следовательно, подкоренное число корня с четным показателем не может быть отрицательным числом.

Если показатель корня — нечетное число, то можно вычислить корень из любого числа. В этом случае, в равенстве $b^n = a$ знаки чисел a и b одинаковые, т. е. корень из положительного числа будет число положительное, из отрицательного числа — отрицательное.

Например: 1) $\sqrt[5]{-32} = -2$, так как $(-2)^5 = -32$;

2) $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4^3 = 64$.

Пусть корень n-й степени из числа a равен x, тогда по определению получаем уравнение $x^n = a$. Уравнение $x^n = a$ (где $a > 0$, $n \in N$, $n \neq 1$) в случае четного n имеет два корня: $-\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{a}$, в случае нечетного n — один корень $\sqrt[n]{a}$.

Например, числа 7 и -7 являются корнями уравнения $x^4 = 2301$, так как $7^4 = 2301$ и $(-7)^4 = 2301$.

Определение. ***Арифметическим корнем n-й степени*** *неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a.*

Вы узнаете свойства корня n-ой степени.

Для положительных чисел a, b при $n \in N$, $k \in N$ для корней n-й, k-й степеней выполняются следующие свойства:

1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

3) $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$;

4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

5) $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;

6) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Перечисленные свойства можно доказать, используя возведение в степень и определение корня n-й степени.

Приведем доказательства второго и шестого свойств.

Докажем второе свойство: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Доказательство. По определению корня n-й степени $\sqrt[n]{ab}$ есть неотрицательное число, n-я степень которого равна ab. Так как $\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$, то $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ будет неотрицательным числом. Следовательно, по определению корня n-й степени и свойству степеней с натуральным показателем $(a \cdot b)^n = a^n b^n$, можно получить следующее равенство: $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$, т. е.

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b.$$

Таким образом, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Докажем шестое свойство: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Доказательство. Возведем в nk-ю степень выражение $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$.

Тогда $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right]^k = (\sqrt[k]{a})^k = a.$

Следовательно, выражение $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)$ является корнем nk-й степени из числа a.

Свойства 1, 3, 4, 5 докажите самостоятельно.

ПРИМЕР **1.** Преобразуем выражения:

1) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; 2) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; 4) $\sqrt[21]{128}$.

Решение. 1) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{8\cdot 4}=\sqrt[5]{32}=2$;

2) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}=1{,}5$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[15]{7}$;

4) $\sqrt[21]{128}=\sqrt[21]{2^7}=\sqrt[3]{2}$.

Ответ: 1) 2; 2) 1,5; 3) $\sqrt[15]{7}$; 4) $\sqrt[3]{2}$.

ПРИМЕР **2.** Вынесем множитель из-под корня: 1) $\sqrt[4]{243b^4}$, $b>0$; 2) $\sqrt{45b^6}$, $b<0$; 3) $\sqrt[3]{500a^6b^8}$.

Решение. 1) Вынесем из-под корня положительный множитель, так как $b>0$:

$$\sqrt[4]{243b^4}=\sqrt[4]{3\cdot 81\cdot b^4}=3b\sqrt[4]{3};$$

2) вынесем из-под корня отрицательный множитель, так как $b<0$:

$$\sqrt{45b^6}=\sqrt{5\cdot 9\cdot (b^3)^2}=-3b^3\sqrt{5};$$

3) $\sqrt[3]{500a^6b^8}=\sqrt[3]{125\cdot 4\cdot (a^2)^3\cdot (b^2)^3\cdot b^2}=5a^2b^2\sqrt[3]{4b^2}$.

Ответ: 1) $3b\sqrt[4]{3}$; 2) $-3b^3\sqrt{5}$; 3) $5a^2b^2\sqrt[3]{4b^2}$.

ПРИМЕР **3.** Внесем множитель под знак корня: 1) $4\sqrt[3]{3}$; 2) $-a\sqrt[6]{3}$, $a>0$.

Решение. 1) Так как $4\sqrt[3]{3}$ корень третьей степени, внесем число 4 под корень с показателем 3. Тогда

$$4\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{4^3\cdot 3}=\sqrt[3]{192}.$$

2) так как $-a\sqrt[6]{3}$ корень шестой степени и a — неотрицательное число, под знак корня внесем число a с показателем 6. Тогда

$$-a\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{3a^6}.$$

Ответ: 1) $\sqrt[3]{192}$; 2) $-\sqrt[6]{3a^6}$.

?

1. От чего зависит число значений корня n-й степени? Ответ обоснуйте.
2. Почему не существует корень четной степени из отрицательного числа? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

Проверьте справедливость следующих равенств (**5.1—5.2**):

5.1. 1) $\sqrt[3]{64}=4$; 2) $\sqrt[5]{-1}=-1$; 3) $\sqrt[10]{1024}=2$; 4) $\sqrt[5]{-243}=-3$.

5.2. 1) $\sqrt[21]{1} = 1$; 2) $\sqrt[6]{64} = 2$; 3) $\sqrt[3]{-125} = -5$; 4) $\sqrt[17]{0} = 0$.

Вычислите (**5.3—5.4**):

5.3. 1) $\sqrt[5]{-32}$; 2) $\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[3]{-64}$; 4) $\sqrt[3]{-216}$.

5.4. 1) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{625}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{256}{81}}$.

Решите уравнения (**5.5—5.6**):

5.5. 1) $x^3 + 8 = 0$; 2) $x^6 = 7$; 3) $x^3 = 4$; 4) $x^4 = 16$.

5.6. 1) $16x^4 - 1 = 0$; 2) $0{,}01x^3 + 10 = 0$;
3) $x^7 + 128 = 0$; 4) $x^6 - 64 = 0$.

Найдите значения выражений (**5.7—5.11**):

5.7. 1) $\left(-\sqrt[4]{13}\right)^4$; 2) $\left(3\sqrt[5]{(-3)}\right)^5$; 3) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3$; 4) $\left(-\sqrt[6]{2}\right)^6$.

5.8. 1) $\sqrt[4]{625 \cdot 81}$; 2) $\sqrt[5]{243 \cdot 32}$; 3) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; 4) $\sqrt[4]{0{,}0001 \cdot 81}$.

5.9. 1) $\sqrt[5]{625 \cdot 160}$; 2) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; 3) $\sqrt[4]{27 \cdot 48}$; 4) $\sqrt[3]{45 \cdot 75}$.

5.10. 1) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[9]{8}$; 2) $\sqrt[7]{16} \cdot \sqrt[7]{-8}$; 3) $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}$; 4) $\sqrt[3]{-25} \cdot \sqrt[6]{25}$.

5.11. 1) $\frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{-8}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[6]{2}}$.

5.12. Вынесите множитель из-под корня ($x > 0$, $y > 0$):

1) $\sqrt[6]{64x^{11}y^{13}}$; 2) $\sqrt[4]{256x^8 \cdot y^9}$; 3) $\sqrt[3]{54x^{12} \cdot y^{13}}$; 4) $\sqrt[4]{16x^5y^7}$.

5.13. Внесите множитель под знак корня ($x > 0$, $y > 0$):

1) $x^2y\sqrt[4]{4}$; 2) $xy^2\sqrt[5]{\frac{3y^3}{x^4}}$; 3) $x^2y^3\sqrt[4]{8}$; 4) $xy^2\sqrt[3]{-5}$.

Упростите выражения (**5.14—5.15**):

5.14. 1) $\sqrt[7]{x^7}$ рассмотрите два случая $x \geqslant 0$, $x < 0$;
2) $\sqrt[8]{x^8}$, $x \geqslant 0$; 3) $\sqrt[5]{x^5}$; 4) $\sqrt{x^2}$, $x \geqslant 0$.

5.15. 1) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2}$, где $a \leqslant 0$; 2) $\sqrt[5]{x^5} - \sqrt[6]{x^6}$, где $x \geqslant 0$;
3) $\sqrt[4]{b^4} + 2\sqrt[7]{b^7}$, где $b \geqslant 0$; 4) $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[8]{x^8}$, где $x \leqslant 0$.

Вычислите (**5.16—5.18**):

5.16. 1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{-9}$; 2) $\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{25}} \cdot \sqrt[3]{100}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{28}\cdot\sqrt[3]{45}}{\sqrt[3]{35}}\cdot\sqrt[3]{6}$;   4) $\dfrac{\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{12}}$.

5.17. 1) $3-\sqrt{1\frac{9}{16}}-0{,}2\sqrt[4]{625}$;   2) $2\cdot\sqrt{1\frac{24}{25}}+0{,}8\sqrt[3]{0{,}008}$;

3) $0{,}25\cdot\sqrt[3]{729}-0{,}15\sqrt[4]{0{,}0016}$;   4) $5{,}6\cdot\sqrt[5]{243}+0{,}75\sqrt[3]{1{,}331}$.

5.18. 1) $\left(3\sqrt{175}-2\sqrt{112}-3\sqrt{63}\right)^2+0{,}25\sqrt[4]{10000}$;

2) $\left(5\sqrt{150}-3\sqrt{24}+2\sqrt{54}\right)^2-0{,}02\sqrt[4]{625}$;

3) $\sqrt[3]{375}+0{,}25\sqrt[3]{192}+10\sqrt[3]{3000}$;

4) $5\sqrt[3]{24}+\sqrt[4]{0{,}1296}-1{,}6\sqrt[3]{375}$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКАХ

5.19. Знаки $\sqrt{\ }$ и $\sqrt[n]{\ }$ последовательно стали применять французский математик Альберт Жирар, немецкий философ и математик Гольфрид Вильгельм Лейбниц.

А. Жирар
(1595—1632)

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Степень, основание и показатель степени, степень с натуральным показателем, степень с целым показателем и их свойства, рациональное число, корень n-й степени и его свойства.

§ 6. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вы ознакомитесь с понятием степени с рациональным показателем.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Степень, показатель степени, корень n-ой степени, рациональное число, выражение

Вы знаете: Возведение в натуральную степень любого числа, а также возведение в нулевую и целую отрицательную степень числа, отличные от нуля.

Известно, что для любых чисел a и b, для любых целых чисел m и n выполняются следующие свойства:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$;
6) если $m > n$, то $a^m > a^n$ при $a > 1$;
$a^m < a^n$ при $0 < a < 1$.

Теперь рассмотрим примеры возведения в положительную и отрицательную дробную степень любых неотрицательных чисел.

Например, $3^{\frac{5}{6}}$; $4^{\frac{2}{8}}$; $16^{\frac{3}{4}}$; $5^{-\frac{3}{4}}$.

Возьмем число с рациональным показателем $a^{\frac{m}{n}}$, где $n \in N$, $m \in Z$.

Возведем данное выражение в n-ю степень: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m$.

По определению корня n-й степени из последнего равенства получаем, что число $a^{\frac{m}{n}}$ есть корень n-й степени из числа a^m.

Сформулируем определение степени с рациональным показателем.

Определение. *Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$ называется значение корня n-й степени из числа a^m.*

По определению

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{1}$$

В данном случае m — любое целое, n — любое натуральное число $(n > 1)$ и m — показатель подкоренного числа, а n — показатель корня.

ПРИМЕР 1. Запишем в виде корня степень с рациональным показателем:

1) $6^{\frac{2}{5}}$; 2) $a^{-\frac{4}{13}}$; 3) $5^{1,7}$.

Решение. Используем формулу (1): 1) $6^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{6^2}$; 2) $a^{-\frac{4}{13}} = \sqrt[13]{a^{-4}}$; 3) вначале переведем десятичную дробь в показателе в обыкновенную дробь, затем воспользуемся формулой (1). Тогда $5^{1,7} = 5^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{5^{17}}$.

Ответ: 1) $\sqrt[5]{6^2}$; 2) $\sqrt[13]{a^{-4}}$; 3) $\sqrt[10]{5^{17}}$.

ПРИМЕР

2. Вычислим значение выражения 1) $8^{\frac{4}{3}}$; 2) $625^{0,75}$; 3) $128^{-\frac{3}{7}}$.

Решение. 1) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{8^3 \cdot 2^3} = 8 \cdot 2 = 16$;

2) $625^{0,75} = \sqrt[4]{625^3} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$;

3) $128^{-\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{128^{-3}} = \sqrt[7]{(2^{-3})^7} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Примечание. Если $a < 0$, то степень с рациональным показателем не определяется однозначно. Покажем это на примере.

Например, $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$, а $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Если же возьмем $(-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} =$

$= \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{27^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3$.

Следовательно, основание степени не может быть отрицательным числом.

Вы узнаете свойства степени с рациональным показателем.

Свойства степени с целым показателем выполняются и для степени с рациональным показателем.

Для $a > 0$, $b > 0$ и любых рациональных чисел r и s выполняются равенства:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;
3) $(a^r)^s = a^{rs}$;
4) $(ab)^r = a^r b^r$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Степень числа 0 определена только для положительных показателей, т. е. $0^r = 0$ при $r > 0$.

Приведем доказательства 2-го и 5-го свойств, используя свойства корня n-й степени.

Для этого введем следующие обозначения $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$, где n и q — натуральные числа, m, p — целые числа.

Докажем свойство: $a^r : a^s = a^{r-s}$.

Доказательство. $a^r : a^s = a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} =$

$= a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}-\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{r-s}$. Следовательно, $a^r : a^s = a^{r-s}$. ■

Докажем свойство: $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ $(b \neq 0)$.

Доказательство. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}$, т.е.

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$. ■

Свойства 1, 3, 4 докажите самостоятельно.

Рассмотрим пример на использование свойств степени с рациональным показателем.

ПРИМЕР **3. Упростим выражения:**

1) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} + y^{\frac{1}{4}}$; 2) $\dfrac{x - y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}} \cdot \dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} : \dfrac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

Решение. 1) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} + y^{\frac{1}{4}} = \dfrac{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)} + y^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}$.

При упрощении данного выражения были использованы формула $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, свойство сокращения дроби и приведение подобных членов;
2) применяя формулу $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ вынесение общего множителя за скобки, умножение, деление рациональных дробей и свойство сокращения дроби, получим:

$$\frac{x - y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} : \frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}.$$

Ответ: 1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$.

Для степени с рациональным показателем справедливы еще два свойства в виде неравенств:

6. Если r — рациональное число и $0 < a < b$, то

$$a^r < b^r \text{ при } r > 0;$$
$$a^r > b^r \text{ при } r < 0.$$

7. Для рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ получим:

$$a^r > a^s \text{ при } a > 1;$$
$$a^r < a^s \text{ при } 0 < a < 1.$$

Вы научитесь применять свойства степени с рациональным показателем для преобразования алгебраических выражений.

ПРИМЕР **4.** Сравним числа:

1) $\sqrt[5]{27}$ и $\sqrt[4]{9}$; 2) $\sqrt[9]{16}$ и $\sqrt[7]{8}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}$ и $\left(\frac{1}{6}\right)^{200}$.

Решение. 1) Корни преобразуем в степени с рациональными показателями с одинаковыми основаниями: $\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{3^3}=3^{\frac{3}{5}}=3^{0,6}$; $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=3^{0,5}$. Теперь используем свойство 7. Тогда: $3^{0,6}>3^{0,5}$, так как $3>1$ и $0,6>0,5$. Следовательно, $\sqrt[5]{27}>\sqrt[4]{9}$.

2) преобразуем корни в степень с рациональными показателями и одинаковыми основаниями: $\sqrt[9]{16}=\sqrt[9]{2^4}=2^{\frac{4}{9}}$; $\sqrt[7]{8}=\sqrt[7]{2^3}=2^{\frac{3}{7}}$. Используя свойство 7, получим $\sqrt[9]{16}>\sqrt[7]{8}$, так как $2>1$ и $\frac{4}{9}>\frac{3}{7}$.

3) степени с рациональными показателями $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}$ и $\left(\frac{1}{6}\right)^{200}$ приведем к степеням с одинаковыми показателями: $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}=\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\right)^{100}=\left(\frac{1}{64}\right)^{100}$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{200}=\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\right)^{100}=\left(\frac{1}{36}\right)^{100}$. Затем, используя свойство 6, получим $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}<\left(\frac{1}{6}\right)^{200}$, так как $0<\frac{1}{64}<\frac{1}{36}$ и $100>0$. Следовательно, $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}<\left(\frac{1}{6}\right)^{200}$.

?

1. Укажите область определения степени с рациональным показателем. Ответ обоснуйте.
2. Верно ли утверждение: если основанием степени с рациональным показателем является целое число, то значение данной степени образует множество целых чисел? Ответ обоснуйте.
3. При каких значениях a верно равенство $a^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2}$?

Упражнение

A

6.1. Напишите выражение в виде корня:

1) $3^{1,8}$; 2) $2^{1,6}$; 3) $6^{-1,5}$; 4) $7^{1,2}$.

6.2. Напишите корни в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt[3]{x^{-2}}$; 2) $\sqrt[7]{3y}$; 3) $\sqrt[15]{x^{-10}}$; 4) $\sqrt[8]{5^3}$.

Найдите значения выражений **(6.3—6.4)**:

6.3. 1) $81^{0,5}$; 2) $\left(\frac{256}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 3) $16^{\frac{7}{4}}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$.

6.4. 1) $\left(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right):8^{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt[3]{100}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}}\cdot(5)^{\frac{1}{3}}$;

3) $81^{0,75} : 8^{\frac{7}{3}}$; 4) $\left(\frac{36}{25}\right)^{0,5} \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Разложите выражения на множители (**6.5—6.6**):

6.5. 1) $(bx)^{\frac{1}{3}} + (by)^{\frac{1}{3}}$; 2) $b - b^{\frac{1}{2}}$;

3) $3 + 3^{\frac{1}{3}}$; 4) $(5x)^{\frac{1}{2}} + (3x)^{\frac{1}{2}}$.

6.6. 1) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} + 1$; 2) $c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}}$;

3) $5 - 5^{\frac{2}{3}}$; 4) $x + y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.

Сократите дробь (**6.7—6.8**):

6.7. 1) $\dfrac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{x - 8}{x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 4}$;

3) $\dfrac{x - 16}{x^{\frac{1}{2}} - 4}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a + b}$.

6.8. 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}} - 1}{a - a^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{4}{9}} - b^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\dfrac{x^{1,2} - y^{2,1}}{x^{0,8} + x^{0,4}y^{0,7} + y^{1,4}}$.

6.9. Вычислите:

1) $320^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot (135)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot (40)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}} + 1}{3^{\frac{1}{2}} - 1} + \dfrac{3^{\frac{1}{2}} - 1}{3^{\frac{1}{2}} + 1}$;

3) $10 \cdot 0,027^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} + 4 \cdot 16^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{1}{1 + 5^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{1 - 5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}} + \dfrac{1}{3} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$.

B

6.10. Напишите корни в виде степеней с рациональными показателями:

1) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^{15} \cdot ax^{5}}$; 2) $\sqrt[3]{a^{7}\sqrt[4]{a}}$; 3) $\sqrt[9]{b^{8}} \cdot \sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27 \cdot \sqrt[3]{x}}$.

6.11. Напишите выражение в виде корня:

1) $5 \cdot 7^{-\frac{3}{5}}$; 2) $a^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{2}{3}}$; 3) $3b^{-\frac{4}{5}}$; 4) $b^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{3}{7}}$.

6.12. Найдите область определения выражения:

1) $(x + 1)^{\frac{3}{7}}$; 2) $x^{\frac{3}{5}}$; 3) $x^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(x - 3)^{\frac{2}{3}}$.

6.13. Упростите:

1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}$, $a>0$, $b>0$; 2) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$, $x\neq y$;

3) $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, $a>0$, $b>0$;

4) $\left(a\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+b\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-2(ab)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}$, $a>0$, $b>0$.

Вычислите (**6.14—6.15**):

6.14. 1) $\dfrac{4-3\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\left(2^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}\right)^2}$; 2) $\dfrac{\left(24^{\frac{1}{4}}+6^{\frac{1}{4}}\right)^2}{4\cdot 3^{\frac{1}{2}}+3\cdot 6^{\frac{1}{2}}}$;

3) $\dfrac{\left(9^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{2}}\right)^2}{3^{\frac{1}{3}}+2\cdot 3^{\frac{1}{6}}+1}$; 4) $\dfrac{1-2\cdot 5^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{2}}}{\left(5^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{3}{4}}\right)^2}$.

6.15. 1) $\left(\dfrac{1}{13^{\frac{1}{2}}-17^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{17^{\frac{1}{2}}+13^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot 13^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(\dfrac{5}{6^{\frac{1}{2}}+11}+\dfrac{5}{6^{\frac{1}{2}}-11}\right)\cdot 0{,}1\cdot 6^{\frac{1}{2}}$;

3) $\left(8-28^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}+\left(8+28^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$; 4) $\left(6+4\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}+\left(6-4\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$.

6.16. Упростите:

1) $\left(\dfrac{1}{(a+1)^{\frac{1}{2}}}+(1-a)^{\frac{1}{2}}\right):\left(\left(1-a^2\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)$, $-1<a\leqslant 1$;

2) $\dfrac{1+a^{\frac{1}{2}}}{1+a+a^{\frac{1}{2}}}:\dfrac{1}{1-a^{\frac{3}{2}}}$, $a\geqslant 0$, $a\neq 1$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Выражение, область допустимых значений переменной, тождественное преобразование выражений, тождество, доказательство тождеств, корень n-ой степени и его свойства, степень с рациональным показателем и ее свойства.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вы научитесь применять свойства корня n-ой степени для преобразования иррациональных выражений.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Степень, корень n-ой степени, иррациональное выражение, свойства, преобразование

вы знаете: Способы вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня, освобождение дроби от иррациональности в знаменателе; понятия о корне n-й степени, степени с рациональным показателем и их свойства.

В этом параграфе рассмотрим тождественное преобразование иррациональных выражений.

ПРИМЕР 1. Представим в виде многочлена произведение $\left(5\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$.

Решение. $\left(5\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=5\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-5\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}-4\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}=$
$=5\sqrt{6}+8-30-8\sqrt{6}=-22-3\sqrt{6}$.

Ответ: $-22-3\sqrt{6}$.

ПРИМЕР 2. Разложим на множители выражение $15\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+30-2\sqrt[3]{b}$.

Решение. $15\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+30-2\sqrt[3]{b}=\left(15\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)+\left(30-2\sqrt[3]{b}\right)=$
$=\sqrt[3]{a}\left(15-\sqrt[3]{b}\right)+2\left(15-\sqrt[3]{b}\right)=\left(15-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+2\right)$.

Ответ: $\left(15-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+2\right)$.

При преобразовании иррациональных выражений иногда необходимо извлечь корень n-й степени из выражения, значение которого может быть положительным или отрицательным.

При извлечении корня n-й степени из выражения необходимо использовать следующие правила:

1) если n — четное число, то значение берется со знаком модуля;

2) если n — нечетное число, то значение корня берется без знака модуля.

ПРИМЕР 3. Вычислим значение выражения $\sqrt{34+24\sqrt{2}}+\sqrt{34-24\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что $34+24\sqrt{2}=(4+3\sqrt{2})^2$ и $34-24\sqrt{2}=(4-3\sqrt{2})^2$. Следовательно,

$$\sqrt{34+24\sqrt{2}}+\sqrt{34-24\sqrt{2}}=\sqrt{\left(4+3\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(4-3\sqrt{2}\right)^2}=|4+3\sqrt{2}|+|4-3\sqrt{2}|=$$
$$=4+3\sqrt{2}-4+3\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

Ответ: $6\sqrt{2}$.

Рассмотрим пример на освобождение от иррациональности знаменатель дроби.

ПРИМЕР 4. Освободим от иррациональности знаменатель дроби: 1) $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$; 2) $\frac{6}{3+\sqrt{3}}$.

Решение. 1) В знаменателе дроби $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$ дано число $\sqrt[3]{5}$. Для того чтобы вынести точный корень из третьей степени, необходимо получить под корнем 5^3, а для этого число 5 нужно умножить на 25. Соответственно, числитель и знаменатель дроби умножим на $\sqrt[3]{25}$.

Тогда $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{25}}{5}=3\sqrt[3]{25}$.

2) $\frac{6}{3+\sqrt{3}}$ отличается от первого пункта тем, что в знаменателе дана сумма, в которой одно из слагаемых содержит радикал. В таких случаях принято умножать числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю. В данном примере нужно умножить на $3-\sqrt{3}$.

Тогда $\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\frac{6\cdot(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{6}=3-\sqrt{3}$.

Ответ: 1) $3\sqrt[3]{25}$; 2) $3-\sqrt{3}$.

1. Есть ли отличие в преобразованиях рациональных и иррациональных выражений?

Упражнения

А

7.1. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{20+\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{20-\sqrt{57}}$;

2) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$;

3) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$;

4) $-\frac{\sqrt[3]{\left(4+\sqrt{17}\right)^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}}-\sqrt{17}$.

Вычислите (7.2—7.4):

7.2. 1) $3\sqrt{8}-5\sqrt{18}+12\sqrt{50}$; 2) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt[4]{225}$;

3) $\left(2\sqrt{2}-3\right)^2\cdot\sqrt[6]{8}$; 4) $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{17}+5}$.

7.3. 1) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$; 2) $\dfrac{1}{4+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4-2\sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{3}{6-2\sqrt{6}}+\dfrac{3}{6+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{3}+2+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

7.4. 1) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}-3\sqrt{\dfrac{3}{8}}+4\sqrt{1,5}\right)\cdot 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; 2) $\left(\sqrt{0,75}+3\sqrt{\dfrac{1}{27}}-\sqrt{6,75}\right)\cdot\sqrt{3}$;

3) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{6}}-\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{4,5}\right)\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$; 4) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{125}{27}}-\sqrt[4]{375}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{135}}\right)\cdot\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$.

7.5. Освободите от иррациональности знаменатель дроби:

1) $\dfrac{6}{\sqrt{7}-1}$; 2) $\dfrac{5}{\sqrt{6}+1}$; 3) $\dfrac{2}{x+\sqrt{a}}$; 4) $\dfrac{3}{x-\sqrt{a}}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; 6) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; 7) $\dfrac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$; 8) $\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$.

B

Упростите (7.6—7.7):

7.6. 1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}-1}$;

2) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}:\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}+\sqrt{x}$;

3) $\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{a}\sqrt{b}}+\dfrac{1}{a-\sqrt{a}\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$;

4) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

7.7. 1) $\dfrac{p-q}{\sqrt[3]{p}-\sqrt[3]{q}}-\sqrt[3]{pq}$, $p\neq q$;

2) $\dfrac{\sqrt{p^3}+\sqrt{q^3}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}+\sqrt{pq}$, $p>0$, $q>0$;

3) $\dfrac{\sqrt{ab^2}-a\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}-\sqrt{b^3}+\sqrt{a}$, $a>0$, $b>0$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{ab}}+\sqrt[3]{a^2}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

7.8. Освободите от иррациональности знаменатель дроби:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; 3) $-\frac{7}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$;

4) $\frac{15}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 5) $\frac{6}{2-\sqrt[3]{2}}$; 6) $\frac{32}{3+\sqrt[3]{5}}$;

7) $\frac{1-b}{\sqrt{1-\sqrt{b}}}$, $0 < b < 1$; 8) $\frac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}$, $a > 0$.

7.9. Упростите:

1) $\left(1+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right):\left(1-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$;

2) $\left((a-b)\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+a-b\right)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right)$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Степень, основание и показатель степени, функция, ее свойства и график.

§ 8. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Вы ознакомитесь с понятием степенной функции с действительным показателем; научитесь строить график степенной функции с действительным показателем в зависимости от показателя степени.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, график, степенная функция, показатель степени, действительное число

Можно определить число вида x^{α} для любого действительного α и положительной переменной x.

Определение. *Функция, заданная формулой*

$$f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \in R \qquad (1)$$

называется ***степенной функцией.***

В данном случае за основание взята независимая переменная x, а показатель α — действительное число.

В предыдущих классах вы рассмотрели степенную функцию с натуральным и целым показателями.

Например, при $\alpha = 1$ имеем $y = x$ — линейную функцию, графиком которой являются биссектрисы I и III четверти координатной плоскости (рис. 21), при $\alpha = 3$ получаем $y = x^3$ — кубическую функцию, графиком которой является кубическая парабола (рис. 22).

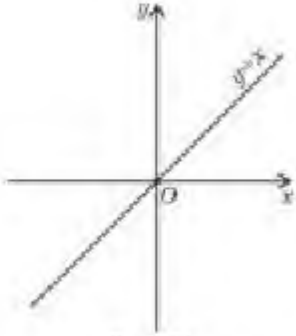


Рис. 21

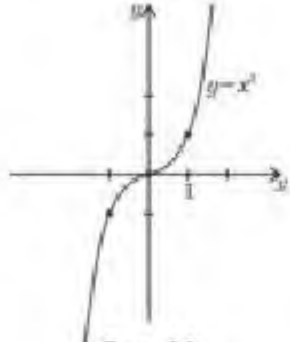


Рис. 22

1. Все функции с натуральным показателем можно представить формулой

$$y = x^n,\ n \in N \tag{2}$$

Следовательно, в примерах были рассмотрены степенные функции с натуральным показателем: $n = 1$ и $n = 3$. Если же в формуле (2) возьмем $n = 0$, то $f(x) = x^0 = 1$. В этом случае графиком функции является прямая, параллельная оси абсцисс, ординаты точек которых равны 1 (рис. 23).

Если в формуле (2) n — четное число (2; 4; 6; 8; ...), тогда графики этих функций являются параболами 2; 4; 6; 8; ... степеней, а если n — нечетное число (3; 5; 7; ...), то графики этих функций являются параболами 3; 5; 7; 9; ... степеней. Графики степенной функции четной степени симметричны относительно оси ординат, а графики степенной функции нечетной степени симметричны относительно начала координат.

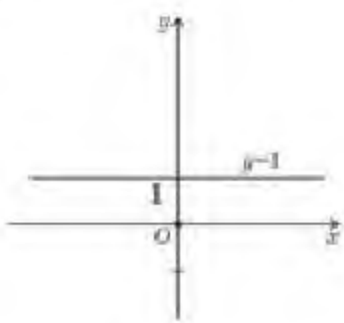


Рис. 23

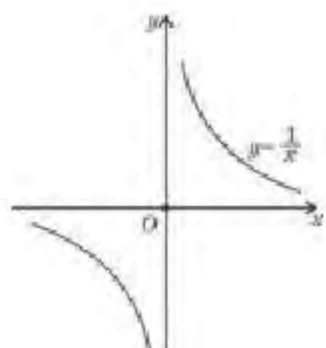


Рис. 24

2. Если в формуле (2) число n заменить на $-n$, то получим степенную функцию с целым отрицательным показателем:

$$y = x^{-n},\ n \in N \tag{3}$$

На рисунке 24 изображен график функции $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, а на рисунке 25 — график функции $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

Может ли множество значений функций $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = \frac{1}{x^3}$ быть одинаковым? Ответ обоснуйте.

Теперь рассмотрим степенную функцию с положительными и отрицательными дробными показателями.

3. Если $\alpha = \frac{m}{n}$, где n, m натуральные взаимно простые числа и $m < n$, то имеем степенную функцию $y = x^{\frac{m}{n}}$ с положительным дробным показателем. График этой функции изображен на рисунке 26.

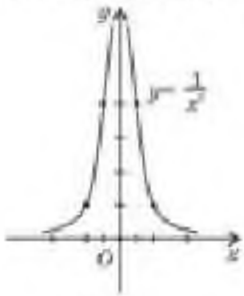


Рис. 25

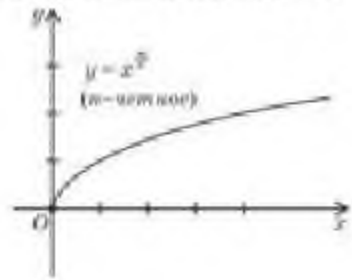


Рис. 26

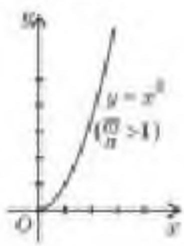


Рис. 27

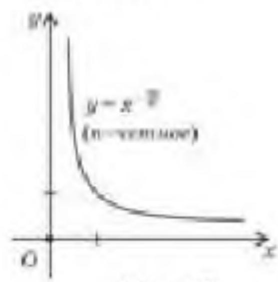


Рис. 28

4. При $\alpha = \frac{m}{n}$, где n, m — натуральные взаимно простые числа и $\frac{m}{n} > 1$, получаем степенную функцию $y = x^{\frac{m}{n}}$ с положительным дробным показателем. График этой функции показан на рисунке 27.

5. Если $\alpha = -\frac{m}{n}$, где n, m — натуральные взаимно простые числа, то имеем степенную функцию $y = x^{-\frac{m}{n}}$ с отрицательным дробным показателем. График функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$ дан на рисунке 28.

Введем понятие *степени с иррациональным показателем.*

Пусть $a > 0$ и α — иррациональное число. Тогда выясним значение числа a с иррациональным показателем α, т. е. числа a^{α}.

Для этого рассмотрим три случая:

1) $a = 1$, тогда $1^{\alpha} = 1$.

2) пусть $a > 1$ и иррациональное число α больше любого рационального числа ($\alpha > r_1$), но меньше любого рационального числа r_2 ($\alpha < r_2$), т. е. $r_1 < \alpha < r_2$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Следовательно, число a^{α} с иррациональным показателем α будет расположено между числами a^{r_1} и a^{r_2}, показателями которых являются любые рациональные числа r_1 и r_2, т. е. $a^{r_1} < a^{\alpha} < a^{r_2}$. Это утверждение выполняется для любого $a > 1$ и любого рационального числа α.

