Ә.Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д.Ә. ШЫНЫБЕКОВ, Р.Н. ЖҰМАБАЕВ

АЛГЕБРА

ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық

Екі бөлімді

2-бөлім

11

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған

Алматы «Атамұра» 2020

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я 72
Ш 97

Оқулық Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен жалпы орта білім беру деңгейінің жаратылыстану-математика бағытындағы 10—11-сыныптарына арналған «Алгебра және анализ бастамалары» пәнінің жаңартылған мазмұндағы Типтік оқу бағдарламасына сәйкес дайындалды.

Пікір жазған ҚР ҰҒА-ның академигі,
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор **Өтелбаев М.Ө.**

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР:

— жаңа материалды бекіту сұрақтары
— тарихқа шолу
— практикалық, қолданбалы және шығармашылық тапсырмалар

Есептер:

A — бастапқы деңгей
B — орта деңгей
C — жоғары деңгей
✻ — күрделілігі жоғары тапсырмалар мен есептер
▲ — дәлелдеудің немесе есепті шешудің басы
■ — дәлелдеудің немесе есепті шешудің соңы

Шыныбеков Ә.Н. т.б.
Ш 97 **Алгебра және анализ бастамалары:** Жалпы білім беретін мектептің 11-сыныбына арналған оқулық, 2 бөлімді / Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жұмабаев. — Алматы: Атамұра, 2020. — 144 бет.
ISBN 978-601-331-773-1

2-бөлім. –2020. – 144 б.
ISBN 978-601-331-775-5

ISBN 978-601-331-775-5 (2-бөлім)
ISBN 978-601-331-773-1

АЛҒЫ СӨЗ

Оқулық жаңартылған оқу бағдарламасына сәйкес жалпы білім беретін мектептердің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныбына арналып жазылған және авторлардың 5—10-сынып оқулықтарымен сабақтасып, олардың құрылымдық жалғасы болып табылады.

Оқулықта тапсырмалар деңгейге қарай іріктелген. Күрделілігі жоғары материалдар (*) таңбасымен белгіленіп, **С** тобына, негізінен, математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарға арналған тапсырмалар ұсынылған. Дегенмен, математиканы жетік меңгеріп, қызығушылық танытқан оқушыларға да бұл материалдардың пайдасы зор.

Оқулықты қолдану барысында әр тақырыптың соңында ұсынылған пысықтау сұрақтары мен тапсырмаларды орындап, **А** тобы материалдары мен практикалық тапсырмаларды толық меңгерген соң ғана **В** және **С** топтарының есептеріне көшуге болады.

Уақытты үнемді қолдану мақсатында онлайн ресурстарға (онлайн графиктік калькулятор, оқу бағдарламалары) сілтемелер берілді.

Ізденіс, еңбек пен талап өз жемісін берері сөзсіз! Оқуда табыс тілейміз!

Онлайн графиктік калькулятормен (https://www.desmos.com/calculator) жұмыс істеу

Desmos онлайн графиктік калькуляторы — функцияның формуласын пайдаланып графиктерді тұрғызуға мүмкіндік беретін онлайн сервис.

Графиктік калькулятормен жұмыс істеудің толық нұсқаулығын мына сілтемеден тегін жүктеп алуға болады:

https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide_RU.pdf

VI бөлім. КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАР

Ұлттық экономика министрлігінің статистикасына сүйенсек, Қазақстан халқының саны 2016 жылдың басында 17 669 896 адам, 2017 жылдың басында 17 918 214 адам болған. Логарифмдік және көрсеткіштік функцияны қолданып, еліміздегі халық саны шамамен қай уақытта 20 миллионнан асатынын осы тарау барысында бағалай білуді үйренесіңдер.

Сендер көптеген функцияларды оқып меңгердіңдер. Енді ғылымда және күнделікті өмірде кеңінен қолданылатын көрсеткіштік және логарифмдік функциялармен танысасыңдар. Қаржы саласында, медицинада, жаратылыстану ғылымдарында, табиғаттағы көптеген процестің математикалық моделі осы функциялар және олардың туындысы мен интегралдары арқылы өрнектеледі.

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

6.1. Көрсеткіштік функция, оның қасиеттері мен графигі
6.2. Санның логарифмі және оның қасиеттері
6.3. Логарифмдік функция, оның қасиеттері мен графигі
6.4. Көрсеткіштік функцияның туындысы және интегралы
6.5. Логарифмдік функцияның туындысы

6.1 Көрсеткіштік функция, оның қасиеттері мен графигі

Бұл тақырыпта көрсеткіштік функция, оның қасиеттері және графигімен танысып, соңында:

- көрсеткіштік функцияның анықтамасын білесіңдер және оның графигін тұрғыза аласыңдар;
- *e* санын, негізі *e*-ге тең көрсеткіштік функцияның қасиеттерін білесіңдер, оларды практикалық есептер шешкенде қолданасыңдар;
- көрсеткіштік функцияның қасиеттерін есептер шығарғанда қолданасыңдар.

6.1.1. Көрсеткіштік функцияның анықтамасы

Бізге кейде бірнеше есе көбейтілетін сандармен жұмыс істеуге тура келеді. Осындай өрнектерді белгілеу үшін дәреже көрсеткішті пайдаланамыз. Мысалы, $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Дәреже көрсеткіштер қаржы, инженерлік, физика, электроника, биология және информатика сияқты салаларда қолданылады. Осы салаларда қаралатын мәселелерде дәреже көрсеткіші уақыттың өзгеруіне сәйкес өсуі немесе кемуі мүмкін болып жатады. Мұндай мәселелерге экспоненттік өсу немесе ыдырауды мысалға келтіруге болады.

Сета есімді өнертапқыш ойлап тапқан шахмат ойыны Ежелгі Үнді патшасына қатты ұнап қалады. Ол Сетаны шақырып алып, қандай сыйақы алғысы келетінін сұрайды. Сонда Сета шахмат тақтасындағы 64 шаршының біріншісіне 1 дән, екіншісіне 2 дән, үшіншісіне 4 дән, төртіншісіне 8 дән және т.с.с., яғни әр шаршыға алдыңғысынан екі есе көп дән беруді өтінді. Алғашында патша Сетаның бұл «тым қарапайым» тілегіне таңғалып, оны орындауға бұйрық бергенімен, артынша бұл тілекті орындауға өз қазынасының жетпейтініне көзі жетіп, қатты өкініпті деседі.

Тапсырма:

1. Әр шаршыдағы дәндер санын сипаттайтын функция бар ма?
2. 40-шаршыға келгенде дәндердің саны қанша болады?
3. Прогрессияны қолданып, патшаның сыйақы ретінде бергісі келген дәндер санын анықтаңдар.

Дәрежелік функция тақырыбын меңгергенде оң санның кез келген нақты көрсеткішті дәрежесін анықтадық. Мысалы, $2^{-\frac{1}{3}}$; $2^{-\sqrt{2}}$; 2^0; $2^{-\frac{1}{4}}$; $2^{\sqrt{3}}$ және т.с.с. сандардың мағынасы бар. Олай болса, 2-нің айнымалы x, $x \in (-\infty; +\infty)$ дәрежесін қарастырып, $y = 2^x$ функциясын аламыз. Мұны негізі 2-ге тең ***көрсеткіштік функция*** деп атайды.

Анықтама. *Егер $a > 0$, $a \neq 1$ болса, онда $y = a^x$ функциясын* ***негізі a-ға тең көрсеткіштік функция*** *деп атайды. Мұнда $x \in (-\infty; +\infty)$.*

Мысалы, $y = 3^x$; $y = 10^x$; $y = 0{,}2^x$; $y = \dfrac{1}{2^x}$; $y = \sqrt{2}^{\,x}$ және т.с.с. — көрсеткіштік функциялар. Анықтамадағы $a > 0$, $a \neq 1$ шарттары өте маңызды. Біріншіден, нақты көрсеткішті дәрежелер тек оң сандар үшін анықталғандықтан, $a > 0$ болуы қажет. Екінші жағынан, егер $a=1$ деп алсақ, әрбір $x \in (-\infty; +\infty)$ мәнінде $y = a^x = 1^x = 1$, яғни функция x-ке тәуелсіз болады. Кейде бұл жағдайдағы функцияны $y=1$ тұрақты функциясы ретінде қарастырады.

6.1.2 Көрсеткіштік функцияның қасиеттері

Сонымен, енді көрсеткіштік $y = a^x$ функциясы $a > 0$ және $a \neq 1$ болғанда анықталған деп есептейміз. Көрсеткіштік функцияның мынадай қасиеттері бар:

1°. *Көрсеткіштік функцияның анықталу облысы:* $(-\infty; +\infty)$.

2°. $(0; +\infty)$ *жиыны — көрсеткіштік функцияның мәндерінің облысы, яғни* $a^x > 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$ *теңсіздігі орындалады.*

3°. 1) *Егер $a > 1$ және $x > 0$ болса, онда $a^x > 1$;*

2) *егер $a > 1$ және $x < 0$ болса, онда $a^x < 1$;*

3) *егер $a < 1$ және $x > 0$ болса, онда $a^x < 1$;*

4) *егер $a < 1$ және $x < 0$ болса, онда $a^x > 1$;*

5) *егер $a > 0$ және $x = 0$ болса, онда $a^0 = 1$.*

4°. *Егер $a > 1$ болса, онда $y = a^x$ көрсеткіштік функциясы өспелі, яғни $x_1 < x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x_1 және x_2 нақты сандары үшін $a^{x_1} < a^{x_2}$ теңсіздігі орындалады.*

5°. *Егер $0 < a < 1$ болса, онда $y = a^x$ көрсеткіштік функциясы кемімелі, яғни $x_1 < x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x_1 және x_2 нақты сандары үшін $a^{x_1} > a^{x_2}$ теңсіздігі орындалады.*

▲ 1°. Бұл қасиеттің дәлелдеуі анықтамадан шығады.

2°. Оң санның рационал көрсеткішті дәрежесі оң болатынын білеміз, яғни x рационал сан болғанда $a^x > 0$ теңсіздігі орындалады. Енді $a^x > 0$ теңсіздігі кез келген иррационал x үшін орындалатынын көрсетейік: $y = a^x = a^{\frac{x}{2}\cdot 2} = \left(a^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0$, ал $a \neq 0$ болғандықтан, $a^{\frac{x}{2}} \neq 0$. Олай болса, көрсеткіштік функция әрқашан оң мән қабылдайды.

3°. 1) Егер $a > 1$ және $x > 0$ болса, нақты көрсеткішті дәреженің қасиеті бойынша $a^x > 1^x = 1$.

2) Егер $a > 1$ және $x < 0$ болса, $a^x < 1^x = 1$.

3) және 4) пункттері де осы сияқты дәлелденеді. 5) пункттің дәлелдеуі дереже көрсеткіші 0-ге тең дәреженің анықтамасынан шығады.

4°. $a > 1$ және $x_1 < x_2$ болсын. Онда $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right) > 0$, себебі $x_2 - x_1 > 0$ болғандықтан, $a^{x_2-x_1} - 1 > 0$. Олай болса, теңсіздіктің анықтамасы бойынша $a^{x_2} > a^{x_1}$.

5°. $0 < a < 1$ және $x_1 < x_2$ болсын. Онда $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right) < 0$. Себебі $a^{x_1} > 0$. Ал $x_2 - x_1 > 0$ және $0 < a < 1$, осыдан $a^{x_2-x_1} < 1$.

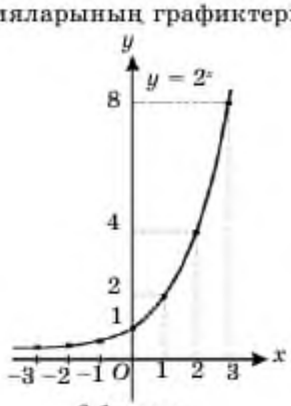
Қасиеттер толық дәлелденді. ■

6.1.3 Көрсеткіштік функцияның графигі

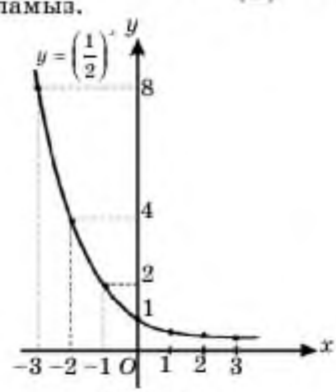
Алдымен кестелер көмегімен $y = 2^x$ және $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларының графиктерін салып көрейік:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Табылған нүктелерді координаталық жазықтықта белгілеп, сызықтармен қоссақ, $y = 2^x$ (6.1-сурет) және $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (6.2-сурет) функцияларының графиктерін аламыз.

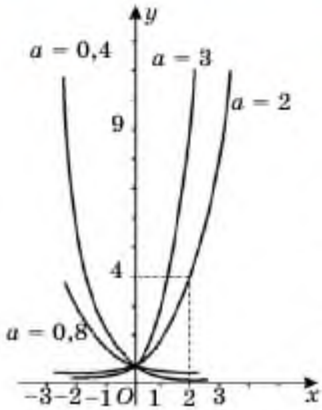


6.1-сурет



6.2-сурет

Дәреженің қасиеті бойынша $1 < a < b$ жағдайында, егер $x > 0$ болса, $a^x < b^x$ теңсіздігі; егер $x < 0$ болса, $a^x > b^x$ теңсіздігі орындалады. Керісінше



6.3-сурет

$$0 < a < b < 1$$

жағдайында, егер $x > 0$ болса, $a^x < b^x$ теңсіздігі; егер $x < 0$ болса, $a^x > b^x$ теңсіздігі орындалады. Олай болса, a негізі 1-ден неғұрлым үлкен болған сайын $y = a^x$ көрсеткіштік функциясы соғұрлым «жылдамырақ» өседі. Ал a негізі 1-ден неғұрлым кіші болған сайын $y = a^x$ көрсеткіштік функциясы соғұрлым «жылдамырақ» кемиді.

6.3-суретте негіздері $a = 0{,}8$; $a = 0{,}4$; $a = 3$; $a = 2$ болатын көрсеткіштік функциялардың графиктері көрсетілген.

6.1.4. *e* саны. Негізі *e*-ге тең көрсеткіштік функция

Ғылымда, инженерия саласында және практикалық есептерде негізі $e \approx 2{,}7183$ саны болатын көрсеткіштік функция кеңінен қолданылады. e — математикадағы ерекше сан, ол π саны сияқты иррационал сан. π санының мағынасы — шеңбер ұзындығының оның диаметріне қатынасы екенін білеміз. Сол сияқты e санының да математикалық мағынасы бар.

Практикалық тапсырма

Үзіліссіз пайызбен депозитке салынған сомаға өсімімен бірге есептелген ақшаның мөлшері мына формуламен есептеледі:

$$u_n = u_0(1 + i)^n,$$

мұндағы u_n — соңғы сома, u_0 — алғашқы депозитке салынған сома, i — шектелген мерзімдегі пайыздық өсім, n — мерзім саны. Бірнеше мерзімнен кейінгі жинақталған соңғы соманы бағалайық.

Алдымен мына қарапайым есепті шығарыңдар:

Жылдық өсімі 10%-ға тең депозитке бір жылға 100 000 теңге салынды. Калькулятор көмегімен соңғы соманы есептеп, жауапты негіздеңдер:

1) жылына ($n = 1$, $i = 10\% = 0{,}1$);

2) тоқсан сайын ($n = 4$, $i = \frac{10\%}{4} = 0{,}025$);

3) айына; 4) әр күні; 5) әр секундта; 6) әр милисекундта.

Егер i — жылдық пайыздық өсім, t — салымның сақталу уақыты (жылмен), N — барлық жылға қосылатын өсім мөлшері болса, $i = \frac{t}{N}$ және $n = Nt$. Сондықтан өскен соманы:

$$u_n = u_0\left(1+\frac{t}{N}\right)^{Nt}$$

формуласымен есептейді. Егер $a = \frac{N}{t}$ белгілеуін енгізсек,

$$u_n = u_0\left(\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}\right)^{t^2}.$$

Калькуляторды қолданып, 6.4-кестені толтырыңдар. a шамасы артқанда

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a} \approx 2{,}71828182\ \ldots$$

болатынына көз жеткізіңдер.

6.4-кесте

a	$\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$
10	
100	
1000	
10 000	
100 000	
...	

$\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$ шегінің мәнін e саны деп атайды.

$$e \approx 2{,}71.$$

Сонымен, үзіліссіз пайызбен салынған ақшаның өсімімен есептегендегі соңғы мөлшерін $u_n = u_0e^{rt}$ формуласымен есептеуге болады, мұндағы u_0 — депозитке салынған алғашқы сома, r — жылдық пайыздық өсім, t — жылдар саны.

Осы формуланы қолданып, 10 000 теңгені жылдық пайыздық өсімі 10%-ға тең депозитке төрт жылға салғанда жиналған соманы есептеңдер.

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots$$

қатарының шексіз көп мүшесі бар. Осы қатарды

$$f(x) = e^x$$

функциясы арқылы өрнектеуге болатыны дәлелденген.

Осы тұжырымды $x = 1$ деп алып, қатардың алғашқы бес мүшесін қолданып, $f(1)$-ді есептеп тексеріңдер.

$y = e^x$ негізі e-ге тең көрсеткіштік функция.

Көрсеткіштік функцияның практикада қолданылуы

1) Қолайлы жағдай туғанда (жау жоқ, азық жеткілікті) тірі организмдер санының көбеюі көрсеткіштік функция заңдылығына бағынады. Мысалы, бір шыбын жаз бойы $8 \cdot 10^{14}$ ұрпақ қалдыра алады. Олардың салмағы бірнеше миллион тонна болушы еді. Бірақ шыбынның көбеюіне басқа да жануарлар мен өсімдіктер кедергі жасағандықтан, олардың саны жоғарыда аталған шамаға жете алмайды. Әртүрлі бактериялар мен микроорганизмдер санының өсу заңдылығы мына формуламен сипатталады: $N = N_0e^{kt}$, мұндағы N_0 — жәндіктердің бастапқы саны, k — тұрақты коэффициент, t — уақыт.

2) Радиоактивті зат $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ заңына сәйкес ыдырайды. Мұндағы m — заттың t уақыт мезетіндегі массасы, m_0 — заттың бастапқы ($t = 0$) массасы, T — жартылай ыдырау периоды. Осы заңдылықты қолданып, ғалымдар Жердің жасын анықтаған.

3) Халық санының аз уақыт аралығындағы өсуі $N = N_0e^{kt}$ формуласымен сипатталады. Мұндағы N_0 — халықтың бастапқы саны ($t = 0$), N — халықтың t уақытындағы саны, k — тұрақты шама.

4) Қолданбалы математикада түрлі есептер кездеседі. Соның бірі — ракетаның жылдамдығын қажетті v шамасына жеткізу үшін оған кететін отынның M массасын анықтау есебі. Бұл масса ракетаның m өзіндік массасына және v_0 отынның ракета қозғалтқышынан шығу жылдамдығына тәуелді. Егер Жердің тартылыс күшін ескермесе, қажетті отын массасы мына формуламен анықталады:

$$M = m(e^{v/v_0} - 1)$$

(К.Э. Циалковский формуласы). Мысалы, салмағы 1,5 т ракета 8000 м/с жылдамдық алу үшін, отынның ракета қозғалтқышынан шығу жылдамдығы 2000 м/с болса, шамамен 80 т отын қажет.

5) Қайнаған шәйнектегі суды токтан өшіре салысымен ол алғашқыда тез суиды, уақыт өте оның суу жылдамдығы азаяды. Оның суу температурасы мына формуламен есептеледі:

$$T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1.$$

1. Көрсеткіштік функция деп қандай функцияны атайды?
2. Неліктен көрсеткіштік функция негізі $a > 0$, $a \neq 1$ шарттарын қанағаттандыруы қажет?
3. Көрсеткіштік функцияның қасиеттерін тұжырымдап, оларды дәлелдеңдер.
4. $y = 4^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ функцияларының графиктерін салып көрсетіңдер.

Есептер

А

6.1. x-тің қандай мәндерінде 3^x өрнегінің мәні:
1) 1-ден үлкен; 2) 1-ден кіші; 3) 1-ге тең?

6.2. x-тің қандай мәндерінде $0{,}3^x$ өрнегінің мәні:
1) 1-ден үлкен; 2) 1-ден кіші; 3) 1-ге тең?