3) Пусть $0 < a < 1$. В этом случае при $r_1 < \alpha$ и $r_2 > \alpha$ получаем $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} > a^{r_2}$. Тогда a^{α} удовлетворяет следующему неравенству: $a^{r_2} < a^{\alpha} < a^{r_1}$. Это утверждение выполняется для любого $0 < a < 1$ и для любого иррационального числа α.

Свойства степени с рациональным показателем выполняются и для степени с иррациональным показателем.

Теперь рассмотрим степенную функцию с действительным показателем

$$y = x^{\alpha},\ \alpha \in R.$$

Если $\alpha > 0$, то степенная функция считается определенной и при $x = 0$, так как $0^{\alpha} = 0$.

Если $\alpha \in Z$, то степенная функция считается определенной при $x > 0$ или $x < 0$. В этом случае функция $y = x^{\alpha}$ будет четной при α четном, нечетной — при α нечетном, поэтому достаточно исследовать функцию $y = x^{\alpha}$ на интервале $(0; +\infty)$.

?

1. Назовите виды степенной функции в зависимости от показателя. Приведите примеры.
2. Охарактеризуйте функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$, графики которых расположены на промежутке $[0; +\infty)$.
3. Чем отличаются области определений функций $y = x^{-2,5}$ и $y = x^{2,5}$? Ответ обоснуйте.

Упражнение

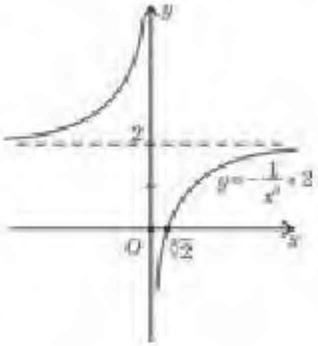
А

Постройте схематически графики функции $y = f(x)$ (**8.1—8.2**):

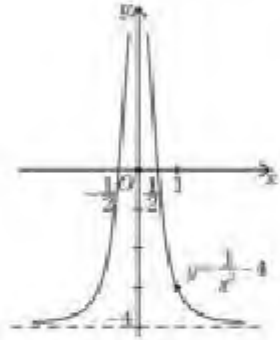
8.1. 1) $f(x) = x^6$; 2) $f(x) = x^{-5}$; 3) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$.

8.2. 1) $f(x) = x^{\pi}$; 3) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$; 2) $f(x) = x^{-\pi}$; 4) $f(x) = (3x)^{\frac{1}{3}}$.

8.3. Перечислите свойства функции $y = f(x)$ по данному графику (рис. 29):



1)



2)

Рис. 29

B

8.4. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 3$; 2) $f(x) = x^{4,5} + 2$;

3) $f(x) = x^{-2,5} + 2$; 4) $f(x) = -\frac{1}{x^3} + 4$.

8.5. Определите множество значений функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 5$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^4} + 3,5$;

3) $f(x) = x^{3,7} - 2$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{7}$.

Используя простейшие преобразования графиков функций постройте графики функции $y = f(x)$ (**8.6—8.7**):

8.6. 1) $f(x) = -\frac{1}{x^3}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^6} + 3,5$;

3) $f(x) = x^{0,5} - 2$; 4) $f(x) = 3 + 2x^{0,5}$.

8.7. 1) $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} + 4$; 2) $f(x) = -\frac{3}{(x+2)^3} + 1,5$;

3) $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{4}} - 2,5$; 4) $f(x) = (x+1)^{-\frac{3}{4}} + 3,5$.

8.8. Графическим способом найдите, сколько корней имеет уравнение:

1) $\frac{1}{x^2} = 4,5$; 2) $x^2 - x^{3,7} = 0$; 3) $\frac{1}{x^3} = x^4$; 4) $\sqrt{x} = -\frac{1}{x^2}$.

8.9. Решите систему неравенств графическим способом:

1) $\begin{cases} y > x^2, \\ y \leqslant x + 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \geqslant -x^2, \\ y < -x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y < x^3, \\ y \geqslant x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leqslant x^5, \\ y > -x^4. \end{cases}$

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Степенная функция, производная и первообразная функции и их свойства.

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

Вы научитесь применять правила нахождения производной степенной функции с действительным показателем.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, степенная функция, производная, первообразная, интеграл

ВЫ ЗНАЕТЕ:

Производные функций $f(x) = x^n$ ($n \in Z$) и $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$), соответственно, равны: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ и $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Теперь введем формулу вычисления производной функции $f(x) = x^{\alpha}$, $x \neq 0$, где α — любое действительное число.

Теорема. *Если $x > 0$ и α — любое действительное число, то производная степенной функции $f(x) = x^{\alpha}$ находится по формуле*

$$f'(x) = (x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}. \qquad (1)$$

Доказательство. Используем алгоритм нахождения производной по определению, данный в 10 классе:

1) придадим x приращение Δx, т. е. $x + \Delta x$;

2) определим приращение функции соответственно приращению аргумента:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha} = x^{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right];$$

3) найдем отношение приращения функции к приращению аргумента: $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = x^{\alpha} \cdot \dfrac{\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\Delta x} = x^{\alpha} \cdot \dfrac{\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} =$

$$= x^{\alpha-1} \cdot \frac{\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\frac{\Delta x}{x}};$$

4) найдем предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$.

Тогда при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \to \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, т. е.

$$f'(x) = (x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

В данном случае для любого действительного числа α при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}} \to \alpha.$

Докажем, что для $\alpha = \frac{1}{2}$ при $\Delta x \to 0$ имеет место следующее равенство $\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{2}.$

Доказательство. Сначала освободим числитель дроби от иррациональности. Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на выражение, сопряженное числителю:

$$\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]}{\frac{\Delta x}{x}\cdot\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]} = \frac{1+\frac{\Delta x}{x}-1}{\frac{\Delta x}{x}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1}.$$

Значение последней дроби при $\Delta x \to 0$ будет равно $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Самостоятельно докажите, что при $\Delta x \to 0$ для $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ выполняется равенство $\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha.$

ПРИМЕР **1.** Найдем производные функции $f(x)$:

1) $f(x) = 11x^{-\frac{3}{11}} + x^{\sqrt{6}}$; 2) $f(x) = \sqrt[5]{3x-1} - 5x^{0,75}$.

Решение. Используем правила вычисления производных и формулу:

1) $f'(x) = (11x^{-\frac{3}{11}} + x^{\sqrt{6}})' = 11 \cdot \left(-\frac{3}{11}\right) \cdot x^{-\frac{3}{11}-1} + \sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1} = -3x^{-\frac{14}{11}} + \sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1}$;

2) $f'(x) = (\sqrt[5]{3x-1} - 5x^{0,75})' = ((3x-1)^{\frac{1}{5}} - 5x^{0,75})' = \frac{1}{5}(3x-1)^{-\frac{4}{5}} \cdot 3 - 5 \times$ $\times\, 0,75x^{-0,25} = \frac{3}{5}(3x-1)^{-\frac{4}{5}} - 3,75x^{-\frac{1}{4}}$.

Ответ: 1) $-3x^{-\frac{14}{11}} + \sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1}$; 2) $\frac{3}{5}(3x-1)^{-\frac{4}{5}} - 3,75x^{-\frac{1}{4}}$.

! Вы научитесь находить интеграл от степенной функции с действительным показателем.

Теперь введем формулу вычисления первообразной степенной функции.

Теорема. *При* $\alpha \neq -1$ *общий вид первообразных степенной функции* $y = x^{\alpha}$ *находится по формуле*

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C. \qquad (2)$$

Доказательство. Для этого нужно показать, что функция $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ является первообразной для функции $f(x) = x^{\alpha}$. Используем определение первообразной. Тогда

$$F'(x) = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (x^{\alpha+1})' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1)\, x^{\alpha+1-1} = x^{\alpha} = f(x).$$

ПРИМЕР **2.** Найдем неопределенные интегралы:

1) $\int x^3\,dx$; 2) $\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx$; 3) $\int x^{\frac{5}{4}}\,dx$.

Решение. Используем формулу (2).

1) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$; 2) $\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$;

3) $\int x^{\frac{5}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C$.

Ответ: 1) $\frac{x^4}{4} + C$; 2) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$; 3) $\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C$.

ПРИМЕР 3. Вычислим интегралы:

1) $\int\limits_2^5 x^2 dx$; 2) $\int\limits_1^9 x^{\frac{3}{2}} dx$.

Решение. 1) $\int\limits_2^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$;

2) $\int\limits_1^9 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Big|_1^9 = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\Big|_1^9 = \frac{2\cdot 9^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2\cdot 1}{5} = \frac{2}{5}\ (243 - 1) = \frac{484}{5} = 96{,}8.$

Ответ: 1) 39; 2) 96,8.

ПРИМЕР 4. Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt[4]{x}$ и прямыми $y = 1$, $x = 1$, $x = 16$.

Решение. На рисунке 30 дано изображение плоской фигуры, ограниченной данными линиями. Используем формулу вычисления площади плоской фигуры:

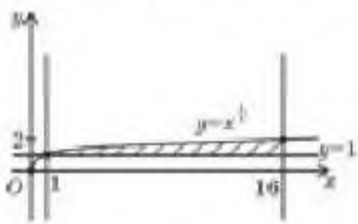


Рис. 30

$$S_ф = \int\limits_1^{16} (\sqrt[4]{x} - 1)dx = \int\limits_1^{16} (x^{\frac{1}{4}} - 1)dx = \left(\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} - x\right)\Bigg|_1^{16} = \left(\frac{4}{5}\cdot 16^{\frac{5}{4}} - 16\right) - \left(\frac{4}{5} - 1\right) =$$

$= 9{,}6 + 0{,}2 = 9{,}8.$

Ответ: 9,8 кв. ед.

?

1. Верно ли утверждение, что если $f(x) = x^{-n}$ $(n \in N)$, то $f'(x)$ определена на R? Ответ обоснуйте.
2. В какой точке нельзя найти первообразную функции $y = x^{-n}$ $(n \in N)$? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

Найдите производную функции $y = f(x)$ **(9.1—9.2)**:

9.1. 1) $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$; 2) $f(x) = x^{-\frac{3}{7}}$; 3) $f(x) = x^{\sqrt{5}}$; 4) $f(x) = x^{-1+\sqrt{3}}$.

9.2. 1) $f(x) = x^{1,4}$; 2) $f(x) = x^{-3,5}$; 3) $f(x) = x^{\pi}$; 4) $f(x) = x^{-\pi}$.

9.3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке $N(a;\ b)$:

1) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $N\left(\frac{1}{27};\ 3\right)$; 2) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} + x$, $N(1;\ 2)$;

3) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, $N(1;\ 1)$; 4) $f(x) = x^{-3} + 3x^{\frac{2}{3}}$, $N(1;\ 4)$.

9.4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $[1;\ 4]$; 2) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $[1;\ 8]$;

3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $[-8;\ -1]$; 4) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$, $[1;\ 16]$.

9.5. Напишите общий вид первообразных функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^{3\sqrt{2}}$; 2) $f(x) = -2x^{-\pi}$;

3) $f(x) = \frac{1}{4}x^{-4}$; 4) $f(x) = 0,5x^{-0,5}$.

9.6. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_1^8 x^{-\frac{1}{3}}dx$; 2) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$;

3) $\int\limits_{16}^{81} 4x^{-\frac{1}{4}}dx$; 4) $\int\limits_1^{32} 6x^{\frac{1}{5}}dx$.

9.7. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

2) $y = \frac{1}{x^6}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;

3) $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $x = 1$, $x = 8$, $y = 0$;

4) $y = \frac{1}{x^4}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

B

9.8. Найдите производную функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x^{\sqrt{5}} + x^{2,5} + 10$; 2) $f(x) = x^{\sqrt{3}-2} - x^{-\frac{1}{8}} - 5,8$;

3) $f(x) = x^{-\frac{5}{6}} + (x-2)^{\sqrt{2}}$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{8}} - (1+x^2)^{-\frac{5}{4}}$.

9.9. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке $N(a;\ b)$:

1) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, $N\left(\frac{1}{8};\ 2\right)$;   2) $f(x) = x^{-\frac{1}{4}} + 2x$, $N(1;\ 3)$;

3) $f(x)=x^{-\frac{4}{3}}$, $N(-1;\ 1)$;   4) $f(x) = x^3 - 3x^{\frac{2}{3}}$, $N(-1;\ -4)$.

9.10. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на $[a;\ b]$:

1) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $[1;\ 9]$;   2) $f(x) = x^{-5}$, $[2;\ 3]$;

3) $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}$, $[8;\ 27]$;   4) $f(x)=x^{-\frac{1}{4}}$, $[1;\ 16]$.

9.11. Напишите общий вид первообразных функции $y = f(x)$:

1) $f(x)=x^{-1+\sqrt{5}} + x^{2,5}$;   3) $f(x)=x^{3+\sqrt{2}}+\sqrt[4]{x^3}$;

2) $f(x)=-2x^{-53}+\sqrt{x}$;   4) $f(x) = 5x^{-\sqrt{6}-1}-\sqrt[5]{x^2}$.

Вычислите интегралы (9.12—9.13):

9.12. 1) $\int\limits_0^7 (x+1)^{-\frac{2}{3}}\,dx$;   2) $\int\limits_{-4}^{3} \frac{dx}{(5+x)^{\frac{1}{3}}}$.

9.13. 1) $\int\limits_0^5 5(1+3x)^{-0,75}\,dx$;   2) $\int\limits_0^{155} 0,4\,(1+0,2x)^{-0,6}dx$.

9.14. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^{-2}$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 1$;
2) $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$;
3) $y = x^{-3}$, $x = -4$, $x = -1$, $y = -1$;
4) $y = -x^3$, $x = -3$, $x = -2$, $y = 2$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНОМ-МАТЕМАТИКЕ

9.15. Швейцарский математик Иоганн Бернулли вывел формулу для определенного интеграла от функции x^{α}.

И. Бернулли
(1667—1748)

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите значение выражения $\sqrt{0{,}64}+\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}+\sqrt[4]{16}$:

A) 5,3; B) 0,3; C) 2,8; D) 3.

2. Возведите во вторую степень выражение $a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{4}}$:

A) $a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}+2b^{\frac{1}{2}}$; B) $a+4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}+4b^{\frac{1}{2}}$;

C) $a+4b^{\frac{1}{2}}$; D) $a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}+4b^{\frac{1}{2}}$.

3. Вычислите $\sqrt[5]{2^3\cdot3^2}\cdot\sqrt[5]{2^7\cdot3^3}$:

A) 56; B) 18; C) 12; D) 36.

4. При каком значении a верно равенство $\left(a^8\right)^{\frac{1}{4}}=a^2$:

A) a — положительное число; B) a — любое число;
C) такое значение не существует; D) a — неотрицательное число?

5. Назовите два последовательных целых числа, между которыми расположено выражение $12^{\frac{1}{4}}$:

A) 1 и 2; B) 2 и 3; C) 3 и 4; D) 4 и 5.

6. Упростите выражение $\left(\sqrt[4]{x}-2\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{y}\right)+4\sqrt[8]{y^7}:\sqrt[8]{y^3}$:

A) $x^{\frac{1}{2}}$; B) $x^{\frac{1}{2}}-8y^{\frac{1}{2}}$; C) $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$; D) $8y^{\frac{1}{2}}$.

7. Чему равно значение выражения $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$:

A) 1; B) $\frac{2}{9}$; C) 0,5; D) $\frac{1}{3}$?

8. Вычислите значение выражения $\sqrt[4]{625c^4}+\sqrt[5]{32c^5}+\sqrt{36c^2}$ при $c=\frac{1}{13}$:

A) 13; B) –13; C) –1; D) 1.

9. Сократите дробь $\frac{a-b}{a^{0,5}b^{0,5}-b}$:

A) $\frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{b^{0,5}}$; B) $\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{b^{0,5}}$; C) $\frac{a^{0,5}}{b}$; D) $\frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{b}$.

10. Вынесите множитель из-под корня $\sqrt[3]{54a^5b^7c^3}$:

A) $54abc\sqrt[3]{a^2b}$; B) $3abc\sqrt[3]{ab^2}$;

C) $3ab^2c\sqrt[3]{2a^2b}$; D) $3abc\sqrt[3]{54a^2b}$.

11. Освободите знаменатель дроби $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{b}}$ от иррациональности:

A) $\frac{\sqrt{5}}{5-b}$; B) $\frac{25+b}{5-b}$; C) $\frac{5+\sqrt{5b}}{5-b}$; D) $\frac{25-\sqrt{5b}}{5+b}$.

12. Сколько корней имеет уравнение $x^4 - 16 = 0$:

A) один корень; B) два корня;
C) бесчисленное множество; D) четыре корня?

13. Упростите $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}$:

A) $\frac{2}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$; B) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$; C) 1; D) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}+2}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$.

14. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^{\frac{1}{4}}$ в точке с абсциссой $x = 1$:

A) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$; B) $y = x - \frac{1}{4}$;
C) $y = \frac{1}{4}x + 2$; D) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

15. Вычислите интеграл $\int_0^1 \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} dx$:

A) 1; B) $\frac{25}{16}$; C) $-\frac{25}{16}$; D) -1.

16. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$:

A) $\frac{8}{3}$; B) $\frac{3}{16}$; C) $\frac{16}{3}$; D) $\frac{2}{3}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Уравнение, корень уравнения, область определения, тождественные преобразования выражений, равносильные уравнения, корень n-й степени и его свойства.

§ 10. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вы ознакомитесь с понятием иррационального уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, иррациональное уравнение, область допустимых значений переменной, посторонний корень, решение уравнения

ВСПОМНИТЕ

Заполните таблицу:

Таблица 3

	Название уравнения	Решение уравнения
$2x + 3 = -10$		
$x^2 + 2x - 3 = 0$		
$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$		
$\frac{5 + x}{x - 6} = 0$		

Заполняя таблицу, вспомнили пути решения рациональных уравнений. Теперь перейдем к понятию иррационального уравнения.

Чем отличаются уравнения $\sqrt{x} = 4$, $10 - \sqrt{x} = 4$, $10 - x^{\frac{1}{3}} = 4$ от выше рассмотренных уравнений?

Эти уравнения являются примерами иррациональных уравнений.

Определение. ***Иррациональным уравнением*** *называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня или в основании степени с дробным показателем.*

ПРИМЕР

1. $x + \sqrt{3x + 7} = 0$, $6 + x^{\frac{1}{3}} = 0$, $\sqrt[4]{x} = 16$, $2 - \sqrt[5]{x} = 1$ — иррациональные уравнения. В первом, во втором и в четвертом уравнении переменная находится под знаком корня, а во втором уравнении переменная является основанием степени с дробным показателем.

Наряду с этим, в первом и третьем уравнениях показателем корня является четное число, а в четвертом уравнении показатель — нечетное число.

вы знаете: Выражение под корнем с четным показателем имеет смысл при неотрицательном значении переменных.

Следовательно, при решении иррациональных уравнений, содержащих корень с четным показателем, учитывается понятие арифметического квадратного корня и находятся допустимые значения переменных.

Почему решением иррационального уравнения $\sqrt[4]{x} = -16$ является пустое множество?

ПРИМЕР

2. Учитывая, что в иррациональном уравнении $\sqrt{2x+3} = x$ дан корень с четным показателем, нужно найти допустимые значения переменной.

Следовательно, нахождение допустимых значений переменной является составной частью решения иррациональных уравнений.

Вы расширите знания по нахождению области допустимых значений переменной.

ПРИМЕР

3. Найдем допустимые значения переменной в уравнении $\sqrt{2x+3} = x$.

Решение. Учитывая, что в иррациональном уравнении дан корень с четным показателем, запишем следующую систему неравенств $\begin{cases} 2x+3 > 0, \\ x > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > -1{,}5, \\ x > 0. \end{cases}$ Решением системы неравенств является промежуток $[0; +\infty)$ (рис. 31).

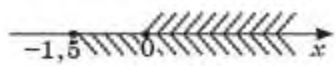


Рис. 31

Ответ: $[0; +\infty)$.

ПРИМЕР

4. Найдем допустимые значения переменной в уравнении $\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 0$.

Решение. Учитывая, что в иррациональном уравнении даны квадратные корни, запишем следующую систему неравенств $\begin{cases} 2x+3 > 0, \\ 4-x > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geq -1{,}5, \\ x \leq 4. \end{cases}$ Решением системы неравенств является промежуток $[-1{,}5; 4]$ (рис. 32).

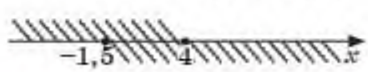


Рис. 32

Ответ: $[-1{,}5; 4]$.

Допустимыми значениями переменной в иррациональном уравнении $\sqrt{2x-1} + \sqrt{-4-x} = 0$ является пустое множество. Рассмотрите самостоятельно.

Решить иррациональное уравнение — значит надо найти множество его решений.

ПРИМЕР 5. Являются ли числа 3 и −1 корнями $\sqrt{2x+3}=x$ иррационального уравнения?

Решение. Чтобы ответить на вопрос, подставим вместо x эти числа $\sqrt{2\cdot 3+3}=3$. Равенство верно, а $\sqrt{2\cdot(-1)+3}=-1$ равенство не верно. С помощью проверки убеждаемся, что число 3 является корнем иррационального уравнения, а число −1 будет посторонним корнем.

Ответ: 3 является корнем, −1 — посторонний корень.

1. Чем отличается иррациональное уравнение от рационального уравнения?
2. В чем сходство иррационального и рационального уравнений?

Упражнения

А

10.1. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x-5}$; 2) $\sqrt[4]{7-x}$; 3) $\sqrt[3]{x+16}$; 4) $\sqrt[5]{11-x}$?

10.2. Найдите допустимые значения переменной:

1) $\sqrt{x^2-8x}$; 2) $\sqrt[3]{x^2-25}$; 3) $\sqrt{6x+x^2}+x$; 4) $x+\sqrt{4x^2-49}$.

10.3. Составьте иррациональное уравнение, корнем которого является число:

1) $x=5$; 2) $x=-6$; 3) $x=-0{,}2$; 4) $x=2{,}3$.

10.4. Найдите множество, которому принадлежит решение иррационального уравнения:

1) $\sqrt{x+4}=x$; 2) $\sqrt{23-x}=x$; 3) $\sqrt{x^2-1}=2x$; 4) $\sqrt{5x+x^2}=3x$.

10.5. Является ли данное число (числа) корнем (корнями) иррационального уравнения:

1) $\sqrt{x-5}=3$ и $x=14$; 2) $\sqrt[3]{7-x}=0$ и $x=-20$;

3) $\sqrt{2x+24}=0$ и $x=-4$, $x=6$; 4) $\sqrt{3x+2}=x$ и $x=2$, $x=1$?

В

10.6. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x+4}+\sqrt{5-x}$; 2) $\sqrt{10-2x}+\sqrt{49+7x}$;

3) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x-2}$; 4) $\sqrt{4+x}+\sqrt{16-x^2}$?

10.7. Найдите допустимые значения переменной:

1) $\sqrt{\dfrac{x+1}{15-x}}+x$; 2) $\sqrt{\dfrac{x-7}{8-x}}-x$;

3) $\sqrt{\dfrac{x}{x^2-36}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{4-x^2}{x+1}}$.

10.8. Являются ли данные числа корнями иррационального уравнения:

1) $\sqrt{6x-x^2}=x$ и $x=0$, $x=-3$;

2) $\sqrt{14-20x-x^2}=x$ и $x=2$, $x=5$?

§ 11. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вы научитесь решать иррациональные уравнения методом возведения обеих частей уравнения в n-ю степень.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Иррациональное уравнение, корень уравнения, методы решения уравнений

При решении иррациональных уравнений применяются следующие методы:

1) возведение обеих частей уравнения в одинаковую степень;

2) введение новой переменной.

Рассмотрим каждый способ по отдельности.

I. *Метод возведения обеих частей уравнения в одинаковую степень.*

АЛГОРИТМ Для решения иррационального уравнения данным способом используется следующий алгоритм:

1) преобразовывая данное иррациональное уравнение, приводим его к виду $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$;

2) возводим обе части уравнения в n-ю степень $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n=(g(x))^n$ и получим уравнение вида $f(x)=g^n(x)$, метод решения которого известен;

3) решаем последнее уравнение, затем делаем проверку, подставляя значения его корней в данное уравнение. Значения корней, удовлетворяющих данному уравнению, берем в качестве решения.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение $x+\sqrt{3x+7}=7$.

Решение. Переносим x в правую часть равенства и получим: $\sqrt{3x+7}=7-x$. Теперь обе части уравнения возводим в квадрат $\left(\sqrt{3x+7}\right)^2=(7-x)^2$. Отсюда $3x+7=49-$ $-14x+x^2$, или $x^2-17x+42=0$. Корни последнего уравнения: $x_1=3$ и $x_2=14$. Для проверки найденные значения x подставим в данное иррациональное уравнение:

1) $x_1 = 3$, тогда $3 + \sqrt{3 \cdot 3 + 7} = 7$; $3 + \sqrt{16} = 7$; $3 + 4 = 7$; $7 = 7$.
Первый корень удовлетворяет уравнению.
2) $x_2 = 14$, тогда $14 + \sqrt{3 \cdot 14 + 7} = 7$; $14 + \sqrt{49} = 7$; $14 + 7 = 7$; $21 \neq 7$. Второй корень не удовлетворяет данному иррациональному уравнению. Следовательно, $x_2 = 14$ — посторонний корень.

Ответ: 3.

ПРИМЕР 2. Найдем корни уравнения $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$.

Решение. Данное уравнение запишем в виде: $\sqrt{2x+6} = 6 - \sqrt{x-1}$.

Возведем в квадрат обе части этого уравнения: $\left(\sqrt{2x+6}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{x-1}\right)^2$, $2x + 6 = 36 - 12\sqrt{x-1} + x - 1$. После приведения подобных членов и уединения корня, получим уравнение $12\sqrt{x-1} = 29 - x$. Это иррациональное уравнение еще раз возведем во вторую степень. Тогда $144(x-1) = (29-x)^2$, $144x - 144 = 841 - 58x + x^2$; $x^2 - 202x + 985 = 0$. Корни последнего уравнения: $x_1 = 5$, $x_2 = 197$.
Произведя проверку выясняем, что $x_1 = 5$ является корнем данного уравнения, а $x_2 = 197$ — посторонний корень.

Ответ: 5.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6x-11}$.

Решение. Данное уравнение отличается от предыдущих уравнений тем, что в него входит несколько слагаемых со знаком радикала. Поэтому, не преобразовывая данное уравнение, возведем в квадрат обе его части.

Тогда

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3})^2 = (\sqrt{6x-11})^2;$$
$$x - 2 + 2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} + x + 3 = 6x - 11;$$
$$2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} = 4x - 12 \text{ или } \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} = 2x - 6.$$

Полученное иррациональное уравнение еще раз возведем в квадрат: $(x-2)(x+3) = (2x-6)^2$ или $3x^2 - 25x + 42 = 0$, его корнями являются числа $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 6$.

Проверка. Подставим $x_1 = \frac{7}{3}$ в уравнение $\sqrt{\frac{7}{3} - 2} + \sqrt{\frac{7}{3} + 3} = \sqrt{6 \cdot \frac{7}{3} - 11}$; вычисляя подкоренные выражения, получим $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{16}{3}} \neq \sqrt{3}$. Следовательно, $x_1 = \frac{7}{3}$ — посторонний корень. Теперь проверим для $x_2 = 6$. Тогда $\sqrt{6-2} + \sqrt{6+3} = \sqrt{6 \cdot 6 - 11}$; $2 + 3 = 5$; $5 \equiv 5$. Таким образом, корнем иррационального уравнения является число 6.

Ответ: 6.

Вы научитесь решать иррациональные уравнения методом замены переменной.

II. *Метод введения новой переменной.*

ПРИМЕР 4. Найдем корни уравнения $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}+\sqrt{\frac{2x+3}{3x-2}}=2{,}5$.

Решение. Для решения введем обозначение: $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=t>0$.

Тогда $\sqrt{\frac{2x+3}{3x-2}}=\frac{1}{t}$. Данное иррациональное уравнение примет вид: $t+\frac{1}{t}=2{,}5$. Полученное дробно-рациональное уравнение приведем к квадратному уравнению: $t^2-2{,}5t+1=0$. Его корни: $t_1=2$; $t_2=\frac{1}{2}$. Переходя к замене получим следующие иррациональные уравнения: $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=2$ и $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=\frac{1}{2}$. Найдем корни иррациональных уравнений:

1) возведя обе части уравнения $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=2$ в квадрат, имеем: $\frac{3x-2}{2x+3}=4$ или $3x-2=8x+12$, $x=-2{,}8$.

2) обе части уравнения $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=\frac{1}{2}$ возведем во вторую степень. Тогда $\frac{3x-2}{2x+3}=\frac{1}{4}$ или $12x-8=2x+3$, отсюда $x=1{,}1$.

Проверка. Подставим $x=-2{,}8$. Тогда $\sqrt{\frac{3\cdot(-2{,}8)-2}{2\cdot(-2{,}8)+3}}+\sqrt{\frac{2\cdot(-2{,}8)+3}{3\cdot(-2{,}8)-2}}=\sqrt{\frac{-8{,}4-2}{-5{,}6+3}}+$ $+\sqrt{\frac{-5{,}6+3}{-8{,}4-2}}=\sqrt{4}+\sqrt{\frac{1}{4}}=2+\frac{1}{2}=2{,}5$.
$x=-2{,}8$ удовлетворяет данному иррациональному уравнению.

Теперь проверим для $x=1{,}1$. Тогда $\sqrt{\frac{3\cdot1{,}1-2}{2\cdot1{,}1+3}}+\sqrt{\frac{2\cdot1{,}1+3}{3\cdot1{,}1-2}}=\sqrt{\frac{1{,}3}{5{,}2}}+\sqrt{\frac{5{,}2}{1{,}3}}=\frac{1}{2}+$ $+2=2{,}5$. $x=1{,}1$ также удовлетворяет данному иррациональному уравнению.

Ответ: 1,1; –2,8.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение $\sqrt[5]{(x-2)^2}-\sqrt[5]{x-2}=2$.

Решение. Используем метод введения новой переменной. Для этого возьмем $\sqrt[5]{x-2}=u$, тогда $\sqrt[5]{(x-2)^2}=u^2$. Данное иррациональное уравнение примет вид $u^2-u-2=0$, его корни: $u_1=-1$; $u_2=2$. Таким образом, имеем иррациональные уравнения $\sqrt[5]{x-2}=-1$ и $\sqrt[5]{x-2}=2$. Решим каждое полученное уравнение:

1) возведем обе части уравнения $\sqrt[5]{x-2}=-1$ в пятую степень: $\left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5=(-1)^5$, отсюда $x-2=-1$ или $x_1=1$;

2) уравнение $\sqrt[5]{x-2}=2$ также возводим в пятую степень: $\left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5=2^5$, $x-2=2^5$, отсюда $x-2=32$, $x_2=34$. С помощью проверки устанавливаем, что $x_1=1$ и $x_2=34$ удовлетворяют искомому уравнению.

Ответ: 1; 34.

Во всех рассмотренных примерах была произведена проверка. Иногда при решении иррациональных уравнений можно найти область допустимых значений переменной. Затем достаточно провести проверку только для тех значений переменной, которые входят в найденную область. Значения, не принадлежащие этому множеству, будут посторонними корнями.

ПРИМЕР

6. Решим уравнение $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$.

Решение. Вначале определим область допустимых значений переменной x. Так как каждый радикал является квадратным корнем, получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x+1 > 0, \\ x-3 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ x > 3, \\ x > 0. \end{cases}$$

Изображая решение каждого неравенства системы отдельно на координатной прямой, найдем пересечение числовых промежутков (рис. 33). Следовательно, областью допустимых значений переменной x является промежуток $[3; +\infty)$. Таким образом, корни данного иррационального уравнения должны быть из промежутка $[3; +\infty)$. Теперь решаем данное иррациональное уравнение

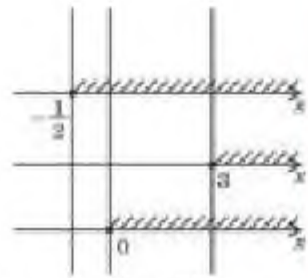


Рис. 33

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}.$$

Для этого обе части уравнения возведем в квадрат: $\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3}\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\right)^2$.

Отсюда $2x + 1 + 2\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{x-3} + x - 3 = 4x$, или $2 \cdot \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{x-3} = x + 2$.

Последнее уравнение еще раз возводим в квадрат: $4(2x + 1)(x - 3) = x^2 + 4x + 4$, или $8x^2 + 4x - 24x - 12 = x^2 + 4x + 4$, или $7x^2 - 24x - 16 = 0$, корни $x_1 = 4$; $x_2 = -\frac{4}{7}$.

$x_1 = 4$ входит в область допустимых значений. Следовательно, для этого значения проводим проверку и выясняем, что $x_1 = 4$ является корнем, а $x_2 = -\frac{4}{7}$ не входит в область допустимых значений, поэтому, не произведя проверку, можно сказать, что это посторонний корень.

Ответ: 4.

?

1. Почему при решении иррациональных уравнений появляются посторонние корни?
2. Обязательно ли проводить проверку для корней иррационального уравнения? Ответ обоснуйте.
3. Как определяются посторонние корни иррационального уравнения в случае, когда известно множество допустимых значений?

Упражнения

А

Решите уравнения (11.1—11.4):

11.1. 1) $\sqrt{x+2}=4$; 2) $\sqrt{x^3-28}=6$;

3) $\sqrt[3]{3-x^2}=-1$; 4) $\sqrt[4]{x^3-11}=2$.

11.2. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{4x-3}=x$;

3) $\sqrt[3]{1-x^3}=1-x$; 4) $\sqrt[4]{x^4+x^2-1}=x$.