6.3. Функцияның графигін салыңдар және оның анықталу облысы мен мәндер жиынын анықтаңдар:

1) $f(x) = 3^x$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $f(x) = 5^x$; 4) $f(x) = 0{,}3^x$.

6.4. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = e^{\frac{x-1}{x+3}}$; 2) $y = e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

6.5. Функцияның өспелі не кемімелі болатынын көрсетіңдер және графигін салыңдар:

1) $y = e^{3-x}$; 2) $y = e^{2x-5}$.

Практикалық тапсырмалар (6.6—6.8):

6.6. Шегірткелер жайлаған егістік аумағын мына заңдылықпен анықтайды: $A_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$ га, мұндағы n — апта саны. Мына мәліметтерді анықтаңдар:
1) шегірткелер жайлаған бастапқы егістіктің аумағын;
2) 10 аптадан кейін шегірткелер зақымдаған егістіктің аумағын.

6.7. Бактериялар қолайлы ортада тез көбейеді. Олардың массасы $W_t = 100 \cdot 2^{0,1t}$ (грамм) заңдылығымен өсетіні анықталған. Мұндағы t — уақыт (сағат).
1) Бактериялардың бастапқы массасын; 2) 4 сағ өткеннен кейінгі массасын анықтаңдар; 3) бактериялар массасының уақытқа тәуелді өсу графигін салыңдар.

6.8. Жолбарыс популяциясын (көбеюін) қалпына келтіру мақсатында 2018 жылы 6 жұп жолбарыс әкелініп, бос

жіберілді дейік. Жолбарыстың көбеюі $N_t = N_0 \cdot 2^{0,18t}$ заңдылығына бағынады, мұндағы N_0 — бастапқы жолбарыстар саны, t — уақыт (жыл).
1) 2030 жылы күтілетін жолбарыстар санын анықтаңдар;
2) 2018 жылдан 2030 жылға дейінгі пайыздық өсімін есептеңдер.

B

6.9. Сандарды салыстырыңдар:

1) $2^{1.5}$ және $2^{\sqrt{2}}$; 2) $2^{\frac{1}{3}}$ және $2^{0.3}$; 3) $3^{0.1}$ және 3^0;

4) $3^{-0.1}$ және 3^0; 5) $2^{-1.42}$ және $2^{-\sqrt{2}}$; 6) $2^{\frac{1}{7}}$ және $2^{0.143}$.

Практикалық тапсырмалар: (6.10—6.11):

6.10. Радиоактивті зат $M = 250 \cdot 0,998^t$ заңдылығымен ыдырайды (M — салмақ граммен, t — уақыт жылмен өлшенеді).
1) Радиоактивті заттың бастапқы салмағын анықтаңдар;
2) 400 жыл өткеннен соң радиоактивті заттың салмағы қандай болады?
3) Графиктік калькулятор көмегімен радиоактивті заттың салмағы 125 грамға дейін қанша уақытта ыдырайтынын анықтаңдар.

6.11. Сұйық мұздатқышқа салынды. Оның температурасының өзгеру заңдылығы $T(t) = 100 \cdot 2^{-0,03t}$, мұндағы T — температура (°C), t — уақыт (мин).
1) Сұйықтың бастапқы температурасын;
2) калькулятор көмегімен 15 минуттан кейінгі температурасын;
3) 20 минуттан кейінгі температурасын анықтаңдар.

6.12. Функцияның графигін салыңдар және оның анықталу облысы мен мәндер жиынын анықтаңдар:

1) $f(x) = 3^x + 1$; 2) $f(x) = 3^{x-1}$; 3) $f(x) = 3^{|x|}$; 4) $f(x) = 3^{-|x|}$.

6.13. Функцияның өспелі не кемімелі болатынын анықтаңдар:

1) $f(x) = \sqrt{5^x}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5^x}}$; 3) $f(x) = \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^x$;

4) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x$; 5) $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$; 6) $f(x) = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$;

7) $f(x) = \left(4 - \sqrt{7}\right)^x$; 8) $f(x) = \left(\dfrac{4 + \sqrt{7}}{9}\right)^x$.

6.14. Теңдеудің түбірі бар ма? Егер бар болса, таңбасы қандай:

1) $5^x = 6$; 2) $5^x = \frac{1}{6}$; 3) $5^x = 0{,}01$;

4) $5^x = 100$; 5) $5^x = -1$?

6.15. a-ның қандай мәндерінде $a^m > a^n$ теңсіздігінен $m < n$ теңсіздігі шығады?

6.16. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = e^{-|x|}$; 2) $y = e^{|x-1|}$;

3) $y = e^{|x|-1}$; 4) $y = \left|e^{|x|-1} - 1\right|$.

C

6.17. $[-1;\ 1]$ аралығында $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)^x$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтаңдар.

6.18. $[0;\ 1]$ аралығында $y = \left(\sqrt{17} - 3\right)^x$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтаңдар.

6.19. Онлайн графиктік калькулятор көмегімен $y = \sqrt{2^x}$ және $y = \sqrt{3^x}$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтықта салып,

1) $\sqrt{3^x} = \sqrt{2^x}$ теңдеуін; 2) $\frac{1}{\sqrt{3^x}} < \frac{1}{\sqrt{2^x}}$ теңсіздігін шешіңдер.

6.20. Радиоактивті зат $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ заңына сәйкес ыдырайды. Мұндағы m — заттың t уақыт мезетіндегі массасы, m_0 — заттың бастапқы ($t = 0$) массасы, T — жартылай ыдырау периоды. Ыдыста сәйкесінше массалары 50 г және 20 г болатындай радиоактивті заттардың екі кесегі бар. Бірінші заттың жартылай ыдырау периоды 1 сағ, ал екіншісінікі 2 сағ.
1) Әр заттың массасының өзгеру графигін салыңдар.
2) Заттардың қосынды массасының өзгеру графигін салыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

6.21. $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ функциясының графигін салыңдар.

6.22. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}4(x-1)-2(x+1)>0,\\ 3x-1-4(x-10)<0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+8-(2x-5)<0,\\ 2(6x-4)-3(x+1)>0.\end{cases}$

6.23. Есептеңдер:

1) $\dfrac{a-4\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}}}$, мұнда $a=81$; 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-9\cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{6}}}$, мұнда $a=64$.

6.24. Арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі мен айырымын табыңдар:

1) $\begin{cases}a_4+a_{11}=0,2,\\ a_9-a_5=2,4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}a_2+a_4=18,\\ a_3\cdot a_5=144.\end{cases}$

6.2 Санның логарифмі және оның қасиеттері

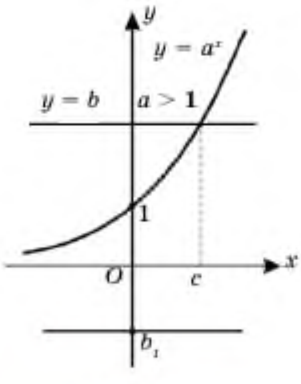
Бұл тақырыпта логарифм ұғымымен танысып, соңында:

- санның логарифмі анықтамасын;
- ондық және натурал логарифмдерді;
- логарифмнің қасиеттерін білесіңдер;
- логарифмдік өрнектерді түрлендіргенде олардың қасиеттерін қолданасыңдар.

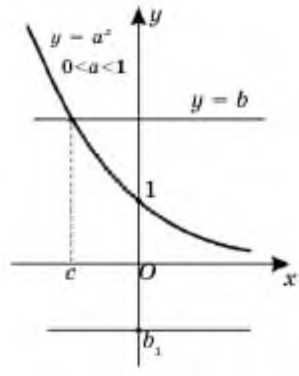
6.2.1. Логарифмнің анықтамасы

$a^x=b$ $(a>0,\ a\neq 1)$ теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеудің түбірі $y=a^x$ көрсеткіштік функциясының графигі мен $y=b$ түзуінің қиылысу нүктелерінің абсциссасына тең (6.4, 6.5-суреттер). Осы суреттерден, егер $b>0$ болса, $y=a^x$ функциясының графигі мен $y=b$ түзуі бір нүктеде қиылысатынын, егер $b\leqslant 0$ болса, $y=a^x$ функциясының графигі мен $y=b_1$ түзуі қиылыспайтынын көреміз.

Олай болса, $b > 0$ жағдайында $a^x = b$ теңдеуінің жалғыз түбірі бар ($x = c$), ал $b \leqslant 0$ болса, теңдеудің түбірі жоқ. Сонымен, $b > 0$ болғанда $a^x = b$ теңдеуінің түбірін *негізі a-ға тең b санының* ***логарифмі*** деп атайды.



6.4-сурет



6.5-сурет

Анықтама. *Берілген оң санның берілген негіздегі* ***логарифмі*** *деп осы негіздің берілген санға тең дәреже көрсеткішін, яғни $b > 0$ санының a ($a > 0$, $a \neq 1$) негізіндегі логарифмі деп*

$$a^c = b \qquad (1)$$

теңдігін қанағаттандыратын c санын айтады. Оны былай белгілейді: $\log_a b$ *және ол «негізі a бойынша логарифм b» немесе «негізі a-ға тең логарифм b» деп оқылады.*

Сонымен анықтама бойынша (1) теңдіктен

$$b = a^{\log_a b} \qquad (2)$$

теңдігін аламыз. (2) теңдікті *логарифмнің негізгі тепе-теңдігі* деп атайды.

1-мысал. 1) $\log_3 81$; 2) $\log_2 0{,}125$ өрнектерінің мәнін табу керек.
▲ 1) $81 = 3^4$, анықтама бойынша $\log_3 81 = 4$;

2) $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$, олай болса, $\log_2 0{,}125 = -3$. ■

6.2.2. Логарифмдердің негізгі қасиеттері

Енді логарифмдердің негізгі қасиеттерін атап өтелік.

Кез келген $a > 0$ $(a \neq 1)$ және b, c оң сандары үшін

1°. $\log_a 1 = 0$;

2°. $\log_a a = 1$;

3°. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

4°. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

5°. $\log_a b^m = m\log_a b$, $m \in R$;

6°. $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$, $n \in R$, $n \neq 0$;

7°. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$;

8°. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $a, b > 0$; $a \neq 1$, $b \neq 1$;

9°. $\log_m a \cdot \log_n b = \log_n a \cdot \log_m b$, $a, b > 0$; $a \neq 1$, $b \neq 1$

теңдіктері орындалады.

Қасиеттердің дәлелдеулері

▲ **1° және 2°-қасиеттердің** дәлелдеуі анықтамадан шығады.

3°-қасиет. Айталық, $\log_a b = u$, $\log_a c = v$ болсын. (2) теңдік бойынша

$$b = a^u, \; c = a^v \tag{3}$$

теңдіктерін аламыз. (3) теңдіктерден $b \cdot c = a^{u+v}$. Осыдан логарифмнің анықтамасы бойынша

$$\log_a bc = u + v = \log_a b + \log_a c.$$

4°-қасиет. (3) теңдіктен $\dfrac{b}{c} = a^{u-v}$ теңдігі шығады. Онда анықтамадан

$$\log_a \frac{b}{c} = u - v = \log_a b - \log_a c.$$

5°-қасиет. Егер $\log_a b = u$ болса, $b = a^u$. Осыдан $b^m = a^{mu}$ теңдігі мен логарифмнің анықтамасын қолдансақ,

$$\log_a b^m = m \cdot u = m\log_a b.$$

6°-қасиет. (2) теңдік бойынша

$$\left(a^n\right)^{\log_{a^n} b} = b, \quad a^{\log_{a^n} b} = \left[\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\log_{a^n} b} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}\log_{a^n} b}.$$

Олай болса, $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$.

Логарифмдеу — айнымалысы бар өрнектің логарифмін айнымалылардың логарифмдерінің қосындысына немесе айырымына түрлендіру.

7°-қасиет. $a^{\log_a b} = b$ теңдігін c негізі бойынша логарифмдейміз: $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Осыдан $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ■

8°-қасиет. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ теңдігінің орындалатынын көрсетейік:

$\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$, $\log_b a = d \Rightarrow b^d = a$;

$(b^d)^c = b \Rightarrow b^{dc} = b \Rightarrow dc = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{d} \Rightarrow \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Топтық жұмыс

Логарифмнің 7°, 8°-қасиеттерін қолданып, 9°-қасиетті қорытып шығарыңдар:

$\log_m a \cdot \log_n b = \log_n a \cdot \log_m b$, $a, b > 0$; $a \neq 1$, $b \neq 1$.

$\log_a b$ санының таңбасын жылдам анықтау жолы:

егер $a > 1$, $b > 1$немесе $0 < a$, $b < 1$ болса, $\log_a b > 0$;

егер $a > 1$, $0 < b < 1$ немесе $0 < a < 1$, $b > 1$ болса, $\log_a b < 0$.

2-мысал. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_4 2$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ өрнегінің мәнін табу керек.

▲ 1) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4$;

2) $\log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \dfrac{1}{2}\log_2 2 = \dfrac{1}{2}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{3^{-1}} 3^3 = -3\log_3 3 = -3$. Мұнда біз 2°, 5° және 6°-қасиеттерді қолдандық. ■

3-мысал. $\log_a 27 = b$ деп алып, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$ өрнегінің мәнін анықтайық.

▲ $\log_a 27 = b \Rightarrow \log_a 3^3 = b \Rightarrow 3 \cdot \log_a 3 = b \Rightarrow \dfrac{\log_3 3}{\log_3 a} = \dfrac{b}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\log_3 a} = \dfrac{b}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 a = \dfrac{3}{b}$. Осыдан $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \dfrac{2}{6}\log_3 a = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{b} = \dfrac{1}{b}$.

Жауабы: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \dfrac{1}{b}$. ■

4-мысал. $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$ тепе-теңдігін дәлелдеу керек.

▲ 9°-қасиетке сәйкес

$\log_{ab} x = \log_{ab} x \cdot \log_a a = \log_{ab} a \cdot \log_a x \Rightarrow \log_{ab} x = \log_{ab} a \cdot \log_a x$. Енді осы теңдіктегі бөлшектің бөліміне қолдансақ,

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{1}{\log_{ab} a} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a x} = \frac{1}{\log_{ab} a}.$$

8°-қасиетке сәйкес $\dfrac{1}{\log_{ab} a} = \log_a ab \Rightarrow$

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{1}{\log_{ab} a} = \log_a ab = 1 + \log_a b.$$ ■

Анықтама. *Негізі 10-ға тең логарифмді* ***ондық логарифм*** *деп атап, оны* lg *түрінде белгілейді:* $\log_{10} a = \lg a$.

Негізі e-ге тең логарифмді ***натурал логарифм*** *деп атап, оны* ln *түрінде белгілейді, яғни* $\log_e a = \ln a$.

1. $a^x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ теңдеуінің 1) $b > 0$; 2) $b < 0$ болғанда неше түбірі бар?
2. Оң санның логарифмі деп нені айтады?
3. Логарифмдердің негізгі тепе-теңдігін жазып көрсетіңдер.
4. Логарифмдердің негізгі қасиеттерін атап, оларды дәлелдеп беріңдер.
5. Неліктен теріс санның логарифмі анықталмайды?
6. Логарифмнің негізі 1-ге тең болуы мүмкін бе?
7. Натурал логарифм қалай анықталады? Оны қалай жазады?
8. Қандай логарифм ондық логарифм деп аталады?

Есептер

А

6.25. Берілген санның негізі 2-ге тең логарифмін табыңдар:

1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) $\frac{1}{4}$;

5) $\frac{1}{8}$; 6) 32; 7) 64; 8) $\frac{1}{16}$.

6.26. Санның негізі 3-ке тең логарифмін табыңдар:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 9; 4) $\frac{1}{9}$;

5) $\frac{1}{27}$; 6) 27; 7)243; 8) $\frac{1}{81}$.

6.27. Берілген теңдіктердің дұрыстығын түсіндіріңдер (ауызша орындалатын тапсырма):

1) $\lg 10000 = 4$; 2) $\lg 0{,}1 = -1$; 3) $\lg\sqrt{10} = \frac{1}{2}$;

3) $\log_2 8 = 3$; 4) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; 6) $\log_3 \sqrt{27} = 1{,}5$.

6.28. Есептеңдер:

1) $\lg 100\,000$; 2) $\lg 0{,}01$; 3) $\log_3 \sqrt{3}$; 4) $\log_2 128$;

5) $\log_5 25$; 6) $\log_5 125$; 7) $\log_9 3$; 8) $\log_2 \sqrt[3]{2}$;

9) $\log_a a^n$; 10) $\log_8 2$; 11) $\log_a \dfrac{1}{a}$; 12) $\log_6 6\sqrt{6}$;

13) $\log_4 1$; 14) $\log_9 9$.

6.29. Калькулятормен есептеңдер:

1) $\lg 152$; 2) $\lg 25$; 3) $\lg 74$; 4) $\lg 0{,}8$.

6.30. Негізгі логарифмдік тепе-теңдікті қолданып, x-ті табыңдар:

1) $\log_2 x = 2$; 2) $\log_8 x = 2$; 3) $\log_4 x = -3$;

4) $\log_5 x = 3$; 5) $\log_x 4 = 2$; 6) $\log_x 3 = -\dfrac{1}{2}$.

6.31. Есептеңдер:

1) $\log_2 32$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 81$; 3) $\log_{a^3} \sqrt[7]{a}$; 4) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[4]{a^3}$;

5) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{1}$; 6) $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 7) $\log_7 343$; 8) $\lg 0{,}01$.

6.32. Ондық логарифмдерді есептеңдер:

1) $\lg 0{,}001$; 2) $\lg 1$; 3) $\lg \sqrt[3]{10}$;

4) $\lg \dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 5) $\lg 10\sqrt{10}$; 6) $\lg 1000\sqrt{10}$.

6.33. Берілген сандарды 10-ның дәрежесі түрінде жазыңдар:

1) 6; 2) 60; 3) 6000; 4) 0,6; 5) 0,006.

6.34. Ықшамдаңдар:

1) $\lg 8 + \lg 2$; 2) $\ln 8 - \ln 2$; 3) $\lg 40 - \lg 5$;

4) $\ln 4 + \ln 5$; 5) $\lg 2 + \lg 3 + \lg 4$; 6) $1 + \ln 3$;

7) $\lg 4 - 1$; 8) $\ln 6 - \ln 2 - \ln 3$; 9) $\lg 5 + \lg 4 - \lg 2$;

10) $\ln \dfrac{3}{4} + \ln 3 + \ln 7$.

6.35. Ықшамдаңдар:

1) $5\lg 2 + \lg 3$; 2) $2\ln 3 + 3\ln 2$; 3) $3\lg 4 - \ln 8$;

4) $2\ln 5 - 3\ln 2$; 5) $\dfrac{1}{2}\ln 4 + \ln 3$; 6) $\dfrac{1}{3}\ln \dfrac{1}{8}$;

7) $3 - \lg 2 - 2\lg 5$; 8) $2 - \dfrac{1}{2}\lg 4 - \lg 5$.

6.36. Ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\lg 4}{\lg 2}$; 2) $\dfrac{\ln 27}{\ln 9}$; 3) $\dfrac{\lg 3}{\lg 9}$; 4) $\dfrac{\ln 25}{\ln 0,2}$.

6.37. Мына теңдіктердің дұрыстығын көрсетіңдер:

1) $\lg 300 = \lg 3 + 2$; 2) $\lg 0,05 = \lg 5 - 2$;
3) $\lg 5000 = 4 - \lg 2$; 4) $\lg 5 = 1 - \lg 2$.

6.38. Есептеңдер:

1) $2^{\log_2 19}$; 2) $3^{\log_9 5}$; 3) $\log_5 5^{21}$;
4) $5^{1+\log_5 8}$; 5) $4^{\log_{0,25} 7}$; 6) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{27}$.

6.39. $p = \log_6 2$, $q = \log_6 3$ және $r = \log_6 5$ болса, мына сандарды p, q, r арқылы жазыңдар:

1) $\log_6 6$; 2) $\log_6 108$; 3) $\log_6 45$.

6.40. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\log_5 2$ және $\dfrac{1}{\log_4 25}$; 2) $\log_2 3$ және $\dfrac{1}{\log_3 2}$;

3) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ және $\dfrac{1}{\log_3 2}$.