11.3. 1) $x+\sqrt{x+3}=3$; 2) $\sqrt{2x+18}-5=x$;

3) $\sqrt[3]{x^3-8}+2=x$; 4) $\sqrt[3]{4x+3x^2}=x$.

11.4. 1) $\sqrt{3x+4}=2-x$; 2) $\sqrt{2x^2-3x+2}=2x-2$;

3) $\sqrt{7-3x}=1-x$; 4) $\sqrt{2x^2-5x+4}=2x+2$.

В

Решите уравнения (11.5—11.9):

11.5. 1) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$; 2) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+1}=2$;

3) $x-1+\sqrt{x-1}=2$; 4) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$.

11.6. 1) $\sqrt{(4x+5)(3x-2)}=4x+5$; 2) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$;

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$; 4) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$.

11.7. 1) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$;

3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$; 4) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+2}$.

11.8. 1) $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=5$; 2) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$;

3) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$; 4) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$.

11.9. 1) $\sqrt{\dfrac{3x-5}{3x+5}}+\left(\dfrac{3}{4}x+2\right)\cdot\sqrt{9x^2-25}=0$;

2) $\sqrt{\dfrac{6x-5}{6x+5}}+(3x+4)\cdot\sqrt{36x^2-25}=0$;

3) $\dfrac{2}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{\dfrac{x+6}{x+3}}$;

4) $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{2x+1}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt{x^2 - 8x}$:

A) $(0; 8)$; B) $[0; 8]$; C) $(-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$;

D) $(-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$; E) $(0; 8]$?

2. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\sqrt{64 - x^2}$:

A) $(-8; 8)$; B) $[-8; 8]$; C) $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$;

D) $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$; E) $(-8; 8]$.

3. Найдите область определения функции $y = 2 - \sqrt{x^2 + 3}$:

A) $(-\infty; -3)$; B) $[-\infty; \sqrt{3}]$; C) любое число; D) $[\sqrt{3}; +\infty)$.

4. Решите уравнение $\sqrt{x - 4} = 7$:

A) 0; B) 49; C) 50; D) 53.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x + 3} = x$:

A) -3; B) 1; C) 3; D) -1?

6. Решите уравнение $\sqrt{3x - 5} = x - 3$:

A) 2,7; B) 7; C) 2; D) не имеет решения.

7. Найдите корни уравнения $\sqrt{x + 4} = \sqrt{5 - x}$:

A) 4,5; B) $-4,5$; C) $-0,5$; D) 0,5; E) не имеет решения.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, ее свойства и график, предел функции, производная функции, степень, основание и показатель степени, непрерывность.

ГЛАВА IV ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 12. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Вы ознакомитесь с определением показательной функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, график функции, показательная функция, область определения, множество значений, свойства функции

Определение. *Функция, заданная формулой*

$$y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1, \qquad (1)$$

*называется **показательной функцией**.*

Здесь a — основание показательной функции, x — показатель этой функции.

Перечислим основные свойства показательной функции:

1) область определения — множество действительных чисел, т. е. $x \in R$;

2) множество значений — множество всех положительных действительных чисел, т. е. $y \in R_+$;

3) при $a > 1$ функция возрастает, при $0 < a < 1$ функция убывает;

4) во множестве действительных чисел, т. е. при $x \in R$ функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ непрерывна;

5) при любом $a > 0$ имеем $a^0 = 1$, т. е. график функции $y = a^x$ проходит через точку с координатами (0; 1).

Для любых действительных значений x и y выполняются следующие равенства:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\ (ab)^x = a^x \cdot b^x;\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};\ (a^x)^y = a^{xy}.$$

Приведем доказательства вышеуказанных свойств.

Доказательство.

1) При $a > 0$ можно вычислить значение a^x для любого x, т. е. областью определения является множество всех действительных чисел;

2) для любого действительного числа x значение функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ будет положительным числом. Следовательно, множеством значений функции $y = a^x$ является множество всех положительных действительных чисел;

3) возьмем любые два числа x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ на оси Ox. Соответствующие им значения функции будут $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$

При $a > 1$ меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, а большему значению аргумента — большее значение функции, т. е. $a^{x_1} < a^{x_2}$. Это неравенство справедливо для любых двух точек области определения функции. Следовательно, при $a > 1$ функция $y = a^x$ на всей области определения — возрастающая функция.

При $0 < a < 1$ меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции, а большему значению аргумента — меньшее значение функции, т. е. $a^{x_1} > a^{x_2}$. Таким образом, при $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ на всей области определения — убывающая функция.

Вы научитесь строить график показательной функции.

В качестве примера рассмотрим графики функций $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

I. Для построения графика функции $y = 3^x$ составим следующую таблицу:

Таблица 4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

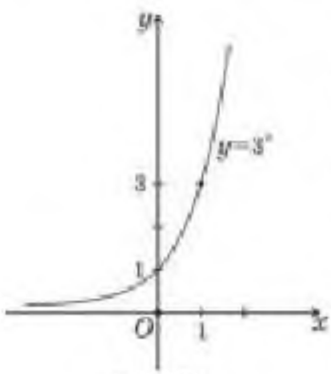


Рис. 34

Отметим точки $\left(-3; \frac{1}{27}\right)$, $\left(-2; \frac{1}{9}\right)$, $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$, $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 9)$, $(3; 27)$ на координатной плоскости, затем, соединяя их плавной линией, получим график функции $y = 3^x$ (рис. 34). По графику видно, что данная функция на всей области определения является возрастающей функцией.

II. Для построения графика функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ составим следующую таблицу:

Таблица 5

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

Отметим точки $(-3; 27)$, $(-2; 9)$, $(-1; 3)$, $(0; 1)$, $\left(1; \frac{1}{3}\right)$, $\left(2; \frac{1}{9}\right)$, $\left(3; \frac{1}{27}\right)$ на координатной плоскости, затем, соединяя их плавной линией, получим график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (рис. 35).

По графику видно, что функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ на всей области определения является убывающей функцией.

Теперь можно построить график функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Общий вид графика функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ при $a > 1$ показан на рисунке 36, а при $0 < a < 1$ — рисунке 37.

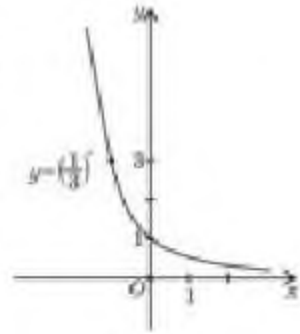


Рис. 35

Построим на одной координатной плоскости графики функций $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. По рисунку 38 видно, что графики симметричны относительно оси Oy.

Таким образом, имеем следующее утверждение: если основания показательных функций — взаимообратные числа, то графики этих функций симметричны относительно оси Oy.

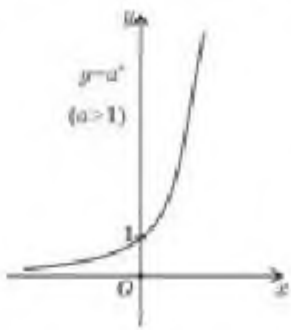


Рис. 36

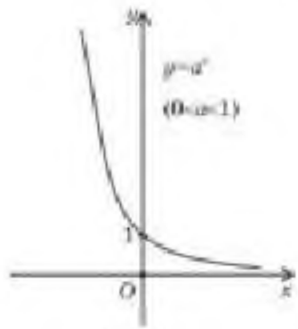


Рис. 37

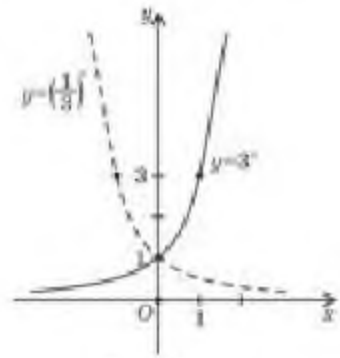


Рис. 38

4) Для доказательства непрерывности функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ придадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция примет, соответственно, приращение

$$\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x = a^x\,(a^{\Delta x} - 1).$$

Теперь найдем предел функции при $\Delta x \to 0$:

$$\Delta y \to a^x \cdot (a^0 - 1) = 0.$$

Бесконечно малому значению приращения аргумента соответствует бесконечно малое значение приращения функции. Следовательно, функция в своей области определения является непрерывной.

Вы научитесь применять свойства показательной функции при решении задач.

ПРИМЕР 1. Построим график функции $y = 5^{x-1} + 1$.

Решение. Вначале построим график функции $y = 5^x$. Здесь $a = 5 > 1$, поэтому согласно рисунку 40 на множестве действительных чисел строим график возрастающей функции. Затем построенный график параллельно переносим вдоль оси Ox на одну единицу в положительном направлении. Последний график параллельно перенесем вдоль оси Oy на одну единицу вверх (рис. 39).

ПРИМЕР 2. Сравним числа $0{,}27^4$ и $0{,}27^{10}$.

Решение. Основания данных чисел равны между собой и имеют: $0{,}27 < 1$. В случае, когда основание меньше единицы, показательная функция убывает. Следовательно, меньшему аргументу соответствует большее значение функции, поэтому $0{,}27^4 > 0{,}27^{10}$.

Ответ: $0{,}27^4 > 0{,}27^{10}$.

ПРИМЕР 3. Найдем, сколько точек пересечения имеют графики функций $y = 2^x$ и $y = x^2$.

Решение. Строим на одной координатной плоскости графики функций $y = 2^x$ и $y = x^2$. График функции $y = 2^x$ проходит через точку (0; 1) и является возрастающей кривой на R, так как основание больше единицы. А графиком функции $y = x^2$ является парабола с вершиной в точке (0; 0), ветви которой направлены вверх. Графики данных функций пересекаются в точках A и B (рис. 40).

Ответ: две точки пересечения.

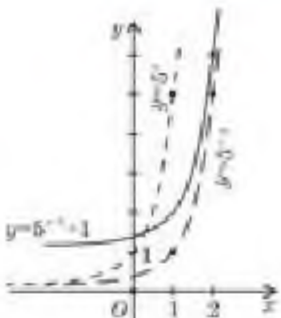


Рис. 39

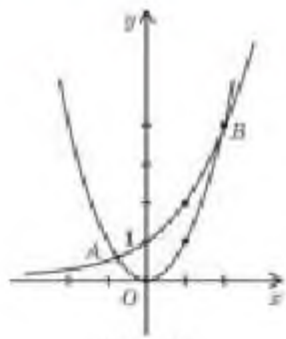


Рис. 40

1. Как можно определить возрастание или убывание показательной функции?
2. Почему графики всех показательных функций проходят через точку (0; 1)? Ответ обоснуйте.
3. Почему функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ ограничена снизу, но неограничена сверху (рассмотрите случаи $a > 1$ и $0 < a < 1$)?

Упражнения

А

Постройте графики функции $y = f(x)$ (12.1—12.2):

12.1. 1) $f(x) = 5^x$; 2) $f(x) = 1,5^x$;

3) $f(x) = 0,85^x$; 4) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

12.2. 1) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 2) $f(x) = \left(1\frac{1}{6}\right)^x$;

3) $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$; 4) $f(x) = 4^x$.

12.3. Перечислите свойства функции по ее графику (рис. 41):

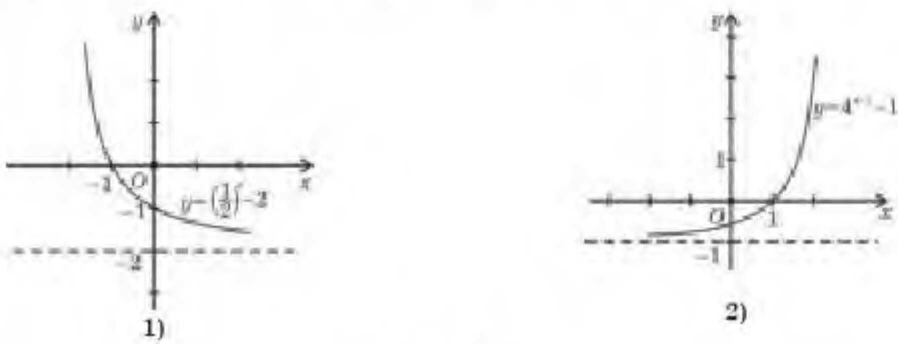


Рис. 41

12.4. Найдите множество значений функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 0,24^x + 3$; 2) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x - 2$;

3) $f(x) = -7^x + 1$; 4) $f(x) = 36^x - 4$.

12.5. Сравните числа:

1) $1,8^3$ и 2^3; 2) $0,8^2$ и $0,54$;

3) $0,5^3$ и $0,5^7$; 4) $3,2^{1,6}$ и $3,2^{1,7}$;

5) $0,2^{\sqrt{2}}$ и $0,2^{1,4}$; 6) 3^{π} и $3^{3,149}$.

12.6. Напишите числа 1; 8; 32; $\frac{1}{64}$; 0,25; 0,0625 в виде степени числа 2.

12.7. Вычислите:

1) $4^{1-3\sqrt{2}} \cdot 64^{\sqrt{2}-1}$; 2) $\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $49^{\sqrt{7}} : 7^{2\sqrt{7}}$; 4) $6^{2\sqrt{5}+1} : 36^{\sqrt{5}}$.

12.8. Упростите:

1) $\left(\frac{1}{a}\right)^{2+\sqrt{3}} \cdot a^{\sqrt{3}+2}$; 2) $\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}} \cdot \left(a^{\sqrt{3}+1} : a^{\sqrt{3}}\right)$;

3) $b^{3,5} : \left(b\sqrt{b^3}\right)$; 4) $b^{\sqrt{5}} \cdot b^{1,4} : \sqrt[4]{b^{4\sqrt{5}}}$.

12.9. Найдите число точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1) $f(x) = 3^x$ и $g(x) = 3x$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ и $g(x) = x^2$;

3) $f(x) = 7^x$ и $g(x) = \frac{1}{x}$; 4) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ и $g(x) = x^3$.

B

12.10. Используя простейшие преобразования к графику функции $y = a^x$, постройте график функции $y = g(x)$:

1) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$; 2) $g(x) = 4^x + 3$;

3) $g(x) = (2,5)^{x-1} + 2$; 4) $g(x) = (2,25)^{x+3} - 4$.

12.11. Найдите множество значений функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 4^x - 5,6$; 2) $f(x) = (0,35)^x + 3$;

3) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} - 1$; 4) $f(x) = 1 - 3^x$.

12.12. Сравните:

1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ и $3^{1,5}$; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{5}}$ и $6^{-2,25}$;

3) $(7 - 4\sqrt{3})^{-3,5}$ и $(7 - 4\sqrt{3})^{3,5}$;

4) $(5 + 2\sqrt{6})^{3,3}$ и $(5 + 2\sqrt{6})^{-3,1}$.

12.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = g(x)$:

1) $g(x) = 3^{\cos x}$; 2) $g(x) = 2^{\sin x}$;

3) $g(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{2\sin x}$; 4) $g(x) = 4 - 16^{\frac{1}{2}\cos x}$.

12.14. Найдите значение выражения:

1) $\left(b^2\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(b^3\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{7}}$, если $b = 5$;

2) $\left(b^3\sqrt{b}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot \left(b^5\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{9}{16}}$, если $b = 3$;

3) $\left(b^3\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \left(b^2\sqrt[4]{b}\right)^{\frac{8}{9}}$, если $b = 2$;

4) $\left(b\sqrt[4]{b}\right)^{\frac{8}{5}} \cdot \left(b^2\sqrt[5]{b}\right)^{\frac{5}{11}}$, если $b = 4$.

12.15. Найдите число точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1) $f(x) = 5^x$ и $g(x) = 6 - x$;

2) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $g(x) = 3 - x$;

3) $f(x) = 2^x - 2$ и $g(x) = 1 - x$;

4) $f(x) = 3^{-x}$ и $g(x) = -\frac{3}{x}$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Степень, основание и показатель степени, показательная функция, ее свойства и график.

§ 13. ЛОГАРИФМ ЧИСЛА И ЕГО СВОЙСТВА

Вы ознакомитесь с определением логарифма числа.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Число, логарифм, десятичный логарифм, натуральный логарифм, число e

Определение. ***Логарифмом положительного числа b*** *по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание для получения числа b.*

Обозначение логарифма: log.

Общий вид записи логарифма числа b — $\log_a b$, где a — основание логарифма, b — подлогарифмическое выражение.

Чтение логарифма числа: логарифм числа b по основанию a.

По определению

$$\log_a b = u,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0, \qquad (1)$$

т. е. $a^u = b > 0$.

Например, $\log_5 25 = 2$, так как $5^2 = 25$; $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

ПРИМЕР 1. Найдем логарифм чисел 16; 64; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{128}$ по основанию 2.

Решение. Для нахождения логарифма используем формулу (1).

Тогда $\log_2 16 = 4$, так как $2^4=16$; $\log_2 64 = 6$, так как $2^6= 64$;

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, так как $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $\log_2 \frac{1}{128} = -7$, так как $2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$.

Подставляя формулу (1) в равенство $a^n = b$, получим следующее тождество:

$$a^{\log_a b} = b. \qquad (2)$$

Тождество (2) называют *основным логарифмическим тождеством.*

Вы узнаете свойства логарифмов.

Логарифм числа обладает следующими свойствами при $a > 0$ и $a \neq 1$ и положительных числах b, c:

1) логарифм числа 1 равен нулю, т. е. $\log_a 1 = 0$;

2) логарифм числа a по основанию a равен единице, т. е. $\log_a a = 1$;

3) логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей, т. е.

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c;$$

4) логарифм частного равен разности логарифма числителя и логарифма знаменателя, т. е.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

5) логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания, т. е.

$$\log_a b^k = k \log_a b;$$

6) формула перехода к новому основанию $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $0 < c \neq 1$;

7) $\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b$.

Примечание: все числа под знаком логарифма — положительные числа, так как $a^n = b$.

Приведем доказательства некоторых свойств.

Докажем 3-е свойство $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Доказательство. Пусть $b = a^{\log_a b}$, $c = a^{\log_a c}$.

Преобразуем произведение чисел b и c:

$b \cdot c = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$, т.е. $b \cdot c = a^{\log_a b + \log_a c}$.

Отсюда по определению логарифма получаем:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Докажем свойство $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Доказательство. Для доказательства обе части основного логарифмического тождества $a^{\log_a b} = b$ прологарифмируем по основанию c при $0 < c \neq 1$.

Тогда $\log_c (a^{\log_a b}) = \log_c b$. Затем, применяя свойство логарифма степени, имеем $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Из последнего равенства найдем $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ■

Остальные свойства докажите самостоятельно.

Вы научитесь применять свойства логарифма для преобразования логарифмических выражений.

ПРИМЕР 2. Вычислим следующие логарифмы:

1) $\log_3 (27 \cdot 81)$; 2) $\log_2 (32)^3$; 3) $\log_5 \sqrt[5]{25}$.

Решение. 1) $\log_3 (27 \cdot 81) = \log_3 27 + \log_3 81 = 3 + 4 = 7$;

2) $\log_2 (32)^3 = 3\log_2 32 = 3 \cdot 5 = 15$;

3) $\log_5 \sqrt[5]{25} = \log_5 5^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_5 5 = \frac{2}{5}$.

Ответ: 1) 7; 2) 15; 3) $\frac{2}{5}$.

Если алгебраические выражения, заданные через произведение, деление, возведение в степень и вычисление корня, являются положительными числами, то их можно прологарифмировать, применяя свойства логарифма.

ПРИМЕР 3. Прологарифмируем выражение $x = \dfrac{15^2 \cdot \sqrt{120}}{\sqrt[4]{58 \cdot 82}}$ по основанию a.

Решение. Чтобы прологарифмировать данное выражение, вначале используем свойство логарифма частного, затем свойства логарифма произведения и степени. Получим следующее выражение:

$\log_a x = \log_a \left(15^2 \cdot \sqrt{120}\right) - \log_a\left(\sqrt[4]{58 \cdot 82}\right) = \log_a 15^2 + \log_a \sqrt{120} - \log_a \sqrt[4]{58} - \log_a \sqrt[4]{82} =$

$= 2\log_a 15 + \frac{1}{2}\log_a 120 - \frac{1}{4}\log_a 58 - \frac{1}{4}\log_a 82$.

Таким образом $\log_a x = 2\log_a 15 + \frac{1}{2}\log_a 120 - \frac{1}{4}\log_a 58 - \frac{1}{4}\log_a 82$.

Вы ознакомитесь с понятиями десятичного и натурального логарифмов.

Логарифм в зависимости от основания имеет следующие виды.

Логарифм с основанием, равным 10, т. е. $a = 10$, называют *десятичным логарифмом*.

Обозначение: $\lg b$, т. е.

$$\log_{10} b = \lg b.$$

В математике иногда используется число e, которое берется за основание логарифма. e — иррациональное число, $e \approx 2,718...$. Приближенное значение $e \approx 2,72$.

Логарифм с основанием, равным числу $e \approx 2,718...$, называют *натуральным логарифмом*.

Обозначение $\ln b$, т. е.

$$\log_e b = \ln b.$$

ПРИМЕР

4. Вычислим значения: 1) $\lg 30 - \lg 3$; 2) $\ln 0,5 + \ln(2e^3)$.

Решение. 1) Чтобы вычислить значение разности $\lg 30 - \lg 3$, свойство логарифма частного применим в обратном направлении: $\lg 30 - \lg 3 = \lg(30 : 3) = \lg 10 = 1$, так как $10^1 = 10$;
2) для нахождения значения суммы $\ln 0,5 + \ln(2e^3)$ сначала используем свойство логарифма произведения также в обратном направлении, а затем свойство логарифма степени: $\ln 0,5 + \ln(2e^3) = \ln(0,5 \cdot 2e^3) = \ln e^3 = 3\ln e = 3 \cdot 1 = 3$.

Ответ: 1) 1; 2) 3.

Рассмотрим нахождение значения выражения, логарифм которого представлен через логарифмы других выражений. Такое преобразование называют *потенцированием*. Для потенцирования используется следующее утверждение:

— равенство $\log_a t = \log_a s$ выполняется при $t = s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$.

Рассмотрим пример.

ПРИМЕР

5. Найдем значение x в равенстве

$$\log_a x = 3\log_a 17 + \frac{2}{3}\log_a 5 - \frac{1}{7}\log_a 75 - \frac{1}{7}\log_a 96.$$

Решение. Вначале, используя свойства логарифма, преобразуем правую часть:

$$3\log_a 17 + \frac{2}{3}\log_a 5 - \frac{1}{7}\log_a 75 - \frac{1}{7}\log_a 96 = \log_a 17^3 + \log_a \sqrt[3]{5^2} - \log_a \sqrt[7]{75} - \log_a \sqrt[7]{96} =$$

$= \log_a \dfrac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$. Тогда $\log_a x = \log_a \dfrac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$. Теперь, потенцируя, имеем $x = \dfrac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$.

Ответ: $\dfrac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$.

1. Существует ли логарифм отрицательного числа? Ответ обоснуйте.
2. В каких случаях применяется свойство перехода к новому основанию?
3. Учитывается ли основание логарифма при потенцировании? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

Выразите равенства через логарифмы (13.1—13.3):

13.1. 1) $3^3 = 27$; 2) $2^5 = 32$;

3) $3^{-2} = \frac{1}{9}$; 4) $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

13.2. 1) $4^3 = 64$; 2) $2^{-6} = \frac{1}{64}$;

3) $3^4 = 81$; 4) $3^{-5} = \frac{1}{243}$.

13.3. 1) $27^{\frac{2}{3}} = 9$; 2) $32^{\frac{3}{5}} = 8$;

3) $81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$; 4) $125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{25}$.

Проверьте справедливость равенств (13.4—13.7):

13.4. 1) $\log_3 81 = 4$; 2) $\log_5 1 = 0$;

3) $\log_2 64 = 6$; 4) $\log_5 625 = 4$.

13.5. 1) $\log_5 0{,}04 = -2$; 2) $\log_7 2401 = 4$;

3) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$; 4) $\lg 0{,}001 = -3$.

13.6. 1) $\log_{\sqrt{2}} 16 = 8$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$;

3) $\log_3 243 = 5$; 4) $\lg 0{,}1 = -1$.

13.7. 1) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$; 2) $\log_{0,3} 0{,}09 = 2$;

3) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$; 4) $\lg 10^3 = 3$.

Найдите логарифмы данных чисел по основанию a (13.8—13.9):

13.8. 1) 5; $\frac{1}{5}$; $\sqrt{5}$, $a = 5$; 2) 64; $\frac{1}{8}$; 128, $a = 2$;

3) 7; $\frac{1}{7}$; 49, $a = 7$; 4) 4; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{64}$, $a = 2$.

13.9. 1) 243; $\frac{1}{81}$; 27, $a = 3$; 2) 5; 25; $\frac{1}{625}$, $a = \frac{1}{5}$;

3) 4; 8; $\frac{1}{32}$, $a = \frac{1}{2}$; 4) 3; 9; $\frac{1}{27}$, $a = \frac{1}{3}$.

Вычислите (13.10 — 13.13):

13.10. 1) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4$; 2) $\log_7 98 - \log_7 2$;

3) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} 5 - \log_{\frac{1}{3}} 405 + \log_{\frac{1}{3}} 9$.

13.11. 1) $3^{\log_3 5} + 5^{\log_5 6}$; 2) $25^{\log_5 3} + 49^{\log_7 2}$;

3) $7^{\log_7 6} - 8^{\log_8 9}$; 4) $0{,}04^{\log_{0,2} 5} + 0{,}36^{\log_{0,6} 5}$.

13.12. 1) $\lg 4 + \lg 250$; 2) $\log_2 6 - \log_2 \frac{6}{32}$;
3) $(\log_{12} 4 + \log_{12} 36)^2$; 4) $\lg 13 - \text{l}1300$.

13.13. 1) $\left(\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{\log_3 16}{\log_3 4}\right)^{-1}$;
3) $(\log_2 13 - \log_2 52)^5$; 4) $(\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10)^4$.

13.14. Решите уравнение:
1) $\log_3 x = -1$; 2) $\log_2 x = -5$;
3) $\log_3 x = 2$; 4) $\log_4 x = 3$;
5) $\log_4 x = -3$; 6) $\log_7 x = 0$;
7) $\log_{\frac{1}{7}} x = 1$; 8) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

B

Вычислите (**13.15 — 13.17**):

13.15. 1) $\log_2 \log_2 \log_3 81$; 2) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$;
3) $\log_{\sqrt{3}} \log_5 125$; 4) $\log_4 \log_3 81$.

13.16. 1) $\frac{1}{\log_9 27}$; 2) $\frac{1}{\log_{16} 8}$;
3) $\log_2 128 \cdot \log_5 \frac{1}{125}$; 4) $\log_3 (\log_2 5 \cdot \log_5 8)$.

13.17. 1) $\frac{3}{\log_3 3} - \frac{2}{\log_8 4} - \frac{1}{\log_{27} 81}$; 2) $\frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 3{,}6 + 1}$;
3) $2^{2-\log_2 5} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$; 4) $3^{2+\log_3 4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 4}$.

13.18. Решите уравнение:

1) $\log_x 81 = 4$; 2) $\log_x \frac{1}{16} = 2$;

3) $\log_x \frac{1}{27} = -3$; 4) $\log_x 36 = 2$.

13.19. Найдите логарифмы данных чисел по основанию a:

1) $2;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 0,\ a = 2$; 2) $3;\ -1;\ -3;\ 1,\ a = 3$;
3) $4;\ 3;\ 0;\ -1,\ a = 4$; 4) $5;\ 3;\ 0;\ 1,\ a = 5$.

13.20. Напишите выражение через десятичный логарифм:

1) $N = 100\sqrt{ab^3c}$; 2) $N = \frac{a^6}{0{,}1c^3\sqrt{6}}$;

3) $N = \sqrt[4]{10}a^{\frac{1}{3}}b^4c^{-\frac{1}{2}}$; 4) $N = \frac{0{,}001a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{c}\cdot b^3}$;

5) $N = 10^4 a^5 \sqrt{b}\, c^{-4}$;

6) $N = \dfrac{c^{\frac{2}{3}}}{10^3 b^6 c^4}$;

7) $N = 10^{-4} \cdot a^3 b^3 c^{\frac{2}{3}}$;

8) $N = \dfrac{c^{\frac{4}{7}}}{10^7 a^{\frac{3}{2}} b^9}$.

13.21. Докажите:

1) $\log_5 6 + \log_4 5 > -1$;

2) $\log_{\frac{1}{4}} 2 + \log_{\frac{2}{3}} 4 < 1$;

3) $8^{\log_7 9} = 9^{\log_7 8}$;

4) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_4 \frac{1}{7}} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{\log_4 \frac{1}{6}}$.

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНОМ-МАТЕМАТИКЕ

13.22. Подготовьте сообщение об ученом-математике Джоне Непере и его "удивительной таблице логарифмов".

Дж. Непер
(1550—1617)

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения и график функции, степень, показательная функция, ее свойства и графики, логарифм и его свойства.

§ 14. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Вы ознакомитесь с определением логарифмической функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция, график функции, логарифмическая функция, область определения, множество значений, свойства функции

Определение. *Функция, заданная формулой*

$$y = \log_a x \ (a > 0,\ a \neq 1), \qquad (1)$$

называется ***логарифмической функцией.***

Вы ознакомитесь со свойствами логарифмической функции, научитесь строить график логарифмической функции.

Основные свойства логарифмической функции $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$:

1) область определения — множество всех положительных чисел, т. е. $x \in (0;\ +\infty)$;

2) множество значений — множество всех действительных чисел, т. е. $y \in (-\infty;\ +\infty)$;

3) при $a > 1$ функция является возрастающей, а при $0 < a < 1$ убывающей.

График функции $y = \log_a x$ при основании $a > 1$ показан на рисунке 42.1, а при основании $0 < a < 1$ изображен на рисунке 42.2;

4) на всей области определения функция $y = \log_a x$ является непрерывной.

1) 2)

Рис. 42

Докажем эти свойства.

Доказательство:

1) в предыдущем параграфе мы доказали, что любое положительное число с основанием $a > 0$, $a \neq 1$ имеет логарифм. Следовательно, область определения функции — множество всех положительных чисел;

2) по определению логарифма для любого y выполняется равенство $\log_a a^u = u$.

3) для того, чтобы показать возрастание или убывание функции $y = \log_a x$, рассмотрим любые два значения аргумента x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ и соответствующие значения функции $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$.

При $a > 1$ большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Следовательно, если $x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ (например, $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$; $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, $2 < 3$).

При $0 < a < 1$ меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции, поэтому, если $x_1 < x_2$, то имеем $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

Например, $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 2^2 = 2\log_{\frac{1}{2}} 2 = 2\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = -2;$

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} (2^3) = 3\log_{\frac{1}{2}} 2 = 3\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -3\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = -3$, т. е.

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$. Следовательно, $\log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 8$.

4) докажем свойство непрерывности функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Для этого придадим аргументу x приращение Δx, $\Delta x = (x + \Delta x) - x$, определим соответствующее приращение функции: $\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x =$ $= \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$, или $\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем:

$$\Delta y \to \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a 1 = 0.$$

Таким образом, бесконечно малому значению приращения аргумента соответствует бесконечно малое значение приращения функции.

Следовательно, в любой точке области определения функция $y = \log_a x$ является непрерывной.

По графику функции (рис. 43, 44) можно определить следующее:

— если $a > 1$, то при $x > 1$ имеем: $y = \log_a x > 0$, а при $0 < x < 1$ имеем: $y = \log_a x < 0$;

— если $0 < a < 1$, то при $x > 1$ имеем $y = \log_a x < 0$, а при $0 < x < 1$ имеем: $y = \log_a x > 0$.

Графики функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 43, 44), так как они взаимообратны.

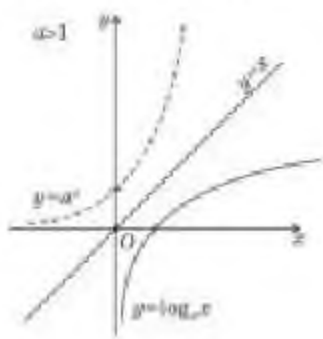


Рис. 43

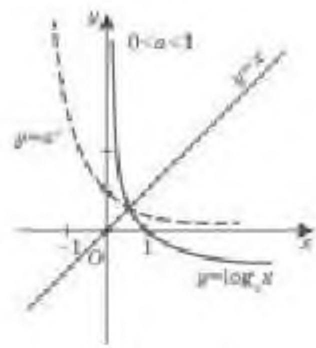


Рис. 44

Вы научитесь применять свойства логарифмической функции при решении задач.

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР **1.** Найдем области определения функций 1) $f(x) = \log_3(8 - 3x)$; 2) $f(x) = \log_2(5x^2 - 8x - 4)$; 3) $f(x) = \log_4 \frac{5x + 3}{6 - 7x}$.

Решение. 1) Областью определения логарифмической функции являются все положительные числа, т. е. $R_+ = (0; +\infty)$, поэтому аргумент функции $f(x) = \log_3(8 - 3x)$ должен быть больше нуля: $8 - 3x > 0$ или $x < \frac{8}{3}$. Отсюда областью определения функции $f(x) = \log_3(8 - 3x)$ являются все числа меньше $\frac{8}{3}$.