6.41. Сандардың қайсысы үлкен:

1) $\lg \sqrt[6]{10}$ және $\log_2 \sqrt{2}$; 2) $\log_4 2$ және $\log_{0,0625} 0,25$;

3) $\log_5 \dfrac{2}{625}$ және $\log_3 \dfrac{1}{27}$; 4) $\lg 2$ және $\dfrac{1}{\log_4 1000}$?

Практикалық тапсырма

6.42. Салымшы жылдық өсімі 12% болатын депозитке 10 000 теңге салды. Неше жылдан кейін оның ақшасы екі еселенеді?

▲Күрделі пайыз формуласын қолданамыз: $S = A\left(1 + \dfrac{P}{100}\right)^n$, мұндағы A — бастапқы салынған сома, P — жылдық өсімі, n — салымның сақталу уақыты (жылмен), ал S — жиналған сома. Біздің жағдайда бұл формула $S = 10000\left(1 + \dfrac{12}{100}\right)^n$. Бізге n-ді анықтау қажет. Екі еселенген сома 20000 болғандықтан, мына теңдеуді аламыз:

$20000 = 10000\left(1+\frac{12}{100}\right)^n$, қысқартудан соң $2 = \left(1+\frac{12}{100}\right)^n$ теңдеуін шешу керек.

Бұл теңдеуді шешу үшін логарифмнің анықтамасын қолданамыз: $2 = 1{,}12^n \Rightarrow n = \log_{1,12}2$. Логарифмнің 7°-қасиетін қолданып, ондық логарифмдер арқылы есептейміз.

$$n = \log_{1,12}2 = \frac{\lg 2}{\lg(1{,}12)} \approx \frac{0{,}3010\ \dots}{0{,}0492\ \dots} = 6{,}11.$$

Сонымен, 6 жылдан сәл астам уақытта немесе 73,5 айдан соң салым сомасы екі еселенеді. ■

Логарифмді қаржы саласындағы мамандар, инженерлер, медицина мамандары да қолданады. Төмендегі мысалда логарифмнің биологияда қолданылуын қарастырамыз.

Практикалық тапсырма

6.43. Бактериялар санының уақытқа тәуелді өсуі мына формуламен есептеледі:

$x = \dfrac{t(\lg B - \lg q)}{\lg\dfrac{p}{q}}$, мұндағы q — алғашқы бактериялар саны, p — t уақыт өткеннен кейінгі бактериялар саны, B — берілген бактериялар саны, x — бактериялар саны B-ға тең болу үшін қажет уақыт.

Бастапқыда 8 бактерия бар еді. Қоректі ортаға салғаннан кейін 2 сағат өткен соң олардың саны 100-ге жетті. Қанша уақыттан соң бактериялар саны 500-ге жетеді?

▲ Есеп шартынан формулаға қойылатын айнымалыларды анықтасақ, $q = 8$, $t = 2$, $p = 100/8$, $B = 500$. Осы сандарды формулаға қойып есептейік:

$\dfrac{2\cdot(\lg 500 - \lg 8)}{\lg\dfrac{100}{8}} = \dfrac{2\cdot 1{,}7959\ \dots}{1{,}0970\ \dots} = 3{,}27$. Шамамен 3,27 сағ немесе 3 сағ 15 мин-тан соң бактериялар саны 500-ге жетеді. ■

B

6.44. Есептеңдер:

1) $3^{1+\log_3 8}$; 2) $2^{4+\log_2 5}$; 3) $\sqrt{25^{2+\frac{1}{2}\log_5 36}}$; 4) $2^{\log_{\sqrt{2}}5+4\log_{0,5}5}$.

6.45. Егер $\log_a x = n$; $\log_b x = m$; $\log_c x = k$ болса, онда $\log_{abc} x$-ті табыңдар.

6.46. Есептеңдер:

1) $\log_3\log_4\log_2 16$; 2) $\log_4\log_2\log_3 81$;

3) $\log_{\sqrt{6}}3 \cdot \log_3 36 + \log_{\sqrt{3}}8 \cdot \log_4 81$;

4) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

6.47*. Кез келген оң a $(a \neq 1)$ саны үшін

1) $\dfrac{1}{\log_a e}+\dfrac{1}{\log_{a^2} e}+\dfrac{1}{\log_{a^3} e}+\dfrac{1}{\log_{a^4} e}=10\ln a$;

2) $\log_{e^{1+n}} ae^n = \dfrac{\ln a + n}{1+n}$

теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

6.48. Берілген санды негізі a $(a > 0,\ a \neq 1)$ болатын логарифм түрінде жазыңдар:

1) 2; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) -1; 4) $\dfrac{1}{3}$; 5) 1; 6) 0; 7) $-\dfrac{3}{4}$.

6.49. Кез келген 1-ден өзге оң a және b сандары үшін $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ тепе-теңдігі орындалатынын көрсетіңдер.

6.50. $\log_6 2 = m$ деп алып, $\log_{24} 72$-ні табыңдар.

6.51. $\log_{36} 8 = m$ деп алып, $\log_{36} 9$-ды табыңдар.

6.52.* $\log_{100} 3 = m$ және $\log_{100} 2 = n$ деп алып, $\log_5 6$-ні табыңдар.

6.53. Амалды орындаңдар:

1) $\log_a \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}$; 2) $-\log_2\log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

6.54. Ықшамдаңдар:

1) $\left(25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}\right)^{\frac{1}{2}}$; 2) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 3^{\frac{1}{\log_7 9}} + 27^{\log_9 36}$;

3) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$; 4) $49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

6.55*. $\log_3 12 = \log_3 8 \cdot \log_8 5 \cdot \log_5 4 + 1$ теңдігінің орындалатынын көрсетіңдер.

6.56. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$; 2) $\sqrt{a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}} + 8^{\frac{1}{3\log_{a^2} 2}} + 1}$.

6.57. $a^{\frac{\ln\ln a}{\ln a}} = \ln a \; (a > 0)$ теңдігін дәлелдеңдер.

C

6.58. $\lg 5 = a$, $\lg 7 = b$ деп алып, $\lg 122{,}5$ өрнегінің мәнін табыңдар.

6.59. $b = \log_c 0{,}25 + 3\log_u 4$, $u = 27$, $c = \dfrac{1}{9}$ деп алып, $3b$-ның мәнін табыңдар.

6.60. $1 < a < b$ деп алып, $\sqrt{\sqrt{\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2} - 2}$ өрнегін ықшамдаңдар.

6.61*. $\log_a A \cdot \log_b A + \log_b A \cdot \log_c A + \log_c A \cdot \log_a A$ өрнегін көбейткіштерге жіктеңдер.

6.62. $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$ теңдігінің орындалатынын көрсетіңдер.

6.63*. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_{a^2} x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a^n} x} = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a x}$;

2) $\log_{abc} x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x} + \dfrac{1}{\log_c x}}$.

6.64*. 1-ге тең емес оң a, b, c, x, y, z сандары берілген. Егер $\log_x a$, $\log_y b$, $\log_z c$ сандары арифметикалық прогрессияның тізбектес мүшелері болса, $\log_b y(\log_a x + \log_c z) = 2\log_a x \cdot \log_c z$ теңдігінің орындалатынын көрсетіңдер.

6.65. Егер $4a^2 + 9b^2 = 4ab (a > 0)$ болса, $\log_3 \dfrac{2a + 3b}{4} = \dfrac{\log_3 a + \log_3 b}{2}$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

6.66. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\log_{xy} z = \dfrac{\log_x z \cdot \log_y z}{\log_x z + \log_y z}$; 2) $1 + \log_x y = \dfrac{\log_x z}{\log_{xy} z}$.

6.67. $x = \dfrac{3}{\log_2 5}$, $y = (\log_5 6)^{-1}$ деп алып, $5x + 6y$ өрнегінің мәнін табыңдар.

6.68. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{\left(\lg a \cdot 2^{\log_2 \lg a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \lg a^2}{\sqrt{\dfrac{\lg a + 1}{2\lg a}} + 1 - 10^{0,5\lg\lg\sqrt{a}}}$; 2) $\dfrac{1 - \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{1}{(a-b)^2} + \log_a^2 (a-b)}{\left(1 - \log_{\sqrt{a}}(a-b) + \log_a^2 (a-b)\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Қайталауға арналған жаттығулар

6.69. Теңдеудің неше шешімі бар:

1) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 0$; 2) $x^2 + 6x + y^2 - 10y + 34 = 0$?

6.70. $x + 7y = 50$ түзуі $x^2 + y^2 = 50$ шеңберін жанайтынын көрсетіп, жанасу нүктесінің координаталарын табыңдар.

6.71. x айнымалысының -2, -1, 0, 1, 2-ге тең мәндеріне сәйкес келетін 2^x өрнегінің мәндері геометриялық прогрессияның тізбектес мүшелері болатынын көрсетіңдер. Осы прогрессияның еселігін табыңдар.

6.3. Логарифмдік функция, оның қасиеттері мен графигі

Бұл тақырыпта логарифмдік функция, оның қасиеттері және графигімен танысып, соңында:

- логарифмдік функцияның анықтамасын;
- логарифмдік функцияның графигін тұрғыза білесіңдер;
- логарифмдік функцияның қасиеттерін білесіңдер және оларды қолданасыңдар.

6.3.1. Логарифмдік функция және оның қасиеттері

Анықтама. $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *түрінде берілген функцияны **негізі a болатын логарифмдік функция** деп атайды, мұндағы* $x \in (0;\ +\infty)$.

Мысалы, $y = \log_2 x$ — негізі 2-ге тең логарифмдік функция, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ — негізі $\dfrac{1}{2}$-ге тең логарифмдік функция, т.с.с.

Логарифмдік функцияның негізгі қасиеттеріне тоқталайық.

1°. *Логарифмдік функцияның анықталу облысы — барлық оң сандар жиыны* R^{+}: $D(\log_a x) = (0; +\infty)$. Шынында да, логарифм тек оң сандар үшін ғана анықталған.

2°. *Логарифмдік функцияның мәндерінің облысы — барлық нақты сандар жиыны* R: $(-\infty; +\infty)$.

▲ Шынында да, кез келген $y_0 \in R$ нақты саны үшін $a > 0$ болғанда a^{y_0} өрнегі анықталады. Логарифмнің анықтамасына сәйкес $\log_a a^{y_0} = y_0$ теңдігі орындалады. Олай болса, логарифмдік функция осы y_0-ге тең мәнін $x_0 = a^{y_0}$ нүктесінде қабылдайды. Демек, логарифмдік функция кез келген нақты мәнді қабылдайды. ■

3°. *Егер $a > 1$ болса, онда $y = \log_a x$ логарифмдік функциясы өспелі.*

▲ Айталық, x_1 және x_2 сандары $0 < x_1 < x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген оң сандар болсын. $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$ болғандықтан, $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ теңсіздігін аламыз. Ал $a > 1$ болғандықтан, көрсеткіштік $y = a^x$ функциясы өспелі. Олай болса, соңғы теңсіздіктен $\log_a x_1 < \log_a x_2$ теңсіздігі шығады. Дәлелдеу керегі де осы. ■

4°. *Егер $0 < a < 1$ болса, $y = \log_a x$ логарифмдік функциясы кемімелі.* Дәлелдеуі 3°-қасиетке ұқсас.

5°. *Негіздері бірдей логарифмдік $y = \log_a x$ және көрсеткіштік $y = a^x$ функцияларының графиктері I және III координаталық ширектердің биссектрисасы $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы.*

▲ Геометрия курсынан $A(n; m)$ және $A'(m; n)$ нүктелері $y = x$ түзуіне қатысты симметриялы орналасатынын білеміз. Айталық, $A(n; m)$ нүктесі $y = a^x$ функциясының графигінде жатсын. $m = a^n \Leftrightarrow \log_a m = \log_a a^n = n \Leftrightarrow n = \log_a m \Leftrightarrow A'(m, n)$ нүктесі $y = \log_a x$ функциясының графигінде жатады. ■

1-мысал. 1) $\log_2 3$ және $\log_2 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ және $\log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_4 17$ және $\log_5 23$ сандарын салыстыру керек.

▲ 1) $2 > 1$ болғандықтан, $y = \log_2 x$ функциясы өспелі.

Онда $3 < 5$ теңсіздігінен $\log_2 3 < \log_2 5$ теңсіздігі шығады.

2) $\log_{\frac{1}{2}} x$ функциясы кемімелі болғандықтан, $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$ теңсіздігі орындалады.

3) $\log_4 17 > \log_4 16 = 2$ және $\log_5 23 < \log_5 25 = 2$ болғандықтан, $\log_4 17 > \log_5 23$. ■

6.3.2. Логарифмдік функцияның графигі

$y = \log_a x$ логарифмдік функциясының графигін 5°-қасиет бойынша $y = a^x$ функциясының графигін тұрғызып, оны $y = x$ түзуіне қатысты симметриялы көшіру арқылы салуға болады.

Біз мұнда логарифмдік функцияның графигін оның қасиеттеріне сүйеніп тұрғызамыз.

Кез келген логарифмдік функцияның графигі Ox өсін $(1; 0)$ нүктесінде қиып өтеді, себебі $\log_a 1 = 0$. Ал Oy өсімен қиылыспайды.

$a > 1$ болғанда $y = \log_a x$ функциясы өспелі және $x \in (1; +\infty)$ жиынында оң мәндер, $x \in (0; 1)$ аралығында теріс мәндер қабылдайды.

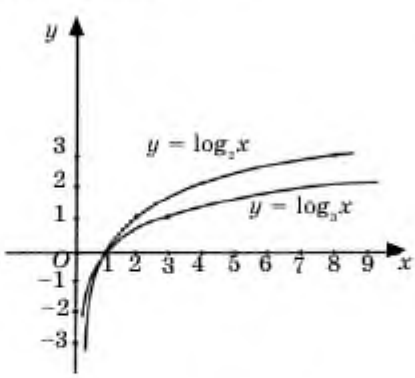
Егер $0 < a < 1$ болса, $y = \log_a x$ функциясы кемімелі және $x \in (1; +\infty)$ жиынында теріс мәндер, $x \in (0; 1)$ аралығында оң мәндер қабылдайды.

Кесте көмегімен $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ және $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ функцияларының графиктерін салайық.

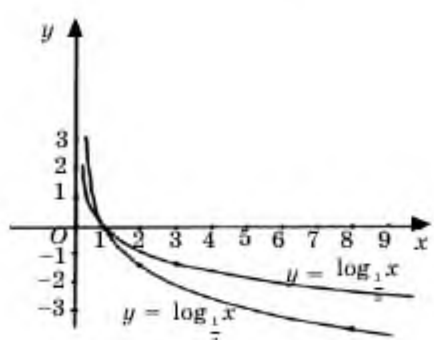
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	–1	–2	–3

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$\log_3 x$	–2	–1	0	1	2
$\log_{\frac{1}{3}} x$	2	1	0	–1	–2

6.6-суретте $y = \log_2 x$ және $y = \log_3 x$ функцияларының, 6.7-суретте $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ және $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ функцияларының графиктері бейнеленген.

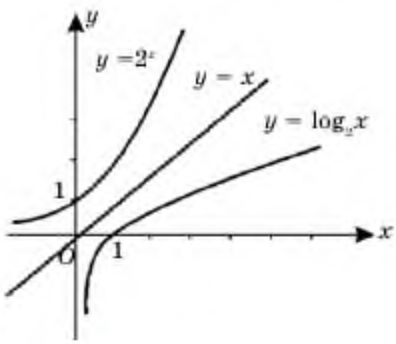


6.6-сурет

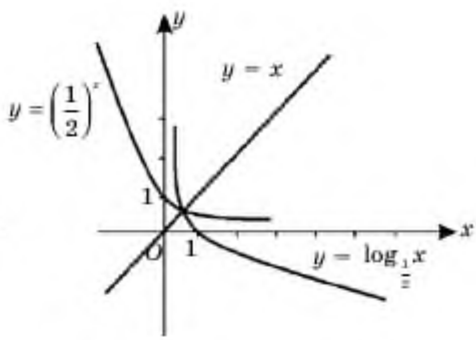


6.7-сурет

Осыдан $a > 1$ болғанда негізі a неғұрлым үлкен болған сайын сәйкес логарифмдік функцияның графигі соғұрлым «баяу өседі». Керісінше $0 < a < 1$ болғанда негізі a неғұрлым кіші болған сайын сәйкес логарифмдік функцияның графигі соғұрлым «баяу кемиді». 6.8 және 6.9-суреттерден $y = a^x$ және $y = \log_a x$ функцияларының графиктері $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы екенін көреміз.



6.8-сурет

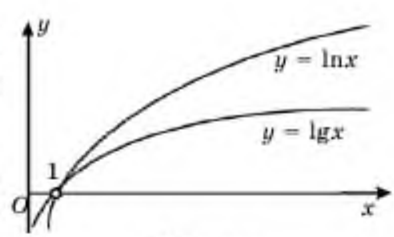


6.9-сурет

2-мысал. 1) $\log_2 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_3 \frac{1}{5}$ сандарының таңбасын анықтау керек.

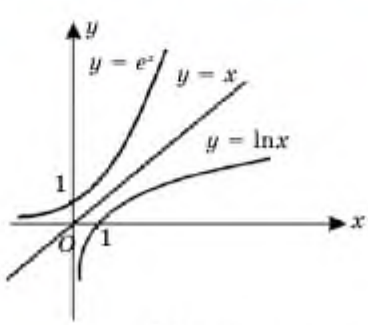
▲ 1) $5 > 1$, $2 > 1$ болғандықтан, $\log_2 5 > 0$; 2) $5 > 1$, $\frac{1}{2} < 1$. Сондықтан $\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$; 3) $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{3} < 1$, онда $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$; 4) $\frac{1}{5} < 1$, $3 > 1$, онда $\log_3 \frac{1}{5} < 0$. ■

Негізі e-ге тең логарифмдік функцияны ***натурал логарифмдік функция*** деп атайды және оны $y = \ln x$ арқылы белгілейді. Ондық логарифмдік және натурал логарифмдік функциялардың негіздері 1-ден үлкен болғандықтан, бұл функциялар өспелі (6.10-сурет).

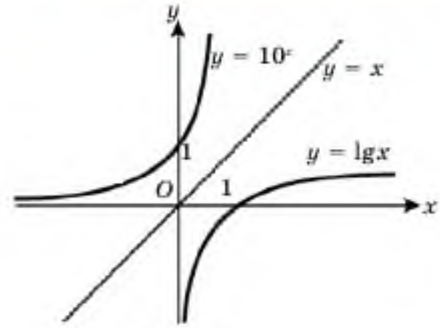


6.10-сурет

Сонымен, $y = \log_e x = \ln x$, яғни $y = \ln x$ $(x > 0)$. 6.11-суретте $y = e^x$ және $y = \ln x$, 6.12-суретте $y = 10^x$ және $y = \lg x$ функцияларының графиктері бейнеленген. Бұл функциялардың графиктері $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы.



6.11-сурет



6.12-сурет

1. Қандай функцияны логарифмдік функция деп атайды?
2. Неліктен логарифмдік функцияның анықталу облысы $(0;\ +\infty)$ жиыны, мәндерінің облысы $(-\infty;\ +\infty)$ жиыны болады?
3. Логарифмдік функцияның негізі $a > 1$ болғанда өспелі, $0 < a < 1$ болғанда кемімелі болатынын дәлелдеңдер.
4. $y = \log_a x$ және $y = a^x$ функцияларының графиктері $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы болатынын көрсетіңдер.
5. Бір координаталық жазықтықта онлайн графиктік калькуляторды қолданып немесе схемалы түрде 1) $y = \log_2 x$ және $y = \log_{10} x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ және $y = \log_{0,1} x$; 3) $y = \log_2 x$ және $y = 2^x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ және $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларының графиктерін салып көрсетіңдер.

➤ **Қосымша электрондық ресурстар**

https://www.desmos.com/calculator – онлайн графиктік калькулятор

Есептер

A

6.72. Берілген функциялардан логарифмдік функцияны көрсетіңдер:

1) $y = 4x$; 2) $y = \log_5 25 + x^2$; 3) $y = \ln(x + 2)$;
4) $y = 2{,}5^x$; 5) $y = \log_5 125 + x$.

6.73. Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $\log_2 3$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} 2$;

5) $\log_{\frac{\pi}{3}} 4$; 6) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$; 7) $\log_2 \pi$; 8) $\log_{\frac{1}{3}} \pi^{-1}$.

6.74. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \log_3(x-1)^2$; 2) $y = \log_2^2(x-1)$;

3) $y = \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{2x+3}$; 4) $y = \log_2(x^2+2x-3)$.

6.75. $f(x) = x + 1$ және $g(x) = 2^{\log_2(x+1)}$ функцияларының графиктері беттесе ме? Жауаптарыңды негіздеңдер.

6.76. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\log_3 4$ және $\log_3 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ және $\log_{\frac{1}{2}} 5$;

3) $\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{65}$ және $\log_{\frac{3}{2}} 8$; 4) $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{4}{7}$ және $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{14}$.

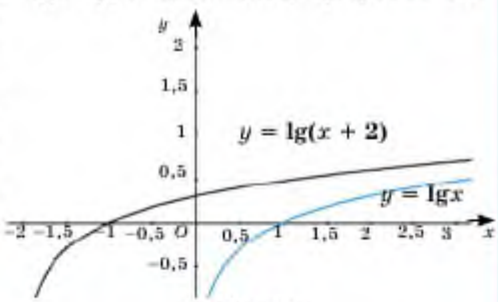
6.77. Онлайн графиктік калькуляторды қолданып, бір координаталық жазықтыққа мына функциялардың графиктерін салыңдар және қорытынды жасаңдар:

1) $y = \lg x$ және $y = \lg(x+2)$; 2) $y = \lg x$ және $y = \lg(x-2)$;

3) $y = \lg x$, $y = \log_2 x$ және $y = \log_4 x$;

4) $y = \log_3 x$ және $y = -\log_3 x$.

▲ 1) $y = \lg x$ және $y = \lg(x+2)$ функцияларының графиктері 6.13-суретте салынған. Бұл графиктен $y = \lg(x+2)$ функциясының графигі $y = \lg x$ функциясының графигін сол жаққа екі бірлікке параллель жылжыту арқылы алынған. Сондықтан $y = \lg(x+a)$ функциясының графигін салу үшін $y = \lg x$ графигін a бірлікке сол жаққа параллель жылжыту керек. ■



6.13-сурет

6.78. Функцияның графигін салыңдар және нәтижені онлайн графиктік калькулятор арқылы тексеріңдер:

1) $y = \log_3 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$;

4) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$; 5) $y = \log_4(x+3)$; 6) $y = \log_4 x + 3$.

6.79. Берілген нүктелер $y = \lg x$ графигіне тиісті ме?

1) $A(100;\ 2)$; 2) $B(0{,}001;\ -3)$;

3) $C\left(\sqrt[5]{100};\ \dfrac{1}{5}\right)$; 4) $D\left(\sqrt[5]{10};\ \dfrac{1}{5}\right)$.

6.80. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \ln(x(x-1)(x-2))$; 2) $y = \ln\dfrac{x^2(2x-4)}{x+6}$;

3) $y = \dfrac{1}{\ln\sqrt{6-x-x^2}}$.

6.81. Функцияның өспелі не кемімелі болатынын анықтап, оның анықталу облысын көрсетіңдер:

1) $y = \ln(x+5)$; 2) $y = \ln(3-x)$.

B

6.82. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \log_3(x^2 - 6x + 8)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(4 - x - 3x^2)$;

3) $y = \log_x \dfrac{2x-1}{x^2-4}$; 4) $y = \log_{\sqrt{7}} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3}$.

6.83. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\lg\sqrt[6]{10}$ және $\log_2\sqrt{2}$; 2) $\log_4 5$ және $\log_6 5$;

3) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{6}$ және $\log_9 7$; 4) $\log_3 2$ және $\log_2 3$;

5) $\log_4 2$ және $\log_{0{,}09} 0{,}3$; 6) $\log_3 \pi$ және $\log_\pi 3$.

6.84. Сандардың қайсысы үлкен:

1) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ не $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$; 2) $\log_5 7$ не $3\log_5 2$;

3) $\log_3 15$ не $4\log_3 1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} 48$ не $2\log_{\frac{1}{5}} 7$?

6.85. $\lg 3 = p$, $\lg 2 = q$ деп алып, $\log_5 6$-ны табыңдар.

6.86. Есептеңдер:

1) $\sqrt[3]{\log_{\sqrt{2}}\left(2\sin\dfrac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)}$;

2) $3^{\log_{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)+\log_{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)}$.

6.87. Функцияның графигін салыңдар және мәндер жиынын анықтаңдар:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 2$; 2) $y = \log_2(x - 3) + 4$.

6.88. $y = 2\log_2 x$ және $y = \log_2 x^2$ функциялары тепе-тең бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

6.89*. Функцияның графигін салыңдар және мәндер жиынын анықтаңдар:

1) $y = \log_3(x - 1)$; 2) $y = \log_2|x - 1|$; 3) $y = \ln|x|$;

4) $y = |\ln x|$; 5) $y = \left|\ln|x|\right|$; 6) $y = \ln^2 x$.

6.90. Есептеңдер:

1) $\left(\log_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}\right)^2 - \log_{\sqrt[3]{5}} 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{3}+1}\left(4 + 2\sqrt{3}\right)$;

2) $2^{6\log_{2\sqrt{2}}\left(5-\sqrt{10}\right)+8\log_{0,25}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$.

6.91. Сандарды салыстырыңдар:

1) $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$ және $3\log_8 26$; 2) $3\log_3 4$ және $3\log_{27} 17$;

3) $\log_{135} 675$ және $\log_{45} 75$.

C

6.92*. $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$ деп алып, $\log_{25} 24$-ті табыңдар.

6.93. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\sqrt{11}$ және $9^{0,5\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_9 2}$; 2) $2^{\log_4 5} - 0,1$ және $5^{\log_4 2}$;

3) $\sqrt{8}$ және $2^{2\log_2 5+\log_{0,5} 9}$; 4) $\sqrt{15}$ және $8^{\frac{1}{3}\log_2\left(1+\frac{1}{32}\right)+2\log_{27} 3}$.

6.94. Есептеңдер:

$4\sqrt{3} + 5^{\log_5\frac{3}{5}} - 15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\frac{4}{\sqrt{5}}}$.

6.95. Есептеңдер:

$49^{0,5\log_7 9-\log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}$.

Функциялардың графигін салыңдар (6.96 — 6.99):

6.96. $y = \log_2(x - 3)$.

6.97. $y = |\log_2(x - 3)|$.

6.98. $y = \log_2|x - 3|$.

6.99. $y = \left|\log_2|x - 3|\right|$.

6.100. Өрнектің мағынасы бар ма:

1) $\sqrt{\log_2 1,4 + \log_2 0,7}$; 2) $\sqrt{\lg 15 + \lg 0,07}$; 3) $\lg\lg\lg 11$?

6.101*. Егер $a^2 + b^2 = 11ab$ және $a \cdot b \neq 0$ болса,

$$\log_2 \frac{|a-b|}{3} = \frac{1}{2}\left(\log_2 |a| + \log_2 |b|\right)$$

теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

6.102*. Егер $\lg 2 \cdot \lg 5 = k$ болса, $\lg 2$ мен $\lg 5$-ті табыңдар.

6.103*. Егер $m^2 = a^2 - b^2$ болса,

$$\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$$

өрнегін ықшамдаңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

6.104. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\frac{6x}{x+3} + 2 = \frac{x+3}{x}$; 2) $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-9} = 1$.

6.105. 10%-дық қышқылдың көлемі 4 л. Оған су қосып, 4%-дық қышқыл алынды. Қышқылға неше литр су қосылды?

6.106. $\text{tg}x = 3$ деп алып,

1) $\frac{3\sin x - 4\cos x}{5\cos x - \sin x}$; 2) $\frac{2\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}$

өрнегінің мәнін табыңдар.

6.4. Көрсеткіштік функцияның туындысы және интегралы

Бұл тақырыпта көрсеткіштік функцияның туындысы және интегралын, олардың көмегімен практикалық есептерді шешуді үйреніп, соңында:

- көрсеткіштік функцияның туындысын;
- көрсеткіштік функцияның интегралын таба аласыңдар;
- көрсеткіштік функцияның туындысын және интегралын қолданып, практикалық есептерді шешесіңдер.

6.4.1 Көрсеткіштік функцияның туындысы

Көрсеткіштік функцияның туындысын табу және интеграл алу формулаларын негіздейік. Алдымен

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e\,, \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (2)$$

теңдіктері орындалатынын көрсетейік.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$.

(2) формуланы дәлелдеу үшін $a^x-1=y$ белгілеуін енгіземіз. Онда $x=\log_a(1+y)$ және $x\to 0$ ұмтылғанда $y\to 0$. Сондықтан

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left|\begin{array}{l}a^x-1=y,\\ x=\log_a(1+y)\\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$ ■

Енді мына формулалардың орындалатынын дәлелдейік:

$$(a^x)'=a^x\ln a;\ (e^x)'=e^x.$$

▲ $y=a^x$, $a>1$, $a\neq 1$, $x\in(-\infty;+\infty)$ функциясы берілсін. Оның x нүктесіндегі өсімшесін анықтайық: $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$. Осыдан туындының анықтамасы бойынша

$$y'=(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Сонымен, $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$. Егер $a=e$ болса, онда $(e^x)'=e^x\cdot\ln e=e^x$. ■

Көрсеткіштік функцияның туындысы

$$(a^x)'=a^x\ln a;$$
$$(e^x)'=e^x.$$

1-мысал. $y=2^{x-3}$ функциясының туындысын табу керек.

▲ Туынды алу ережесіне сүйеніп, $y'=(2^{x-3})'=2^{x-3}\cdot\ln 2$ болатынын көреміз. ■

2-мысал. $y=e^{3x}-2x$ функциясының қай нүктесіне жүргізілген жанама Ox өсімен 45° бұрыш жасайды? Осы жанаманың теңдеуі қандай?

▲ Жанаманың бұрыштық коэффициенті 1-ге тең, себебі $\mathrm{tg}45^\circ=1$. Онда $y'=3e^{3x}-2=1$ болуы қажет. Демек, $x=0$, яғни $x=0$

нүктесінде функцияға жүргізілген жанама Ox өсімен 45° бұрыш жасайды. $y(0) = 1$ болғандықтан жанаманың теңдеуі

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x + 1.$$ ■

6.4.2. Көрсеткіштік функцияның интегралы

$$(a^x)' = a^x \ln a; \ (e^x)' = e^x$$

формулаларынан $y = a^x$ және $y = e^x$ функцияларының алғашқы функциялары сәйкесінше $y = \frac{a^x}{\ln a}$ және $y = e^x$ болатынын көреміз. Олай болса,

$$(e^x)' = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

3-мысал. 1) $\int (2^x \cdot 5^x) dx$; 2) $\int \frac{xe^x - x}{x} dx$ интегралдарын есептеу керек.

▲ 1) $\int (2^x \cdot 5^x) dx = \int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$.

Кейбір функцияның интегралын табу үшін алдымен оны ықшамдайды.

2) $\int \frac{xe^x - x}{x} dx = \int \frac{x(e^x - 1)}{x} dx = \int (e^x - 1) dx =$

$= \int e^x dx - \int dx = e^x - x + C$. ■

1. Көрсеткіштік функцияның туындысын табу формуласын жазыңдар.
2. Көрсеткіштік функцияның интегралын есептеу формуласын жазыңдар.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e$ теңдігінің дұрыстығын дәлелдеңдер.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ теңдігінің дұрыстығын дәлелдеңдер.

Есептер

А

6.107. Функцияның туындысын табыңдар:

1) $y = e^{3x}$; 2) $y = e^{2 + 5x}$; 3) $y = a^{1 - x}$; 4) $y = 3^{1 - 2x}$.

6.108. $y = 5^{7 - 2x}$ функциясының алғашқы функциясын көрсетіңдер.

A) $-2 \cdot 5^{7 - 2x} \ln 5 + C$; B) $-\frac{1}{2} \cdot 5^{7 - 2x} \ln 5 + C$;

C) $-\dfrac{2\cdot 5^{7-2x}}{\ln 5}+C$; D) $-\dfrac{5^{7-2x}}{2\ln 5}+C$;

E) $(7-2x)5^{7-2x}\ln 5+C$.

6.109. $y = 2^{-3x+1}$ функциясының алғашқы функциясын көрсетіңдер.

A) $-3\cdot 2^{-3x+1}\ln 2+C$; B) $-\dfrac{1}{3}\cdot 2^{-3x+1}\ln 2+C$;

C) $-\dfrac{3\cdot 2^{-3x+1}}{\ln 2}+C$; D) $-\dfrac{2^{-3x+1}}{3\ln 2}+C$;

E) $(-2x+1)2^{-2x+1}\ln 2+C$.

6.110. Интегралды есептеңдер:

1) $\int 3^{x}dx$; 2) $\int e^{3x}dx$; 3) $\int e^{5x-1}dx$;

4) $\int e^{x+1}dx$; 5) $\int 2^{2x-1}dx$.

6.111. Интегралды бөліктеп интегралдау әдісін қолданып есептеңдер:

1) $\int xe^{x}dx$; 2) $\int (2x+1)e^{x-1}dx$; 3) $\int xe^{3x}dx$.

6.112. Анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\int\limits_0^1 (5e^{x}+x^{3}-4)dx$; 2) $\int\limits_0^1 (e^{x}+x)dx$;

3) $\int\limits_0^1 e^{2x}dx$; 4) $\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$.

6.113. $y = e^{x}$ функциясының графигімен және $x = 0$, $x = 1$ түзулерімен, абсцисса өсімен шектелген қисықсызықты трапецияны кескіндеп, ауданын табыңдар.

6.114. $y = e^{x}$ функциясы графигімен және $x = -1$, $x = 1$ түзулерімен, абсцисса өсімен шектелген қисықсызықты трапецияны кескіндеп, ауданын табыңдар.

B

6.115. $f(x) = e^{x} + \sin x$ функциясының $M(0;\ \sqrt{2})$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функциясын табыңдар.

6.116. Туындыны табыңдар:

1) $y = e^{x}(4x-1)$; 2) $y = e^{-x}(1-x)$;
3) $y = (x^{2}-2x+2)\cdot 2^{x}$; 4) $y = 3{,}5x^{4}e^{2x}$.

6.117. $y = e^x$ функциясының графигін жанайтын және $y = ex + 1$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін жазыңдар.

6.118. $y = e^x$ функциясының графигін жанайтын және $y = -2x$ түзуіне перпендикуляр түзудің теңдеуін жазыңдар.

6.119. Координаталар бас нүктесі арқылы өтетін және $y = e^{-x}$ қисығын жанайтын түзудің теңдеуін жазыңдар.

6.120. $y = e^{2x}$ қисығы Oy өсімен қандай бұрыш жасап қиылысады?

6.121. $y = 1 - e^{\frac{x}{2}}$ қисығына Oy өсімен қиылысу нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар. Қисықтың графигін салыңдар.

6.122. Функцияның екінші ретті туындысын табыңдар:
1) $y = e^x + e^{-x}$; 2) $y = (x + 1)e^{2x}$; 3) $y = (x^2 - 2x - 3) \cdot e^{x-2}$.

6.123. $y = x^2e^x$ функциясын зерттеп, графигін салыңдар.

6.124. Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып есептеңдер:

1) $\int xe^{x^2}dx$; 2) $\int xe^{-x^2}dx$;

3) $\int \frac{e^{\mathrm{ctg}\,x}}{\sin^2 x}dx$; 4) $\int e^{\cos x}\sin x dx$.

C

6.125. Функцияның көрсетілген реттегі туындыларын табыңдар:

1) $y = e^{\frac{x}{2}}\sin 2x$, y^{IV} — ?; 2) $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$, y''' — ?;

6.126. Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып, $\int x^2e^{x^3}dx$ интегралын есептеңдер.

6.127. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}\,x + C$ екені белгілі. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ интегралын айнымалыны алмастыру әдісін қолданып есептеңдер.

6.128*. Интегралдарды бөліктеп интегралдау әдісімен есептеңдер:

1) $\int e^x \cdot \cos x dx$; 2) $\int e^x \cdot \sin x dx$.

Қайталауға арналған жаттығулар

6.129. 11-ге бөлінетін барлық үш таңбалы сандардың қосындысын табыңдар.

6.130. $y = 0{,}5x - 5$ түзуі $y = 2x - 8$ және $3y + 7x = 2$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өте ме?

6.131. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

$$\frac{1+2\cos t\sin t}{\sin^2 t-\cos^2 t}=\frac{\operatorname{tg}t+1}{\operatorname{tg}t-1}.$$

6.5. Логарифмдік функцияның туындысы

Бұл тақырыпта логарифмдік функцияның туындысы ұғымымен танысып, соңында:

- логарифмдік функцияның туындысын таба аласыңдар;
- логарифмдік функцияның туындысын қолданып, практикалық есептерді шығарасыңдар.

Логарифмдік функцияның туындысын табу формуласын негіздейік. Алдыңғы бөлімде

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

теңдігі орындалатынын көрсеткенбіз.

Енді $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$; $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ формулаларының дұрыстығын дәлелдейік.

▲ Алдымен $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in(0;+\infty)$ функциясының өсімшесін қарастырайық:

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Онда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$. Егер $a=e$ болса, $y=\ln x$, $x>0$ функциясының туындысы $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ түрінде анықталады. ■

Логарифмдік функцияның туындысы

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

1-мысал. 1) $y = \ln(x + 1)$; 2) $y = \ln(1 + \sin x)$ функциясының туындысын табу керек.

▲ 1) Күрделі функциядан туынды алу ережесі бойынша $y' = (\ln(x+1))' = \dfrac{1}{x+1}\cdot(x+1)' = \dfrac{1}{x+1}\cdot 1 = \dfrac{1}{x+1}$.

2) $y' = (\ln(\sin x + 1))' = \dfrac{1}{\sin x + 1}\cdot(\sin x + 1)' = \dfrac{1}{\sin x+1}\cdot\cos x = $
$= \dfrac{\cos x}{\sin + 1}$. ■

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ болғандықтан, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ функциясының алғашқы функциясы $F(x) = \ln x + C$. Ендеше

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

2-мысал. 1) $\int \mathrm{ctg}x\,dx$; 2) $\int\dfrac{1}{x^2 - a^2}dx$ интегралын есептейік.

$$▲\ 1)\ \int\mathrm{ctg}x\,dx = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx = \left|\begin{array}{c}\text{айнымалыны}\\ \text{алмастыру}\\ \text{әдісі}\\ \sin x = y\\ \cos x\,dx = dy\end{array}\right| = \int\frac{1}{y}dy = \ln|y| + C =$$

$= \ln|\sin x| + C.$

2) Алдымен анықталмаған коэффициенттер әдісімен

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

аламыз. Сонда

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.\ ■$$

3-мысал. $\int\ln x\,dx$ интегралын есептеу керек.

▲ Бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз:

$$\int\ln x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = \ln x,\ dx = dv\\ du = \dfrac{dx}{x},\ x = v\end{array}\right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.\ ■$$

1. Логарифмдік функцияның туындысын табу формуласын дәлелдеңдер.
2. Натурал логарифмдік функцияның туындысын табу формуласын жазыңдар.

Есептер

A

6.132. Туындыны табыңдар:

1) $y = \ln(3x - 2)$; 2) $y = \ln\sqrt{x}$;

3) $y = \ln(1 - x)^2$; 4) $y = \log_a(2x - 3)$.

6.133. $y = \log_3 2x$ функциясының туындысын табыңдар.

A) $\dfrac{1}{2x}$; B) $\dfrac{1}{x\ln3}$; C) $\dfrac{1}{2x\ln3}$; D) $\dfrac{2}{x\ln3}$; E) $\dfrac{2}{x}$.

6.134. $y = 3\lg x$ функциясының туындысын табыңдар.

A) $\dfrac{3}{x\lg x}$; B) $\dfrac{1}{x}$; C) $\dfrac{3}{x}$; D) $\dfrac{3}{x\ln10}$; E) $\dfrac{1}{3x\lg x}$.

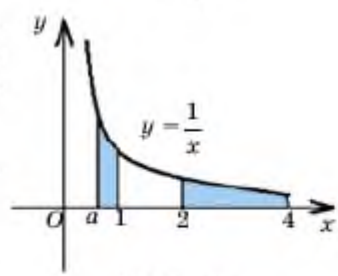
6.135. Интегралды есептеңдер:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x-1}$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{5x-1}$; 3) $\displaystyle\int\frac{x-3}{x-1}dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{1}{x(x+1)}dx$.