2) областью определения логарифмической функции $f(x) = \log_2(5x^2 - 8x - 4)$ является множество чисел, удовлетворяющих неравенству $5x^2 - 8x - 4 > 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получаем $x < -0{,}4$ и $x > 2$, т. е. $(-\infty; -0{,}4) \cup$ $\cup (2; +\infty)$ (рис. 45):

Рис. 45

3) для нахождения области определения функции $f(x) = \log_4 \frac{5x + 3}{6 - 7x}$ необходимо решить неравенство $\frac{5x + 3}{6 - 7x} > 0$. Все значения x, удовлетворяющие этому дробно-рациональному неравенству, найдем методом интервалов (рис. 46):

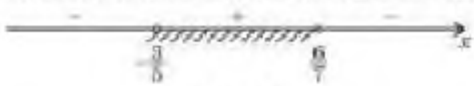


Рис. 46

Отсюда областью определения функции $f(x) = \log_4 \frac{5x + 3}{6 - 7x}$ является промежуток $\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{7}\right)$.

Ответ: 1) $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right)$; 2) $(-\infty; -0{,}4) \cup (2; +\infty)$; 3) $\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{7}\right)$.

ПРИМЕР **2.** Сравним числа:
1) $\log_2 13$ и $\log_2 17$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} 3$ и $\log_{\frac{1}{4}} 5$.

Решение. 1) Числа $\log_2 13$ и $\log_2 17$ имеют одинаковые основания, причем $a = 2$. При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, следовательно, меньшему значению аргумента соответствует меньший логарифм числа. Таким образом, $\log_2 13 <$ $< \log_2 17$, так как $13 < 17$.

2) числа $\log_{\frac{1}{4}} 3$ и $\log_{\frac{1}{4}} 5$ имеют одинаковые основания, равные $\frac{1}{4}$, причем $0 < \frac{1}{4} < 1$. При $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает, поэтому $\log_{\frac{1}{4}} 3 > \log_{\frac{1}{4}} 5$, так как $3 < 5$.

Ответ: 1) $\log_2 13 < \log_2 17$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} 3 > \log_{\frac{1}{4}} 5$.

ПРИМЕР 3. Найдем, сколько точек пересечения имеют графики функций $y = \lg x$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение. Построим на одной координатной плоскости графики функций $y = \lg x$ и $y = x^2 - 2x$ (рис. 47). Графики этих функций пересекаются в точках A и B. Следовательно, имеют две точки пересечения.

Ответ: две точки.

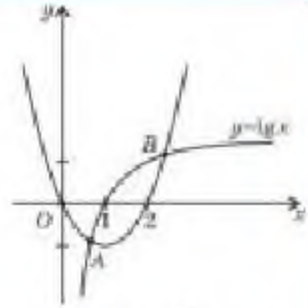


Рис. 47

1. Почему график логарифмической функции расположен только в правой части координатной плоскости относительно оси Oy?
2. Какому условию должны удовлетворять логарифмируемые выражения?
3. В чем сходство показательной и логарифмической функций?
4. Имеются ли различия у показательной и логарифмической функций во множестве значений?

Упражнения

А

Найдите области определения функции $y = g(x)$ (**14.1—14.2**):

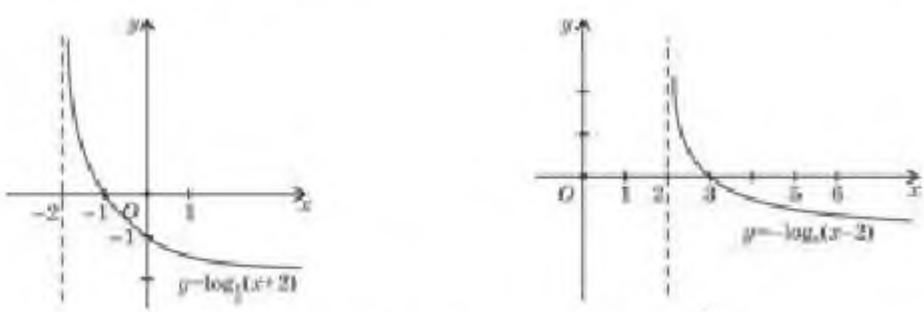
14.1. 1) $g(x) = \log_3(3 + 4x)$; 2) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(7 - 2x)$;

3) $g(x) = \log_{5,2}(8 - 5x)$; 4) $g(x) = \log_{0,7}(x^2 - 49)$.

14.2. 1) $g(x) = \log_{0,12}(7 + 6x - x^2)$; 2) $g(x) = \log_{\sqrt{5}}\dfrac{x + 8}{2x - 7}$;

3) $g(x) = \lg\dfrac{3x + 15}{4 - x}$; 4) $g(x) = \ln(x^2 + x - 12)$.

14.3. Перечислите свойства функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 48:



1) 2)

Рис. 48

Сравните выражения (**14.4—14.5**):

14.4. 1) $\log_4 5,8$ и $\log_4 8,1$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 0,25$ и $\log_{\frac{1}{5}} 0,36$;

3) $\log_{6,5}\frac{5}{6}$ и $\log_{6,5}\frac{1}{6}$;   4) $\log_{\sqrt{3}} 5$ и $\log_{\sqrt{3}} 4$.

14.5. 1) $\log_{\sqrt{7}} 8$ и 1;   2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 10$ и $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 8$;

3) $\log_{\pi}\frac{3}{16}$ и $\log_{\pi}\frac{1}{16}$;   4) $\log_{0,9}\sqrt{3}$ и $\log_{0,9} 2$.

14.6. Найдите, сколько точек пересечения имеют графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1) $f(x) = \lg x$ и $g(x) = x$;   2) $f(x) = \lg x$ и $g(x) = -x$;

3) $f(x) = \log_2 x$ и $g(x) = x^2$;   4) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $g(x) = -x^2$.

B

14.7. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \log_{1,5}(x^2 - 4) + \log_3(9 - x^2)$;

2) $f(x) = \log_4 x^3 - \log_{1,8}(x^2 - x)$;

3) $f(x) = \log_{1,5}\frac{x^2 - 1}{x + 5} - \sqrt{x}$;

4) $f(x) = \log_{0,7}\frac{4 - x^2}{6 - x} + \log_6 x$.

14.8. Найдите множество значений функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = -\log_5(x + 1)$;   2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(1 + x) + 5$;

3) $f(x) = |\log_7(x + 1)|$;   4) $f(x) = |\lg x| + 6$.

14.9. Постройте график функции $y = f(x)$ и перечислите ее свойства:

1) $f(x) = \log_4(x + 3)$;   2) $f(x) = -\log_2 x + 2$;

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$;   4) $f(x) = \log_{0,5} x - 3$.

14.10. Найдите число точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $g(x) = x - 1$;

2) $f(x) = \lg x$ и $g(x) = x + 1$;

3) $f(x) = \log_5 x$ и $g(x) = 7 + x$;

4) $f(x) = \log_{0,5} x$ и $g(x) = 2 - x$.

14.11. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1) $f(x) = \log_3 x$, [1; 9];   2) $f(x) = \log_{0,5} x$, [0,5; 4];

3) $f(x) = \log_7 x$, [1; 7];   4) $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$, [5; 25].

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, предел функции, производная, производная сложной функции, первообразная, правила вычисления производных и первообразных, геометрический и физический смысл производной, таблицы производных и первообразных, уравнение касательной, применение производной и интеграла.

§ 15. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ. ПЕРВООБРАЗНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Вы научитесь находить производную показательной функции.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Показательная функция, логарифмическая функция, производная, первообразная, определенный интеграл

В начале главы мы рассмотрели область определения, множество значений показательной функции и установили, что данная функция в своей области определения является возрастающей или убывающей и непрерывной. Теперь введем формулу производной показательной функции $y = a^x (a > 0,\ a \neq 1)$.

Теорема. *Показательная функция в любой точке области определения имеет производную и эта производная находится по формуле*

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \qquad (1)$$

Доказательство. Средняя скорость показательной функции $y = a^x$ при изменении аргумента от точки x до точки $x + \Delta x$ определяется формулой $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. Данное выражение также называют *средней скоростью возрастания*. Для нахождения производной функции найдем предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

При $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to \ln a$ (формула рассматривается и доказывается в курсе высшей математики). Таким образом, при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to a^x \ln a$, т. е. $y' = a^x \ln a$.

Заменив в формуле (1) число a на число e, получим:

$$(e^x)' = e^x. \qquad (2)$$

Рассмотрим пример.

ПРИМЕР **1.** Найдем производные функций 1) $5a^x$; 2) $x^3 \cdot 2^x$; 3) $(x^2+1)\cdot 3^x$; 4) e^{3x}.

Решение. Для вычисления производных заданных функций применим формулы (1), (2), правила и таблицу вычисления производных:

1) $(5a^x)' = 5a^x \ln a$;

2) $(x^3 \cdot 2^x)' = (x^3)' \cdot 2^x + x^3 \cdot (2^x)' = 3x^2 \cdot 2^x + x^3 \cdot 2^x \cdot \ln 2 = x^2 \cdot 2^x\,(3 + x\ln 2)$;

3) $((x^2+1)\cdot 3^x)' = (x^2+1)' \cdot 3^x + (x^2+1)\,(3^x)' = 2x \cdot 3^x + (x^2+1)\cdot 3^x \ln 3 = 3^x\,(2x + (x^2+1)\ln 3)$;

4) $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3 \cdot e^{3x}$.

Ответ: 1) $5a^x \ln a$; 2) $x^2 \cdot 2^x\,(3 + x\ln 2)$; 3) $3^x(2x + (x^2+1)\ln 3)$; 4) $3 \cdot e^{3x}$.

Вы научитесь находить производную логарифмической функции.

Теперь введем формулу нахождения производной логарифмической функции.

Теорема. *Логарифмическая функция в любой точке области определения имеет производную и эта производная находится по формуле*

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}. \qquad (3)$$

Доказательство. Придадим аргументу x приращение Δx, функция, соответственно, принимает приращение:

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Учитывая, что логарифмическая функция в своей области определения является непрерывной, в последнем равенстве перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Так как при $\Delta x \to 0$ выражение $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \to e$, то получим, что при $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$.

Следовательно, $y' = \frac{1}{x\ln a}$.

Заменим в формуле (3) число a числом e, т. е. возьмем $a = e$, тогда $(\log_e x)' = \frac{1}{x\ln e}$ или

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 2. Найдем производные функций 1) $f(x) = \log_5 x$; 2) $g(x) = 3\ln x$; 3) $\varphi(x) = 6\ln(x^2 - 4)$.

Решение. Для нахождения производных заданных функций применим формулы (3), (4), правила и таблицу нахождения производных:

1) $f'(x) = (\log_5 x)' = \frac{1}{x\ln 5}$; 2) $g'(x) = (3\ln x)' = \frac{3}{x}$;

3) $\varphi'(x) = (6\ln(x^2 - 4))' = 6 \cdot \frac{1}{x^2 - 4} \cdot (x^2 - 4)' = \frac{12x}{x^2 - 4}$.

Ответ: 1) $\frac{1}{x\ln 5}$; 2) $\frac{3}{x}$; 3) $\frac{12x}{x^2 - 4}$.

Вы научитесь находить первообразную показательной функции.

Теперь введем формулу вычисления первообразной показательной функции.

Теорема. *Показательная функция $y = a^x (a > 0,\ a \neq 1,\ x \in R)$ в любой точке области определения имеет первообразную и эта первообразная находится по формуле*

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (5)$$

Доказательство. Для доказательства используем определение первообразной, т. е. найдем производную функции $F(x)$. Тогда

$$F'(x) = \left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x,\ x \in R.$$

Следовательно, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

ПРИМЕР 3. Найдем первообразные функций: 1) $f(x) = 7^x$; 2) $g(x) = 5 \cdot 3^x$; 3) $h(x) = 5e^{2x} - 8 \cdot 2^{3x}$.

Решение. Для нахождения первообразных данных функций применим формулу (5), правила и таблицу первообразных: 1) $F(x) = \frac{7^x}{\ln 7} + C$; 2) $G(x) = 5 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$;

3) $H(x) = 5 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - 8 \cdot \frac{2^{3x}}{\ln 2} \cdot \frac{1}{3} + C = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{2^{3x+3}}{3\ln 2} + C$.

Ответ: 1) $\frac{7^x}{\ln 7} + C$; 2) $5 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$; 3) $\frac{5}{2}e^{2x} - \frac{2^{3x+3}}{3\ln 2} + C$.

Первообразная функции $y = \frac{1}{x}$ вычисляется по формуле:

$$F(x) = \ln|x| + C. \qquad (6)$$

Следовательно, $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$.

ПРИМЕР 4. Вычислим площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 1$, $x = e$.

Решение. Построим фигуру, ограниченную данными линиями. Тогда получим плоскую фигуру ABC (рис. 49).

Здесь $f(x) = 3$, $g(x) = \frac{3}{x}$, $a = 1$, $b = e$. Следовательно, $S_ф = \int_1^e \left(3 - \frac{3}{x}\right) dx = (3x - 3\ln|x|)\Big|_1^e =$
$= 3e - 3 - 3 = 3e - 6$.

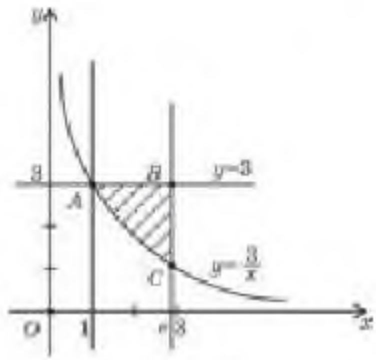


Рис. 49

Ответ: $3e - 6$ кв. ед.

1. Почему формула производной показательной функции $y = a^x$ имеет частный случай? Ответ обоснуйте.
2. Какое свойство логарифма используется при выведении формулы производной логарифмической функции?

Упражнения

А

Найдите производные функции $y = f(x)$ (**15.1—15.3**):

15.1. 1) $f(x) = 3e^x + 3$; 2) $f(x) = 5x + 3e^x$;
3) $f(x) = 5 - \frac{1}{2}e^x$; 4) $f(x) = 5 \cdot e^{-x}$.

15.2. 1) $f(x) = e^x \cdot \sin x$; 2) $f(x) = e^{3x} + 2 \cdot 2^x$;
3) $f(x) = x^2 e^{3x}$; 4) $f(x) = 5 \cdot e^x \cdot \cos x$.

15.3. 1) $f(x) = \ln x \cdot \sin x$; 2) $f(x) = \ln x^3 + 4 \cdot 6^x$;
3) $f(x) = x^2 \ln(x^2 - 10)$; 4) $f(x) = 5 \cdot \ln(x - x^3) \cdot \cos x$.

15.4. Напишите общий вид первообразной для функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 3e^x$; 2) $f(x) = 2 \cdot 5^x$;

3) $f(x) = 7 \cdot 4^x$; 4) $f(x) = 1 + 2^x$.

15.5. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_0^1 2^x\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 e^x\,dx$; 3) $\int\limits_1^3 2^x\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{-1} 3^x\,dx$.

15.6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; 2) $y = 5^x$, $x = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

B

Найдите производные функции $y = f(x)$ (**15.7—15.8**):

15.7. 1) $f(x) = e^{x^3} \cos x$; 2) $f(x) = 5^{\frac{x}{2}} \cdot \operatorname{tg} x$;

3) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$; 4) $f(x) = 3^{x^2} \cdot \ln x$.

15.8. 1) $f(x) = (5^x + 4) \cdot x^3$; 2) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \log_2 x$;

3) $f(x) = x^2 \cdot e^{5x}$; 4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$.

15.9. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = e^x - ex$; 2) $f(x) = 2xe^x$.

15.10. Найдите точки экстремума функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = e^x - x$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

15.11. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

15.12. Исследуйте функцию $y = x \ln x$ и постройте ее график.

15.13. Найдите первообразную для функции $y = g(x)$, график которой проходит через точку $B\ (a,\ b)$:

1) $g(x) = 4^x$, $B\ (\log_2 3;\ 0)$; 2) $g(x) = \frac{2}{x-3}$, $B\ (4;\ -2)$.

15.14. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\log_3 2} 3^{0,5x}\,dx$.

15.15. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = -\frac{5}{x}$, $x = -1$, $x = -2$, $y = 2$;

2) $y = 4^x$, $x = 4$, $y = 4$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{x-3}{125-5^{3x}}$:

A) R; B) Z;
C) $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; D) $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

2. Вычислите $\log_{12}\left(\dfrac{49}{9} \cdot \left(\dfrac{3}{7}\right)^2\right)$:

A) 12; B) 0;
C) 1; D) 144.

3. Найдите область определения функции $y = \log_{5,3}(6-5x) + 10$:

A) $(-\infty;\ 1,2]$; B) $(-\infty;\ -1,2)$;
C) $(1,2;\ +\infty)$; D) $(-\infty;\ 1,2)$.

4. Расположите числа $\dfrac{1}{3}$; 27; 3^{-3}; 1; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ в порядке возрастания:

A) $\dfrac{1}{3}$; 27; 3^{-3}; 1; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$; B) $\dfrac{1}{3}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$; 3^{-3}; 1; 27;

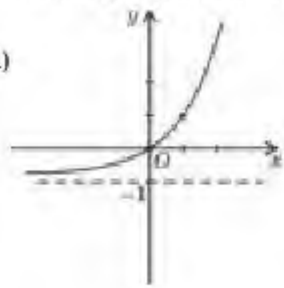
C) 3^{-3}; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$; $\dfrac{1}{3}$; 1; 27; D) 1; 3^{-3}; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$; $\dfrac{1}{3}$; 27.

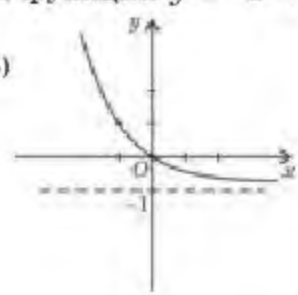
5. Если $\log_7 5 = a$ и $\log_7 13 = b$, то найдите значения выражения $\log_{65}25$:

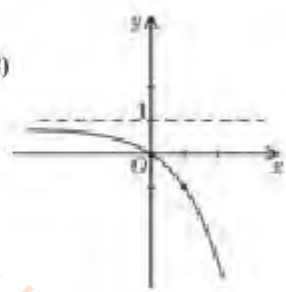
A) $\dfrac{2b}{a+b}$; B) $\dfrac{a+b}{2b}$;

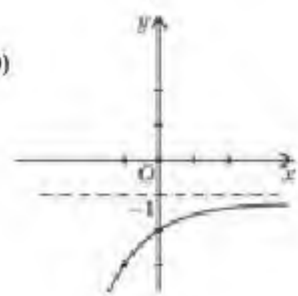
C) $\dfrac{2b}{a+b}$; D) $\dfrac{a+b}{b}$.

6. На каком из рисунков изображен график функции $y = -2^x + 1$?

A)


B)


C)


D)


7. Вычислите значение выражения $27^{\log_3 2} + 28$:

A) 12; B) 18;

C) 36; D) 3.

8. Найдите область определения функции $y = \lg\frac{x+4}{2x-1}$:

A) $(-\infty; -4] \cup (0,5; +\infty)$; B) $(-4; 0,5)$;

C) $(-\infty; -4) \cup (0,5; +\infty)$; D) $[-4; 0,5]$.

9. Вычислите значение производной функции $y = \log_3(\sin 3x)$ в точке $x = \frac{\pi}{18}$:

A) $\frac{3}{\ln 3}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{\ln 3}$; C) $\frac{1}{\sqrt{3}\ln 3}$; D) $\frac{3\sqrt{3}}{\ln 3}$.

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 6xe^x$ на отрезке $[1; 2]$:

A) 6; 12; B) $6e^2$; $12e$;

C) $6e$; $12e$; D) $12e^2$; $6e$.

11. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = xe^{4x}$ в точке с абсциссой $x = 1$:

A) $5e^4x - 5e^4$; B) $5e^4x$;

C) $5e^4x - 4e^4$; D) $4e^4x - 5e^4$.

12. Вычислите интеграл $\int_1^3\left(\frac{2}{x} - 4^x\right)dx$:

A) $2\ln 3 - \frac{68}{\ln 4}$; B) $2\ln 3 + \frac{64}{\ln 4}$;

C) $2\ln 3 - \frac{60}{\ln 4}$; D) $\ln 3 - \frac{64}{\ln 4}$.

13. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $y = 1$, $x = 2$:

A) $2\ln 2 - 2$; B) $\frac{3}{\ln 2} - 2$; C) $4\ln 2 - 2$; D) $\ln 2 - 2$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Показательная функция и ее свойства, тождественные преобразования выражений, уравнение, корень уравнения, равносильные уравнения, способы решения уравнений и их систем, возведение в степень, корень n-й степени и его свойства.

ГЛАВА V ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 16. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Вы ознакомитесь с понятием показательного уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, показательное уравнение, основание степени, показатель степени, посторонний корень, решение уравнения

Одним из распространенных видов уравнений являются показательные уравнения, т. е. уравнения, содержащие переменную в показателе степени. Введем понятие показательного уравнения.

Определение. ***Показательным уравнением*** *называют уравнение вида*

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}\ (a > 0,\ a \neq 1) \qquad (1)$$

и уравнение, сводящееся к этому виду.

Например, $2^x = 32$; $7^x + 3 \cdot 7^{1-x} = 6$; $5^x - 13^x + 8^x = 0$ — показательные уравнения.

Показательные уравнения после тождественных преобразований приводятся к виду

$$a^x = b, \qquad (2)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, а b — любое число, поэтому уравнение вида (2) называют *простейшим показательным уравнением.*

Нам известно, что множеством значений показательной функции является множество всех положительных действительных чисел, поэтому уравнение (2) имеет решение, если b — положительное число. Следовательно, при $b < 0$ или $b = 0$ уравнение (2) не имеет корней.

Рассмотрим способы решения показательных уравнений.

Вы научитесь решать показательные уравнения способом приведения к одинаковому основанию.

I. *Приведение обеих частей уравнения к одинаковому основанию.*

В уравнении $a^x = b$ число b записывается в виде степени числа a, т. е. в виде $b = a^m$. Тогда получается уравнение

$$a^x = a^m. \qquad (3)$$

В этом уравнении основания одинаковые, поэтому, приравнивая их показатели, имеем $x = m$. В случае уравнения (1) приходим к уравнению $f(x) = g(x)$, способ решения которого известен.

ПРИМЕР **1.** Решим уравнения: 1) $5^x = 125$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; 3) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

Решение. 1) Учитывая, что $125 = 5^3$, уравнение $5^x = 125$ запишем в виде $5^x = 5^3$. Тогда согласно уравнению (3), получим $x = 3$;

2) учитывая, что $81 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$, вместо уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ имеем равносильное уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$. Тогда согласно уравнению (3), имеем $x = -4$;

3) в уравнении $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ число $16\sqrt{2}$ представим в виде степени с основанием 2: $16\sqrt{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{4,5}$. Тогда исходное уравнение имеет вид: $2^{x^2-6x-2,5} = 2^{4,5}$. Отсюда $x^2 - 6x - 2,5 = 4,5$ или $x^2 - 6x - 7 = 0$, корни $x_1 = -1$, $x_2 = 7$;

4) для того, чтобы обе части уравнения $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ привести к одинаковому основанию, предварительно применим для левой части свойство показательной функции $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, т. е. $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ или $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3$. В полученном показательном уравнении основания степеней одинаковые, поэтому $x = 3$.

Ответ: 1) 3; 2) −4; 3) −1; 7; 4) 3.

Вы научитесь решать показательные уравнения путем вынесения общего множителя за скобки.

II. *Вынесение общего множителя за скобки.*

В указанном способе показательную функцию, как общий множитель, выносим за скобки и получаем простейшее показательное уравнение.

ПРИМЕР **2.** Решим уравнения: 1) $6^{x+2} - 6^x = 210$;
2) $3^{3\cos x-1} + 3^{3\cos x-2} + 3^{3\cos x-3} = 13$; 3) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$.

Решение. 1) Преобразуем уравнение $6^{x+2} - 6^x = 210$ и получим: $6^x \cdot 6^2 - 6^x = 210$. В левой части 6^x можно вынести как общий множитель за скобки. Тогда $6^x \cdot (36 - 1) = 210$ или $6^x = 6$, отсюда $x = 1$.

2) в левой части уравнения $3^{3\cos x-1} + 3^{3\cos x-2} + 3^{3\cos x-3} = 13$ вынесем общий множитель $3^{3\cos x-3}$ за скобки: $3^{3\cos x-3}(3^2 + 3 + 1) = 13$, или $3^{3\cos x-3} \cdot 13 = 13$, $3^{3\cos x-3} = 1$, или $3^{3\cos x-3} = 3^0$. Тогда $3\cos x - 3 = 0$, или $\cos x = 1$. Используя частный случай решения тригонометрического уравнения, имеем $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

3) в уравнении $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$ слагаемое $2^{\sqrt{x}-1}$ перенесем в левую часть. Тогда $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} - 2^{\sqrt{x}-1} = 12$. Теперь $2^{\sqrt{x}-1}$, как общий множитель, выносим за скобки: $2^{\sqrt{x}-1}(2^3 - 2^2 - 1) = 12$, или $2^{\sqrt{x}-1} = 4$, $2^{\sqrt{x}-1} = 2^2$, тогда $\sqrt{x} - 1 = 2$ или $\sqrt{x} = 3$.
Решая иррациональное уравнение, получим $x = 9$.

Ответ: 1) 1; 2) $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 3) 9.

Вы научитесь решать показательные уравнения способом введения новой переменной.

III. *Способ введения новой переменной.*

При указанном способе показательная функция обозначается через новую переменную и получается уравнение, способ решения которого известен.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение $4^x + 2^{x+1} = 80$.

Решение. Если учесть, что $4^x = (2^x)^2$, то вместо уравнения $4^x + 2^{x+1} = 80$ имеем квадратное уравнение относительно $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 80 = 0$. Введем новую переменную $2^x = a$. Тогда $a^2 + 2a - 80 = 0$, корни $a_1 = 8$, $a_2 = -10$. Переходя к замене, получаем $2^x = 8$, или $2^x = 2^3$, или $x = 3$, а уравнение $2^x = -10$ не имеет решения, так как множество значений показательной функции только положительные числа.

Ответ: 3.

Вы научитесь решать показательные уравнения делением обеих частей уравнения на показательную функцию.

IV. *Деление обеих частей уравнения на показательную функцию.*

Иногда встречаются уравнения, в составе которых даны две или несколько показательных функций. В таких случаях, учитывая, что показательная функция не может быть равной нулю, делим обе части уравнения на показательную функцию и получаем уравнение, способ решения которого известен.

Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 4. Найдем корни уравнения $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$.

Решение. Используя свойства показательной функции, преобразуем выражения 16^x; 36^x; 81^x данного уравнения: $16^x = 2^{4x}$, $36^x = 2^{2x} \cdot 3^{2x}$, $81 = 3^{4x}$.
Тогда исходное уравнение примет вид: $3 \cdot 2^{4x} + 37 \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x} = 26 \cdot 3^{4x}$.
Учитывая, что значение показательной функции не может быть равным нулю, обе части уравнения почленно разделим на 3^{4x}: $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} + 37 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 26$. Для решения полученного уравнения вводим обозначение $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = t$. Тогда имеем

квадратное уравнение $3t^2 + 37t - 26 = 0$, его корни: $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = -13$. Учитывая, что множество значений показательной функции только положительные числа, решаем уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$. Отсюда $2x = 1$ или $x = 0,5$.

Ответ: 0,5.

V. *Графический способ решения.*

Данный способ используется в тех случаях, когда показательное уравнение вида (2), т. е. уравнение $a^x = b$, нельзя представить в виде уравнения (3). Для решения такого уравнения на одной координатной плоскости строят графики функций $y = a^x$ и $y = b$ и определяют их точки пересечения.

Абсциссы точек пересечения графиков указанных функций будут решениями показательного уравнения.

ПРИМЕР

5. Найдем число корней уравнения $2^x = 5$.

Решение. Число 5 нельзя представить в виде степени числа 2, т. е. данное уравнение невозможно привести к виду (3). Следовательно, уравнение $2^x = 5$ решаем графическим способом. Для этого в одной координатной плоскости построим графики функций $y = 2^x$ и $y = 5$ (рис. 50). Из рисунка видно, что проведенные линии пересекаются только в одной точке. Таким образом, данное уравнение имеет один корень.

Ответ: имеет один корень.

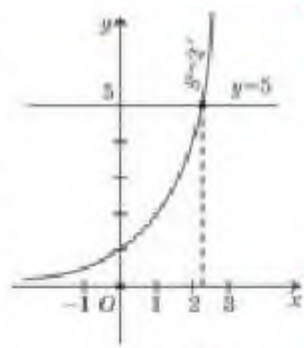


Рис. 50

Вы ознакомитесь с понятием системы показательных уравнений, научитесь решать системы показательных уравнений.

Теперь введем понятие системы показательных уравнений.

Определение. ***Системой показательных уравнений*** *называют систему, содержащую показательное уравнение.*

При решении системы показательных уравнений применяются свойства показательной функции, способы решения показательных уравнений и систем уравнений.

Рассмотрим примеры решения систем показательных уравнений.

ПРИМЕР

6. Решим систему уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80. \end{cases}$

Решение. Используя способ подстановки, вместо данной системы уравнений имеем следующую систему:

$$\begin{cases} y = 5 - x, \\ 4^x + 4^y = 80. \end{cases}$$

Тогда получим уравнение $4^x + 4^{5-x} = 80$. Преобразуем уравнение $4^x + \dfrac{1024}{4^x} - 80 = 0$, или $(4^x)^2 - 80 \cdot 4^x + 1024 = 0$. Обозначив $4^x = z$, имеем квадратное уравнение $z^2 - 80z + 1024 = 0$, его корни $z_1 = 16$ и $z_2 = 64$. Переходя к замене, получаем следующие показательные уравнения $4^x = 16$ и $4^x = 64$. Отсюда $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, соответственно, $y_1 = 3$, $y_2 = 2$.

Ответ: (3; 2), (2; 3).

ПРИМЕР

7. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2^x - 3^y = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Решение. В систему уравнений входят две показательные функции. Для ее решения введем новые переменные, т. е. $2^x = u$, $3^y = v$. Тогда получим систему линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} 3u + 2v = \dfrac{11}{4}, \\ 2u - 2v = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Решим ее способом алгебраического сложения. Тогда $5u = \dfrac{5}{4}$ или $u = \dfrac{1}{4}$. Тогда $2v = \dfrac{11}{4} - \dfrac{3}{4} = 2$, $v = 1$.

Получаем показательные уравнения $2^x = \dfrac{1}{4}$, $3^y = 1$. Решая их, имеем $x = -2$, $y = 0$.

Ответ: (−2; 0).

?

1. Имеют ли уравнения $5^{2x} = -7$, $2^{3x} = 9$ корни? Если уравнение имеет корни, то каким способом их можно найти?
2. Может ли быть посторонним корень показательного уравнения? Ответ обоснуйте. Приведите пример.
3. С какой целью применяется способ введения новой переменной? Ответ обоснуйте. Приведите пример.

Упражнения

А

Решите уравнения (16.1—16.6):

16.1. 1) $5^x = 625$; 2) $2^x = 1024$;

3) $3^x = 729$; 4) $7^x = \frac{1}{343}$.

16.2. 1) $2^{x+3} = 64$; 2) $3^{\frac{x}{2}} = 27$;

3) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 216$; 4) $\sqrt[3]{7^x} = \sqrt[5]{343}$.

16.3. 1) $3^{x+2} - 3^x = 72$; 2) $2^x - 2^{x-4} = 15$;

3) $3^{x+3} + 3^{x+2} + 3^{x+1} = 3159$;

4) $2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$.

16.4. 1) $3^{x^2+1} + 3^{x^2-1} = 270$;

2) $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$;

3) $2^{x^2+x-6} - 2^{x^2+x-9} = 56$;

4) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$.

16.5. 1) $\left(\frac{1}{0,125}\right)^x = 128$; 2) $5^{x^2+x-5} = \frac{1}{125}$;

3) $(0,5)^{x^2-9x+17,5} = \frac{8}{\sqrt{2}}$; 4) $(0,5)^{x^2-2x-2} = \frac{1}{64}$.

16.6. 1) $5^{2x^2-x} = 6^{2x^2-x}$; 2) $8 \cdot 7^{x^2-5x+7} = 7 \cdot 8^{x^2-5x+7}$;

3) $0,6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$; 4) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{125}{27}\right)^3$.

16.7. Решите уравнение графическим способом:

1) $2^x = 3$; 2) $0,2^x = 5$; 3) $6^x = -1$;

4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1} = 4$; 5) $7^{-x} = -2$; 6) $4^{x-1} = 4,4$.

Решите системы уравнений (16.8—16.9):

16.8. 1) $\begin{cases} 5^{x+y} = 125, \\ 3^{(x-y)^2-1} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 6^{x+y} = 216; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^{2x-y} = \frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27. \end{cases}$

16.9. 1) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 4^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-3x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5^{3x+y} = 125, \\ 7^{3x-2y} = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^{4x-2y} = 27\sqrt{3}, \\ 2^{4y+x} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$

B

Решите уравнения (16.10—16.14):

16.10. 1) $2^{x^2-6x+0,5} = \dfrac{1}{16\sqrt{2}}$; 2) $16\sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}} = 128$;

3) $\left(\dfrac{9}{16}\right)^{x+1} \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^{3x^2+5x} = \left(\dfrac{64}{27}\right)^3$; 4) $3^{x+1} \cdot 4^x = 0,25 \cdot 12^{3x-1}$.

16.11. 1) $\sqrt{3^{x-54}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-58}} = 162$; 2) $5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$;

3) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$; 4) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$.

16.12. 1) $5^{x-3} - 5^{x-4} = 16 \cdot 5^{x-5} + 4$;

2) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

4) $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$.