6.136. Интегралды бөліктеп интегралдау әдісін қолданып есептеңдер:

1) $\int\ln4x\,dx$; 2) $\int x\ln x\,dx$; 3) $\int x\ln2x\,dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

6.137. 6.14-суретте кескінделген қисықсызықты трапецияның аудандары a-ның қандай мәнінде тең болатынын анықтаңдар.



6.14-сурет

6.138. Анықталған интегралды есептеңдер:

1) $\displaystyle\int_0^1\left(e^x - \frac{3}{x+1}\right)dx$; 2) $\displaystyle\int_1^3\frac{2}{x}dx$;

3) $\displaystyle\int_1^2\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$; 4) $\displaystyle\int_0^2\left(\frac{5}{x+1}\right)dx$; 5) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+2}dx$.

6.139. $y = \dfrac{1}{x}$ функциясының графигімен және $x = 1$, $x = 3$ түзулерімен, абсцисса өсімен шектелген қисықсызықты трапецияны кескіндеп, ауданын табыңдар.

6.140. $y = \frac{4}{x}$ функциясының графигімен және $x = 1$, $x = e$ түзулерімен, абсцисса өсімен шектелген қисық сызықты трапецияны кескіндеп, ауданын табыңдар.

В

6.141. Туындысын табыңдар:

1) $y = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$; 2) $y = \log_2 \sin 3x$; 3) $y = \ln \mathrm{tg}\, 2x$.

6.142. Координаталар бас нүктесі арқылы өтетін және $y = \ln x$ қисығын жанайтын түзудің теңдеуін жазыңдар.

6.143. Функцияның екінші ретті туындысын табыңдар:

1) $y = \ln(3x - 2)$; 2) $y = (x + 1)\ln(x + 1)$; 3) $y = x\ln\sqrt{x}$.

6.144. $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясының $M(e^0; 3)$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функциясын табыңдар.

6.145. Интегралды есептеңдер:

1) $\int \frac{2x + 3}{4x - 7}dx$; 2) $\int \frac{3x - 4}{5x + 3}dx$.

6.146. Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып есептеңдер:

1) $\int \frac{\ln x}{x}dx$; 2) $\int \frac{2\ln^2 x + 2}{x}dx$; 3) $\int \mathrm{tg}\, x dx$;

4) $\int \frac{x}{x^2 - 4}dx$; 5) $\int \frac{\cos x}{\sin x - 4}dx$.

Практикалық тапсырма

6.147. Ұлттық экономика министрлігінің статистикасына сүйенсек, Қазақстан халқының саны 2016 жылдың басында 17 669 896 адам, ал 2017 жылдың басында 17 918 214 адам болған. Логарифмдік және көрсеткіштік функцияны қолданып, еліміздегі халық саны шамамен қай кезде 20 миллионнан асатынын анықтау керек.

▲ Халық санының қандай да бір уақыт аралығындағы өсуі $N(t) = N_0e^{kt}$ формуласымен анықталады, мұндағы N_0 — халықтың бастапқы саны ($t = 0$), N — халықтың t уақытындағы саны, k — халық санының өсу қарқынын сипаттайтын тұрақты шама. Енді k-ның мәнін анықтайық. $N(t)$ — халық санының уақытқа тәуелді өзгерісін сипаттайтын функция. Оның туындысы $N'(t)$ функциясының өзгеру жылдамдығын сипаттайды. Халық санының өзгеру жылдамдығы оның санына пропорционал (халық саны көп болған сайын оның өсімі де тез артады). Сондықтан $N'(t) = k \cdot N(t)$. Теңдеуді дифференциал арқылы жазсақ, $\frac{dN}{dt} = k \cdot N \Rightarrow \frac{dN}{N} = kdt$.

Теңдіктің екі жағын $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ формуласын қолданып интегралдаймыз:

$$\int \frac{1}{N} dN = \int kdt \Rightarrow \ln N = kt + C_1 \Rightarrow N = Ce^{kt}.$$

$t = 0$ болса, $C = N_0$, $\Rightarrow N(t) = N_0 e^{kt}$.

2016 жылды бастапқы уақыт деп алсақ, есеп шарты мына түрге енеді: $t = 0 \Rightarrow N_0 = 17\ 669\ 896$.

1 жылдан соң 2017 жылы 17 918 214 адам болды, яғни $t = 1 \Rightarrow N = 17\ 918\ 214$. Осы берілгендерді қолданып k тұрақтысын есептейік: $17\ 918\ 214 = 17\ 669\ 896e^{k \cdot 1} \Rightarrow e^k =$ $= \frac{17\,918\,214}{17\,669\,896} \approx 1{,}014053$. Натурал логарифмді қолдансақ, $k = \ln 1{,}014\,053 \approx 0{,}01\,396$. Сонымен, $N(t) = 17\,669\,896e^{0{,}01396t}$ функциясымен еліміздің халық санының өсуін сипаттауға болады. Енді қанша уақытта 20 миллионнан асатынын болжап есептейік. Ол үшін анықталған функциямызға сан мәндерін қойып, мына теңдеуді аламыз:

$20\ 000\ 000 = 17\ 669\ 896e^{0{,}01396t} \Rightarrow e^{0{,}01396t} = \frac{20\,000\,000}{17\,669\,896} \approx$ $\approx 1{,}1\ 318\ 66$.

$0{,}013\ 96t = \ln 1{,}131\ 866 \approx 0{,}12\ 387 \Rightarrow t \approx 9$. 2016 жылдан бастап санағанда 9 жылда халқымыздың саны 20 миллионға жетеді екен, ол $2016 + 9 = 2025$ жыл. ■

6.148. $y = x\log_2 x$ функциясын зерттеп, графигін салыңдар.

C

6.149. Функцияның көрсетілген реттегі туындыларын табыңдар:

1) $y = \frac{\log_3 x}{x^2}$, y^{IV} — ?; 2) $y = (5x - 1)\ln^2 x$, y''' — ?

6.150. Қисықтардың ортақ нүктелерінде жүргізілген жанамалары да ортақ болса, бұл қисықтар өзара жанасады деп аталады. $y=\frac{x^2}{2e}$ параболасы $y=\ln x$ қисығын жанайтынын көрсетіп жанасу нүктесін анықтаңдар.

6.151. $y=\ln x$ функциясының графигімен, $x=e$ түзуімен және абцисса өсімен шектелген қисық сызықты трапецияны кескіндеп, ауданын табыңдар.

6.152*. Интеграл астындағы өрнекті анықталмаған коэффициенттер әдісімен жіктеп алып есептеңдер:

1) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$; 2) $\int \frac{7x+8}{(x-1)(2x+3)}dx$;

3) $\int \frac{2x+8}{x(x-1)(x+2)}dx$.

Қайталауға арналған жаттығулар

6.153. $3x+0,6y=3,5$ түзуі $y=2x-8$ және $3y+7x=2$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өте ме?

6.154. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

$$\frac{1+\operatorname{tg}t+\operatorname{tg}^2t}{1+\operatorname{ctg}t+\operatorname{ctg}^2t}=\operatorname{tg}^2t.$$

«КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯ» бөлімінің қорытындысы

$a>0$, $a\neq 1$ үшін $y=a^x$ функциясын негізі a-ға тең *көрсеткіштік функция* деп атайды. Көрсеткіштік функцияның анықталу облысы — $(-\infty;+\infty)$ жиыны. Көрсеткіштік функцияның мәндерінің облысы — $(0;+\infty)$, яғни барлық $x\in(-\infty;+\infty)$ үшін $a^x>0$ теңсіздігі орындалады.

Егер $a>1$ болса, $y=a^x$ көрсеткіштік функциясы өспелі, егер $0<a<1$ болса, $y=a^x$ көрсеткіштік функциясы кемімелі.

$\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^a=e\approx 2,7183$. Осы шектің мәні *e саны* деп аталады.

Берілген оң санның берілген негіздегі *логарифмі* деп осы негіздің берілген санға тең дәреже көрсеткішін айтады, яғни $b>0$ санының a ($a>0$, $a\neq1$) негізіндегі логарифмі деп $a^c=b$ теңдігін қанағаттандыратын c санын айтады. Оны былай белгілейді: $\log_a b$.

$b = a^{\log_a b}$ теңдігі — логарифмдердің *негізгі тепе-теңдігі.*

Кез келген $a > 0$ $(a \neq 1)$ және b, c оң сандары үшін:

1°. $\log_a 1 = 0$; 2°. $\log_a a = 1$;

3°. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$; 4°. $\log_a \dfrac{a}{c} = \log_a b - \log_a c$;

5°. $\log_a b^m = m \log_a b$, $m \in R$; 6°. $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$, $n \in R$, $n \neq 0$;

7°. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$.

Негізі 10-ға тең логарифмді *ондық логарифм* деп атап, оны lg деп белгілейді, яғни $\log_{10} a = \lg a$.

Негізі e-ге тең логарифмді *натурал логарифм* деп атап, оны ln деп белгілейді: $\log_e a = \ln a$.

$y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ түрінде берілген функцияны негізі a болатын *логарифмдік функция* деп атайды. Логарифмдік функцияның анықталу облысы — барлық оң сандар жиыны R^+, яғни $D(\log_a x) = (0;\ +\infty)$. Логарифмдік функцияның мәндер облысы — барлық нақты сандар жиыны R, яғни $(-\infty;\ +\infty)$.

Егер $a > 1$ болса, $y = \log_a x$ логарифмдік функциясы өспелі. Егер $0 < a < 1$ болса, $y = \log_a x$ логарифмдік функциясы кемімелі.

Негіздері бірдей логарифмдік $y = \log_a x$ және көрсеткіштік $y = a^x$ функцияларының графиктері I және III координаталық ширектердің биссектрисасы болып табылатын $y = x$ өсіне қарағанда симметриялы.

$$(a^x)' = a^x \ln a\,; \quad (e^x)' = e^x\,; \quad \int e^x dx = e^x + C\,;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,, \quad a > 0, \quad a \neq 1\,; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\,; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}\,.$$

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Кемімелі функция	Убывающая функция	Decreasing function
2	Көрсеткіштік функция	Показательная функция	Exponential function
3	Логарифм	Логарифм	Logarithm
4	Натурал логарифм	Натуральный логарифм	Natural logarithm
5	Ондық логарифм	Десятичный логарифм	Decimal logarithm
6	Өспелі функция	Возрастающая функция	Increasing function

VII бөлім. КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

2014 жылы қазақ даласын мекендеген ақбөкендер саны 257 мың, 2015 жылы 295 470 болды, бірақ сол жылы пастереллез ауруының салдарынан тек Бетпақдала популяциясының өзінен ғана 130 000 ақбөкен қырылып қалды. 2016 жылғы санақ бойынша олардың жалпы саны 108 300 болды. Тарау соңында логарифмдік және көрсеткіштік теңдеуді қолданып, еліміздегі ақбөкендер саны қай жылы 2015 жылғы санынан асатынын анықтайсыңдар.

Мәліметтер алынған ресурс:
https://www.inform.kz/ru/msh-rk-chislennost-saygakov-v-kazahstane-sostavlyaet-bolee-108-tys-osobey_a2914497

Алдыңғы бөлімде көрсетілгендей көрсеткіштік және логарифмдік функциялар ғылымда және күнделікті өмірде кеңінен қолданылады. Осы функциялар көмегімен құбылыстардың математикалық моделін құрып, зерттей аламыз. Көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктер ғылымның барлық саласында кездеседі. Физика, химия, биология т.б ғылымдардың көптеген есептерін шешкенде аталған теңдеулер қолданылады.

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

7.1. Көрсеткіштік теңдеулер мен теңдеулер жүйесі
7.2. Логарифмдік теңдеулер мен теңдеулер жүйесі
7.3. Көрсеткіштік теңсіздіктер
7.4. Логарифмдік теңсіздіктер мен теңсіздіктер жүйесі

7.1 Көрсеткіштік теңдеулер және олардың жүйелері

Бұл тақырыпта көрсеткіштік теңдеулер мен олардың жүйелерін қарастырып, соңында:

- қарапайым көрсеткіштік теңдеудің анықтамасын білесіңдер;

- көрсеткіштік теңдеулерді шешудің әдістерін меңгересіңдер;
- көрсеткіштік теңдеулер жүйесін шешуді меңгересіңдер.

Дәреже көрсеткіші айнымалы болатын теңдеулерді көрсеткіштік *теңдеулер* деп атайды. Мысалы,

$$2^x = 32;\ 7^x + 3 \cdot 7^{1-x} = 6;\ 5^x - 13^x + 8^x = 0.$$

Анықтама. *Егер $a > 0$, $a \neq 1$ және $b > 0$ болса, онда $a^x = b$ теңдеуін* ***қарапайым көрсеткіштік теңдеу*** *деп атайды.*

Алдыңғы бөлімде $b > 0$ болғанда бір түбірі бар екенін, $b < 0$ болғанда оның түбірлері болмайтынын көрсеткенбіз. Осы мәліметтерден $b > 0$ жағдайында $a^x = b$ теңдеуінің жалғыз түбірі

$$x = \log_a b \qquad (1)$$

теңдігімен анықталатыны шығады.

1-мысал. $2^{x-2} = 16$ теңдеуін шешейік.

▲ (1) формулаға сәйкес

$$x - 2 = \log_2 16 \Leftrightarrow x = 2 + \log_2 2^4 \Leftrightarrow x = 2 + 4\log_2 2 \Leftrightarrow x = 6.$$

Жауабы: $x = 6$. ■

Әдетте көрсеткіштік теңдеулерді $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ түріне келтіріп шешеді. Бұл теңдеу $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының ортақ анықталу облысында $f(x) = g(x)$ теңдеуімен мәндес болады.

Көрсеткіштік теңдеулерді шешудің бірнеше әдісі бар: теңдеудің өрнектерін бірдей негізге келтіру, көбейткіштерге жіктеу және жаңа айнымалы енгізу. Осы әдістерді мысалдар арқылы қарастырайық.

Теңдеудің екі жағын бірдей негізге келтіру әдісі

$a^x = b$ қарапайым теңдеуін шешу үшін мүмкін болса, оң жақ бөлігіндегі өрнекті (b-ны) негізі a-ға тең дәреже түріне келтіреді. Мысалы, қарастырылған есепте $16 = 2^4$ екенін ескеріп, берілген теңдеуді $2^{x-2} = 2^4$ түрінде жазса, жеткілікті. Осыдан

$$x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

Жауабы: $x = 6$. ■

2-мысал. 1) $5^x = 125$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; 3) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ теңдеулерін шешейік.

▲ 1) $125 = 5^3$ екенін ескерсек, $5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$.

Жауабы: $x = 3$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ теңдеуін шешу үшін $81 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ екенін ескерсек,

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \Rightarrow x = -4$;

Жауабы: $x = -4$. ■

3) $2^{x^2-6x-2,5}=16\sqrt{2}$. Алдымен $16\sqrt{2}$ санын рационал көрсеткішті дәреженің қасиетін қолданып, негізі 2 болатын дәрежеге келтіреміз: $16\sqrt{2}=2^4\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{4,5}$. Сонда берілген теңдеу $2^{x^2-6x-2,5}=2^{4,5}$ түріне келеді. Ендеше, $x^2-6x-2,5=4,5$ немесе $x^2-6x-7=0$. Теңдеудің түбірлері -1 мен 7.

Жауабы: $x=-1$, $x=7$. ■

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$. Алдымен теңдеудің сол жақ бөлігіне дәреженің $a^x\cdot b^x=(ab)^x$ қасиетін қолданамыз: $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}\Rightarrow$ $\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{27}{64}=\left(\frac{3}{4}\right)^3\Rightarrow x=3$.

Жауабы: $x=3$. ■

3-мысал. $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 0,5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$ теңдеуін шешейік.

▲ Теңдеудің ММЖ-ны $x>0$, $x\neq 1$ теңсіздіктерімен анықталады. ММЖ-да берілген теңдеу былай жазылады: $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 2^{-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=$ $=2^{\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}\Rightarrow 2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}}$.

Осыдан $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow 2\sqrt{x}=4\Rightarrow$ $\Rightarrow x=4$.

Жауабы: $x=4$. ■

Жалпы, теңдеулерді шешкенде жаңа айнымалы енгізу және көбейткіштерге жіктеу әдістерін жиі қолданады.Бұл екі тәсілде де берілген күрделі теңдеуді бірнеше қарапайым теңдеулер жиынтығына келтіріп шешеді. Сонымен, көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулерді түрлендіру барысында олардың пара-парлығына назар аударып, көрсеткіштік және логарифмдік функцияларға тән қасиеттерді де қолдану керек. Енді күрделі көрсеткіштік теңдеулерді шешу әдістерін қарастырайық.

Көбейткіштерге жіктеу әдісі

Аталған әдісте көрсеткіштік функция ортақ көбейткіш ретінде жақшаның алдына шығарылып, берілген теңдеу қарапайым көрсеткіштік теңдеуге келтіріледі.

4-мысал. 1) $6^{x+2}-6^x=210$; 2) $3^{3\cos x-1}+3^{3\cos x-2}+3^{3\cos x-3}=13$ теңдеулерін шешейік.

▲ 1) $6^{x+2}-6^x=210$ теңдеуіне түрлендіру жасайық:

$$6^x\cdot 36-6^x=210\Rightarrow 35\cdot 6^x=210\Rightarrow 6^x=6\Rightarrow x=1.$$

Жауабы: $x=1$. ■

2) $3^{3\cos x-1}+3^{3\cos x-2}+3^{3\cos x-3}=13$. Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарсақ, $3^{3\cos x-3}(3^2+3+1)=13 \Rightarrow 3^{3\cos x-3}=1=3^0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3\cos x-3=0 \Rightarrow \cos x=1$ тригонометриялық теңдеуін шешеміз: $x=2\pi n,\ n\in Z$.

Жауабы: $x=2\pi n,\ n\in Z$. ■

5-мысал. $x^2\cdot 2^{\sqrt{x}}+x+2=2^{1+\sqrt{x}}+x^2+x\cdot 2^{\sqrt{x}}$ теңдеуін көбейткіштерге жіктеу тәсілін қолданып шешейік.

▲ Теңдеудің ММЖ-ны $x\geqslant 0$ теңсіздігімен анықталады. Топтау тәсілімен берілген теңдеуді $x^2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)-x\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)-2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0$ не $\left(x^2-x-2\right)\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0$ түріне келтіреміз. Онда берілген теңдеу x^2- $-x-2=0$ және $2^{\sqrt{x}}-1=0$ теңдеулері жиынтығына парапар. Бірінші теңдеудің түбірлері $x_1=-1,\ x_2=2$ болса, екінші теңдеудің шешімі $x_3=0$. Мұнда $(-1)\notin[0;+\infty)$ және $0\in[0;+\infty)$; $2\in[0;+\infty)$ болғандықтан, есептің жауабы: 0; 2.

Жауабы: $x=0,\ x=2$. ■

Жаңа айнымалы енгізу әдісі

6-мысал. $81^x-2\cdot 9^x-3=0$ теңдеуін жаңа айнымалы енгізу әдісімен шешейік.

▲ Мұнда $9^x=y$ белгілеуін енгізсек, берілген теңдеуді y^2-2y- $-3=0$ түрінде жазамыз. Осыдан $y_1=-1,\ y_2=3$. $y=9^x$ көрсеткіштік функциясы тек оң мәндер қабылдайтын болғандықтан, $y_1=-1$ түбірін қарастырмаймыз. Онда $9^x=3$ теңдеуінен $x=0{,}5$ теңдігін аламыз.

Жауабы: 0,5. ■

7-мысал. $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$ теңдеуін шешу керек.

▲ Теңдеуді $6\cdot 3^{2x}-13\cdot 2^x\cdot 3^x+6\cdot 2^{2x}=0$ түрінде жазып, оны $2^{2x}\ (2^{2x}\neq 0)$ өрнегіне бөлеміз: $6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+6=0$. Мұнда $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=y$ белгілеуін енгізіп, оны $6y^2-13y+6=0$ теңдеуімен алмастырамыз. Бұл теңдеудің түбірлері:

$$y_1=\frac{2}{3},\quad y_2=\frac{3}{2}.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{2}{3},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{3}{2}$ теңдеулерінен берілген есептің жауабын аламыз: $x_1=-1,\ x_2=1$.

Жауабы: $x=-1,\ x=1$. ■

Сонымен қатар $[a(x)]^{f(x)} = [a(x)]^{g(x)}$ түріндегі көрсеткіштік-дәрежелік теңдеулер де кездеседі. Мұнда $f(x)$ және $g(x)$ өрнектерінің анықталу облыстарымен $a(x) > 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын x айнымалысының мәндері жиындарының қиылысуы теңдеудің ММЖ-ын анықтайды. Егер $m > 0$, $m \neq 1$ болса, бұл теңдеу $f(x)\log_m a(x) = g(x)\log_m a(x)$ теңдеуіне пара-пар. Бұл теңдеу жалпы жағдайда мынадай екі теңдеу жиынтығымен пара-пар:

$$\log_m a(x) = 0,\ f(x) = g(x).$$

Ал ММЖ-да $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ болса, көрсетілген жиынтық құрамына $a(x) = 0$ теңдеуін де қосу қажет.

8-мысал. $|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2$ теңдеуін шешу керек.

▲ x-тің кез келген нақты мәнінде теңдеудің мағынасы бар, яғни ММЖ $(-\infty;\ +\infty)$. Көрсетілген ескерту бойынша бұл теңдеу $x - 3 = 0$ немесе $|x - 3| = 1$ және $x^2 - x = 2$ теңдеулері жиынтығына пара-пар. Осыдан $x_1 = 3$; $|x - 3| = 1 \Rightarrow x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $x^2 - x = 2 \Rightarrow x_4 = -1$, $x_5 = 2$.

Жауабы: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -1$, $x_5 = 2$. ■

Енді көрсеткіштік теңдеулер жүйесін шешуге мысал қарастырайық.

9-мысал. $\begin{cases} 3^x + 2^{x+2y+1} = 5, \\ 3^{x+1} - 2^{x+2y} = 1 \end{cases}$ жүйесін шешейік.

▲ Берілген жүйені $\begin{cases} 3^x + 2 \cdot 2^{x+2y} = 5, \\ 3 \cdot 3^x - 2^{x+2y} = 1 \end{cases}$ түрінде жазамыз. $3^x = u$, $2^{x+2y} = v$ белгілеулерін енгізсек,

$$\begin{cases} u + 2v = 5, \\ 3u - v = 1. \end{cases}$$

Бұдан $u = 1$, $v = 2 \Rightarrow 3^x = 1$, $2^{x+2y} = 2 \Rightarrow x = 0$, $x + 2y = 1$. Осыдан $x = 0$, $y = 0{,}5$. Жауабы: $x = 0$, $y = 0{,}5$. ■

1. Қарапайым көрсеткіштік теңдеу дегеніміз не?
2. Көрсеткіштік функцияның қасиеттерін айтыңдар.
3. Көрсеткіштік теңдеуді шешудің негізгі әдістерінің алгоритмі қандай?
4. Рационал көрсеткішті дәреженің формуласын жазыңдар.

Есептер

А

7.1. Қарапайым көрсеткіштік теңдеулерді шешіңдер:

1) $5^x = 625$; 2) $2^x = 1024$; 3) $3^x = 729$;

4) $7^x = \frac{1}{343}$; 5) $2^{x+3} = 64$; 6) $3^{\frac{x}{2}} = 27$;

7) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 216$; 8) $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343}$; 9) $6^{3-x} = 216$;

10) $8^x = 4^{0,5}$; 11) $3^x = 7$; 12) $(0,2)^{x+1} = 5$.

7.2. Теңдеудің екі жағын бірдей негізге келтіріп, көрсеткіштік теңдеулерді шешіңдер:

1) $2^{3x} = 512^{\frac{1}{3x}}$; 2) $0,5^{x^2+x-2,5} = \sqrt{2}$;

3) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$; 4) $\left(\dfrac{1}{0,125}\right)^x = 128$;

5) $5^{x^2+x-5} = \dfrac{1}{125}$; 6) $(0,5)^{x^2-9x+17,5} = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$.

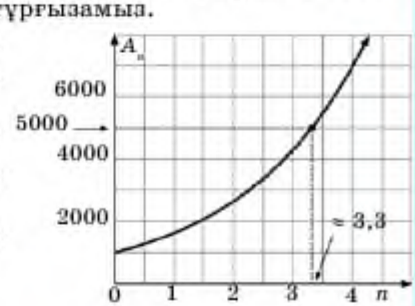
7.3. Фермер жәндіктердің егістікке зиян келтіру үрдісін бақылады. Бақылау нәтижесінде жәндіктердің зиян келтірген аймағы $A_n = 1000 \cdot 2^{0,7n}$ га (мұндағы n — апта саны) заңдылығына бағынатынын анықтады. A_n графигін тұрғызып, жәндіктер неше күннен кейін 5000 га жерге зиян келтіруі мүмкін екенін есептеу керек.

▲ n — уақыт екенін ескерсек, зиянкестік үрдіс

$$y = 1000 \cdot 2^{0,7x}$$

көрсеткіштік функциясымен сипатталады. Оның графигі өспелі функция.

https://www.desmos.com/calculator онлайн графиктік калькулятор көмегімен графикті тұрғызамыз.



Енді 5000 га жерге зиян келтіру уақытын табу үшін көрсеткіштік теңдеуді шешеміз:

$A_n = 5000 \Rightarrow 1000 \cdot 2^{0,7n} = 5000$; $2^{0,7n} = 5$; $0,7n = \log_2 5$;

$n = \dfrac{10}{7}\log_2 5 \Rightarrow \log_2 5 = \dfrac{\lg 5}{\lg 2}$;

$n = \dfrac{10\lg 5}{7\lg 2} \approx 3,3$.

3,3 аптада немесе 3 апта 2 күн, яғни 23 күнде жәндіктер 5000 га жерге зиянын тигізеді. ■

Практикалық тапсырмалар (7.4—7.10):

Популяцияның өсуі (кемуі)

7.4. Бактериялар қолайлы ортаға салынған. Олардың массасы (граммен) уақыт өткен сайын өсуде және оның уақытқа (сағатпен) тәуелділігі $W_t = 20 \cdot 2^{0,15t}$ функциясымен анықталады. Бактериялардың массасы 1) 30 г; 2) 100 г болуы үшін қанша уақыт қажет?

7.5. Бактериялар қолайлы ортаға салынған. Олардың массасының (граммен) уақытқа (сағатпен) тәуелді өсу заңдылығы $M_t = 25 \cdot e^{0,1t}$ функциясымен анықталады. Бактериялардың массасы 1) 50 г; 2) 100 г болуы үшін қанша уақыт керек?

7.6. Биолог құмырсқаның жаңа аумақтағы таралуына мониторинг жасады. Бақылау нәтижесінде құмырсқалардың таралу аймағы $A_n = 2000 \cdot e^{0,57n}$ га заңдылығына бағынатыны анықталған, мұндағы n — апта саны. A_n графигін тұрғызыңдар және құмырсқалардың 10000 га жерге таралуына қажетті уақытты есептеңдер.

Қаржылық өсім

U_0 ақша көлемі белгілі бір мерзімге r пайызбен инвестицияға салынса, n мерзімнен кейінгі жинақталған соманы $U_n = U_0 \cdot (1 + r)^n$ формуласымен есептейді. n-ді табу үшін логарифмді қолданып көрсеткіштік теңдеу шешіледі.

7.7. Мақсат 200 000 теңге ақшасын жылдық пайызы 10% болатын депозитке салды. Оның ақшасы 1 000 000 теңге болуы үшін ол қанша уақыт күтуі керек?

▲ $U_n = U_0 \cdot (1 + r)^n$ формуласын қолдансақ,

$$U_n = 1\,000\,000,\ U_0 = 200\,000,\ r = 0,1;$$

$$1\,000\,000 = 200\,000 \cdot (1 + 0,1)^n \Rightarrow 5 = 1,1^n;$$

$n = \log_{1,1} 5 = \dfrac{\lg 5}{\lg 1,1} = 16,89$. Мақсаттың депозиттегі ақшасы 16,89 жыл немесе шамамен 203 айдан кейін миллионға жетеді. ■

7.8. Үйдің құны уақыт өткен сайын жылына 7,5 %-ға қымбаттайды. Егер үйдің қазіргі құны 16 000 000 теңге болса, қанша уақытта оның құны 25 000 000 теңгеге жететінін анықтаңдар.

7.9. Темірлан 100 000 теңгені жылдық өсімі 12,8 % болатын депозитке салды. Қанша уақыттан соң оның ақшасы 150 000 теңге болады?

7.10. Дамир 15 000 теңгені ай сайын 4,8% күрделі пайызбен өсетін есеп шотқа салды. Қанша айдан соң сома 25 000 теңгеге жетеді?

7.11. Көрсеткіштік теңдеулерді көбейткіштерге жіктеу әдісімен шешіңдер:

1) $5^{x+2} - 5^x = 120$;   2) $3^{x+2} - 3^x = 72$;

3) $2^x - 2^{x-4} = 15$;   4) $3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x-1} = 3159$;

5) $2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$;   6) $3^{x^2+1} + 3^{x^2-1} = 270$.

7.12. Көрсеткіштік теңдеулерді шешіңдер:

1) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;   2) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

3) $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$;

4) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$.

7.13. Көрсеткіштік теңдеулерді жаңа айнымалы енгізу әдісімен шешіңдер:

1) $9^{x+3} + 3^{x+2} = 10$;   2) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$;

3) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$;   4) $5^{4\sqrt{x}} - 14 \cdot 5^{2\sqrt{x}} - 275 = 0$.

7.14. Теңдеулерді шешіңдер:

1) $5^{2x^2-x} = 6^{2x^2-x}$;   2) $8 \cdot 7^{x^2-5x+7} = 7 \cdot 8^{x^2-5x+7}$;

3) $0,6x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$;   4) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{125}{27}\right)^3$.

7.15. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{0,5y} = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$

B

Практикалық тапсырмалар (7.16—7.19):

7.16. Радиоактивті заттың M_t массасы (граммен) t уақыт (апта) өткен сайын ыдырап, азаяды және $M_t = 1000 \cdot e^{-0,04t}$ заңдылығына бағынады. Зат массасының жартысы ыдырайтын уақытты анықтаңдар. Қанша уақытта зат массасы 25 г болады?

7.17. Аэропланнан секірген парашютшының төмен түсу жылдамдығы $v = 50(1 - e^{-0,2t})$ м/с. Қанша уақыт өткенде оның жылдамдығы 40 м/с болады?

7.18. Мұздатқышқа салынған сұйықтың температурасы $T = 4 + 96 \cdot e^{-0,03t}$ °C заңдылығына бағынады, мұндағы t —

минутпен берілген уақыт. Сұйықтың температурасы 1) 25°C; 2) 5°C болу үшін қанша уақыт кететінін анықтаңдар. Мұздатқыштың меншікті температурасы қандай?

7.19. Радиоактивті заттың M_t массасы (граммен) t уақыт өткен сайын ыдырап, азаяды және $M_t = 1000 \cdot 2^{-0,04t}$ заңдылығына бағынады. Зат массасының жартысы ыдырау үшін қанша уақыт кететінін анықтаңдар. Қанша уақытта зат массасы алғашқы массасының 1% құрайды?

7.20. Теңдеулерді шешіңдер:

1) $2^{2x^2-5x-1} = 0,5\sqrt[3]{4^{2x}}$; 2) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$;

3) $25^{x-1} - 9^{2x-2} + 8 \cdot 5^{2x-3} = 4 \cdot 9^{2x-3}$;

4) $81^x - 5^{2x} - 4 \cdot 9^{2x-1} = 4 \cdot 5^{2x-1}$.

7.21. Теңдеулердің жалғыз түбірін анықтаңдар:

1) $7^x + 24^x = 25^x$; 2) $12^x + 5^x = 13^x$;

3) $2^{x^2} + 5^{x^4} = 2 - \mathrm{tg}^2 x$; 4) $3^{x^2+1} + 5^{x^4} = 4 - \sin^2 x$.

7.22. Теңдеулерді шешіңдер:

1) $2^{x^2-6x+0,5} = \dfrac{1}{16\sqrt{2}}$; 2) $16\sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}} = 128$;

3) $3^{x+1} \cdot 4^x = 0,25 \cdot 12^{3x-1}$; 4) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$.

Теңдеулерді шешіңдер (**7.23—7.29**):

7.23. 1) $5^{x-1} = 2$; 2) $16^{2x-1} = 8^{x-2}$;

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1} = 3$; 4) $2^{3x-1} = (0,25)^{2-x}$.

7.24. 1) $\sqrt{3^{x-54}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-58}} = 162$; 2) $5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$;

3) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$; 4) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$.

7.25. 1) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$; 2) $5^{x-3} - 5^{x-4} = 16 \cdot 5^{x-5} + 4$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

7.26. 1) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$; 2) $3^{2-x} \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$.

7.27. 1) $\sqrt[x]{3} - \sqrt[2x]{3} - 2 = 0$; 2) $6 \cdot \sqrt[x]{9} - 13 \cdot \sqrt[x]{6} + 6 \cdot \sqrt[x]{4} = 0$.

7.28. 1) $4^{x-\sqrt{x^2-1}} + 2^{x-\sqrt{x^2-1}} = 6$; 2) $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 0$.

7.29*. 1) $\left(4+\sqrt{15}\right)^x + \left(4-\sqrt{15}\right)^x = 2$; 2) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

7.30. Көрсеткіштік теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^x = 1{,}5 + y^{-x}, \\ y^{2{,}5+x} = 64. \end{cases}$

7.31. Графиктік тәсілмен теңдеудің неше шешімі болатынын анықтаңдар:

1) $2^x + x - 2 = 0$; 2) $3^x = x + 2$.

Теңдеулерді шешіңдер **(7.32—7.33)**:

7.32. 1) $2^{3x} = \sqrt[3x]{512}$; 2) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[x]{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{9}{16}$;

3) $7^{x+2} - 7^{x+1} = 6 \cdot 2^{x+1}$; 4) $7^{1-|x|} = 49$.

7.33. 1) $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0$; 2) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^{1-\sqrt{9-x}} = 5^{10}\left(\dfrac{1}{10}\right)^5$;

3) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$; 4) $5^x \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$;

5) $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$.

C

7.34*. a параметрінің қандай мәнінде теңдеудің екі түбірі бар:

1) $25^{x+0,5} - (5a + 2) \cdot 10^x + a \cdot 4^{x+0,5} = 0$;
2) $2 \cdot 9^x - (2a + 3) \cdot 6^x + 3a \cdot 4^x = 0$?

Есептерде берілген теңдеулерді және олардың жүйелерін шешіңдер **(7.35—7.37)**:

7.35. 1) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^y = 243, \\ \sqrt[y]{1024} = \left(\dfrac{2x}{3}\right)^2. \end{cases}$

7.36. 1) $5^{2+4+\ldots+2x} = 0{,}04^{-45}$; 2) $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$.

7.37. 1) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$; 2) $(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1$.

7.38*. a-ның әрбір нақты мәндерінде $9^{-|x+2|} - 4 \cdot 3^{-|x+2|} - a = 0$ теңдеуін шешіңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

7.39. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \dfrac{1}{x^{1,5}-1}$; 2) $\left(2^{\frac{3}{2}} + 27y^{\frac{3}{5}}\right) : \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{5}}\right)$.

7.40. $y = 2^{|x+3|} - 5$ функциясының графигін салыңдар.

7.41. $\lg 2 = m$, $\lg 3 = n$ деп алып, $\log_5 6$-ны табыңдар.

7.2. Логарифмдік теңдеулер және олардың жүйелері

Бұл тақырыпта логарифмдік теңдеулер және олардың жүйелерін шешу жолдарымен танысып, соңында:

- логарифмдік теңдеулерді шешу әдістерін үйренесіңдер;
- логарифмдік теңдеулер жүйесін шеше аласыңдар.

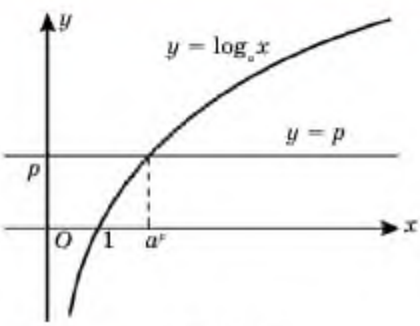
Теорема. *Егер $a > 0$, $a \neq 1$ болса, онда $\log_a x = p$ түріндегі теңдеуді* ***қарапайым логарифмдік теңдеу*** *деп атайды.*

Енді p-ның кез келген мәнінде логарифмдік теңдеудің жалғыз түбірі бар екенін көрсетейік. Шынында да, $\log_a x = p$ теңдеуінің түбірі $y = \log_a x$ функциясының графигі мен $y = p$ түзуінің қиылысу нүктесінің абсциссасына тең болатынын жақсы білеміз. 7.1 және 7.2-суреттерден p-ның кез келген мәндерінде бұл екі графиктің бір нүктеде қиылысатынын көреміз. Олай болса, p-ның кез келген мәнінде $\log_a x = p$ теңдеуінің жалғыз түбірі бар. Логарифмнің негізгі тепе-теңдігі бойынша $x = a^{\log_a x}$ теңдігі орындалатынын ескерсек, теңдеудің жалғыз шешімі $x = a^p$ формуласымен анықталады.

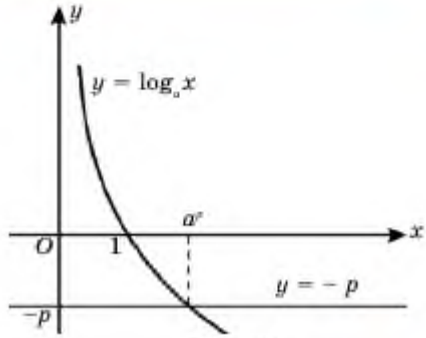
Логарифмдік теңдеуді шешу әдістерін қарастырайық.

Логарифмнің анықтамасын қолдану әдісі

1-мысал: $\log_2(x^3 - 5x + 10) = 3$ теңдеуін шешейік.



7.1-сурет



7.2-сурет

▲ Логарифмнің анықтамасы бойынша $x^3 - 5x + 10 = x^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5x = 10$, $x = 2$. Тексереміз: $\log_2(2^3 - 5 \cdot 2 + 10) = \log_2 8 = 3$. ■

Логарифмдік теңдеуді $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ түріне келтіру.

2-мысал. $\lg(x + 5) - \lg(x^2 - 25) = 0$ теңдеуін шешейік.

▲ Теңдеудің ММЖ-ны $\begin{cases} x + 5 > 0, \\ x^2 - 25 > 0, \end{cases}$ яғни $(5; +\infty)$ аралығы. $\lg(x + 5) - \lg(x^2 - 25) \Rightarrow x + 5 = x^2 - 25 \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = 6$, $x_2 = -5$ түбірі ММЖ-на енбейді.

Жауабы: $x = 6$. ■

Жаңа айнымалы енгізу әдісі

3-мысал. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$ теңдеуін шешу керек.

▲ $\log_2 x = y$ айнымалысын енгізейік. Сонда $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1 = 2$, $y_2 = -1$. Енді x айнымалысының мәндерін анықтаймыз:

$\log_2 x = 2 \Rightarrow x_1 = 4$; $\log_2 x = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$. Айнымалының екі мәні де теңдеуді қанағаттандырады.

Жауабы: 4; $\frac{1}{2}$. ■

Мүшелеп логарифмдеу әдісі

4-мысал. $x^{\log_2 x - 2} = 8$ теңдеуін шешу керек.

▲ $x^{\log_2 x - 2} = 8 \Rightarrow x^{\log_2 x} \cdot x^{-2} = 8 \Rightarrow x^{\log_2 x} = 8x^2$ теңдеуін негізі 2-ге тең етіп логарифмдейік:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2 \Rightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0.$$

$\log_2 x = y$ жаңа айнымалысын енгізсек,

$y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 3,\ y_2 = -1$. Осыдан

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x_1 = 8;$$

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}.$$

Жауабы: $8;\ \frac{1}{2}$. ■

5-мысал. $\log_3(x+3) + \log_3(x+1) = 1$ теңдеуін шешейік.

▲ $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$ формуласы бойынша берілген теңдеудің сол жақ бөлігін $\log_3(x+3)(x+1)$ не $\log_3(x^2+4x+3)$ түріне келтіріп, оны былай жазамыз:

$$\log_3(x^2+4x+3) = 1.$$

Осыдан $x^2 + 4x + 3 = 3^1 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -4$.