16.13. 1) $x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$;

2) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} = 16 \cdot 4^{\sqrt{6-x}}$;

3) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;

4) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

16.14. 1) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$;

2) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;

3) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$;

4) $8^x - 4^{x+0,5} - 2^x + 2 = 0$.

Решите системы уравнений (16.15—16.17):

16.15. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{3x} = 3^{7-y}, \\ \dfrac{1}{x} + 2 = \dfrac{12}{y}. \end{cases}$

16.16. 1) $\begin{cases} 2^x + 3^y - 31 = 0, \\ 2^x + 23 = 3^y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5^x - 2 \cdot 3^y + 13 = 0, \\ 2 \cdot 5^x - 19 = -3^y. \end{cases}$

16.17. 1) $\begin{cases} 7^x + 11^y = 18, \\ 4 \cdot 7^x - 11^y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 13^x + 2 \cdot 3^y = 67, \\ 13^x + 14 = 3^y. \end{cases}$

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Логарифм и его свойства, логарифмическая функция, область определения, уравнение, равносильные уравнения, системы уравнений, способы решения уравнений и систем уравнений.

§17. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Вы ознакомитесь с понятием логарифмического уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, логарифмическое уравнение, логарифм числа, основание логарифма, выражение под логарифмом, область допустимых значений переменной, решение уравнения

Определение. ***Логарифмическим уравнением*** *называется уравнение вида*

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) (a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0) \qquad (1)$$

и уравнение, сводящееся к нему.

Для решения логарифмических уравнений используются следующие способы:

1) приведение обеих частей уравнения к одинаковому основанию;
2) введение новой переменной;
3) потенцирование.

ПРИМЕР

1. Найдем корни уравнения $\log_5(2 - x) = 2$.

Решение. Вначале число 2, стоящее в правой части уравнения, заменим на логарифм с основанием 5. Тогда $\log_5(2 - x) = \log_5 25$. Далее, потенцируя обе части, имеем уравнение $2 - x = 25$, корень которого $x = -23$. Подставляя найденное значение в данное логарифмическое уравнение выясним, что $x = -23$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: -23.

Решение логарифмических уравнений необходимо начинать с нахождения области допустимых значений переменной x, учитывая, что областью определения логарифмической функции является множество положительных чисел. Затем необходимо проверить принадлежность найденных корней области допустимых значений.

ПРИМЕР **2.** Решим уравнение $\log_3(x^2 - 3x - 4) = \log_3(2x - 4)$.

Решение. Найдем область допустимых значений переменной x. Для этого, учитывая, что областью определения логарифмической функции являются только положительные числа, составим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0, \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x+1)(x-4) > 0, \\ x > 2. \end{cases}$$

Рис. 51

Изобразив решение каждого неравенства системы по отдельности на координатной прямой выясняем, что общей частью является интервал $(4; +\infty)$ (рис. 51). Значит, областью допустимых значений являются все числа больше 4.
Потенцируя данное логарифмическое уравнение, имеем $x^2 - 3x - 4 = 2x - 4$, отсюда $x^2 - 5x = 0$, корни: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. Проверим принадлежность найденных значений x интервалу $(4; +\infty)$. $x_2 = 0$ является посторонним корнем, так как не принадлежит данному интервалу, а $x_2 = 5$ есть корень уравнения, так как принадлежит указанному интервалу. Следовательно, корнем данного логарифмического уравнения является число 5.

Ответ: 5.

ПРИМЕР **3.** Найдем корни уравнения $\log_2(2x + 8) + \log_2(2x + 3) = \log_2(2 - 4x)$.
Решение. Найдем область допустимых значений переменной x, решив следующую систему неравенств: $\begin{cases} 2x + 8 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 2 - 4x > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > -4, \\ x > -\dfrac{3}{2}, \\ x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Отметив промежутки решений неравенств системы на координатной прямой выясняем, что переменная x должна удовлетворять условию: $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ (рис. 52).
Приведем данное логарифмическое уравнение к уравнению вида (1). Для этого к левой части уравнения применим свойство логарифма суммы:

$$\log_2(2x + 8) + \log_2(2x + 3) = \log_2[(2x + 8)(2x + 3)],$$
$$\log_2[(2x + 8)(2x + 3)] = \log_2(2 - 4x).$$

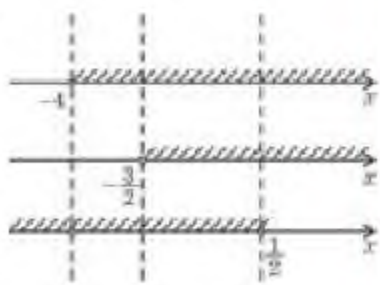


Рис. 52

Потенцируем последнее уравнение: $(2x + 8)(2x + 3) = 2 - 4x$, отсюда $2x^2 + 13x + 11 = 0$, корни: $x_1 = -5{,}5$ и $x_2 = -1$. $x_1 = -5{,}5$ не входит в область допустимых значений. Следовательно, корнем данного логарифмического уравнения будет $x_2 = -1$.

Ответ: -1.

ПРИМЕР **4.** Решим уравнение $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$.

Решение. Найдем область допустимых значений переменной x. Для этого решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+2>0, \\ 2x-7>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>2, \\ x>-2, \\ x>3{,}5. \end{cases}$$

Рис. 53

Как видно из рисунка 53, значения переменной x должны удовлетворять условию $x > 3{,}5$. Переходим к решению данного логарифмического уравнения. Применяя свойства логарифмов, вместо данного логарифмического уравнения имеем уравнение вида:

$$\log_7\frac{x-2}{x+2} = \log_7\frac{7}{2x-7}.$$

В полученном уравнении основания логарифмов одинаковые, поэтому $\frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{2x-7}$. Отсюда $(x-2)(2x-7) = 7(x+2)$ или $2x^2 - 18x = 0$, корни: $x_1 = 9$ и $x_2 = 0$. $x_1 = 9$ принадлежит области допустимых значений, а $x_2 = 0$ — посторонний корень.

Ответ: 9.

ПРИМЕР **5.** Решим уравнение $\log_5(x^2+8) = \log_5(x+1) + 3\log_5 2$.

Решение. Найдем область допустимых значений переменной x. Для этого решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2+8>0, \\ x+1>0. \end{cases}$$

Неравенство $x^2 + 8 > 0$ выполняется при любом значении переменной x, поэтому достаточно взять множество решений второго неравенства системы.

Следовательно, областью допустимых значений переменной x является интервал $(-1; +\infty)$.

Используя свойства логарифма, преобразуем правую часть данного логарифмического уравнения: $\log_5(x^2+8) = \log_5(x+1) + \log_5 8$, или $\log_5(x^2+8) = \log_5(8(x+1))$. Потенцируем обе части уравнения: $x^2 + 8 = 8(x+1)$, или $x^2 - 8x = 0$, корни: $x_1 = 0$, $x_2 = 8$. Полученные значения переменной x принадлежат интервалу $(-1; +\infty)$, поэтому являются решениями данного уравнения.

Ответ: 0; 8.

ПРИМЕР **6.** Решим уравнение $x^{\log_6 x - 1} = 36$.

Решение. Область допустимых значений переменной x есть интервал $(0; +\infty)$. Приведем данное уравнение к виду (1). Для этого прологарифмируем обе части уравнения по основанию 6:

$$\log_6 x^{\log_6 x - 1} = \log_6 36 \text{ или } (\log_6 x - 1)\log_6 x = 2, \text{ или } \log_6^2 x - \log_6 x - 2 = 0.$$

Введем новую переменную $\log_6 x = u$, получим квадратное уравнение $u^2 - u - 2 = 0$, тогда его корни: $u_1 = -1$; $u_2 = 2$.

Переходя к замене имеем: $\log_6 x = -1$ и $\log_6 x = 2$. Полученные уравнения, соответственно, имеют корни: $x_1 = \frac{1}{6}$ и $\log_6 x = 2$, $x_2 = 36$. Найденные значения x_1 и x_2 принадлежат промежутку $(0; +\infty)$. Следовательно, корнями данного логарифмического уравнения являются оба значения переменной x.

Ответ: $\frac{1}{6}$; 36.

Вы научитесь решать системы логарифмических уравнений.

Рассмотрим решение логарифмических систем уравнений.

Определение. ***Системой логарифмических уравнений*** *называется система уравнений, содержащая логарифмическое уравнение.*

Для решения системы логарифмических уравнений используются способы решения систем уравнений и способы решения логарифмических уравнений.

ПРИМЕР

7. Решим систему уравнений $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6. \end{cases}$

Решение. Область допустимых значений переменных x и y — положительные числа. Используя свойства логарифма приведем данную систему уравнений к виду

$\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 (xy) = \log_2 64 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 34, \\ xy = 64. \end{cases}$

От последней системы уравнений переходим к квадратному уравнению $x^2 - 34x + 64 = 0$, корнями которого являются: $x_1 = 2$ и $x_2 = 32$. Тогда, соответственно, $y_1 = 32$ и $y_2 = 2$.

Отсюда получим (2; 32), (32; 2).

Найденные пары чисел являются корнями системы уравнений.

Ответ: (2; 32) или (32; 2).

ПРИМЕР

8. Решим систему уравнений $\begin{cases} \lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ 2\log_3 (x - y) = \log_3 (y + 2). \end{cases}$

Решение. Применяя свойства логарифма, приведем данную систему уравнений к виду

$\begin{cases} \lg(2x - y) + \lg 10 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ \log_3 (x - y)^2 = \log_3 (y + 2) \end{cases}$ или $\begin{cases} \lg[(2x - y) \cdot 10] = \lg[(y + 2x) \cdot 6], \\ \log_3 (x - y)^2 = \log_3 (y + 2) \end{cases}$ или

$\begin{cases} x = 2y, \\ (x - y)^2 = y + 2. \end{cases}$

Используя способ подстановки, второе уравнение системы приведем к виду: $y^2 - y - 2 = 0$. Отсюда $y_1 = -1$, $y_2 = 2$, соответственно, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, т. е. имеем два решения $(-2; -1)$; $(4; 2)$. Подставляя найденные значения x и y в искомую систему уравнений выясняем, что $(-2; -1)$ — посторонний корень.

Ответ: (4; 2).

1. Обязательно ли надо находить область допустимых значений переменной логарифмического уравнения?
2. Назовите общие способы решения показательных и логарифмических уравнений.
3. В каких случаях значение переменной x не является решением логарифмического уравнения? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

Решите уравнения (**17.1—17.5**):

17.1. 1) $\log_7 x = 2$; 2) $\log_{\frac{2}{3}} x = 3$;

3) $\log_5 x = -3$; 4) $\log_{\frac{1}{7}} x = -2$.

17.2. 1) $\log_{\frac{1}{8}}(x - 4) = -1$; 2) $\log_{2,5}(x + 2) = 1$;

3) $\lg x = -2$; 4) $\ln x = 1$.

17.3. 1) $\lg_2(x^2 - 2x) = 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(4x + x^2) = -1$;

3) $\lg_{0,5}(x^3 + 1) = -1$; 4) $\lg(7x - x^2) = 1$.

17.4. 1) $\log_{3,2}(2 - x) = \log_{3,2}(3x + 6)$;

2) $\log_{0,3}(1 + 2x) = \log_{0,3}(4x - 10)$;

3) $\log_2(x - 6) + \log_2(x - 8) = 3$;

4) $\log_8(x - 2) - \log_8(x - 3) = \frac{1}{3}$.

17.5. 1) $\lg(5 - x) = \frac{1}{3}\lg(35 - x^2)$;

2) $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x + 5) = 0$;

3) $\log_{\sqrt{5}}(4x - 6) - 2 = \log_{\sqrt{5}}(2x - 5)$;

4) $\log_2(3x - 6) - 1 = \log_2(9x - 19)$.

17.6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 8, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 14, \\ \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 1, \\ x + y = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 0, \\ 2x - y = 10. \end{cases}$

В

Решите уравнения (17.7 — 17.11):

17.7. 1) $\log_7(x-2)+\log_7(x+2)=\log_7(4x+41)$;

2) $\log_4(x+1)-\log_4(1-x)=\log_4(2x+3)$;

3) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$;

4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=3\lg 2+\lg(x-2)$.

17.8. 1) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$; 2) $2\lg x-\lg 4+\lg(5-x^2)=0$;

3) $\lg(x(x+9))+\lg\dfrac{x+9}{x}=0$; 4) $\dfrac{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}{\lg 8-\lg(x-5)}=-1$.

17.9. 1) $3\lg^2(x-1)-10\lg(x-1)+3=0$;

2) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$;

3) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\dfrac{1}{x}$;

4) $\lg^2 x-2\lg x=\lg^2 100-1$.

17.10. 1) $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x)+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8$; 2) $\log_2^2 x^5-5\log_2 x^3=10$;

3) $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1\cdot x)=\lg x^3-3$; 4) $\dfrac{1-\lg^2(x^2)}{\lg x-2\lg^2 x}=4\lg x+5$.

17.11. 1) $\log_2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\log_2 x}=\dfrac{4}{3}$; 2) $\log_2^2(2x)=4\log_2 x$;

3) $\log_3(3^{x+1}+3^x)=\log_3 324$; 4) $\lg(x^2)+\lg(-x)=9$.

Решите системы уравнений (17.12—17.13):

17.12. 1) $\begin{cases}\lg x+\lg 2=\lg y,\\ 3x-2y=-2;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_2(x+y)+\log_2(x^2-xy+y)=1,\\ x-y=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}-\dfrac{4}{9}=0,\\ \lg(3x-y)-4\lg 2=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{15},\\ \log_3 x+\log_3 y=1+\log_3 5.\end{cases}$

17.13. 1) $\begin{cases}\lg(x-y)=2,\\ \lg x=\lg 3+\lg y;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=2y,\\ \log_3(x-y)+\log_3(x+y)=1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_4 x-\log_4 y=0,\\ x^2-5y^2+4=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}1+\log_2 y=\log_3(x+y),\\ \log_2(x+y)+\log_2(x^2-xy+y^2)=1.\end{cases}$

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Степень, основание и показатель степени, показательная функция, ее свойства и график, неравенство, способы решения неравенств, метод интервалов.

§ 18. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Вы научитесь решать показательные неравенства.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Неравенство, показательное неравенство, основание степени, показатель степени, равносильность, область допустимых значений переменной, решение неравенства

В предыдущем параграфе вы овладели знаниями, связанными с показательной функцией, научились решать показательные уравнения. Теперь рассмотрим пути решения показательных неравенств.

Введем определение показательного неравенства.

Определение. ***Показательным неравенством*** *называется неравенство вида*

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \ (a^{f(x)} < a^{g(x)};\ a^{f(x)} \geq a^{g(x)};\ a^{f(x)} \leq a^{g(x)}), \text{ где } a > 0,\ a \neq 1 \qquad (1)$$

и неравенство, приводящееся к данному виду.

Для решения показательного неравенства применяется следующая теорема.

Теорема. *Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$; если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы обе части неравенства (1) разделим на $a^{g(x)}$. Тогда получим следующее неравенство:

$$\frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} > 1.$$

Запишем последнее неравенство в виде неравенства $a^{f(x)-g(x)} > 1$, затем, обозначив разность $f(x) - g(x)$ через t, получим: $a^t > 1$.

Для решения последнего неравенства достаточно рассмотреть два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

I. Если $a > 1$, то неравенство $a^t > 1$ выполняется при $t > 0$, отсюда $f(x) - g(x) > 0$, или $f(x) > g(x)$.

II. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^t > 1$ выполняется при $t < 0$, отсюда $f(x) - g(x) < 0$, или $f(x) < g(x)$. ■

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 1. Решим неравенства: 1) $3^{3x-5} > 81$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$;

3) $0{,}98^{x^2+3} < 0{,}98^{6x-5}$; 4) $2^{x^2+7} > 2^{8x}$.

Решение. 1) Приведем неравенство $3^{3x-5} > 81$ к одинаковому основанию. Тогда получим $3^{3x-5} > 3^4$. В полученном неравенстве основание $3 > 1$, следовательно, по теореме $3x - 5 > 4$, или $x > 3$;

2) число, данное в правой части неравенства $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, записав в виде степени с основанием $\frac{1}{2}$, получим равносильное неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$, или $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

В последнем неравенстве $0 < \frac{1}{2} < 1$, поэтому по теореме имеем $2x - 4 > \frac{1}{2}$. Тогда $2x > 4{,}5$ или $x > 2{,}25$;

3) в неравенстве $0{,}98^{x^2+3} < 0{,}98^{6x-5}$ основания показательных функций одинаковы и $0 < 0{,}98 < 1$. Следовательно, по теореме $x^2 + 3 > 6x - 5$, или $x^2 - 6x + 8 > 0$. Решая неравенство методом интервалов получим $x < 2$, $x > 4$, т. е. $x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$ (рис. 54):

Рис. 54

4) в неравенстве $2^{x^2+7} < 2^{8x}$ основания одинаковы и больше 1, поэтому вместо данного неравенства возьмем равносильное неравенство $2^{x^2+7} < 2^{8x}$, или $x^2 + 7 < 8x$. Применяя метод интервалов, получим, что $x \in (1; 7)$ (рис. 55).

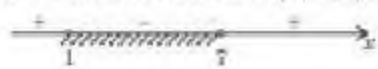


Рис. 55

Ответ: 1) $(3; +\infty)$; 2) $(2{,}25; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$; 4) $(1; 7)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$.

Решение. Преобразовав левую часть данного неравенства получим: $2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52$. Вынесем общий множитель 2^{2x-4} за скобки, получим неравенство вида $2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52$. Отсюда $2^{2x-4}(16 - 4 + 1) > 52$, $2^{2x-4} > 4$, $2^{2x-4} > 2^2$. В последнем неравенстве основания одинаковы и $2 > 1$, поэтому $2x - 4 > 2$, или $x > 3$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство $3^{x-2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1}$.

Решение. Показательные функции с одинаковыми основаниями перенесем в левую или правую части неравенства. Тогда уравнение примет вид: $7^x - 4 \cdot 7^{x-1} < 34 \cdot 3^{x-1} - 3^{x+2}$, отсюда $7^{x-1}(7 - 4) < 3^{x-1}(34 - 3^3)$, или $7^{x-1} \cdot 3 < 3^{x-1} \cdot 7$.

Обе части неравенства разделим на выражение $3 \cdot 3^{x-1} > 0$ и получим неравенство $\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1} < \frac{7}{3}$ с основанием $\frac{7}{3} > 1$, поэтому $x - 1 < 1$ или $x < 2$.

Ответ: $(-\infty; 2)$.

1. Применяются ли при решении показательных неравенств способы решения показательных уравнений?
2. Имеется ли сходство в решениях показательных неравенств и линейных неравенств? Ответ обоснуйте.
3. Учитывается ли при решении показательных неравенств условие о том, что основание должно быть только положительным? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

Решите неравенства (18.1—18.7):

18.1. 1) $2^x \geq 32$; 2) $\left(\frac{4}{7}\right)^x < \frac{16}{49}$;

3) $6^{x-4} \leq 36$; 4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} > \frac{27}{125}$.

18.2. 1) $5^{1-x} < 125$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x+1} > \frac{27}{64}$;

3) $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+4} > \left(\frac{4}{81}\right)^{3+x}$; 4) $\left(\frac{1}{32}\right)^x \leq 8^{2x-1}$.

18.3. 1) $3^x \cdot 9^x \leq 81$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \geq 32$;

3) $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-1} < \left(2\frac{14}{25}\right)^2$; 4) $(2{,}5)^{x+4} \geq (0{,}16)^{x-2}$.

18.4. 1) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \leq 26$;

3) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \leq 315$; 4) $2^x - 2^{x-4} > 15$.

18.5. 1) $5^{2x+1} + 3 \cdot 5^{2x-1} > 3500$; 2) $3^{x+1} + 3^{x-1} \geq 270$;

3) $10^{x-5} + 10^{x-2} < 1001$; 4) $2^x - 2^{x-4} - 15 \leq 0$.

18.6. 1) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$; 2) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$;

3) $4^x + 2^{x+2} > 20$; 4) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$.

18.7. 1) $3^{x-1} > 11^{x-1}$; 2) $2^x < 5^x$;

3) $4^{x-2} \leq 7^{x-2}$; 4) $6^{x^2-4} \geq 13^{x^2-4}$.

B

Решите неравенства (18.8—18.13):

18.8. 1) $2^{\frac{x+1}{x-2}} \geqslant 4$; 2) $0{,}125 < 16^x$;

3) $36^{0{,}5x^2-1} > \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; 4) $125\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$.

18.9. 1) $2^{x^2+2x-3} - 8 \cdot 2^x > 0$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} > 5^{-x}$;

3) $2^{x^2+12} \leqslant 64 \cdot 2^{5x}$; 4) $8 \cdot 2^{x^2-3x} < (0{,}5)^{-1}$.

18.10. 1) $6 \cdot 5^{x+1} - 5^{x+2} + 6 \cdot 5^x \geqslant 55$; 2) $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 2^{x+2} \leqslant 14$;

3) $x^3 \cdot 3^x - 3^x > 0$; 4) $x^2 \cdot 4^x - 4^x < 0$.

18.11. 1) $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15 \geqslant 0$; 2) $13^{2x} - 14 \cdot 13^x + 13 \leqslant 0$;

3) $3^{x-2} + 9^{x-1} - 810 > 0$; 4) $2 \cdot 4^{\cos x} - 3 \cdot 2^{\cos x} + 1 < 0$.

18.12. 1) $4^{x-2} + 8 < 9 \cdot 2^{x-2}$;

2) $3^{1+\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} \leqslant 12$;

3) $4^{1-x} + 2^{1-x} - 4 \leqslant 4 \cdot 2^{1-x} - 6$;

4) $4^{x-2} - 6 \cdot 2^{x-2} + 8 < 0$.

18.13. 1) $4^x - 9^x < 0$; 2) $5 \cdot 4^x \leqslant 4 \cdot 5^x$;

3) $3^{x-2} - 2^{x-3} < 0$; 4) $2^{2x-1} - 5^{2x-1} \geqslant 0$.

18.14. Найдите общее решение неравенств:

1) $3^x > 9$ и $x - 2 \leqslant 6$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^x > 25^{-1}$ и $1 - x \leqslant 0$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 8^{-1}$ и $4x - 3 > 1$; 4) $4^x \leqslant 64$ и $5 - 2x < 0$.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Функция, область определения, логарифм и его свойства, логарифмическая функция, ее свойства и графики, неравенства, способы решения неравенств, метод интервалов, показательные неравенства.

§ 19. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Вы научитесь решать логарифмические неравенства.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Неравенство, логарифмическое неравенство, основание логарифма, показатель степени, область допустимых значений переменной, равносильность, решение неравенства

вы знаете: Способы решения линейных, квадратных, дробно-рациональных, тригонометрических и показательных неравенств.

В школьном курсе рассматривается еще один вид неравенств — логарифмические неравенства.

Определение. ***Логарифмическим неравенством*** *называется неравенство вида*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$(\log_a f(x) < \log_a g(x),\ \log_a f(x) \geqslant \log_a g(x),\ \log_a f(x) \leqslant \log_a g(x)),$$

$$\text{где } a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0 \qquad (1)$$

и неравенства, сводящиеся к ним.

При решении логарифмических неравенств вида (1) используется следующая теорема.

Теорема. *Если* $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, *то при* $a > 1$ *неравенство* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *равносильно неравенству* $f(x) > g(x)$, *а при* $0 < a < 1$ *неравенство* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *равносильно неравенству* $f(x) < g(x)$.

Доказательство. Для доказательства неравенство (1) преобразуем в неравенство $\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$. Отсюда по свойству логарифма разности имеем:

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

Последнее неравенство рассмотрим для двух случаев:

1) при $a > 1$, по свойству логарифмической функции $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$, т. е. $f(x) > g(x)$;

2) при $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает, поэтому $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$, т. е. $f(x) < g(x)$. ■

Таким образом, для решения логарифмического неравенства вида (1) от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ переходим:

1) при $a > 1$ к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}; \qquad (2)$$

2) при $0 < a < 1$ — к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}. \qquad (3)$$

Рассмотрим примеры решения логарифмических неравенств.

ПРИМЕР

1. Решим неравенство $\log_5(3x + 5) > \log_5(15 - 2x)$.

Решение. Данное неравенство является неравенством вида (1) и $a = 5 > 1$, поэтому для нахождения решения переходим к системе неравенств вида (2):

$$\begin{cases} 3x + 5 > 0, \\ 15 - 2x > 0, \\ 3x + 5 > 15 - 2x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > -\dfrac{5}{3}, \\ x < \dfrac{15}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$

Изобразим множество решений каждого неравенства системы на координатной прямой и найдем их общую часть. Тогда множеством решений данного неравенства является промежуток $2 < x < \dfrac{15}{2}$ (рис. 56).

Ответ: $\left(2; \dfrac{15}{2}\right)$.

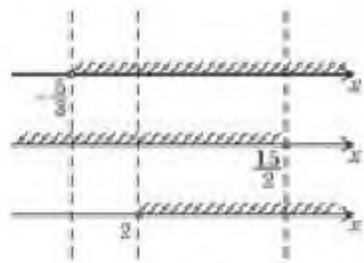


Рис. 56

ПРИМЕР

2. Решим неравенство $\log_{0,8}(x - 2) > \log_{0,8}(7 - 0,5x)$.

Решение. Данное неравенство имеет вид (1) $a = 0,8 < 1$, поэтому переходим к системе (3):

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 7 - 0,5x > 0, \\ x - 2 < 7 - 0,5x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x < 14, \\ x < 6. \end{cases}$$

Изображая множество решений каждого неравенства системы отдельно на координатной прямой, получим общую часть промежутков, т. е. $2 < x < 6$ (рис. 57). Следовательно, множеством решений данного неравенства является промежуток $(2; 6)$.

Рис. 57

Ответ: $(2; 6)$.

ПРИМЕР

3. Решим неравенство $\log_{0,25}(16 + 4x - x^2) > -2$.

Решение. Предварительно преобразуем правую часть неравенства, т. е. число -2 заменим логарифмом по основанию 0,25. Для этого число 0,25 возведем в -2-ю степень: $(0,25)^{-2} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} = 16$. Тогда данное неравенство примет следующий вид: $\log_{0,25}(16 + 4x - x^2) > \log_{0,25} 16$.

Полученное неравенство имеет вид (1) и $a = 0,25$, поэтому переходим к равносильной системе (3):

$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0, \\ 16 + 4x - x^2 < 16 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - 4x - 16 < 0, \\ x^2 - 4x > 0, \end{cases}$ или

$\begin{cases} (x - 2 + 2\sqrt{5})(x - 2 - 2\sqrt{5}) < 0, \\ x(x - 4) > 0. \end{cases}$

Рис. 58

Решая каждое неравенство методом интервалов, изобразим множество решений на координатных прямых (рис. 58). По рисунку определим, что общим промежутком являются промежутки $(2 - 2\sqrt{5}; 0] \cup [4; 2 + 2\sqrt{5})$, и это будет решением данного логарифмического неравенства.

Ответ: $(2 - 2\sqrt{5}; 0] \cup [4; 2 + 2\sqrt{5})$.

ПРИМЕР **4.** Решим неравенство $4\log_2^2 x - 4 < 0$.

Решение. Вначале введем обозначение $\log_2 x = u$, тогда получим квадратное неравенство $4u^2 - 4 < 0$. Решая его методом интервалов имеем $u \in [-1; 1]$ (рис. 59).

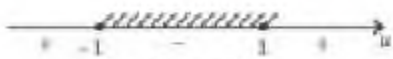


Рис. 59

Тогда $\log_2 x \in [-1; 1]$, т.е. $-1 < \log_2 x < 1$, или $\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 2$. Учитывая, что основание логарифма $a = 2 > 1$, от двойного неравенства перейдем к двойному неравенству $\frac{1}{2} < x < 2$, или $0,5 < x < 2$. Областью допустимых значений переменной x является множество всех положительных чисел, поэтому множеством решений неравенства будет отрезок $[0,5; 2]$.

Ответ: $[0,5; 2]$.

! Вы научитесь решать системы логарифмических неравенств.

Наряду с логарифмическими неравенствами можно рассмотреть простейшие системы, содержащие логарифмические неравенства.

ПРИМЕР **5.** Решим систему неравенств $\begin{cases} 5 - x > 0, \\ \log_6 (x + 3) > 1. \end{cases}$

Решение. Используя способ решения линейного неравенства с одной переменной, учитывая область определения логарифмической функции и заменяя во втором неравенстве системы число 1 выражением $\log_6 6$, можно перейти от данной системы неравенств к следующей системе неравенств:

$\begin{cases} -x > -5, \\ \log_6 (x + 3) > \log_6 6, \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 5, \\ x + 3 > 6, \\ x > -3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 5, \\ x > 3, \\ x > -3. \end{cases}$

Рис. 60

Изобразим по отдельности на координатных прямых множество решений каждого неравенства (рис. 60). Таким образом, по рисунку определим, что решением данной системы неравенств является отрезок [3; 5].

Ответ: [3; 5].

1. Используются ли свойства логарифма при решении логарифмических неравенств?
2. Какие способы применяются при решении логарифмических неравенств?
3. Зависит ли решение логарифмического неравенства от основания логарифмической функции? Ответ обоснуйте.

Упражнения

А

Решите неравенства (**19.1—19.5**):

19.1. 1) $\log_4 x > 2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x < -3$;

3) $\lg x > -2$; 4) $\ln x \leqslant 1$.

19.2. 1) $\log_6(4x + 1) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) \geqslant -1$;

3) $\log_{0,4}(x + 0,6) < 1$; 4) $\log_{0,2}(7 - x) > -1$.

19.3. 1) $\log_5(3x + 2) \geqslant \log_5(x - 1)$; 2) $\log_{0,8}(6x - 2) \geqslant \log_{0,8}(x + 5)$;

3) $\lg(2x - 1) < \lg(3x + 2)$; 4) $\ln(4 - 2x) < \ln(x + 3)$.

19.4. 1) $\log_{0,4}(2x - 5) > \log_{0,4}(x + 1)$; 2) $\log_4(3x - 1) < \log_4(2x + 3)$;

3) $\log_3 \frac{2 - 3x}{x} \geqslant -1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) < \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$.

19.5. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 4) > \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x - 2)$;

2) $1 + \log_2(x - 2) > \log_2(x^2 - 3x + 2)$;

3) $\lg(x - 2) + \lg(27 - x) < 2$;

4) $\lg(2x - 3) > \lg(x + 1)$.

Решите системы неравенств (19.6—19.7):

19.6. 1) $\begin{cases} x-18 < 0, \\ \log_5 x > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x < -2, \\ x+1 > 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \ln x > 0, \\ 5-x < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \lg x < 1, \\ x+7 > 0. \end{cases}$

19.7. 1) $\begin{cases} x+3 > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x > -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8-x > 0, \\ \log_5 x < 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \log_{0,7} x < 1, \\ x-0,3 > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 9-x < 0, \\ \log_{\frac{1}{6}} x > -1. \end{cases}$

B

Решите неравенства (19.8—19.11):

19.8. 1) $\log_2 x > \log_2(3-x)$; 2) $\lg x + \lg(x-1) < \lg 6$;

3) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$; 4) $\log_{0,5} x > -6 + \log^2_{0,5} x$.

19.9. 1) $\log_3(11 + 4^x) > 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(22 + 3^x) > -2$;

3) $\lg(x^2 - 1) < 0$; 4) $\lg(1 - x^2) > 0$.

19.10. 1) $\log_5(x^2 - 3) > 0$; 2) $\log_8(-9 + x^2) > 0$;

3) $\log_4 \frac{2x-1}{x+1} > \log_4 3$; 4) $\lg \frac{3-x}{x+2} < 1$.

19.11. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)} > 1$; 2) $2^{\log_2(x^2-1)} < 2$;

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\frac{1}{6}}(x-1)} > 7^{\log_7(2-x)}$; 4) $0,9^{\log_{0,9}(x^2+x)} < 6^{\log_6(x+3)}$.

Решите системы неравенств (19.12—19.13):

19.12. 1) $\begin{cases} \log_{0,3}(x+1) > -1, \\ 2x-1 < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg(1-x) < 1, \\ 3-x < 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \ln(x+5) < 0, \\ x+15 > 6x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 11x + 12 > 13x, \\ \log_7(31-2x) < 1. \end{cases}$

19.13. 1) $\begin{cases} x^2 - 4 \geqslant 0, \\ \log_{\frac{1}{7}}(x+2) \leqslant -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0, \\ \log_2(x-3) \leqslant 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{81}(x+2) > \frac{1}{2}, \\ 36 - x^2 > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_3(x-5) < 1, \\ x^2 - 16 > 0. \end{cases}$

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Решите уравнение $\left(\frac{7}{11}\right)^{4x-5} = \left(\frac{11}{7}\right)^{5x-4}$:

A) 1; B) 0; C) –1; D) не имеет корней.

2. Найдите наибольшее натуральное решение неравенства $0,37^{x-9} > 0,37$:

A) 10; B) 8; C) 9;

D) такое число не существует.

3. Решите уравнение $10^{\cos x} - \sqrt{10} = 0$:

A) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$; B) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

C) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; D) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

4. Найдите корни уравнения $\log_5(x-7) + \log_5(x-2) = \log_5(x+5)$:

A) 9; B) 1; C) 1; 9; D) 7.

5. При каких значениях x функция $y = \log_2(x-5)$ принимает положительные значения:

A) $(5; +\infty)$; B) $[5; +\infty)$; C) $(6; +\infty)$; D) $[6; +\infty)$?

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} < 5: \end{cases}$

A) $[-2; 2]$; B) $(-\infty; -2]$; C) $[2; +\infty)$; D) $(0; +\infty)$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_5(x+y) = 1, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$:

A) (3; 2); B) (2; 3); C) (–2; –3); D) (3; 1).

8. Найдите общее решение неравенств $5^{x^2} \geq 5^{10x-21}$ и $5 - x > 0$:

A) $[3; 7]$; B) $(-\infty; 3]$; C) $(5; 7]$; D) $[3; 5) \cup (5; 7]$.

9. Укажите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\log_{\frac{1}{7}}(2x-1) \geq 0$:

A) 1; B) 0; C) 2;

D) такое число не существует.

10. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_2 x \geq 0, \\ 0,19^{x^2} > 0,19^x: \end{cases}$

A) $(0; 1)$; B) $(0; 1]$; C) $(0; +\infty)$; D) нет решения.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Варианта, вариационный ряд, ряд распределения, полигон, полигон частоты.

ГЛАВА VI ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 20. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ И ВЫБОРКА

Вы ознакомитесь с основными определениями математической статистики.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Выборка, генеральная совокупность, статистический ряд частота, гистограмма

При проведении экспериментов часто получают информацию очень большого объема. Например, балловые результаты ЕНТ учащихся в городе или районе, о размерах вкладов населения в банках Казахстана, масса тела и рост призывников на военную службу из конкретной области РК, количество посещения супермаркета в течение дня, и т. д.

Также статистика занимается: сбором и хранением информации, разработкой различных прогнозов, оценкой их достоверности и т. д. Если одна из основных задач математической статистики состоит в надлежащей обработке полученной информации, тогда и остальные задачи достижимы.

Порядок преобразования первоначально полученной информации примерно следующий:

— данные измерений (опыта) упорядочивают и группируют;

— после группировки составляют таблицы измерений данных;

— по таблице распределения строят графики распределения данных;

— составляют своего рода паспорт данного измерения, в котором собрано небольшое количество основных числовых характеристик полученных измерений.

Итак, изучаются некоторые объекты и их свойства, для чего проводится достаточно большое количество испытаний (измерений).

Генеральной совокупностью называется совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех наблюдений, производимых в одинаковых условиях над одним объектом.

Выборочной совокупностью или *выборкой* называется совокупность объектов или результатов наблюдения над объектом, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.

Объемом выборки называется число объектов или наблюдений в выборке.

Значения выборки называют *наблюдаемыми значениями случайной величины X*.

Для получения достоверных, надежных выводов выборка должна быть достаточно представительной по объему. Большая выборка — это неупорядоченное множество чисел. Для исследования выборку приводят к наглядному упорядоченному виду.

вы знаете: Вариационные ряды состоят из двух элементов: частоты и варианты.

Вариантой называют отдельное значение варьируемого признака, которое он принимает в ряду распределения.

Частота — это численность отдельных вариант или каждой группы вариационного ряда.

Пусть дан ряд $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$. Здесь варианта x_1 встречается n_1 раз, варианта x_2 встречается n_2 раз, варианта x_3 встречается n_3 раз и т. д.

Тогда равенство $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ является объемом выборки.

n_i является частотой варианты x_i, а $\frac{n_i}{n}$ число — относительной частотой.

вы знаете: Таблица, данная ниже, является статистическим рядом частоты:

Таблица 6

Варианта	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Частота варианты	n_1	n_2	n_3	...	$\frac{n_k}{n}$

вы знаете: *Полигон частот* (многоугольник) представляет собой ломаную, соединяющую точки, соответствующие срединным значениям интервалов группировки и частотам этих интервалов.

Полигон (*polygon*) в переводе с греческого означает многоугольник.

Составим таблицу, в которой представлены варианты с относительной частотой:

Таблица 7

Варианта x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Данная таблица называется *вариационным рядом относительной частоты*.

Ломаная, соединяющая точки, соответствующие срединным значениям интервалов группировки и относительным частотам этих интервалов, называется *полигоном относительной частоты*.

Иначе говоря, для построения полигона относительной частоты на координатной плоскости отмечают точки: $(x_1; \frac{n_1}{n})$, $(x_2; \frac{n_2}{n})$, ... , $(x_k; \frac{n_k}{n})$ и соединяют их отрезками.

ПРИМЕР 1. Дан числовой ряд: 2, 3, 4, 5, 2 ,2 , 5, 3 ,3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 2, 2, 2, 2. Найдите объем выборки, варианты выборки, составьте вариационный ряд частоты и вариационный ряд относительной частоты, постройте полигон частоты.

Решение. По условию задачи объем равен 20. В данном ряду встречаются числа 2, 3, 4, 5. Они являются вариантами выборки.

Составим вариационный ряд частоты:

Таблица 8

Варианта x_i	2	3	4	5
Частота варианты n_i	7	4	3	6

Составим вариационный ряд относительной частоты:

Таблица 9

Варианта x_i	2	3	4	5
$\frac{n_i}{n}$	0,35	0,2	0,15	0,3

Построим полигон частот (рис. 61).

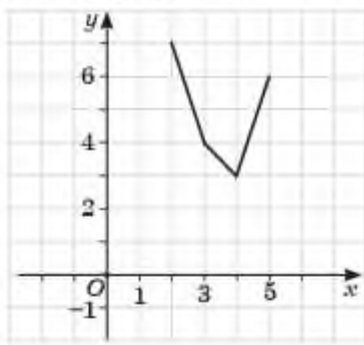


Рис. 61

1. Назовите основные термины математической статистики.
2. Чем отличается генеральная совокупность от выборки?
3. Что показывает полигон частот, полигон относительной частоты?
4. Как составляется таблица абсолютных и относительных частот для выборки?

Упражнения

А

20.1. Дан числовой ряд: 6, 3, 2, 6, 3, 5, 3, 5, 6, 6, 2, 2, 3, 6, 3, 5, 3, 5, 2, 6. Найдите объем выборки, варианты выборки, составьте вариационный ряд частоты и вариационный ряд относительной частоты.

20.2. Дан числовой ряд: 10, 9, 4, 8, 8, 10, 9, 4, 4, 4, 9, 8, 8, 9, 4, 8, 10, 8, 10, 8. Найдите объем выборки, варианты выборки, составьте вариационный ряд частоты и вариационный ряд относительной частоты и относительных частот в процентах.

20.3. Результаты оценок суммативного оценивания по алгебре и началам анализа за I четверть среди учащихся 10-х классов представлены в таблице 11.

Таблица 10

3	4	3	4	3	4	5	4	3	3
4	3	5	3	3	4	3	5	2	4
3	4	3	3	4	5	5	4	5	4

1) Составьте вариационный ряд результатов и найдите объем выборки;
2) составьте вариационный ряд относительных частот.

20.4. По вариационному ряду частот найдите объем выборки и постройте полигон частот (табл. 11—13).

1)

Таблица 11

x_i	7	9	10	12
n_i	9	2	3	6

2)

Таблица 12

x_i	11	13	17	19
n_i	6	8	6	5

3)

Таблица 13

x_i	3	5	7	9	11
n_i	6	5	9	4	6

B

20.5. В таблице 14 приведены результаты измерения роста (в см) группы учеников.

Таблица 14

157	159	156	158	158
156	158	159	159	157
155	155	154	156	159
158	156	154	160	156

По данным таблицы:

1) составьте вариационный ряд результатов и найдите объем выборки;

2) составьте вариационный ряд относительных частот;

3) составьте вариационный ряд относительных частот в процентах.

20.6. В крестьянском хозяйстве при сборе картофеля провели взвешивание отдельных клубней. Результаты массы клубней (в граммах) приведены в таблице 15.

Таблица 15

45	50	48	49	45
48	49	45	50	50
48	48	49	50	45

По данным таблицы:

1) составьте вариационный ряд результатов и найдите объем выборки;

2) составьте вариационный ряд относительных частот;

3) составьте вариационный ряд относительных частот в процентах.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Варианта, вариационный ряд, ряд распределения, полигон, полигон частоты, выборка, генеральная совокупность, статистический ряд, частота, гистограмма.

§ 21. ДИСКРЕТНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ

Вы ознакомитесь с понятием дискретный вариационный ряд, научитесь обрабатывать выборочные данные для составления дискретных вариационных рядов.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Ряд, группа, дискретный вариационный ряд, интервальный вариационный ряд

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Рядами распределения* называются группировки особого вида, при которых по каждому признаку, группе признаков или классу признаков известны численность единиц в группе либо удельный вес этой численности в общем итоге.

Ряды распределения могут быть построены или по количественному, или по атрибутивному признаку.

Ряды распределения, построенные по количественному признаку, называются *вариационными рядами*.

Вариационные ряды бывают *дискретные* и *интервальные*. Ряд распределения может быть построен по непрерывно варьирующему признаку (когда признак может принимать любые значения в рамках какого-либо интервала) и по дискретно варьирующему признаку (принимает строго определенные целочисленные значения).

Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариантов с соответствующими им частотами или частностями. Варианты дискретного ряда — это дискретно прерывно изменяющиеся значения признака, обычно это результат подсчета.

Дискретные вариационные ряды строят обычно в том случае, если значения изучаемого признака могут отличаться друг от друга не менее чем на некоторую конечную величину.

В дискретных рядах задаются точечные значения признака.

ПРИМЕР 1. Имеются данные о тарифных разрядах 20 рабочих. Построить дискретный вариационный ряд распределения рабочих по тарифному разряду: 2, 3, 2, 4, 4, 5, 5, 4, 6, 3, 1, 4, 4, 5, 5, 6, 4, 3, 2, 3.

Решение. Сначала составим таблицу. Так как ряды распределения имеют два элемента, то таблица будет состоять из двух строк.

Первая строка — это всегда варианта, в данном примере по условию это — тарифный разряд рабочих; вторая строка — это частота — как часто встречается варианта, а именно, численность рабочих определенного разряда.

Учитывая условие задания, выберем те значения, которые встречаются хотя бы один раз. В данном случае это следующие числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Затем подсчитаем сколько же раз встречается каждое значение варианты и составим следующую таблицу (табл. 16):

Таблица 16

Тарифный разряд (x_i)	1	2	3	4	5	6
Численность рабочих (n_i)	1	3	4	6	4	2

Таким образом, в результате получен дискретный вариационный ряд распределения рабочих по тарифному разряду.

Разность между $x_n - x_1$ называется *размахом измерения*, или *разностью между наибольшей вариантой и наименьшей вариантой*.

Мода ряда данных — это варианта, которая встречается чаще всего в ряду измерений. Мода равна варианте, кратность которой является наибольшей.

Медианой ряда из нечетного числа данных $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < x_{2k+1}$ называют число $m = x_{k+1}$, а *медианой ряда из четного числа данных* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k-1} < x_{2k}$ называют число $m = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Часто встречающаяся характеристика данных измерения является их средним арифметическим значением или просто средним значением M.

Для нахождения среднего значения необходимо:
1) найти значение суммы всех данных измерения;
2) полученное значение суммы разделить на количество данных (объем выборки) $M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Среднее значение, мода и медиана относятся к одному типу числовых характеристик ряда данных. Иногда их называют *мерами центральной тенденции*: каждое из этих чисел по-своему описывает центральное значение ряда данных.

Самостоятельно найдите моду, медиану и среднее значение к примеру 1.

Вы ознакомитесь с понятием *интервальный вариационный ряд*, научитесь обрабатывать выборочные данные для составления интервальных вариационных рядов.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частостами попаданий в каждый из них значений величины.

Интервальные ряды предназначены для анализа распределения непрерывно изменяющегося признака, значение которого чаще всего регистрируется путем измерения или взвешивания. Варианты такого ряда — это группировка.

Если в дискретных вариационных рядах частотная характеристика относится непосредственно к варианту ряда, то в интервальных — к группе вариантов.

Есть несколько способов построения интервала:

1) визуальный способ без дополнительных расчетов на основе логического анализа данных. Расчет производится по формуле, если по условию требуется построить равные интервалы;

2) способ с дополнительными вычислениями. Для расчетов величины интервала используется формула:

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}, \qquad (1)$$

где i – величина или длина интервала;
x_{max} – максимальное значение;
x_{min} – минимальное значение;
n – требуемое число групп по условию задачи.

Первый интервал начинают строить от минимального значения, к нему добавляется величина интервала и получается верхняя граница первого интервала. Затем верхняя граница первого интервала становится нижней границей второго интервала, к ней добавляется величина интервала и получается второй интервал. И так далее столько раз, сколько требуется построить интервалов по условию.

ПРИМЕР

2. Имеются данные о величине вклада в банке 10 вкладчиков — 280, 240, 400, 340, 200, 310, 260, 360, 330, 230 тыс. тг. Построить интервальный вариационный ряд распределения вкладчиков, по размеру вклада, выделив 3 группы с равными интервалами. По каждой группе подсчитать общий размер вкладов.

Решение. Сначала составим таблицу. Так как ряды распределения имеют два элемента, то таблица будет состоять из двух строк.

Первая строка — это всегда варианта, в данном примере по условию — размер вклада в банк; вторая строка — это частота — как часто встречаются варианты, а именно число вкладчиков с соответствующим вкладом, в данном случае, попадающие в интервал.

Используя формулу (1) найдем величину интервала. По условию задачи наибольшее значение 400 тыс. тг., наименьшее значение 200 тыс. тг., количество групп — 4.

Тогда $i = \dfrac{400000 - 200000}{4} = 50\,000.$

Таблица 17

Размер вклада в банк (x)	200 000 — 250 000	250 000 — 300 000	300 000 — 350 000	350 000 — 400 000
Число вкладчиков (n)	3	2	3	2

Теперь проведем подсчет общего объема размера вкладов по каждому интервалу и в целом. Для этого сложим размеры вкладов по каждому интервалу и получим суммарное значение вкладов.

По первому интервалу: 230 000 + 240 000 + 200 000 = 670 000;
по второму интервалу: 280 000 + 240 000 = 520 000;
по третьему интервалу: 310 000 + 330 000 + 340 000 = 980 000;
по четвертому интервалу: 360 000 + 400 000 = 760 000.

Таблица 18

Размер вклада в банк (x)	200 000 — 250 000	250 000 — 300 000	300 000 — 350 000	350 000 — 400 000	Всего
Число вкладчиков (n)	3	2	3	2	10
Общий объем вкладов	670 000	520 000	980 000	760 000	2 930 000

Вы научитесь анализировать данные вариационного ряда в соответствии с заданным условием.

Ряды распределения удобно анализировать при помощи их графического изображения, позволяющего судить и о форме распределения, и о закономерностях.

Дискретный ряд изображается на графике в виде ломаной линии – полигона распределения. Для его построения в прямоугольной системе координат по оси абсцисс в одинаковом масштабе откладываются ранжированные (упорядоченные) значения варьирующего признака, а по оси ординат наносится шкала для выражения частот.

Самостоятельно постройте дискретный вариационный ряд к примеру 1.

Интервальные ряды изображаются в виде гистограмм распределения (т. е. столбиков диаграмм). При построении гистограммы на оси абсцисс откладываются величины интервалов, а частоты изображаются прямоугольниками, построенными на соответствующих интервалах. Высота столбиков в случае равных интервалов должна быть пропорциональна частотам.

Самостоятельно постройте интервальный вариационный ряд к примеру 2.

Любая гистограмма может быть преобразована в полигон распределений, для этого необходимо соединить между собой отрезками прямой вершины ее прямоугольников.

1. Какие данные можно извлечь из дискретного вариационного ряда?
2. Какие данные можно извлечь из интервального вариационного ряда?

Упражнения

А

21.1. Имеются данные о разрядах рабочих: 3, 4, 5, 6, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 5, 5, 5, 6. Постройте дискретный вариационный ряд распределения рабочих по разрядам.

21.2. У 40 учащихся школы независимо друг от друга попросили назвать любую цифру. Получили следующие данные (табл. 19).

Таблица 19

5	5	4	5	3	9	0	4	3	7
6	9	5	1	7	5	6	2	1	3
4	7	0	7	5	6	5	3	9	2
3	1	3	1	3	3	6	8	1	9

Постройте таблицу распределения кратностей данного измерения и найдите объем выборки и моду.

21.3. У 30 учащихся школы независимо попросили назвать любое двузначное число от 10 до 20. В результате получили следующие данные (табл. 20).

Таблица 20

14	17	10	17	16	15	15	13	19	12
16	19	15	11	17	15	16	12	13	13
13	11	13	11	13	14	16	18	19	19

Постройте таблицу распределения кратностей данного измерения и найдите объем выборки и моду.

21.4. Найдите среднее арифметическое значение данных измерений в упражнении 21.2.

21.5. Найдите среднее арифметическое значение данных измерений в упражнении 20.3.

B

21.6. Постройте полигон (многоугольник распределения) по данным упражнений 21.2 и 21.3.

21.7. Имеются данные о массе учащихся (в кг): 35, 44, 46, 37, 50, 36, 38, 48, 35, 44, 46, 39, 50, 40, 54, 36, 40, 42, 52, 39. Постройте интервальный вариационный ряд распределения учеников по массе, выделив 5 групп с равными интервалами. По каждой группе подсчитайте общий размер массы.

21.8. В цветочном магазине имеется 25 видов цветов. Их цена распределена следующим образом (табл. 21).

Таблица 21

Цена (тг)	[500 — 800)	[800 — 1100)	[1100 — 1400)	[1400 — 1700]
Количество видов	7	4	(*)	8

1) Найдите (*) в таблице.

2) Составьте вариационный ряд относительных частот.

3) Составьте вариационный ряд относительных частот в процентах.

ОПОРНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ОВЛАДЕНИЯ НОВЫМИ ЗНАНИЯМИ

Варианта, вариационный ряд, ряд распределения, полигон, полигон частоты, выборка, генеральная совокупность, статистический ряд, частота, гистограмма, дискретный вариационный ряд, интервальный вариационный ряд.

§ 22. ОЦЕНКА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПО ВЫБОРОЧНЫМ ДАННЫМ

Вы научитесь оценивать числовые характеристики случайных величин по выборочным данным.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Статистика, среднее значение, выборочная дисперсия, выборочное среднее отклонение

В ряде случаев при изучении случайной величины (генеральной совокупности) на основе выборочных данных достаточно вычислить оценки некоторых числовых (точечных) характеристик распределения. Числовые характеристики также вычисляются при определении параметров теоретических распределений на основе выборочных данных.

Точечной оценкой называют оценку, которая может быть представлена одним числом. Точечные оценки дают приближенное представление о величине соответствующего параметра генеральной совокупности.

Рассмотрим оценивание числовых характеристик случайной величины по выборочным данным.

Допустим, дана таблица 22, в которой представлены варианты с относительной частотой, где $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$.

Таблица 22

Варианта x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

Математическое ожидание, оцениваемое выборочным средним значением, вычисляется по формуле:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(x_1n_1 + x_2n_2 + ... + x_kn_k). \quad (1)$$

Характеристику, отвечающую за разброс чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_k вокруг среднего значения $\overline{X}$, называют *дисперсией* и обозначают $\overline{D}$.

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}[(x_1 - \overline{X})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{X})^2 \cdot n_2 + ... + (x_k - \overline{X})^2 \cdot n_k)]. \quad (2)$$

При уменьшении объема выборки появляются погрешности, поэтому при $n < 30$ находится исправленная выборочная дисперсия и вычисляется по формуле:

$$\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D}. \tag{3}$$

Учитывая формулы (2) и (3) выборочое среднее квадратическое отклонение, соответственно, вычисляется по формулам:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} \tag{4}$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}}. \tag{5}$$

Обычно выборочная дисперсия находится по формуле

$$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2, \tag{6}$$

где $\overline{X^2} = \frac{1}{n}(x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_k^2 n_k)$.

Подсчет дисперсии и среднего квадратического отклонения "вручную" — довольно кропотливая работа. Для ее выполнения лучше использовать какую-либо компьютерную программу (например, Microsoft Office Excel). Если же проводить вычисления непосредственно, то во избежание путаницы и для контроля возможных ошибок лучше представлять результаты в виде таблицы.

Пусть дана таблица интервальной относительной частоты варианты для непрерывных случайных величин (табл. 23).

Таблица 23

Интервалы	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	....	$[x_{k-1}; x_k]$
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

Тогда, учитывая, что $x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2}$, $x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2}$, ..., $x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$, берем следующую таблицу 24 относительной частоты выборки:

Таблица 24

x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

ПРИМЕР Найдем выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение, используя данные таблицы интервальной относительной частоты вариант (табл. 25).

Таблица 25

Интервалы	[1; 3)	[3; 6)	[6;9]
$\frac{n_i}{n}$	0,6	0,2	0,2

Решение. Составим таблицу относительной частоты выборки. Для этого найдем середины интервалов: $x_1^* = (1 + 3) : 2 = 2$; $x_2^* = (3 + 6) : 2 = 4,5$; $x_3^* = (6 + 9) : 2 = 7,5$.

Тогда таблица будет иметь вид (табл. 26).

Таблица 26

x_i^*	2	4,5	7,5
$\frac{n_i}{n}$	0,6	0,2	0,2

Теперь вычислим следующие величины:

$$\overline{X} = 2 \cdot 0,6 + 4,5 \cdot 0,2 + 7,5 \cdot 0,2 = 3,6;$$
$$\overline{X^2} = \frac{1}{10}\,(2^2 \cdot 6 + 4,5^2 \cdot 2 + 7,5^2 \cdot 2) = 17,7;$$
$$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 17,7 - 3,6^2 = 17,7 - 12,96 = 4,74.$$

Так как $n = 10$ и оно меньше 30, поэтому находим исправленную выборочную дисперсию:

$$\overline{\overline{D}} = \frac{10}{9} \cdot 4,74 \approx 5,27.$$

Теперь, соответственно, вычисляем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} \approx \sqrt{5,27} \approx 2,29.$$

Ответ: $\approx \sqrt{5,27} \approx 2,29$.

1. В чем отличие и сходство выборочной дисперсии и исправленной выборочной дисперсии?
2. От чего зависит выбор формулы для вычисления среднего квадратического отклонения?
3. Запишите формулу выборочной дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Упражнения

А

В упражнениях **22.1.—22.3.** рассматриваются результаты одного и того же измерения (табл. 27). При изучении некоторой генеральной совокупности по результатам независимых наблюдений получены значения:

Таблица 27

111	112	111	108	113	111	114	113
112	111	110	110	109	109	110	112
109	113	114	111	111	112	111	111

22.1. 1) Составьте вариационный ряд наблюдений и найдите объем выборки;

2) составьте вариационный ряд относительных частот;

3) составьте вариационный ряд относительных частот в процентах.

22.2. 1) Найдите моду, медиану, математическое ожидание;

2) постройте полигон (многоугольник распределения) относительных частот в процентах.

22.3. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

B

22.4. Используя таблицу 28 и выражение "среднее значение равно 9", вычислите следующее:

Таблица 28

Варианта	4	8	12
Кратность	x	2	9

1) найдите число x;

2) найдите дисперсию распределения.

22.5. Используя таблицу 29 и выражение "среднее значение равно 5", вычислите следующее:

Таблица 29

Варианта	3	x	7	9
Кратность	13	6	9	2

1) найдите число x;

2) найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

22.6. Найдите выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение, используя данные таблицы 30 интервальной относительной частоты вариант:

Интервалы	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15]
n_i	7	5	8
$\frac{n_i}{n}$	0,4	0,2	0,4

ПОДГОТОВЬТЕ СООБЩЕНИЕ ОБ УЧЕНОМ-МАТЕМАТИКЕ

22.7. Одним из основателей современной математической статистики является английский математик Карл Пирсон. С его именем связано развитие числовых оценок корреляции (зависимости) между различными статистическими данными.

Карл Пирсон
(1857—1936)

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. В таблице дан закон распределения случайной величины X.

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	?	0,2	?	0,1	?

Неизвестные относительные частоты пропорциональны числам 3:3:1.
Тогда заполненная таблица вариационного ряда относительных частот имеет вид:

A)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

B)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,25	0,15	0,2

C)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,15	0,15	0,25	0,15	0,25

D)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

E)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,2	0,15	0,3

2. По вариационному ряду относительных частот найдите среднее значение:

X	2	3	4	5	6
$\frac{n_i}{n}$	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1

A) 5,2; B) 4,95; C) 5,1; D) 5,3; E) 5,15.

3. По вариационному ряду относительных частот найдите дисперсию:

X	2	4	6	8
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,2	0,4	0,2

A) 15,84; B) 14,9; C) 15,16; D) 14,6; E) 14,8.

4. По вариационному ряду относительных частот задания 3 найдите среднее квадратическое отклонение:

A) 3,98; B) 3,99; C) 3,96; D) 3,95; E) 3,88.

5. В таблице приведены сведения о ценах на женские пальто в фирменном магазине (в тыс. тг):

32,3	40,0	34,9	28,8	48,9
28,4	25,2	24,6	30,0	25,3
20,0	35,8	37,4	23,2	35,2

Постройте интервальный вариационный ряд распределения женских пальто по стоимости, выделив 4 группы с равными интервалами. Напишите вариационный ряд относительных частот:

A)

Интервалы	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$

B)

Интервалы	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{2}{15}$

C)

Интервалы	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{15}$

D)

Интервалы	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{15}$

E)

Интервалы	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$

6. По вариационному ряду относительных частот найдите среднее значение и дисперсию:

A) $\overline{X}$ =14,68; $\overline{D}$=405,99; B) $\overline{X}$ =15,68; $\overline{D}$=406,99;

C) $\overline{X}$ =15; $\overline{D}$=405,99; D) $\overline{X}$ = 14,4; $\overline{D}$=406,99;

E) $\overline{X}$ =14,4; $\overline{D}$=406,99.

Интервалы	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)
x_i^*	15	25	35
n_i	5	9	8
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,36	0,32

7. По вариационному ряду относительных частот задания 6 найдите среднее квадратическое отклонение:

A) $\overline{\sigma}$ ≈20,15; B) $\overline{\sigma}$ ≈ 21,15; C) $\overline{\sigma}$ ≈ 21,16;

D) $\overline{\sigma}$ ≈20,25; E) $\overline{\sigma}$ ≈ 20,15.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА "АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА" 11 КЛАССА

I. Вычисления

Вычислите интегралы (1—5):

1. 1) $\int_1^0 (1 - 3x^2)dx$; 2) $\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x + 1)dx$;

3) $\int_0^1 (2 + x)^3\,dx$; 4) $\int_2^3 (4 - x)^4\,dx$.

2. 1) $\int_{\frac{\pi}{120}}^{\frac{\pi}{40}} \frac{5\,dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{8} + 5x\right)}$; 2) $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{36}} \left(\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{3\,dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{12} + 3x\right)}$; 4) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{24}} \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right) dx$.

3. 1) $\int_1^2 (x^3 + x^{-3})dx$; 2) $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int_{-2}^{-1} (5 - 3x^{-2} - 3x^2)dx$; 4) $\int_8^{27} \left(x^{\frac{2}{3}} + 3x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$.

4. 1) $\int_1^e (2x^{-1} + 1)dx$; 2) $\int_0^2 3^{0,5x}dx$;

3) $\int_1^e (3x^{-1} - 4)dx$; 4) $\int_0^1 \left(e^{\frac{x}{3}} - 3x^2\right)dx$.

5. 1) $\int_0^2 (e^{3x} + 1)dx$; 2) $\int_1^e \frac{x^2 + 1}{2x^3}dx$;

3) $\int_{-1}^0 \frac{3}{(5x - 1)^2}dx$; 4) $\int_0^1 \frac{4}{(2x + 1)^2}dx$.

Найдите значения выражений (6 — 10):

6. 1) $\sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} + \sqrt[4]{81}$; 2) $\sqrt{0,49} - \sqrt[3]{-15\frac{5}{8}} + \sqrt[5]{32}$;

3) $\sqrt{\frac{16}{25}} + \sqrt[3]{-1\frac{61}{64}} + \sqrt[6]{64}$; 4) $\sqrt{1,21} + \sqrt[3]{-4\frac{12}{125}} + \sqrt[4]{625}$.

7. 1) $\sqrt[6]{2^7 \cdot 3^5} \cdot \sqrt[6]{2^5 \cdot 3}$; 2) $\sqrt[5]{5^3 \cdot 6^2} \cdot \sqrt[5]{5^{12} \cdot 6^3}$;

3) $\sqrt[8]{4^5 \cdot 7^7} \cdot \sqrt[8]{4^7 \cdot 7}$; 4) $\sqrt[4]{2^5 \cdot 5^3} \cdot \sqrt[4]{2^3 \cdot 5}$.

8. 1) $\sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}}$; 2) $\sqrt[5]{7 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7 - \sqrt{17}}$;

3) $\sqrt[6]{9 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[6]{9 - \sqrt{17}}$; 4) $\sqrt[7]{7 - 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[7]{7 + 4\sqrt{3}}$.

9. 1) $25^{2,5} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{3}\right)^{2,7} \cdot (0,6)^{2,7}$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5} + 8^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{2}{7}\right)^{6} \cdot \left(3\frac{1}{2}\right)^{6}$;

3) $16^{1,5} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{0,19} \cdot (1,5)^{0,19}$;

4) $81^{0,25} + \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{2}{5}} - (0,15)^{-0,35} \cdot \left(6\frac{2}{3}\right)^{-0,35}$;

5) $\dfrac{16^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{6}}{4^{-\frac{1}{3}} \cdot 64^{-\frac{2}{3}}} \cdot 4\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{4}$;

6) $\dfrac{25^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2}}{125^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{-2}} \cdot \left(25^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

10. 1) $\log_{27}3 - \log_{\sqrt{5}}\frac{1}{5} + \log_{2,5}0,4$;

2) $\log_{\sqrt{6}}\frac{1}{36} - \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2} - \log_{0,2}5$;

3) $9^{\frac{3}{2}} - \log_{\frac{1}{5}}25$;

4) $\log_{\sqrt{3}}27 - \log_{1,5}\frac{2}{3} - \log_{8}4$;

5) $\log_{3}\frac{1}{27} - \log_{4}32$;

6) $625^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\log_{2}4 \cdot 36^{\log_{6}2}$.

11. Найдите:

1) значение a, если $\log_{3}a = \frac{1}{2}$;

2) значение b, если $\log_{b}\frac{1}{81} = -4$;

3) значение c, если $\log_{6}c = 3$;

4) значение m, если $\log_{m}0,25 = -4$.

12. Если $\log_{7}3 = a$ и $\log_{7}5 = b$, то найдите:

1) $\log_{7}25 - \log_{7}243$;

2) $\log_{125}81 + 2\log_{7}15$;

3) $\frac{1}{2}\log_{7}441 - \log_{5}9$;

4) $\log_{15}21 + 3\log_{15}245$.

II. Тождественные преобразования

Докажите, что функции $F(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$ **(13—15)**:

13. 1) $F(x) = 4\sqrt{x-3} + 2$, $\quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$, $x \in (3; +\infty)$;

2) $F(x) = \frac{1}{12}x^6 - 16\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x^5}{2} - \frac{8}{\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$;

3) $F(x) = x^3 - 3\sin x$, $f(x) = 3x^2 - 3\cos x$, $x \in R$;

4) $F(x) = 2\cos(4x - 1) + 7x^7$, $f(x) = -8\sin(4x - 1) + 49x^6$, $x \in R$.

14. 1) $F(x) = x + \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$;

2) $F(x) = \cos x^4$, $f(x) = -4x^3 \sin x^4$, $x \in R$;

3) $F(x) = -1{,}5\sin^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $f(x) = -\frac{3}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in R$;

4) $F(x) = -\mathrm{ctg}\, 5x + 5x$; $f(x) = 5\left(\frac{1}{\sin^2 5x} + 1\right)$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{5}\right)$.

15. 1) $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + 3x$, $f(x) = 3^x + 3$, $x \in R$;

2) $F(x) = \ln x - (0{,}5)^x$, $f(x) = \frac{1}{x} - 0{,}5^x \ln\frac{1}{2}$, $x \in R$;

3) $F(x) = x - \ln x^3$, $f(x) = \frac{x - 3}{x}$, $x \in (0; +\infty)$;

4) $F(x) = \ln x^2$, $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in (0; +\infty)$.

Упростите выражения **(16—19)**:

16. 1) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{a-b}\right)$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 - 4\sqrt{ab}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}} - 4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}} - 2a^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{23}{3}} - 25a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{13}{6}} - 5a^{\frac{1}{2}}}$.

17. 1) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}} + 4}{x^{1,5} - 4x} - \dfrac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{x^{1,5} + 4x}\right) \cdot \dfrac{x - 16}{x^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\left(\dfrac{5}{y - 5y^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{y^{1,5}}{y^2 - 25y}\right) : \dfrac{5y^{\frac{1}{2}} + 25 - y}{y^{\frac{1}{2}} + 5}$.

18. 1) $\left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}} + 6}{b^{\frac{3}{2}} - 6b} - \dfrac{b^{0,5} - 6}{b^{1,5} + 6b}\right) : \dfrac{2b^{0,5}}{b - 36}$; 2) $\left(\dfrac{7}{b - 7b^{0,5}} - \dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2 - 49b}\right) \cdot \dfrac{b^{0,5} + 7}{49 + 7b^{\frac{1}{2}} - b}$.

19. 1) $\left(\dfrac{25x - 16x^{-1}}{5x^{0,5} - 4x^{-0,5}} + \dfrac{x - 4x^{-1}}{x^{0,5} - 2x^{-0,5}}\right)^2$; 2) $\dfrac{1 - y^{-2}}{y^{0,5} - y^{-0,5}} - \dfrac{2}{y^{0,5}} - \dfrac{y^{-2} - 1}{y^{0,5} + y^{-0,5}}$.

20. Докажите тождество:

1) $\sqrt{97 - 56\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} = 1 - \sqrt{5}$;

3) $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{21 + 12\sqrt{3}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$.