Логарифмдік функция бүкіл сан өсінде анықталмағандықтан, табылған шешімдердің берілген теңдеуді қанағаттандыратынын не қанағаттандырмайтынын тексеру қажет.

Тексеру. Егер $x = 0$ болса,

$$\log_3(3+0) + \log_3(1+0) = \log_3 3 = 1$$

шешімі теңдеуді қанағаттандырады. Егер $x = -4$ болса,

$$\log_3(3-4) + \log_3(1-4)$$

өрнектерінің мағынасы болмайды.

Жауабы: $x = 0$.

Берілген теңдеудің жауабын анықтаудың тағы бір әдісі бар. Ол теңдеудің ММЖ-ын (мүмкін мәндері жиынын) анықтау әдісі. Берілген теңдеудің ММЖ-ы $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0 \end{cases}$ теңсіздіктері жүйесімен анықталады. Олай болса, ММЖ $x > -1$ теңсіздігімен анықталады немесе $(-1;\ +\infty)$ жиыны болады. Ал $0 \in (-1;\ +\infty)$, $-4 \notin (-1;\ +\infty)$ болғандықтан, есептің жауабы: $x = 0$. ■

Логарифмдік теңдеулерді $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a > 1,\ a \neq 1)$ түріне келтіріп шешеді. Бұл әдісті логарифмді *потенциалдау* деп атайды. ***Потенциалдау** — логарифмдеуге кері түрлендіру.* Бұл теңдеу мынадай жүйемен мәндес:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Жүйедегі соңғы екі теңсіздік берілген теңдеудің ММЖ-ын анықтайды. Әдетте, ММЖ-ын логарифмдік теңдеуді шешпес бұрын алдын ала табады.

Негізі айнымалы логарифмдік теңдеулер де кездеседі:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x).$$

Бұл теңдеудің ММЖ-ы мына жүйемен анықталады:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 1, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Анықталған ММЖ-да берілген теңдеу $f(x) = g(x)$ теңдеуіне пара-пар.

6-мысал. $\ln(x + 4) + \ln(2x + 3) = \ln(1 - 2x)$ теңдеуін шешейік.

▲ Алдымен теңдеудің ММЖ-ын анықтайық:

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \Rightarrow -1{,}5 < x < 0{,}5\,, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$$

ММЖ — $(-1{,}5;\ 0{,}5)$ интервалы.

Осы ММЖ-да берілген теңдеуді

$$\ln(x + 4)(2x + 3) = \ln(1 - 2x) \Rightarrow (x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x$$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 13x + 11 = 0$ түрінде жазамыз. Осыдан $x_1 = -5{,}5$; $x_2 = -1$. Табылған шешімдердің екіншісі ғана ММЖ-да жатады.

Жауабы: -1. ■

7-мысал. $\log_{2x^2-3x+1}\left(3x^2 - x + 1\right) = \log_{2x^2-3x+1}\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$ теңдеуін шешу керек.

▲ Берілген теңдеу мына жүйеге пара-пар:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x + 1 \neq 1, \\ 3x^2 - x + 1 > 0, \\ x^3 - x^2 - x + 1 > 0, \\ 3x^2 - x + 1 = x^3 - x^2 - x + 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\, 0{,}5) \cup (1;\, +\infty), \\ x \neq 0,\ x \neq 1{,}5, \\ x \in (-\infty;\, +\infty), \\ (x - 1)^2 \cdot (x + 1) > 0, \\ x^3 - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\, 0) \cup (0;\, 0{,}5) \cup (1;\, 1{,}5) \cup (1{,}5;\, +\infty), \\ x \in (-1;\, 1) \cup (1;\, +\infty), \\ x_1 = 0,\ x_2 = 4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-1;\, 0) \cup (0;\, 0{,}5) \cup (1;\, 1{,}5) \cup (1{,}5;\, +\infty), \\ x = 4. \end{cases}$$

Жауабы: $x = 4$. ■

Енді көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер жүйесін шешуге мысал қарастырайық.

8-мысал: $\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 \end{cases}$ жүйесін шешу керек.

▲ ММЖ $x > 0$, $y > 0$ теңсіздіктерімен анықталады. Осы жиында $\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy = 1 \Rightarrow xy = 3$ теңдігі орындалады.

$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = u$, $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = v$ түрінде белгілесек, $u \cdot v = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = xy = 3$ теңдігін аламыз. Берілген жүйені $\begin{cases} u - v = 2, \\ uv = 3 \end{cases}$ түрінде жазуға болады. Оның шешімдері $u_1 = 3$, $v_1 = 1$ және $u_2 = -1$, $v_2 = -3$.

Егер $u = 3$, $v = 1$ деп алсақ, $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = 3$, $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 1$. $xy = 3$ болғандықтан, $x_1 = 9$, $y_1 = \frac{1}{3}$.

Осы сияқты, $u = -1$, $v = -3$ болғанда $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = -9$. Жүйенің ММЖ-ны $x > 0$, $y > 0$ болғандықтан, $x = 9$, $y = \frac{1}{3}$.

Жауабы: $x = 9$, $y = \frac{1}{3}$. ■

1. Қарапайым логарифмдік теңдеудің анықтамасын айтыңдар.
2. Логарифмдік теңдеудің анықталу облысын қалай анықтайды?
3. Теңдеуді шешкенде қолданылатын жаңа айнымалы енгізу әдісін сипаттаңдар.

Есептер

А

7.42. Қарапайым логарифмдік теңдеулерді шешіңдер:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 3) = 0$; 2) $\log_2(x + 1) = 3$; 3) $\ln(3x - 5) = 0$;

4) $\log_{0,3}(5 - x) = -1$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2(3 - x)$; 6) $\lg(2x - 1) = \lg 3$.

Теңдеулерді шешіңдер **(7.43—7.44)**:

7.43. 1) $\lg(3 - x) = \lg(x + 2)$; 2) $\lg x + \lg(x - 1) = \lg 2$;

3) $\log_5(x + 1) = \log_5(4x - 5)$; 4) $\log_2(4 - x) = \log_2(1 - 2x)$.

7.44. 1) $\lg(5 - x) + \lg x = \lg 4$; 2) $\lg(x + 1) + \lg(x - 1) = \lg 3$;

3) $\ln(6 - x) + \ln x = \ln 5$; 4) $\lg x + \lg(x - 3) = 10$.

7.45. Логарифмдік теңдеулерді шешіңдер:

1) $\log_2 x = 3 - \log_2 5$; 2) $\log_3(2x - 1) = -2\log_3 \frac{1}{4}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,2}(x - 1) = 4$;

5) $\log_5 \log_3 \log_2(x^2 + 7) = 0$; 6) $\log_4 \log_2 x = 0{,}5$.

7.46. Теңдеудің түбіріне кері санды анықтаңдар:
$\log_5(2x+33)-\log_5 13=\log_5 x$.

7.47. Теңдеудің түбірлерінің көбейтіндісін есептеңдер:
$\sqrt[3]{10+3x-x^2}\cdot\lg(7-x-x^2)=0$.

7.48. Теңдеулерді шешіңдер:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)=\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)$; 2) $0{,}1\cdot\lg x-\lg x+0{,}9=0$.

3) $\lg(x^2-x)=1-\lg 5$; 4) $\log_6(2x^2-x)=1-\log_6 2$.

7.49. Логарифмдік теңдеулерді жаңа айнымалы енгізу әдісімен шешіңдер:

1) $\dfrac{1}{12}\ln^2 x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\ln x$; 2) $\log_2^2 x^3-20\cdot\log_2\sqrt{x}+1=0$;

3) $2\log_3^2 x-7\log_3 x+3=0$; 4) $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер **(7.50—7.51)**:

7.50. 1) $\begin{cases}x+y=7,\\ \lg x+\lg y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=34,\\ \log_2 x+\log_2 y=6;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2,\\ \log_3(x-y)=2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=20,\\ \log_4 x+\log_4 y=\log_4 36.\end{cases}$

7.51. 1) $\begin{cases}x^2+y^2=80,\\ \log_2 x+\log_2 y=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ \lg x+\lg y=\lg 2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_{15} x=1-\log_{15} y,\\ \log_2(x+y)=3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=20,\\ \log_4 x+\log_4 y=\log_4 36.\end{cases}$

B

Теңдеулерді шешіңдер **(7.52—7.58)**:

7.52. 1) $\log_9\sqrt{2x+1}=1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{2x-1}=-2$;

3) $\log_{\frac{3}{5}}\dfrac{2x+3}{x-2}=1$; 4) $\log_{\sqrt{5}}\dfrac{1}{3x-5}=0$.

7.53. 1) $2\log_x 3+\log_{3x}3+3\log_{9x}3=0$; 2) $\log_2(x+1)^2+\log_2|x+1|=6$;

3) $\lg\ln x+\lg(\ln x^2-1)=1$; 4) $\log_x 3\cdot\log_{\frac{x}{3}}3+\log_{\frac{x}{81}}3=0$.

7.54. 1) $\lg\sqrt{3x+1}+\lg\sqrt{x+4}=\lg 12$;

2) $\lg(x-2)-\lg\sqrt{x-4}=\lg 3$;

3) $(x^2-4)\log_3(1-x^2-3x)=0$;

4) $(x^2-x-2)\log_2(x^2-4x+4)=0$.

7.55. 1) $\lg x+\lg x^2+\lg x^3=6$; 2) $\dfrac{\lg x}{1-\lg x}=3$;

3) $\log_2\log_4\log_2 x=0$; 4) $10^{x+\lg 2}=20$.

7.56. 1) $\log_3(5^{2x}-2\cdot 5^x)=2\log_9 15$; 2) $\log_2(2^{2(x+1)}+2^{4x})=2\log_4 5$;

3) $\log_3(3^x-8)=2-x$; 4) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$.

7.57. 1) $\dfrac{\log_2 x}{\log_x 2}+\log_4 2x=2$; 2) $\dfrac{\log_3 x}{\log_x 3}+\log_3 x$;

3) $\dfrac{1}{5-\log_2 x}+\dfrac{1}{1+\log_2 x}=\dfrac{6}{5}$;

4) $\ln\sqrt{x-3}-\dfrac{1}{2}\left(\ln(x-1)^2-\ln(x+2)\right)=0$.

7.58. 1) $x^{\log_5 x-2}=125$; 2) $x=10^{1-\frac{1}{4}\lg x}$;

3) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$; 4) $0{,}1\cdot x^{\lg x-2}=100$;

5) $x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x}=1$; 6) $\log_x(9x^2)\cdot\log_3^2 x=4$;

7) $\log(\log x)+\log(\log x^3-2)=0$; 8) $x^{\log_4 2(x^2-1)}=5$;

9) $\log\left(\sqrt{6+x}+6\right)=\dfrac{2}{\log_{\sqrt{x}}10}$; 10) $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400$.

7.59. Логарифмдік теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right)=1-\lg 8,\\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_x(3x+2y)=2,\\ \log_y(2x+3y)=2.\end{cases}$

7.60. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^x = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{3}} x} = y^4 - 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^y = 3^{12}, \\ y - \log_3 x = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x + y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

7.61. Графиктік тәсілмен теңдеудің неше шешімі болатынын анықтаңдар:

1) $\lg x - \dfrac{x}{2} + 4 = 0;$ 2) $\log_2(x + 3) = 3 - x.$

7.62. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} \log_8(x + y) + \log_8(7 - y) = 1 + \log_8 5; \\ 2^{\log_2(x-y)} = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{\log_3(3y-x+24)} = 27; \\ \log_2(2x - 2y) - \log_2(5 - y^2) = 1. \end{cases}$

C

7.63—7.64-есептерде берілген теңдеулерді шешіңдер:

7.63. 1) $\log_8 x + \log_8^2 x + \ldots + \log_8^n x + \ldots = \dfrac{1}{2};$

2) $3^{\lg x} = 18 - x^{\lg 3};$

3) $\log_{x-2}(2x - 9) = \log_{x-2}(23 - 6x);$

4) $\log_{5x-2} 2 + 2 \cdot \log_{5x-2} x = \log_{5x-2}(x + 1).$

7.64. 1) $\log_{x+1}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \log_{x-\frac{1}{2}}(x + 1);$ 2) $0,4^{\lg^2 x+1} = 6,25^{2-\lg x^3};$

3) $\log_x(2x^{x-2} - 1) + 4 = 2x;$ 4) $\dfrac{\lg\left|x^4 + 2x^3 + 2x - 1\right|}{\lg\left|x^2 + x - 1\right|} = 2;$

5) $|x - 1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x - 1|^3.$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер **(7.65—7.66):**

7.65. 1) $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2 \cdot y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 y - \log_3 x = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_x (x-3y) = 2, \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x|^{\lg|y|} = 4, \\ xy = 40. \end{cases}$

7.66. 1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4; \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 5; \\ 2\log_9 x - \log_3 y = -1. \end{cases}$

7.67. a-ның қандай мәндерінде $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ теңдеуінің нақты түбірлері бар?

7.68. a-ның қандай мәндерінде $\lg(x^2 + 2ax) - \lg(8x - 6a - 3) = 0$ теңдеуінің жалғыз шешімі бар?

Қайталауға арналған жаттығулар

7.69. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{\left(a^2 - ab\right)^{\frac{2}{3}}} : \dfrac{a^{-\frac{2}{3}} \sqrt[3]{a-b}}{a^{1,5} - b^{1,5}};$

2) $\left(\dfrac{\left(a + \sqrt[3]{a^2 x}\right) : \left(x + \sqrt[3]{a x^2}\right) - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6.$

7.70. $y = |3^{x-1} - 5|$ функциясының графигін салыңдар.

7.71*. Егер $\log_a 27 = b$ болса, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$ неге тең?

7.3. Көрсеткіштік теңсіздіктер

Бұл тақырыпта көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу әдістерімен танысып, соңында:

- көрсеткіштік теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер;
- көрсеткіштік теңсіздіктер жүйесін шеше аласыңдар.

Көрсеткіштік функцияның қасиеттерінен 1) егер $a > 1$ болса, онда $u > v \Leftrightarrow a^u > a^v$; 2) егер $0 < a < 1$ болса, онда $u > v \Leftrightarrow a^u > a^v$ теңсіздігінің орындалатыны шығады. Сонымен, $a^x > b$ түрінде берілген қарапайым теңсіздіктерді $a^x > a^{\log_a b}$ түріне келтіріп шешеді. Енді осыған мысалдар қарастырайық.

1-мысал. 1) $5^{3x-2} < 5^{x+3}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} < 9$ теңсіздіктерін шешейік.

▲ 1) $5^{3x-2} < 5^{x+3}$ теңсіздігінің екі жағының да негізі 5 және $5 > 1$ болғандықтан, теңсіздік таңбасын өзертпейміз. Сонымен,

$$3x - 2 < x + 3 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < 2{,}5.$$

2) $3^{\frac{x}{2}} < 9$ теңсіздігін шешу үшін алдымен екі жағының негізін бірдей ету керек: $9 = 3^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} < 3^2$ және $3 > 1$ болғандықтан, теңсіздіктің таңбасын өзгертпейміз. Сонымен, $\frac{x}{2} < 2 \Rightarrow x < 4$. ■

2-мысал. $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0$ теңсіздігін шешейік.

▲ $3^x = y$ белгілеуін енгізіп, берілген теңсіздікті

$$y^2 - 10y + 9 \leqslant 0$$

түрінде жазамыз. Бұл теңсіздіктің шешуі $1 \leqslant y \leqslant 9$ болғандықтан, x айнымалысы үшін $1 \leqslant 3^x \leqslant 9$. Осыдан

$$3^0 \leqslant 3^x \leqslant 3^2 \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Жауабы: [0; 2]. ■

3-мысал. $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2^{3-x} + 25^{\frac{1}{\log_3 5}}$ теңсіздігін шешу керек.

▲ $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ және $25^{\frac{1}{\log_3 5}} = 9$ болғандықтан, берілген теңсіздікті $(2^{-2})^x < 2^{3-x} + 9 \Rightarrow 2^{-2x} - 8 \cdot 2^{-x} - 9 < 0$ түрінде жазып, $2^{-x} = y$ белгілеуін енгізсек, $y^2 - 8y - 9 < 0 \Rightarrow -1 < y < 9$ теңсіздігін аламыз. $2^{-x} = y > 0$ болғандықтан, $2^{-x} < 9 \Rightarrow -x < \log_2 9 \Rightarrow -\log_2 9 < x$.

Жауабы: $(-\log_2 9; +\infty)$. ■

4-мысал. $3^{x-1} > \frac{2 - 3^x}{3^x - 4}$ теңсіздігін шешу керек.

▲ $3^x = y$ белгілеуін енгізсек,

$$\frac{1}{3}y > \frac{2-y}{y-4} \Leftrightarrow \frac{y^2 - y - 6}{3(y-4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(y+2)(y-3)}{3(y-4)} > 0.$$

Оның шешуі: $y \in (-2; 3) \cup (4; +\infty)$. $3^x = y > 0$ екенін ескерсек, x айнымалысы үшін

$$\{3^x < 3 \text{ не } 4 < 3^x\} \Leftrightarrow \{x < 1 \text{ не } \log_3 4 < x\}.$$

Жауабы: $x \in (-\infty; 1) \cup (\log_3 4; +\infty)$. ■

1. Көрсеткіштік теңсіздікті шешудің негізгі әдісінің алгоритмін айтып беріңдер.
2. Көрсеткіштік теңсіздіктердің шешіміне функцияның негізінің әсері бар ма? Жауапты түсіндіріңдер.

Есептер

А

7.72. Теңсіздіктің екі жағын бір негізге келтіріп, қарапайым көрсеткіштік теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $4^x < 256$; 2) $5^{-x+2} \geqslant 125$; 3) $3^{x+1} < 243$;

4) $3^{2x+1} > 3^{5x+4}$; 5) $\sqrt{5^x} > \sqrt[3]{25}$; 6) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3} \leqslant \left(\frac{7}{5}\right)^{2x+5}$;

7) $(0{,}25)^{2-x} > \frac{256}{2^{x+3}}$.

7.73. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $3^x < \frac{1}{27}$; 2) $2^x < \frac{1}{8}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$;

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{16}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} < 25$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} < 9$.

7.74. Теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің ең үлкен бүтін мәнін табыңдар:

1) $5^{x-1} < 25$; 2) $3^{3-x} \geqslant 9$; 3) $6^{2x} \leqslant \frac{1}{36}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \geqslant 4$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \leqslant 81$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-8} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$.

Практикалық тапсырма

7.75. 2014 жылы елімізде ақбөкендер (киіктер) саны 257 мың, 2015 жылы 295 мың болды, бірақ сол жылы пастереллез ауруының салдарынан олардың саны күрт азайды (тек Бетпақдала популяциясының өзінен ғана 130 мың ақбөкендер қырылып қалды). 2016 жылғы санақ бойынша олардың жалпы саны 108 300 болды. Логарифмдік және көрсеткіштік теңдеуді қолданып, қолайлы жағдайда еліміздегі ақбөкендер саны қай жылы 2015 жылғы санынан асатынын анықтау керек.

▲ Популяция санының көбеюі немесе азаюы $y = y_0 a^x$ көрсеткіштік функциясымен сипатталады. Бастапқыда

(2014 жыл) олардың саны 257 мың болды деп есептесек, $y = 257\ 000 \cdot a^x$ функциясын аламыз. Бір жыл уақыт өткен соң олардың саны 295 мыңға жетті, сондықтан $295\ 000 = 257\ 000 \cdot a^1$, яғни $a \approx 1{,}149$. Алайда 2015 жылғы аурудың салдарынан 108 300 ғана ақбөкен қалды. Сол себепті 2016 жылды көбеюдің бастапқы уақыты деп есептеп, олардың санын мына функциямен сипаттауға болады:

$$y = 108\ 300 \cdot 1{,}149^x.$$

Ақбөкендер саны 295 мыңнан асуы үшін қанша уақыт кететінін есептейік:

$$108\ 300 \cdot 1{,}149^x > 295\ 000 \Rightarrow 1{,}149^x > 2{,}724,$$

$$x > \log_{1,149} 2{,}724,$$

$$x > \frac{\lg 2{,}724}{\lg 1{,}149} = 7{,}215 \approx 7.$$

2015 жылы ақбөкендер саны 295 000-ға жету үшін 2016 жылдан бастап есептегенде 7 жыл керек екен. Демек,

$$2016 + 7 = 2023$$

жылы бастапқы санға жетеді. ■

7.76. Теңсіздіктерді жаңа айнымалы енгізу әдісімен шешіңдер:

1) $\pi^x - \pi^{2x} \geqslant 0$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$;

3) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; 4) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 5 \leqslant 0$.