21. Докажите, что B — целое число, если:

1) $B = \sqrt{37 + 20\sqrt{3}} + \sqrt{37 - 20\sqrt{3}}$;

2) $B = \sqrt{55 + 14\sqrt{6}} + \sqrt{55 - 14\sqrt{6}}$;

3) $B = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$;

4) $B = \sqrt[3]{29\sqrt{2} - 45} + \sqrt[3]{29\sqrt{2} + 45}$.

Докажите тождества **(22—24)**:

22. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b - ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - ab = 0$;

2) $\dfrac{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}} - \sqrt{mn} = m + n$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}{a + 1} + \dfrac{a^{-\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1} - (a - 7)^0 = \dfrac{2}{\sqrt{a}} - 1$, при $a > 7$;

4) $\dfrac{a - 1}{\sqrt[3]{a} - 1} - \dfrac{a + 1}{\sqrt[3]{a} + 1} + (a + 10)^0 = 2\sqrt[3]{a} + 1$.

23. 1) $\dfrac{\log_5 3 + \log_5 9}{3\log_5 2 - \log_5 24} = -3$;

2) $\dfrac{\log_6 75 - \log_6 3}{2\log_6 \frac{1}{3} + \log_6 45} = 2$;

3) $\dfrac{2\log_{11} 5 + 2\log_{11} 2}{2\log_{11} 4 + \log_{11} 5 - 3\log_{11} 2} = 2$;

4) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0,5}{\lg 30 - \lg 15} = 5$.

24. 1) $9^{\log_3 5} \cdot 13^{2\log_{13} 2} = 100$;

2) $49^{\log_7 3 + \frac{1}{2}\log_7 3} = 27$;

3) $5^{\log_{\sqrt{5}} 2} \cdot 121^{\log_{11} 3} = 36$;

4) $\left(8^{\log_2 3} : 27^{\log_3 2}\right) \cdot 25^{\log_5 4} = 54$.

III. Тождественные преобразования

Решите иррациональные уравнения **(25—29)**:

25. 1) $\sqrt{2x - 7} = 3$;

2) $\sqrt[3]{x^2 + 7x + 8} = 2$;

3) $\sqrt{11 + 3x} = 4$;

4) $\sqrt[3]{27 + 2x - x^2} = 3$.

26. 1) $x = 7 - \sqrt{3x + 7}$;

2) $\sqrt{15 - 3x} - x = 1$;

3) $\sqrt{21x + 25} - 3x = 5$;

4) $\sqrt{121 - 12x} = 11 - 3x$.

27. 1) $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x + 2}$;

2) $\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = x$;

3) $\dfrac{\sqrt{3x - 5}}{x - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$;

4) $x + 2 = \sqrt{(3x + 4)(x + 1)}$.

28. 1) $\dfrac{x + 1}{9 - x} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3}$;

2) $\dfrac{4 - x}{2 + \sqrt{x}} = 8 - x$;

3) $\sqrt{x - 9} + 2 = \sqrt{x - 1}$;

4) $\sqrt{x + 5} = 5 - \sqrt{x - 10}$.

29. 1) $\sqrt{1-\sin x}=\cos x$; 2) $\sqrt{1-\cos x}=\sin x$;

3) $\sqrt{\frac{x}{x+1}}+2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3$; 4) $\sqrt{\frac{x-1}{x}}-3\sqrt{\frac{x}{x-1}}=2$.

Решите показательные уравнения (**30—35**):

30. 1) $\sqrt{3^x}=27^{-\frac{2}{3}}$; 2) $\sqrt{5^x}=25^{-\frac{3}{2}}$;

3) $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2^{3x-1}}=16^{-\frac{3}{4}}$; 4) $27^{-1}\cdot\sqrt{9^{x+1}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5}$.

31. 1) $9\cdot 3^{\cos x}=\sqrt{27}$; 2) $4\cdot 2^{\sin x}=\sqrt{8}$;

3) $25^{-1}\cdot\sqrt{125^x}=5^x$; 4) $216^{-1}\cdot\sqrt{36^x}=6^{0,5x}$.

32. 1) $2^x-5\cdot 2^{x-4}=11$; 2) $5^x-4\cdot 5^{x-2}=21$;

3) $3\cdot 2^{x-1}+2^{x+4}=35$; 4) $6^{x-1}+5\cdot 6^{x-2}=11$.

33. 1) $7^{x+1}-2\cdot 7^{x-2}=341$; 2) $3\cdot 11^{x+1}-2\cdot 11^{x-1}=361$;

3) $2^{x-1}+3\cdot 2^{x-2}+5\cdot 2^{x-3}=15$; 4) $7\cdot 3^{x-2}-3^{x-1}+5\cdot 3^x=49$.

34. 1) $4^x+16=10\cdot 2^x$; 2) $9^x-36\cdot 3^x+243=0$;

3) $25^x-\frac{26}{5}\cdot 5^x+1=0$; 4) $36^x-\frac{7}{36}\cdot 6^x+\frac{1}{216}=0$.

35. 1) $4^{x+1}+4^{1-x}-10=0$; 2) $3^{1+x}-2\cdot 3^{1-x}=7$;

3) $4^{\sqrt{x+3}}-32=4\cdot 2^{\sqrt{x+3}}$; 4) $25^{\sqrt{x+2}}-10=3\cdot 5^{\sqrt{x+2}}$.

Решите логарифмические уравнения (**36—41**):

36. 1) $\log_4(x^2-5)=1$; 2) $\log_6(x^2-2)=1$;

3) $\log_3(4+\sqrt{x})=2$; 4) $\log_5(\sqrt{x}+1)=2$.

37. 1) $\log_5(2x+3)+\log_5(4-x)=1$; 2) $\log_7(3x-17)-\log_7(x+1)=0$;

3) $\log_2(2x-1)+\log_2(x+3)=2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(4x+5)=\log_{\frac{1}{4}}(5x+2)$.

38. 1) $\log_3(x+1)-\log_3(x-1)=1$; 2) $\log_7(x^2+6x)=1$;

3) $\log_2(x^2-x)=1$; 4) $\log_4(7x+4)-\log_4(2x-1)=1$.

39. 1) $\log^2_{\frac{1}{2}}x+2\log_{\frac{1}{2}}x-3=0$;

2) $2\log_3(x-1)=\log_3(1,5x+1)$;

3) $\log_2(x^2+4x+1)=\log_2(6x+2)-1$;

4) $\log_3(3-x)-2\log_3 2=1-\log_3(4-x)$.

40. 1) $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+2)}{\log_{\frac{1}{2}}(6-5x)}=1$; 2) $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(3x+2x^2)}{\log_{\frac{1}{3}}(6x+2)}=1$.

41. 1) $\log_3(2^x - 1) = 1 - \log_3(2^x - 3)$; 2) $\log_2(3^x - 1) = 1 - \log_2(3^x - 2)$.

Решите системы уравнений (**42—44**):

42. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

43. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ \lg x + \lg y = \lg 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_{0,5} x + \log_{0,5} y = -1, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$

44. 1) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x+2y)} = 6x, \\ 3^{x^2-2y} = 9^{0,5x}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = \frac{1}{27}, \\ 0{,}1^x \cdot 10^y = 10^{-8}. \end{cases}$

IV. Неравенства

Решите показательные неравенства (**45—54**):

45. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3x} \leqslant 8^2$; 2) $9^{-4x} > \left(\frac{1}{81}\right)^2$;

3) $5^{\frac{2x}{x+1}} > 5$; 4) $6^{\frac{2x-1}{x}} < 36$.

46. 1) $4^{x^2-1} > 64$; 2) $5^{6-2x^2} < \frac{1}{625}$;

3) $27 \cdot 3^{x^2-3x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; 4) $8 \cdot 2^{x^2-4x} > \frac{1}{2}$.

47. 1) $49^{0,5x^2-1} \leqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; 2) $(0{,}16)^{0,5x^2-3} \geqslant (2{,}5)^{-3}$;

3) $(0{,}04)^{3-0,5x^2} \geqslant 125$; 4) $9^{0,5x^2-2,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

48. 1) $7^{x^2-2x} > 343$; 2) $6^{3x-x^2} < 36$;

3) $\frac{3^x - 9}{3x^x + 2} \leqslant 0$; 4) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4}}{7 + 2x^2} \geqslant 0$.

49. 1) $27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2} \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^{-4x}$; 2) $25 \cdot (5)^{-5x^2} \geqslant 125^{3x}$;

3) $\sqrt{243} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4x^2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{-3x}$; 4) $\sqrt{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6x^2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$.

50. 1) $36 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^{2x} < 6^{x(x-3)}$; 2) $25 \cdot 0{,}2^{x(3+x)} > 0{,}04^{2x}$;

3) $9^x - 10 \cdot 3^x \leqslant -9$; 4) $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x > 1$.

51. 1) $11^{\frac{x+3}{x^2-4}} > 1$; 2) $7^{\frac{x^2-25}{x+6}} \leqslant 1$;

3) $0{,}08^{\frac{x}{x^2-1}} \geq 1$; 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x^2-36}{x^2-16}} < 1$.

52. 1) $3 - 8 \cdot 3^{-x} - 3^{1-2x} > 0$; 2) $5 \cdot 4^x + 3 \cdot 10^x - 2 \cdot 25^x \leq 0$;

3) $3^{2x+1} > 4 - 3^x$; 4) $8^x + 3 \cdot 4^x - 2^{x+2} - 12 \geq 0$.

53. 1) $5^{\sin x} \geq \frac{1}{5}$; 2) $7^{\cos x} < \frac{1}{7}$;

3) $4^{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} < \frac{1}{4}$; 4) $6^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \geq \left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{3}}$.

54. 1) $7^x - 5^{x+2} > 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$; 2) $5^x - 3^{x+1} > 2 \cdot (5^{x-1} - 3^{x-2})$;

3) $3^{x^2+2} - 5^{x^2+1} > 5^{x^2-1} + 3^{x^2-1}$; 4) $2^{x+1} - 3^x > 3^{x-1} - 2^x$.

Решите логарифмические неравенства (55—63):

55. 1) $\log_4(5 - 3x) > 1$; 2) $\log_2(6 - 5x) < 1$;

3) $\log_{0,5}(1 + 2x) < -1$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(4x - 3) > -1$.

56. 1) $\log_{\frac{1}{7}}\frac{x-5}{x+4} \geq 0$; 2) $\log_{0,15}\frac{5-x}{4+x} < 0$;

3) $\log_4\frac{x-3}{x} \leq 0$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{x}{x+2} < -1$.

57. 1) $\log_{\frac{2}{3}}(3x - 8) < \log_{\frac{2}{3}}(2x - 9)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(7x + 1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x - 9)$;

3) $\log_5(x^2 - 1) \geq \log_5 3$; 4) $\log_{11}(x^2 + 7) < \log_{11}(6x - 1)$.

58. 1) $\log_{2,7}(x - 2) + \log_{2,7} x > \log_{2,7}(x + 4)$;

2) $\log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{4}}(x - 6) < \log_{\frac{1}{4}}(3x - 8)$;

3) $\log_2(x - 1) + \log_2 x \leq 1$;

4) $\log_3 x + \log_3(x - 8) \geq 2$.

59. 1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(8 - \frac{4}{5}x\right) > -2$; 2) $\log_3(4x - x^2) \geq 1$;

3) $\log_3\left(3 - \frac{x}{2}\right) > \log_3(2x - 1)$; 4) $\log_{0,8}(x^2 - 8) \geq \log_{0,8} 8$.

60. 1) $\frac{\lg x}{x-3} \geq 0$; 2) $\frac{3-2x}{\log_5 x} > 0$;

3) $\frac{\log_4 x}{x-4} \leq 0$; 4) $\frac{x+1}{\log_2(x-4)} > 0$.

61. 1) $\frac{x^3+3x}{\log_3(x+1)} \leq 0$; 2) $\log_{12}\frac{x^2+x}{x+4} \geq 0$;

3) $\frac{2x^3-8}{\log_5 x} \geq 0$; 4) $\frac{\log_6(x+2)}{x^3} \leq 0$.

62. 1) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2+3}{x+3} < -1$; 2) $\log_2\frac{x^2-4}{x+10} > 1$;

3) $\log_3 x + \log_3 (x - 1) > \log_3 x + 1$;

4) $\log_{0,1}(x - 2) + 1 < \log_{0,1}0,3 - \log_{0,1}x$.

63. 1) $\log_{\frac{1}{4}} \sin 2x < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$; 2) $\log_{12}\sin x + \log_{13}\cos x > \log_{12}\frac{1}{4}$;

3) $\log_{0,9}(2\cos 4x) > \log_{0,9}\sqrt{3}$; 4) $\log_{\frac{4}{5}} \operatorname{tg} x < 0$.

V. Функция

Найдите области определения функции $y = f(x)$ **(64—65)**:

64. 1) $f(x) = 5 - \sqrt{x + 4}$; 2) $f(x) = 8 - \sqrt{4 - x}$;

3) $f(x) = \sqrt{x} - \log_2(x + 1)$; 4) $f(x) = 6x + \log_7(x^2 - 1)$.

65. 1) $f(x) = \log_{0,7}(x^2 - 5x - 6)$; 2) $f(x) = \log_5(x - 4) + \log_5 x$;

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{6}}(4 - x^2)$; 4) $f(x) = \log_7 \frac{x + 8}{x} + \lg x$.

Найдите множества значений функции $y = f(x)$ **(66—67)**:

66. 1) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$; 2) $f(x) = -3 + \sqrt{x}$;

3) $f(x) = 2^x + 2$; 4) $f(x) = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

67. 1) $f(x) = 5^{x+1} - 4$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3 - x)$;

3) $f(x) = \log_2(x - 5)$; 4) $f(x) = \log_5(7 - x)$.

Постройте график функции $y = f(x)$, используя программу “Живая геометрия”, и перечислите ее свойства **(68—69)**:

68. 1) $f(x) = \sqrt{x} + 1$; 2) $f(x) = 3^x + 3$;

3) $f(x) = 4^{x-1} - 1$; 4) $f(x) = |2^{x+2} - 5|$.

69. 1) $f(x) = \log_5(x + 1)$; 2) $f(x) = 3 + \log_{\frac{1}{5}}(x - 1)$;

3) $f(x) = \log_6 x - 2$; 4) $f(x) = 3 + \log_2(x + 2)$.

Найдите промежутки знакопостоянства функции $y = f(x)$ **(70—71)**:

70. 1) $f(x) = \sqrt{x} - 1$; 2) $f(x) = 3\sqrt{x}$;

3) $f(x) = 3^x - 3$; 4) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x + 1$.

71. 1) $f(x) = \log_5(x - 1)$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2 + x)$;

3) $f(x) = |\log_4 x|$; 4) $f(x) = |5^x - 5|$.

72. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = xe^{3x}$; 2) $f(x) = 3x \cdot e^x$;

3) $f(x) = x^2 e^x$; 4) $f(x) = x \cdot e^{2x}$.

73. Постройте график функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = 5\log_5(x^2 - 1)$; 2) $f(x) = \frac{1}{4}^{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}$;

3) $f(x) = 0{,}5^{\log_2(x+5)}$; 4) $f(x) = 9^{\log_3 \frac{1}{x}}$.

74. Исследуйте функцию $y = f(x)$ и постройте ее график:

1) $f(x) = 4xe^{0,5x}$; 2) $f(x) = x\ln x$;

3) $f(x) = \ln x - x$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

75. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $[-1; 0]$; 2) $f(x) = 2^x - 4$, $[-2; 2]$;

3) $f(x) = 3 + \log_5 x$, $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$; 4) $f(x) = \log_4 x - 1$, $\left[\frac{1}{16}; 4\right]$.

Для функции $y = f(x)$ найдите: 1) множество всех первообразных; 2) первообразную, график которой проходит через точку $K(a; b)$ **(76—77)**:

76. 1) $f(x) = \frac{9}{(5 - 3x)}$, $K(1; 1)$; 2) $f(x) = \frac{6}{\cos^2 3x} + 1$, $K\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $f(x) = 5e^x$, $K\left(-1; \frac{1}{e}\right)$; 4) $f(x) = e^{2x} - 10x$, $K(0; 1)$.

77. 1) $f(x) = 16x^3 + 3x^2$, $K(1; 2)$; 2) $f(x) = \frac{2}{5x^4} + 7x^6$, $K(-1; 1)$;

3) $f(x) = \frac{5}{3\sin^2 x}$, $K\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 4) $f(x) = -\frac{6}{\sqrt{1 + 3x}}$, $K(5; 0)$.

78. Используя график функции $y = f(x)$, перечислите ее свойства (рис. 62, 63).

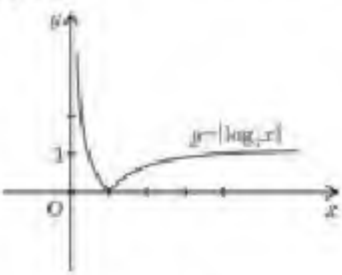


Рис. 62

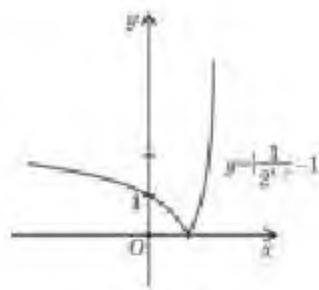


Рис. 63

Найдите площади фигур, ограниченных линиями **(79—81)**:

79. 1) $y = x^2 - 4x + 7$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

2) $y = x^2 + 6x - 8$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

3) $y = x^2 + 3x$, $y = 0$;

4) $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

80. 1) $y = x^2 + 3x + 6$, $y = 6$; 2) $y = 5x + x^2 + 2$, $y = 2$;

3) $y = 5 + 4x - x^2$, $y = x + 1$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

81. 1) $y = \frac{3}{x}$, $y = 1$, $x = 1$; 2) $y = \frac{5}{x}$, $x + y = 6$;

3) $y = \frac{2}{x}$, $x + y = 3$; 4) $y = \frac{7}{x}$, $y = -1$, $x = -1$.

Решите уравнения графическим способом (82—83):

82. 1) $3^x = x - 2$; 2) $\log_4 x = 2 - x$;

3) $(0,2)^x - x^2 = 0$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} x = x^2 - 1$.

83. 1) $5^x = x^2 + 1$; 2) $\log_2 x = 2^x$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{x} + 1$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} x = \sqrt{x} - 1$.

Задания на математическую грамотность

84. Укажите наибольшую величину $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{18}$; $0,4\pi$; $\frac{7\pi}{9}$; $0,75\pi$:

A) $\frac{7\pi}{9}$; B) $\frac{5\pi}{6}$; C) $0,75\pi$; D) $\frac{11\pi}{18}$; E) $0,4\pi$.

85. Сколько градусов составляет $\frac{7}{4}$ полного угла:

A) 540°; B) 720°; C) 560°; D) 630°; E) 580°?

86. Если $a \# c = a^2 - 2c$, то найдите значение выражения $(3 \# 5) \#$ $\# (3 \# 4)$:

A) 1; B) -1; C) 2; D) -2; E) -12.

87. Сколько радианов составляет 450°:

A) $2,5\pi$; B) $5,2\pi$; C) $3,5\pi$; D) 5π; E) 4π?

88. Сколько метров составляет пятая часть километра:

A) 200 м; B) 500 м; C) 150 м; D) 250 м; E) 750 м?

89. Сколько градусов составляет $3,5\pi$:

A) 540°; B) 720°; C) 560°; D) 630°; E) 450°?

90. Во сколько раз натуральных однозначных чисел меньше, чем трехзначных:

A) в 901 раз; B) в 100 раз;

C) в 10 раз; D) в 900 раз;

E) в 899 раз?

91. Сколько целых чисел находится на промежутке от -9 до 3:

A) 13; B) 14; C) 12; D) 15; E) 16?

92. На сколько меньше число натуральных чисел, принадлежащих промежутку от -5 до 5, чем число целых чисел из этого промежутка:
A) на 4; B) на 6; C) на 5; D) на 7;
E) количество натуральных и целых чисел одинаково?

93. Если $a \# c = a^2 - 2c$, то найдите значение выражения $(3 \# 5) \# \# (3 \# 4)$:

A) 1; B) -1; C) 2; D) -2; E) -12.

94. Найдите значение выражения $6a + \frac{2}{c} - 5n + 7m - 2$, если даны следующие таблицы:

a	n
c	m

-8	$-0,8$
$0,5$	6

A) 2; B) -2; C) 50; D) -50; E) 0.

95. Число a составляет 20% от числа 28 000. Число c составляет 60% от числа 6000. Укажите верное утверждение:
A) $a + c = 2400$; D) $2a + c = 2400$;
B) $a - c = 2000$; E) $c - a = 2400$.
C) $a - c = 0$;

96. Сколько процентов составляет закрашенная часть данной фигуры (рис. 64):

A) 35%; B) 40%; C) 32%;
D) 36%; E) 45%?

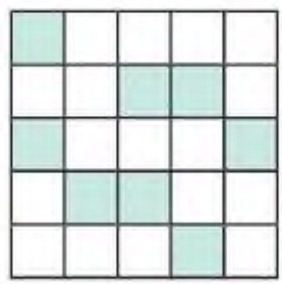


Рис. 64

97. Сосуд в форме прямого параллелепипеда имеет объем 60 дм^3. Из сосуда отлили 6 дм^3 воды. Сколько процентов составляет объем воды, оставшийся в сосуде от первоначального объема воды:

A) 80%; B) 85%; C) 5%; D) 10%; E) 90%?

98. В таблице 31 даны результаты забега учащихся на 200 м. Сколько процентов составляет число учащихся с результатами от 33 с до 36 от общего числа учащихся:

Таблица 31

Итоги забега (с)	30—32	33—34	35—36
Число учащихся	9	12	15

A) 65%; B) 75%; C) 80%; D) 70%; E) 60%?

99. Количество учащихся 11 классов дана на рисунке 65.

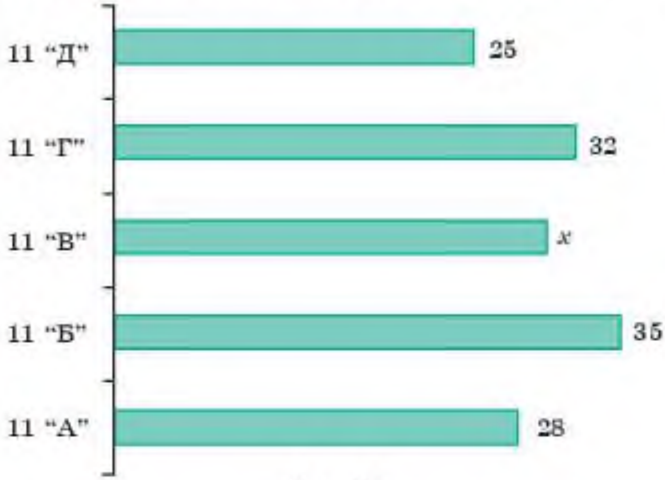


Рис. 65

1) Сколько всего учащихся в 11 классах, если численность учащихся 11 "В" класса составляет 50% от вместе взятых численности учащихся 11 "Б" и 11 "Д" классов:

A) 155; B) 160; C) 150; D) 165; E) 170.

2) Сколько всего учащихся в 11 классах, если количество учащихся 11 "В" класса составляет одну пятую часть от общего числа всех учащихся 11 классов:

A) 170; B) 150; C) 160; D) 165; E) 155.

100. На рисунке 66 представлено число покупателей за неделю. Найдите среднее значение покупателей за один день:

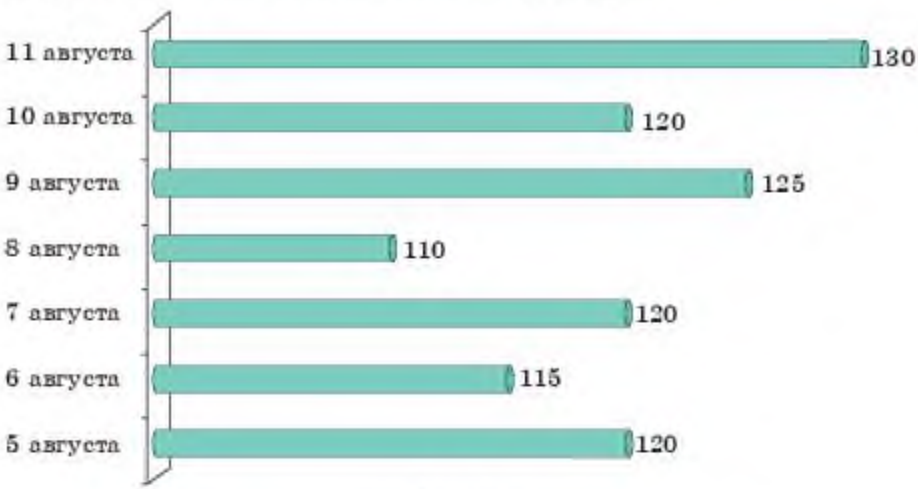


Рис. 66

A) 130; B) 110; C) 125; D) 120; E) 115.

101. Фигура разделена на равные квадраты (рис. 67).

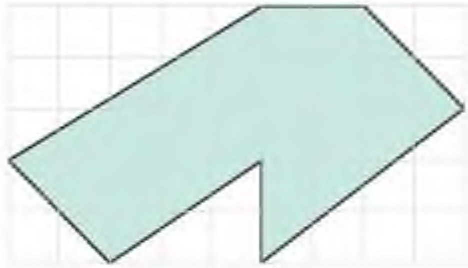


Рис. 67

1) На сколько площадь закрашенной части фигуры меньше площади данной фигуры:

A) 22; B) 24; C) 26; D) 28; E) 25?

2) На сколько площадь незакрашенной части фигуры меньше площади закрашенной части фигуры:

A) на 2 кв. ед.; B) на 4 кв. ед.; C) на 6 кв. ед.;
D) на 8 кв. ед.; E) на 5 кв. ед.?

102. Цена товара до скидки составляет 15 600 тг. Как изменилась цена товара, если сначала цену товара снизили на 20%, затем повысили на 10%:

A) уменьшилась на 2018 тг; B) увеличилась на 2018 тг;
C) уменьшилась на 1872 тг; D) увеличилась на 1872 тг;
E) цена товара не изменилась?

ГЛОССАРИЙ

Арифметический корень n-й степени	*Арифметическим корнем n-й степени* из числа a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a
Выборка	*Выборочной совокупностью* или *выборкой* называется совокупность объектов или результатов наблюдения над объектом, отобранных случайным образом из генеральной совокупности
Генеральная совокупность	*Генеральной совокупностью* называется совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех наблюдений, производимых в одинаковых условиях над одним объектом
Десятичный логарифм	Логарифм числа по основанию 10 называется *десятичным логарифмом*
Дискретный вариационный ряд	*Дискретным вариационным рядом* распределения называется ранжированная совокупность вариантов с соответствующими им частотами или частностями
Интервальный вариационный ряд	*Интервальным вариационным рядом* называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частотами попаданий в каждый из них значений величины
Интегрирование	Операцию нахождения неопределенного интеграла называют *интегрированием функции*
Иррациональное уравнение	*Иррациональным уравнением* называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, или под знаком возведения в дробную степень.
Корень n-й степени	*Корнем n-й степени* из числа a называется число b, n-я степень которого равна числу a
Криволинейная трапеция	Плоскую фигуру, ограниченную сверху графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox, с боковых сторон — отрезками прямых $x = a$, $x = b$, называют *криволинейной трапецией*
Логарифм числа	*Логарифмом положительного числа* b по a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание для получения числа b
Логарифмическое неравенство	*Логарифмическим неравенством* называют неравенство вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ($\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$) $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и неравенство, сводящееся к этому виду
Логарифмическое уравнение	*Логарифмическим уравнением* называют уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a \neq 1$, $a > 0$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$) и уравнение, сводящееся к этому виду
Логарифмическая функция	Функция вида $y = \log_a x$ ($a \neq 1$, $a > 0$), x — переменная, называется *логарифмической функцией*
Натуральный логарифм	Логарифм по основанию числа e называется *натуральным логарифмом*

Неопределенный интеграл	Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом функции* $f(x)$
Объем выборки	*Объемом выборки* называется число объектов или наблюдений в выборке
Определенный интеграл	Выражение $\int\limits_a^b f(x)dx$ называют *определенным интегралом* функции $f(x)$ от a до b
Первообразная функции	Если для любого x из множества X выполняется $F'(x) = f(x)$, то функцию $F(x)$ называют *первообразной для функции* $f(x)$ на данном множестве
Показательное неравенство	*Показательным неравенством* называют неравенство вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$), $a \neq 1$, $a > 0$ и неравенство, сводящееся к этому виду
Показательное уравнение	*Показательным уравнением* называют уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a \neq 1$, $a > 0$) и уравнение, сводящееся к этому виду
Показательная функция	Функция вида $y = a^x$ ($a \neq 1$, $a > 0$), x — переменная, называется *показательной функцией*
Степенная функция	*Степенной функцией* называется функция вида $y = x^r$, где x — независимая переменная (аргумент), а r — любое рациональное число
Степень с рациональным показателем	*Степенью неотрицательного числа а с рациональным показателем* $\frac{m}{n}$ (где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь) называется значение корня n-й степени из числа a^m
Формула нахождения объема тела	$V = \pi \int\limits_a^b y^2\, dx$
Формула Ньютона—Лейбница	$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Число e	$e = 2{,}7182818289...$

ОТВЕТЫ

Упражнения для повторения курса “Алгебра и начала анализа” 10 класса

3. 1) $0,25\pi$; 2) 14π; 3) 8π; 4) 2π. **4.** 1) $\pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $\pm(\pi - \arccos 0,1) + 2\pi k,\ k \in Z$. **5.** 5) $\operatorname{arctg}3 + \pi k,\ k \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. 6) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. **6.** 4) $[\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n],\ n \in Z$; 5) $\left[\frac{5\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right],\ n \in Z$. **7.** 1) $[-4; 0) \cup (0; 1]$. **8.** 1) $f(g(x)) = \sin^3 x - 1$; 6) $g(q(f(x))) = \sin\sqrt{x^3}$. **9.** 5) $27\cos(4 - 3x)\sin(8 - 6x)$. 8) $-\frac{5}{\cos 10x} + \frac{(20 - 50x)\operatorname{tg}10x}{\cos 10x}$. **10.** 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **11.** 1) $y = 13x - 16$. **12.** 1) -9; 4; 2) $(-6; 2)$. **14.** 2) $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ убывает; $[\frac{1}{20}; +\infty)$ возрастает $x_{\min} = \frac{1}{20}$. **15.** 1) $(-\infty; -\frac{3}{10}]$ убывает; $[-\frac{3}{10}; +\infty)$ возрастает $y_{\min} = -\frac{3}{10} = -2,45$.

Глава I. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

1.5. 3) $x^3 + x^2 - x + C$; 4) $2x - 2x^2 - x^3 + C$. **1.6.** 3) $\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{12}}{12} + C$; 4) $\frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{15}}{14} + C$. **1.7.** 2) $-5\cos x + 6\sin x + C$; 4) $-3\operatorname{ctg}x - x^9 + C$. **1.10.** 2) $2x + 2x^2 + 1$; 3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$. **1.11.** 2) $-\frac{2}{3}\sqrt{1 - 3x} + \frac{4}{3}$; 4) $-2\operatorname{ctg}x + 5$. **1.19.** 1) $\frac{1}{8}(2x + 3)^4 + C$; 3) $-\frac{1}{3}\cos(3x - 4) + C$. **1.20.** 3) $x + 25\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6}\right) + C$; 4) $x + 36\operatorname{tg}\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{5}\right) + C$. **1.21.** 2) $\sqrt{x - 5} + 3\sin\left(2 + \frac{x}{3}\right) + C$; 4) $\frac{8}{15}\sqrt{2 + 3x} - \frac{1}{3(2 - x)^3} + C$. **1.22.** 1) $\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3} + C$; 3) $x + \frac{1}{3}x^3 + C$. **1.23.** 2) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{9} - \frac{x}{4}\right) + C$; 4) $-5\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + C$. **1.24.** 1) $-\frac{1}{2x + 5} + \frac{3}{2}$; 2) $-\frac{1}{\left(\frac{x}{2} + 3\right)^2} + 4$. **1.25.** 1) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$. **2.1.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$. **2.2.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{3}{2}$. **2.3.** 1) $\frac{27}{4}$; 2) $\frac{27}{4}$. **2.4.** 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{16}{3}$; 4) $\frac{3(2 + \sqrt{2})}{2}$. **2.5.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$. **2.6.** 1) 13; 2) $\frac{13}{6}$. **2.7.** 1) $2\sqrt{2}$; 2) 1. **2.8.** 1) $2\sqrt{2} - 1$; 2) 2. **2.9.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$. **2.10.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$. **3.1.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 1; 3) $\frac{7}{24}$; 4) $\frac{1}{2}$. **3.2.** 1) 2; 2) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$; 3) 1; 4) 6. **3.3.** 1) -15; 2) 2; 3) $\frac{26}{15}$; 4) $-\frac{15}{8}$. **3.4.** 1) 4; 2) $\frac{7}{2}$; 3) $\frac{57}{4}$; 4) 58. **3.5.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{20}{3}$; 3) $\frac{6}{5}$; 4) $\frac{7}{6}$. **3.6.** 1) $1 + \frac{\pi}{2}$; 2) $1 + \frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi - 10\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{4} - 2\sqrt{2} + 4$. **3.7.** 1) 3; 2) 2; 3) -8; 4) 136. **3.8.** 1) $\frac{5\sqrt{2} - 6}{2}$; 2) $\frac{3(1 - \sqrt{3})}{2}$; 3) $2\sqrt{2} + 2$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 - \sqrt{2}$. **3.9.** 1) $\frac{-2 + \sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3} - 2}{2}$; 3) -4; 4) 6. **3.10.** 1) 21; 2) 20; 3) 33; 4) 36. **3.13.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) -1. **3.14.** 1) 30; 2) $\frac{74}{3}$; 3) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{244}{3}$. **3.15.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{75}{64}$. **3.16.** 1) $\frac{2 + \pi}{4}$; 2) $\frac{\pi - 2}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{64}$. **3.17.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{131}{12}$; 3) $\frac{40}{3}$; 4) $\frac{32}{3}$. **3.18.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **3.19.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 4; 4) $\frac{3}{2}$. **3.20.** 1) 1; 4; 2) 2; 6. **3.21.** 1) 1; 4; 2) 2; 3. **3.22.** 1) $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 2) $(0; 1)$. **3.23.** 1) $(-\infty; -0,8)$; 2) $(-1; 2)$. **4.1.** 1) $\frac{1}{6}$ кв. ед; 2) $\frac{3}{4}$ кв. ед. **4.2.** 1) $\frac{4}{3}$ кв. ед; 2) $\frac{1}{4}$ кв. ед; 3) $\frac{32}{3}$ кв. ед; 4) $\frac{4}{3}$ кв. ед.

4.3. 1) $\frac{4}{3}$ кв. ед; 2) 2 кв. ед; 3) $\frac{9}{2}$ кв. ед; 4) $\frac{1}{3}$ кв. ед. **4.4.** 1) 4 кв. ед; 2) 4 кв. ед. **4.8.** 1) $\sqrt{2}-1$ кв. ед; 2) $2(\sqrt{2}-1)$ кв. ед; 3) 1 кв. ед; 4) $\frac{5}{4}$ кв. ед. **4.9.** 1) 8 кв. ед; 2) $\frac{7}{96}$ кв. ед. **4.10.** 1) $\frac{9}{2}$ кв. ед; 2) 4,5 кв. ед.

Глава II. СТЕПЕНИ И КОРНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

5.3. 1) -2; 2) 3; 3) -4; 4) -6. **5.4.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) $\frac{4}{3}$. **5.5.** 1) -2; 2) $\pm\sqrt[6]{7}$; 3) $\sqrt[3]{4}$; 4) ± 2. **5.6.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) -10; 3) -2; 4) ± 2. **5.7.** 1) 13; 2) -729; 3) 7; 4) 2. **5.8.** 1) 15; 2) 6; 3) 6; 4) 0,3. **5.9.** 1) 10; 2) 6; 3) 6; 4) 15. **5.10.** 1) 2; 2) -2; 3) 3; 4) -5. **5.11.** 1) 2; 2) 2; 3) -3; 4) 2. **5.12.** 1) $2xy^2\sqrt[6]{x^5y}$; 2) $4x^2y^2\sqrt[4]{y}$; 3) $3x^4y^4\sqrt[3]{2y}$; 4) $2xy\sqrt[4]{xy^3}$. **5.13.** 1) $\sqrt[3]{4x^6y^3}$; 2) $\sqrt[5]{3xy^{13}}$; 3) $\sqrt[4]{8x^8y^{12}}$; 4) $\sqrt[3]{-5x^3y^6}$. **5.14.** 1) x және $-x$; 2) x; 3) x; 4) x. **5.15.** 1) $2a$; 2) 0; 3) $3b$; 4) 0. **5.16.** 1) -27; 2) 20; 3) 6; 4) 12. **6.1.** $\sqrt[5]{3^9}$; 2) $\sqrt[5]{2^8}$; 3) $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3}$; 4) $\sqrt[5]{7^6}$. **6.2.** 1) $x^{\frac{2}{3}}$; 2) $(3y)^{\frac{1}{7}}$; 3) $x^{-\frac{2}{3}}$; 4) $5^{\frac{3}{8}}$. **6.3.** 1) 9; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 128; 4) $\frac{9}{625}$. **6.4.** 1) $\frac{27}{2}$; 2) 20; 3) $\frac{27}{128}$; 4) $\frac{18}{25}$. **6.5.** 1) $b^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{2}}-1\right)$; 3) $3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}}+1\right)$; 4) $x^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)$. **6.6.** 1) $\left(a^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(b^{\frac{1}{3}}-1\right)$; 4) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$. **6.7.** 4) $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$. **6.8.** 1) $\frac{a^{\frac{1}{4}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$; 2) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{4}}$. **6.9.** 1) $4\sqrt[3]{5}$; 2) 4; 3) -21; 4) $\frac{1}{6}$. **6.10.** 1) $\left(\frac{ax^5}{64}\right)^{\frac{1}{7}}$; 2) $a^{\frac{29}{12}}$; 3) $b^{\frac{11}{9}}$; 4) $x^{\frac{1}{9}}$. **6.11.** 2) $\sqrt[12]{\frac{a^9}{b^8}}$; 3) $3\sqrt[5]{\frac{1}{b^4}}$. **6.12.** 1) $[-1; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $[3; +\infty)$. **6.13.** 1) $a^{\frac{1}{2}}$; 3) $ab+b^2-1$; 4) $(a-b)^2$. **6.14.** 1) -1; 2) 1; 3) 3; 4) $\frac{1}{5}$. **6.15.** 1) $-6{,}5$; 2) $-\frac{6}{115}$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) 3. **6.16.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a+1}}$; 2) $1-a$. **7.1.** 1) 7; 2) 3; 3) 2; 4) 4. **7.2.** 1) $51\sqrt{2}$; 2) $8\sqrt{15}-30$; 3) $17\sqrt{2}-24$; 4) 2. **7.3.** 1) 3; 2) 2; 3) 3; 4) 4. **7.4.** 1) 7; 2) -2; 3) -1; 4) $-\frac{11}{3}$. **7.5.** 1) $1+\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\frac{2(x-\sqrt{a})}{x^2-a}$; 4) $\frac{3(x+\sqrt{a})}{x^2-a}$; 5) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $2(\sqrt{7}+\sqrt{5})$; 7) $\sqrt{8}+\sqrt{5}$; 8) $\frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$. **7.6.** 2) $2x^{\frac{1}{2}}-1$; 4) $x-1$. **7.7.** 1) $p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}$; 2) $p+q$; 3) 0; 4) $a^{\frac{1}{3}}$. **7.8.** 1) $-\frac{\sqrt{6}-4}{10}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}+3}{10}$; 3) $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 5) $4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$; 6) $9-3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}$; 7) $(1+\sqrt{b})\sqrt{1-\sqrt{b}}$; 8) $(1-\sqrt{a})\sqrt{1+\sqrt{a}}$. **7.9.** 1) $\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; 2) $2b$. **8.5.** 1) $[-5; +\infty)$; 2) $(3{,}5; +\infty)$; 3) $[-2; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{7}; +\infty\right)$. **8.8.** 1) рис. 68; 3) рис. 69. **8.9.** 1) рис. 70; 4) рис. 71. **9.3.** $y=-27x+4$; 2) $y=0{,}5x+1{,}5$; 3) $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$; 4) $y=-x+5$. **9.4.** 3) $f(-8)=4$; $f(-1)=1$; 4) $f(1)=1$; $f(16)=2$. **9.6.** 1) $\frac{9}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{304}{3}$; 4) 315. **9.7.** 1) 2 кв. ед; 2) $\frac{31}{160}$ кв. ед; 3) $\frac{9}{2}$ кв. ед; 4) $\frac{7}{24}$ кв. ед. **9.9.** 1) $y=-\frac{16}{3}x+\frac{8}{3}$; 2) $y=\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$; 3) $y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$; 4) $y=5x+1$. **9.10.** 3) $f(8)=\frac{1}{4}$; $f(27)=\frac{1}{9}$; 4) $f(1)=1$; $f(16)=\frac{1}{2}$. **9.12.** 1) 3; 2) 4,5. **9.13.** 1) $\frac{20}{3}$; 2) 15. **9.14.** 1) $\frac{5}{6}$ кв. ед; 2) $\frac{10}{3}$ кв. ед; 3) $\frac{81}{32}$ кв. ед; 4) $\frac{57}{4}$ кв. ед.

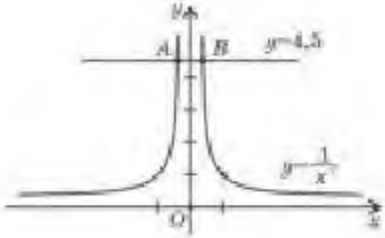


Рис. 68

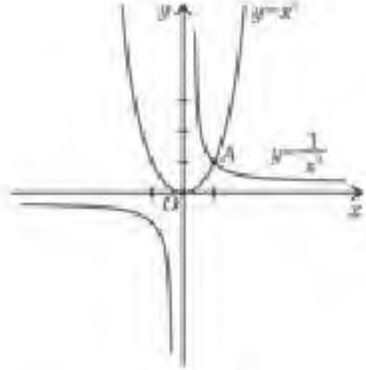


Рис. 69

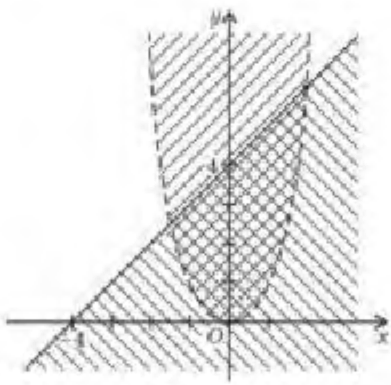


Рис. 70

Рис. 71

Глава III. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. 1) 14; 2) ±8; 3) ±2; 4) 3. **11.2.** 1) 2; 2) 1; 3; 3) 1; 0; 4) 1. **11.3.** 1) 1; 2) −1; 3) 0; 2; 4) 0; −1; 4. **11.4.** 1) 0; 2) 2; 3) −3; 4) 0. **11.5.** 1) 1; 5; 2) 3; 4) 4. **11.6.** 1) $-\frac{5}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 7; 8; 4) 1. **11.7.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **11.8.** 2) 0; 1; 3) 1; 4) $-\frac{4}{3}$. **11.9.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) 0; −8; 4) 0.

Глава IV. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

12.4. 1) $(3; +\infty)$; 2) $(-2; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $(-4; +\infty)$. **12.7.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) 5; 3) 1; 4) 6. **12.8.** 1) 1; 2) a^7; 3) b; 4) $b^{1,4}$. **12.9.** 3) рис. 72; 4) рис. 73. **12.11.** 4) $(-\infty; 1)$. **12.12.** 4) $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{3,3} > \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{-3,1}$, так как $5 + 2\sqrt{6} > 1$. **12.13.** 1) 3; $\frac{1}{3}$; 2) 2; $\frac{1}{2}$; 3) 64; $\frac{1}{64}$. **12.14.** 1) 5; 2) 243; 3) 16; 4) 64. **12.15.** 3) рис. 74; 4) рис. 75. **13.1.** 3) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$. **13.2.** 2) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$. **13.3.** 4) $\log_{125} \frac{1}{25} = -\frac{2}{3}$. **13.8.** 3) $\log_7 7 = 1$; $\log_7 \frac{1}{7} = -1$; $\log_7 49 = 2$. **13.9.** 2) $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$; $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$; $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625} = 4$. **13.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 2. **13.11.** 1) 11; 2) 13; 3) −3; 4) 50. **13.12.** 1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) −2. **13.13.** 1) 8; 2) $\frac{1}{2}$; 3) −32; 4) 16. **13.14.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{32}$; 3) 9; 4) 64; 5) $\frac{1}{64}$; 6) 1; 7) $\frac{1}{7}$; 8) 8. **13.15.** 1) 1; 2) 0; 3) 2;

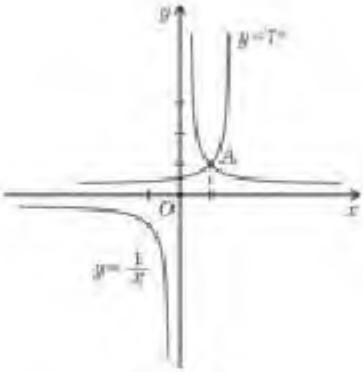


Рис. 72

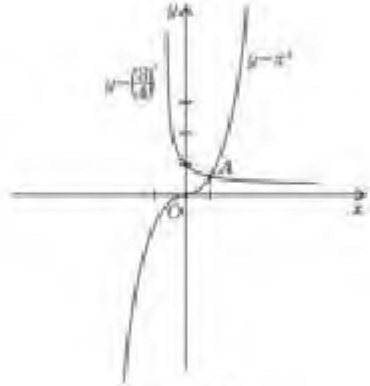


Рис. 73

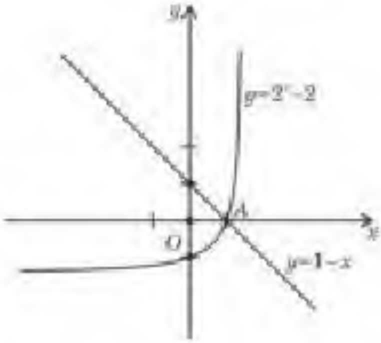


Рис. 74

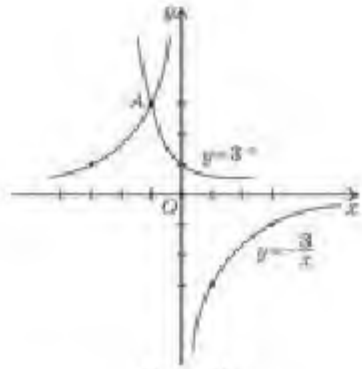


Рис. 75

4) 1. **13.16.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) -21; 4) 1. **13.17.** 1) $-\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $36\frac{1}{4}$. **13.18.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 3; 4) 6. **13.19.** 2) $3 = \log_3 27$; $-1 = \log_3 \frac{1}{3}$; $-3 = \log_3 \frac{1}{27}$; $1 = \log_3 3$. **13.20.** 4) $-3 + \frac{2}{3}\lg a - \frac{1}{2}\lg c - 3\lg b$; 8) $\frac{4}{7}\lg c - 7 - \frac{3}{2}\lg a - 9\lg b$. **14.1.** 2) $(-\infty; 3{,}5)$; 3) $(-\infty; 1{,}6)$; 4) $(-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$. **14.2.** 1) $(-1; 7)$; 2) $(-\infty; -8) \cup (3{,}5; +\infty)$; 3) $(-5; 4)$; 4) $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$. **14.7.** 1) $(-3; -2) \cup (2; 3)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $(0; 2) \cup (6; +\infty)$. **14.8.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $[6; +\infty)$. **14.11.** 1) 0; 2; 2) -2; 1; 3) 0; 1; 4) 2; 4. **15.1.** 4) $-5e^{-x}$. **15.2.** 4) $5e^x(\cos x - \sin x)$. **15.3.** 1) $\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x$. **15.4.** 3) $\frac{7 \cdot 4^x}{\ln 4} + C$. **15.5.** 4) $\frac{2}{9\ln 3}$. **15.6.** 2) $\frac{124}{\ln 5}$ кв. ед. **15.7.** 4) $2x \cdot 3^{x^2}\ln 3 \cdot \ln x + \frac{3^{x^2}}{x}$. **15.8.** 2) $\frac{1}{\sqrt{x}\ln 2} \cdot \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right)$. **15.9.** 2) $(-\infty; 1]$ — убывает; $[1; +\infty)$ — возрастает. **15.11.** $y = \frac{x}{e} + \frac{2}{e}$. **15.15.** 2) $\frac{252}{\ln 4} - 12$ кв. ед.

Глава V. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

16.1. 1) 4; 2) 10; 3) 6; 4) -3. **16.2.** 1) 3; 2) 6; 3) 6; 4) 2,4. **16.3.** 1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) 3. **16.4.** 1) ± 2; 2) 1; 3) -4; 3; 4) 3. **16.5.** 1) $2\frac{1}{3}$; 2) -2; 1; 3) 4; 5; 4) -2; 4. **16.6.** 1) 0; $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3; 3) $-2{,}5$; 3; 4) $-3{,}5$; 2. **16.8.** 1) $(1; 2)$, $(2; 1)$; 2) $(1; 2)$, $(2; 1)$; 3) $(2; 1{,}5)$;

4) (−5; −6). **16.9.** 1) (3; −1); 2) (0; −0,5). **16.10.** 1) 1; 5; 2) −2; 5; 3) −3,5; 2; 4) 1; 2,5. **16.11.** 1) 66; 2) 1; 3) 0; 4) 1,5. **16.12.** 1) 5; 2) 1,5; 3) $\pm\sqrt{3}$; 4) 0. **16.13.** 1) 3; $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 2) ±4; 3) 0; 4) ±1. **16.14.** 1) 1;2; 2) 10; 3) 4; 4) 1; 0. **16.15.** 1) (1; 2); 2) (1; 4), $\left(-\frac{7}{6}; \frac{21}{2}\right)$. **16.16.** 1) (2; 3); 2) (1; 2). **17.1.** 1) 49; 2) $\frac{8}{27}$; 3) $\frac{1}{125}$; 4) $\frac{49}{16}$. **17.2.** 1) 12; 2) 0,5; 3) 0,01; 4) e. **17.3.** 1) −2; 4; 2) −5; 1; 3) 1; 4) 2; 5. **17.4.** 1) −1; 2) 5,5; 3) 10; 4) 4. **17.5.** 1) 2; 3; 2) 6; 3) $\frac{19}{6}$; 4) $\frac{32}{15}$. **17.6.** 1) (9; 1); 4) (10; 10). **17.7.** 1) 9; 2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 3) 5; 4) 3; 5. **17.8.** 1) 3; $3+\sqrt{2}$; 2) 1; 2; 3) −10; 4) 29. **17.9.** 1) 1001; $\sqrt[3]{10}+1$; 2) 100; 1000; 3) 10; $\frac{1}{10000\sqrt{10}}$; 4) 1000; 0,1. **17.10.** 1) 2; $\frac{1}{128}$; 2) 2; $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$; 3) 10; 100; 4) 0,1; $\sqrt[4]{10}$. **17.11.** 1) 2; 2) 2; 3) 4; 4) −1000. **17.12.** 1) (2; 4); 2) (1; 1); 3) (14; 26); 4) (3; 5). **17.13.** 1) (150; 50); 2) (2; 1); 3) (1; 1); 4) (1; 1). **18.1.** 1) [5; +∞); 2) (2; +∞); 3) (−∞; 6]; 4) (−∞; 0). **18.2.** 1) (−2; +∞); 2) (−∞; 1); 3) $\left[-\frac{10}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left[\frac{3}{11}; +\infty\right)$. **18.3.** 1) $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$; 2) (−∞; −1]; 3) (−1; +∞); 4) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **18.4.** 1) (−∞; 2]; 2)[−1; +∞); 3) (−∞; 3]; 4) (4; +∞). **18.5.** 1) (2; +∞); 2) [4; +∞); 3) (−∞; 5); 4) (−∞; 4]. **18.6.** 1) (0; 1); 2) (0; 2); 3) (1; +∞); 4) (−∞; 0)∪(1; +∞). **18.7.** 1) (−∞; −1); 2) (0; +∞); 3) [2; +∞); 4) [−2; 2]. **18.8.** (2; 5]; 2) (−0,75; +∞); 3) (−∞; −2] ∪ [2; +∞); 4) (−∞; −3] ∪ $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **18.9.** 1) (−∞; −3) ∪ (2; +∞); 2) (0; 1); 3) [2; 3]; 4) (1; 2). **18.10.** 1) [1; +∞); 2) (−∞; 1]; 3) (1; +∞); 4) (−1; 1). **18.11.** 1) [1; +∞); 2) [0; 1]; 3) (2; +∞); 4) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$. **18.12.** 1) (−2; 1); 2) (−∞; 0)∪[1; +∞); 3) [0; 1]; 4) (−1; 0). **18.13.** 1) (0; +∞); 2) [1; +∞); 3) (−∞; 3); 4) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. **18.14.** 1) (2; 8]; 2) [1; 2); 3) [3; +∞); 4) (2,5; 3]. **19.1.** 1) (16; +∞); 2) (8; +∞); 3) (0; 0,01); 4) (0; e]. **19.2.** 1) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$; 2) [0; 1,5); 3) (−0,2; +∞); 4) (2; 7). **19.3.** 1) (1; +∞); 2) $\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{5}\right]$; 3) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 4) $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$. **19.4.** 1) (2,5; 6); 2) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; 3) (0; 0,6]; 4) (2; +∞). **19.5.** 1) (−4; −3) ∪ (2; +∞); 2) (2; 3); 3) (2; 7) ∪ (22; 27). 4) (4; +∞). **19.6.** 1) (5; 18); 2) (9; +∞). **19.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$; 2) (1; 3); 3) (0; 0,001) ∪ (10; +∞); 4) $\left[\frac{1}{8}; 4\right]$. **19.9.** 1) (2; +∞); 3) $\left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$; 4) 0. **19.10.** 1) (−∞; −2)∪(2; +∞); 2) $(-\infty; -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; +\infty)$; 3) [−4; −1); 4) $\left(-\frac{17}{11}; 3\right)$. **19.11.** 1) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$; 2) (−2; −1) ∪ (0; 1); 3) [1,5; 2). **19.13.** 1) [5; +∞); 2) (3; 7].

Глава VI. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

20.1. Объем выборки — 20; варианты — 2; 3; 5; 6.

Таблица 32

Варианты	2	3	5	6
Абсолютная частота	4	6	4	6
Относительная частота	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

20.2. Объем выборки — 20; варианты — 4; 8; 9; 10.

Таблица 33

Варианты	4	8	9	10
Абсолютная частота	5	7	4	4
Относительная частота	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

20.3. Объем выборки — 30.

Таблица 34

Варианты	2	3	4	5
Частоты	1	12	11	6
Объем выборки	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{5}$

20.4. 1) Объем выборки — 20. Полигон частоты (рис. 76)

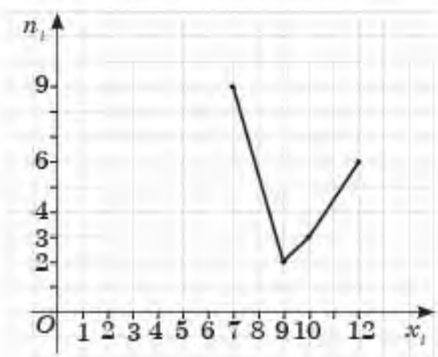


Рис. 76

3) Объем выборки — 30. Полигон частоты (рис. 77)

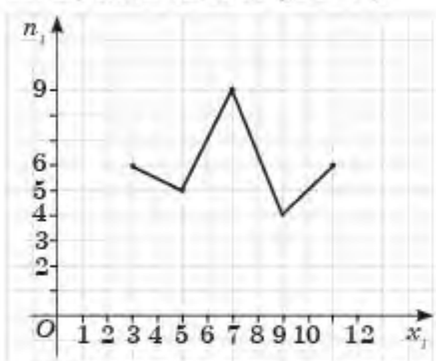


Рис. 77

20.5. 1) Объем выборки — 20.

Таблица 35

Варианты	154	155	156	157	158	159	160
Частоты	2	2	5	2	4	4	1
Объем выборки	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$
Относительная частота в процессе	10%	10%	25%	10%	20%	20%	5%

20.6. 1) Объем выборки — 15.

Таблица 36

Варианты	45	48	49	50
Частоты	4	4	3	4
Относительная частота	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$
Относительная частота в процессе	≈0,27%	≈0,27%	20%	≈0,27%

21.1.

Таблица 37

Разряд рабочих	3	48	5	6
Численность рабочих	4	6	5	5

21.2. Объем выборки — 40; мода — 3.

Таблица 38

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество учащихся	2	5	2	8	3	7	4	4	1	4

21.3. Объем выборки — 30; мода — 13.

Таблица 39

Двузначное число	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Кратность	1	2	2	6	2	5	4	3	1	4

21.4. Среднее значение — 4,4.

21.5. Среднее значение — ≈14,7.

21.6. 1) Полигон частоты — рис. 78.

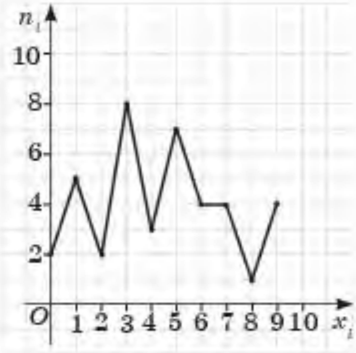


Рис. 78

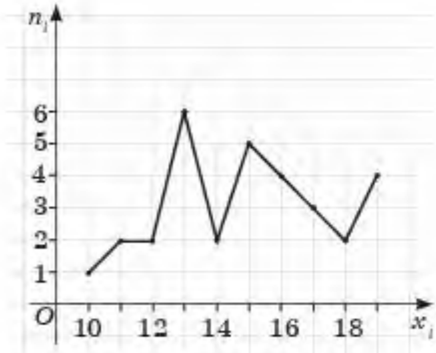


Рис. 79

2) Полигон частоты — рис. 79.

21.7.

Таблица 40

Масса	35—38	39—42	43—46	47—50	51—54
Количество учащихся	6	5	4	3	2

I интервал: 35 + 37 + 36 + 38 + 35 + 36 = 217
II интервал: 39 + 40 + 40 + 42 + 39 = 200
III интервал: 44 + 44 + 46 + 46 = 180
IV интервал: 50 + 48 + 50 = 148
V интервал: 54 + 52 = 106.

21.8. 25 – (7 + 4 + 8) = 6. Значение (*) – 6.

Таблица 41

Цена	[500–800)	[800–1100)	[1100–1100)	[1400–1700]
Количество видов	7	4	6	8
Относительная частота	$\frac{7}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{8}{25}$
Относительная частота в процессе	28%	16%	24%	32%

22.1. Объем выборки — 27.

Таблица 42

Варианты	108	109	110	111	112	113	114
Частоты	1	3	3	8	4	3	2
Объем выборки	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Относительная частота в процессе	≈4%	≈13%	≈13%	≈33%	≈16%	≈6%	8%

22.2. 1) Мода — 111. Медиана — 8.

Математическое ожидание:

$\overline{X} = \frac{1}{24}(108 + 3 \cdot 109 + 3 \cdot 110 + 8 \cdot 111 + 4 \cdot 112 + 3 \cdot 113 + 2 \cdot 114) \approx 111{,}17.$

2) Полигон частоты — рис. 80.

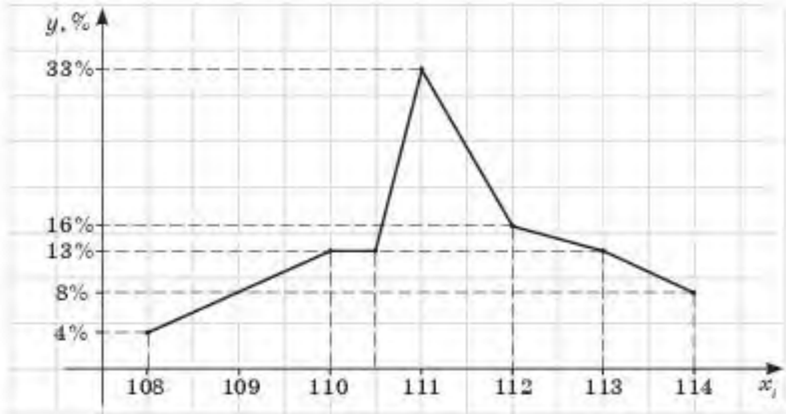


Рис. 80

22.3. $\overline{D} = \frac{1}{24}((108 - 111{,}17)^2 + (109 - 111{,}17)^2 \cdot 3 + (110 - 111{,}17)^2 \cdot 3 + (111 - 111{,}17)^2 \cdot 3 + (114 - 111{,}17)^2 \cdot 2) \approx 2{,}41.$

$\overline{\sigma} = \sqrt{2{,}41} \approx 1{,}55.$

Упражнения для повторения курса 11 класса

1. 1) 0; 2) $\frac{13}{12}$; 3) $\frac{65}{4}$; 4) $\frac{31}{5}$. **2.** 1) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{1}{12}(1 - \sqrt{3})$; 3) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{8}(1 - \sqrt{3})$. **3.** 1) $\frac{33}{8}$; 2) $\frac{50}{3}$; 3) 6,5; 4) 23,6. **4.** 1) $1 + e$; 2) $\frac{4}{\ln 3}$; 3) $7 - 4e$; 4) $3e^{\frac{1}{3}} - 4$. **5.** 1) $\frac{1}{3}e^6 + \frac{5}{3}$; 2) $-\frac{1}{4e^2} + \frac{3}{4}$; 3) $-\frac{7}{24}$; 4) $\frac{80}{81}$. **6.** 1) $\frac{29}{12}$; 2) 5,2; 3) $\frac{31}{20}$; 4) $\frac{9}{2}$. **7.** 1) 12; 2) 750; 3) 56; 4) 20. **8.** 1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 1. **9.** 1) 3118; 2) 42; 3) −16; 4) 6; 5) 1; 6) 625. **10.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) −1; 3) 29; 4) $\frac{19}{3}$; 5) $-\frac{11}{2}$; 6) 3. **11.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 3; 3) 216; 4) $\sqrt{2}$. **12.** 1) $2b - 5a$; 3) $a + 1 - \frac{2a}{b}$; 4) $\frac{a + 3b + 7}{a + b}$. **16.** 1) b; 2) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}|$; 3) $\sqrt{a} + 2$; 4) $a^{\frac{5}{3}} + 5$. **17.** 1) $\frac{16}{x}$; 2) $\frac{1}{y - 5y^{0,5}}$. **18.** 1) $\frac{12}{b}$; 2) $\frac{1}{b - 7b^{0,5}}$. **19.** 1) $36\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)$; 2) 0. **25.** 1) 8; 2) 0; −7; 3) $\frac{5}{3}$; 4) 0; 2. **26.** 1) 3; 2) 2; 3) 0; 1; 4) 0. **27.** 1) 4; 2) −1; 3) 3; 4) −1,5; 0. **28.** 1)1; 2) 9; 3) 10; 4) 11. **29.** 1) $2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **30.** 1) −4; 2) −6; 3) $-\frac{1}{3}$. **31.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; **32.** 1) 4; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **33.** 1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 2. **34.** 1) 1; 3; 2) 3; 2; 3) 1; −1; 4) −1; −2. **35.** 1) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 6; 4) −1. **36.** 1) 3; −3; 2) $\pm 2\sqrt{2}$; 3) 25; 4) 576. **37.** 1) 3,5; −1; 2) 9; 3) 1; 4) 3. **38.** 1) 2; 2) 1; −7; 3) −1; 2; 4) 8. **39.** 1) 8; $\frac{1}{2}$; 2) 3,5; 3) 0; 4) 0. **40.** 1) −2. **41.** 1) 2; 2) 1. **42.** 1) (1; 2), (2; 1), 2) (4; 2). **43.** 1) (3; 4), (4; 3), 2) $\left(4; \frac{1}{2}\right)$. **44.** 1) (2; 1); 2) (2,5; −5,5). **45.** 1) $(-\infty; 1]$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$. **46.** 1) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup$

$\cup(\sqrt{5};\ +\infty)$; 3) $(1;\ 2)$; 4) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. **47.** 1) $[-2;\ 2]$; 2) $[-3;\ 3]$; 3) $(-\infty;-3]\cup[3;\ +\infty)$; 4) $(-3;\ 3)$. **48.** 1) $(-\infty;\ -1)\cup(3;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 2]$; 4) $[2;\ +\infty)$. **49.** 1) $(-\infty;\ 3]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$; 2) $\left[-2;\frac{1}{5}\right]$; 3) $\left[-\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right]$; 4) $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **50.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ +\infty)$; 2) $(-1;\ 2)$; 3) $[0;\ 2]$. **51.** 1) $(-3;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -6)\cup[-5;\ 5]$; 3) $(-\infty;\ -1)\cup[0;\ 1)$; 4) $(-\infty;\ -6)\cup(-4;\ 4)\cup(6;\ +\infty)$; **52.** 4) $[1;\ +\infty)$. **54.** 1) $(2;\ +\infty)$; 3) $(-1;\ 1)$. **55.** 2) $\left(\frac{4}{5};\frac{6}{5}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$. **56.** 1) $(5;\ +\infty)$; 4) $(-2{,}5;\ -2)$. **57.** 3) $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$; 4) $(2;\ 4)$. **58.** 1) $(4;\ +\infty)$; 2) $(8;\ +\infty)$; 3) $(1;\ 2]$; 4) $(9;\ +\infty)$. **59.** 1) $(-35;\ 10)$; 2) $[1;\ 3]$; 3) $(0{,}5;\ 1{,}6)$; 4) $[-4;\ -2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};\ 4)$. **60.** 4) $(2;\ +\infty)$. **62.** 3) $(4;\ +\infty)$; 4) $[3;\ +\infty)$. **63.** 2) $\left(\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{5\pi}{12}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **64.** 3) $[0;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$. **65.** 4) $(0;\ +\infty)$. **66.** 1) $[2;\ +\infty)$; 2) $[-3;\ +\infty)$; 3) $(2;\ +\infty)$; 4) $(3;\ +\infty)$. **72.** 3) $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty)$ — возрастает; $[-2;\ 0]$ — убывает. **75.** 1) $\frac{3}{2}$; 1; 3) 4; 2. **76.** 4) $F(x)=0{,}5e^{2x}-5x^2+0{,}5$. **77.** 4) $F(x)=-4\sqrt{1+3x}+16$. **80.** 1) 4,5 кв. ед; 4) 9 кв. ед. **81.** 2) $12-5\ln 5$ кв. ед. **82.** 1) $\varnothing$; 2) 1; 4) 1. **83.** 1) 0; 2) $\varnothing$; 3) 0; 4) 1.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава VI. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