7.77. Көбейткішке жіктеу арқылы берілген теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > 2{,}5$; 2) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$;

3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}$; 4) $3^{x-2} + 3^{x-1} < 28$.

7.78. Теңсіздіктерді жаңа айнымалы енгізу әдісімен шешіңдер:

1) $6^{2x} - 6^{x+1} + 5 > 0$; 2) $3 \cdot 2^x + 18 \cdot 2^{-x} < 29$;

3) $9^x - 6 \cdot 3^x < 27$; 4) $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$.

7.79. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y=\sqrt{2^{x+1}-8}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{0,2^{3x}-125}}$; 3) $y=\sqrt{x^2\cdot 4^x-4^{x+1}}$.

7.80. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}5^x>25,\\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-8}<\dfrac{1}{27};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}8>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-x},\\ 3^{4x}>81.\end{cases}$

7.81. Теңсіздіктерді графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $2^x\leqslant 3-x$; 2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\leqslant 2x+5$;

3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\geqslant 2x+1$; 4) $3^x\leqslant 4-x$.

B

7.82. Теңсіздіктердің екі жағын бірдей негізге келтіріп шешіңдер:

1) $3^{-2x}<\sqrt{3}$; 2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}}>25$; 3) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3x+1}>\sqrt{3}$;

4) $2^{\frac{3x}{2}+3}<16$; 5) $5^{\frac{x+1}{3}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 6) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3}>\dfrac{9}{4}$.

7.83. Теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $0,2^{\frac{6x-1}{9+x}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$; 2) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^2}>\left(\dfrac{9}{49}\right)^{x+1,5}$;

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+4x}\geqslant\left(\dfrac{8}{27}\right)^{x+2}$; 4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}\leqslant 4$;

5) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{x}{4-x}}>49$; 6) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x^2+1}>\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$.

7.84. Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-|x+2|}\geqslant 81$; 2) $(0,(4))^{x^2-1}>(0,(6))^{x^2+6}$;

3) $(0,2)^{2+4+\ldots+2x}>(0,2)^{72}$; 4) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{12x^2}\leqslant\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^4+36}<\left(\dfrac{49}{9}\right)^{-6x^2}$.

7.85. Көрсеткіштік теңсіздікті жаңа айнымалы енгізіп шешіңдер:

1) $36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0$; 2) $4^{x+1,5} + 9^x < 9^{x+1}$;

3) $2^{2x+2} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} > 0$.

Теңсіздіктерді шешіңдер **(7.86—7.87)**:

7.86. 1) $2^{2x^2+5x-1} < 0,5\sqrt[3]{(0,25)^{2x}}$; 2) $\sqrt{3^{46-x}} - 7\sqrt{3^{42-x}} > 162$;

3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x > 7 - 4\sqrt{3}$.

7.87. 1) $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 2$; 2) $3^{x-1} > \dfrac{2-3^x}{3^x-4}$;

3) $3^{|x+2|} + 3^{|x+1|} \geqslant 4$; 4) $10 \cdot 4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$.

7.88. Теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің ең үлкен бүтін мәнін табыңдар:

1) $9^{x+1} - 3^{x+3} < 3^{x-8}$; 2) $13 \cdot 2^{x+4} - 208 \cdot 2^{-2x-3} < 0$;

3) $7 \cdot 3^{x-2} + 20 \cdot 3^{2-x} < \dfrac{41}{3^{x-2}}$; 4) $\dfrac{440}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 8 \cdot 6^{-x}$.

7.89. Теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің ең кіші бүтін мәнін табыңдар:

1) $7^{2x-1} - 7^{x+1} \leqslant 7^{x-1} - 7$; 2) $3^{2x+2} - 3^{x+4} < 3^x - 9$;

3) $2^{2x+1} - 2^{x+3} \leqslant 2^{x+1} - 8$; 4) $5^{2x} - 5^{x+2} > 5^x - 25$.

C

Теңсіздіктерді шешіңдер **(7.90—7.92)**:

7.90. 1) $\left(\sqrt{5}-2\right)^x > 9 - 4\sqrt{5}$; 2) $\left(\sqrt{5}+2\right)^x < 9 - 4\sqrt{5}$; 3) $\dfrac{x^2-2}{2^x-3} < 0$;

4) $x \cdot 2^x > 8$; 5) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x < 7 - 4\sqrt{3}$; 6) $\dfrac{x^2-3}{3^x-5} < 0$;

7) $x^3 \cdot 3^x > \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

7.91*. 1) $(x+1)^{x^2-36} < 1$; 2) $(x-3)^{x^2-9} > 1$;

3) $(x-2)^{x^2-1} > 1$; 4) $(x-1)^{\frac{2x-7}{x-1}} \geqslant 1$.

▲ 1) $(x+1)^{x^2-36} < 1$.

Көрсеткіштік функцияның анықтамасына сәйкес теңсіздіктің сол жағындағы өрнектің негізі оң және дәреженің негізі бірден өзгеше болғанда ғана мағынасы бар. Сондықтан $x > -1$ шарты орындалу керек. $x + 1 > 1$ және $0 < x + 1 < 1$ жағдайларын қарастырайық.

1) $x+1>1$, яғни $x > 0$ болса,

$$\begin{cases}(x+1)^{x^2-36} < 1, \\ x > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x+1)^{x^2-36} < (x+1)^0, \\ x > 0.\end{cases}$$

Негізі $x + 1 > 1$ болғандықтан, теңсіздіктің таңбасы өзгермейді. Сол себепті $\begin{cases}x^2 - 36 < 0, \\ x > 0\end{cases}$ жүйесі орындалу керек.

$$\begin{cases}(x-6)(x+6) < 0, \\ x > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(-6;6), \\ (0;+\infty)\end{cases} \Rightarrow (0;6).$$

2) $0 < x + 1 < 1$, яғни $-1 < x < 0$ болса, мына теңсіздіктер жүйесіне көшеміз:

$$\begin{cases}x^2 - 36 > 0, \\ -1 < x < 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-6)(x+6) > 0, \\ -1 < x < 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(-\infty;-6) \cup (6;+\infty), \\ (-1;0)\end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

3) Егер $x + 1 = 1$, яғни $x = 0$ болса, $1 < 1 \Rightarrow \varnothing$.

Жауабы: (0; 6). ■

7.92. 1) $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$; 2) $\left|2^{4x^2-1} - 5\right| \leqslant 3$;

3) $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant (x^2+x+1)^0$; 4) $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x-6)} > 1$.

7.93. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^{x+2} - 0,75 \cdot 2^{x+2} > 1, \\ 0,2^x \leqslant 0,04^{x^2};\end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-2)^{2x^2-11x+9} < 1, \\ 0,3^{\sqrt{4x^2-3x+2}} > 0,3^{\sqrt{x}}. \end{cases}$

7.94*. a-ның қандай мәндерінде $x^2 - x \cdot 2^{a+2} - 2^{a+3} + 12 > 0$ теңсіздігі кез келген x үшін орындалады?

Қайталауға арналған жаттығулар

7.95. Өрнекті ықшамдаңдар:

$$1)\ \left(\left(\sqrt{a}+1\right)^2 - \frac{2a-2\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - 1\right)^{-3};\quad 2)\ \left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

7.96. $y = \ln|x+2|$ функциясының графигін салыңдар.

7.97. Есептеңдер: $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

7.4 Логарифмдік теңсіздіктер

Бұл тақырыпта логарифмдік теңсіздіктер, оларды шешу жолдарымен танысып, соңында:

- логарифмдік теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер;
- логарифмдік теңсіздіктер жүйесін шеше аласыңдар.

Логарифмдік теңсіздіктерді $\log_a u(x) < \log_a v(x)$ түріндегі қарапайым теңсіздіктерге келтіріп шешеді. Логарифмдік функцияның қасиеттері бойынша $\log_a u(x) < \log_a v(x)$ теңсіздігі

1) егер $a>1$ болса, онда $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) < v(x) \end{cases}$ (1)

теңсіздіктер жүйесіне;

2) егер $0<a<1$ болса, онда $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) > v(x) \end{cases}$ (2)

теңсіздіктер жүйесіне пара-пар.

$\log_a u(x) < b$ түріндегі теңсіздіктерді де $\log_a u(x) < \log_a a^b$ түріне келтіріп шешеміз. Жалпы, іс жүзінде (1) және (2) түрдегі жүйелерді жазып, шешудің орнына берілген теңсіздіктің ММЖ-ын $\{u>0,\ v>0,\ a>0,\ a\neq 1\}$ шарттарын пайдаланып, анықтап алған тиімді. Бұл жазба жұмыстарын едәуір қысқартады. Енді осы айтылғандарды ескеріп, бірер мысалдар келтірейік.

1-мысал. $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)<-2$ теңсіздігін шешейік.

▲ Логарифмнің негізі $a=\frac{1}{3}<1$ болғандықтан, теңсіздіктің таңбасын өзгертеміз және ММЖ қарастырып, мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases}2x+5>0,\\ 2x+5>9\end{cases} \text{ немесе } \begin{cases}x>-2{,}5,\\ x>2.\end{cases}$$

Жауабы: $(2;\ +\infty)$. ■

2-мысал. $\lg(x+1)\leqslant 1-\lg(2x-6)$ теңсіздігін шешейік.

▲ $\lg(x+1)+\lg(2x-6)\leqslant 1 \Rightarrow \lg((x+1)(2x-6))\leqslant \lg 10$.

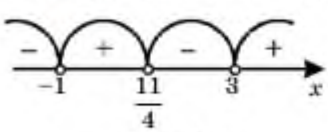
Логарифмнің негізі $a=10>1$ болғандықтан, теңсіздіктің таңбасы өзгермейді және ММЖ қарастырып, мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases}x+1>0,\\ 2x-6>0,\\ (x+1)(2x-6)\leqslant 10\end{cases} \text{ немесе } \begin{cases}x>-1,\\ x>3,\\ [-2;4].\end{cases}$$

Жауабы: $(3;\ 4]$. ■

3-мысал. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\leqslant -1$ теңсіздігін шешейік.

▲ Теңсіздіктің ММЖ-ы $\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)(x-3)}{4\left(x-\frac{11}{4}\right)}>0$ теңсіздігімен анықталады.



7.3-сурет

Оның шешімі (ММЖ):

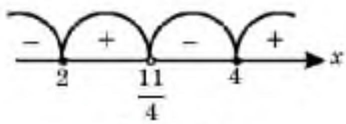
$\left(-1;\frac{11}{4}\right)\cup(3;+\infty)$ (7.3-сурет).

Табылған ММЖ-да берілген теңсіздікті $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\leqslant\log_{\frac{1}{2}}2$ түрінде жазып және $0<\frac{1}{2}<1$ екенін ескерсек, $\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-12x+16}{4x-11}\geqslant 0 \Leftrightarrow$

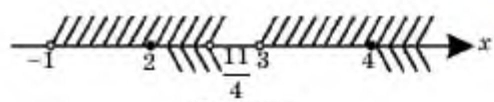
$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)(x-4)}{4\left(x-\frac{11}{4}\right)} \geqslant 0$$

теңсіздігін аламыз. Оның шешімі: $x \in \left[2; \frac{11}{4}\right) \cup [4; +\infty)$ (7.4-сурет). Табылған жиынды ММЖ-мен қиылыстырсақ (7.5-сурет), есептің жауабы шығады:

$$x \in \left[2; \frac{11}{4}\right) \cup [4; +\infty).$$ ■



7.4-сурет



7.5-сурет

4-мысал. $\log_3(7-x) \leqslant \frac{9}{16}\log^2_{2\sqrt{2}}\frac{1}{4} + \log_{7-x}9$ теңсіздігін шешу керек.

▲ ММЖ: $\begin{cases} 7-x>0, \\ 7-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7, \\ x \neq 6. \end{cases}$

Осыдан ММЖ: $x \in (-\infty; 6) \cup (6; 7)$.

$\log^2_{2\sqrt{2}}\frac{1}{4} = \left(-\frac{4}{3}\log_2 2\right)^2 = \frac{16}{9}$ және $\log_{7-x}9 = 2 \cdot \log_{7-x}3 = \frac{2}{\log_3(7-x)}$ екенін ескерсек, берілген теңсіздік былай жазылады:

$$\log_3(7-x) \leqslant 1 + \frac{2}{\log_3(7-x)}.$$

$\log_3(7-x) = y$ белгілеуін енгізсек,

$$y \leqslant 1 + \frac{2}{y} \Leftrightarrow \frac{(y+1)(y-2)}{y} \leqslant 0 \Rightarrow y \in (-\infty; -1] \cup (0; 2].$$

x айнымалысы үшін мына теңсіздіктер жиынтығы шығады:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(7-x) \leqslant -1, \\ 0 < \log_3(7-x) \leqslant 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7-x \leqslant \frac{1}{3}, \\ 1 < 7-x \leqslant 9 \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-2; 6) \cup \left[\frac{20}{3}; +\infty\right).$$

Мұнда 3>1 болатыны ескерілген. Табылған шешімді ММЖ-мен қиылыстырып, есептің жауабын аламыз: $x \in [-2; 6) \cup \left[\frac{20}{3}; 7\right)$. ■

5-мысал. $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} < 17$ теңсіздігін шешу керек.

▲ ММЖ: $x \in (0; +\infty)$. Егер $x^{\log_2 x} = y$ деп алсақ, берілген теңсіздікті

$$y + 16 \cdot \frac{1}{y} < 17 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 17y + 16}{y} < 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y-16)}{y} < 0$$

түрінде жазамыз. $y \in (-\infty; 0) \cup (1; 16)$. $x > 0$ болғанда $x^{\log_2 x} > 0$.

Олай болса, $1 < x^{\log_2 x} < 16$ теңсіздігін шешу қажет. Бұл теңсіздікті 2 негізі бойынша логарифмдесек,

$$0 < \log_2 x \cdot \log_2 x < \log_2 16 \Leftrightarrow 0 < |\log_2 x| < 2.$$

Осыдан

$$\left[\begin{array}{l} 0 < \log_2 x < 2, \\ -2 < \log_2 x < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 4, \\ \frac{1}{4} < x < 1. \end{array}\right.$$

Жауабы: $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 4)$. ■

Логарифмдік теңсіздіктерді шешудің көптеген оңтайлы әдістері бар. Солардың бірі логарифмдік теңсіздіктерді рационализациялау әдісімен шешу. Ол әдісті мына интернет ресурстан үйрене аласыңдар:

➤ **Қосымша электрондық ресурс**

https://youtu.be/JljcryzkFg8

1. Логарифмдік функцияның қасиеттерін атаңдар.
2. Теңсіздіктің таңбасын логарифмнің негізіне байланысты өзгерту керек пе?

Есептер

A

Қарапайым логарифмдік теңсіздікті шешіңдер **(7.98—7.101)**:

7.98. 1) $\log_5(3 + 8x) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2$;

3) $\log_2(x - 3) \leqslant 3$; 4) $\lg(4x - 1) \leqslant 1$.

7.99. 1) $\log_2(5 + 2x) > \log_2(x - 7)$; 2) $\log_5(3x - 2) > \log_5(x + 6)$;

3) $\log_3(3x-1) < \log_3(2x+3)$; 4) $\log_{\frac{1}{9}}(4x-3) > \log_{\frac{1}{9}}(x+3)$.

7.100. 1) $\log_2(2x-1) > \log_2(x+1)$; 2) $\log_5(3x+1) > \log_5(x-2)$;

3) $\log_{0,2}(x-2) < \log_{0,2}(3-x)$; 4) $\log_{\frac{1}{7}}(12-x) \geqslant -2$.

7.101. 1) $\log_3(5x-2) > 1$; 2) $\log_{0,3}(5x-2) > 1$;
3) $\log_3|5x-2| < 1$; 4) $\log_{0,5}(x^2-5x+7) \geqslant 0$;
5) $\log_5(x^2-11x+43) > 2$; 6) $\log_2(x^2-3x) \leqslant 2$.

7.102. Берілген теңсіздіктерді шешіңдер:
1) $\log_2(3x-2) < \log_2(2x-3)$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > 0$;
3) $\log_\pi(x-1) + \log_\pi(x-2) < \log_\pi(x+7)$;
4) $\ln x - \ln(2x-5) \leqslant \ln 2 - \ln(x-3)$.

7.103. Теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leqslant 0$; 2) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$;

3) $\log_{0,1}^2 x + 3\log_{0,1} x > 0$; 4) $2 - \lg^2 x > \lg x$.

7.104. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x}{x-1}}$; 2) $f(x) = \sqrt{\log_{0,3} \dfrac{x-1}{x+5}}$.

B

Логарифмдік теңсіздікті шешіңдер **(7.105–7.107)**:

7.105. 1) $\lg(x^2+2x+2) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) > -2$;

3) $\log_2(x^2+10) < 4$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-1) < -1$.

7.106. 1) $2^{\log_2 \frac{x-1}{3x+5}} \leqslant \dfrac{1}{4}$; 2) $3^{\log_3 \frac{x-1}{x+1}} < \dfrac{1}{9}$;

3) $(5x+1)\lg(4-x)\leqslant 0$; 4) $(3-x)\lg(2x-1)\geqslant 0$.

7.107. 1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(\log_2\sqrt{6-x}\right)>0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\dfrac{x+1}{x-1}\right)\geqslant 0$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_5\dfrac{x-2}{x+2}\right)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}1$; 6) $\log_{\frac{5}{2}}\left(\log_3\left(9^x-6\right)\right)\geqslant 0$.

7.108. $y=f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x)=\sqrt{\log_{2,1}\dfrac{3x-1}{5-x}}+\sqrt{x-4}$;

2) $f(x)=\sqrt{\log_6\left(x+x^2\right)}+\sqrt{-x^2+3x-2}$.

7.109. Логарифмдік теңсіздіктерді жаңа айнымалы енгізу арқылы шешіңдер:

1) $\ln^2 x-2\cdot\ln x-3\leqslant 0$; 2) $\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\right)^2>4$;

3) $\log_3^2 x-\log_3 x>2$; 4) $\dfrac{2}{\lg x+1}\geqslant 1$.

Логарифмдік теңсіздікті шешіңдер **(7.100—7.111)**:

7.110. 1) $\left(\log_2 x-4\right)\left(5x^2+x-6\right)\geqslant 0$; 2) $\left(\log_3 x+3\right)\left(x^2+2x-8\right)\geqslant 0$.

7.111. 1) $\log_{1-x}(2x+3)\geqslant 1$; 2) $\log_{x-1}(x-8)\leqslant 1$;

3) $\log_{3x}(2{,}5x+1)\geqslant 0$.

7.112. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2\ln x-\ln x^4}}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

7.113. Логарифмдік теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1$;

2) $2 \cdot \log_8 (x-2) - \log_8 (x-3) > \frac{2}{3}$;

3) $0,5 + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}} (x+3)$;

4) $\left(\log_{0,2} (x-1)\right)^2 > 4$.

Теңсіздіктерді шешіңдер **(7.114—7.115):**

7.114. 1) $\log_x(x-1) \geqslant 2$; 2) $\log_x \sqrt{21-4x} > 1$;

3) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$; 4) $\log_x(16-6x-x^2) \leqslant 1$.

7.115. 1) $\log_2 \left(1 + \log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x\right) < 1$;

2) $\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{0,5} (x-1) > 5$;

3) $\log_{0,5}(\log_2 \log_{x-1} 9) > 0$;

4) $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{3}} x\right) > 0$.

7.116. Егер $a > 1$, $b \geqslant 1$, $c > 0$ болса, $(1 + \log_a b)\left(\log_{ab}^2 c + 1\right) \geqslant 2 \cdot \log_a c$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

C

7.117. Теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $\log_2 \left(2^x - 1\right) \cdot \log_{\frac{1}{2}} \left(2^{x+1} - 2\right) > -2$; 2) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} < 6$;

3) $2^{\log_{x+1}\left(x^2+6x+15\right)} < 1$; 4) $\log_x \left(\log_9 \left(3^x - 9\right)\right) < 1$.

7.118. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} (x-1)\ln 2 + \ln\left(2^{x+1} + 1\right) < \ln\left(7 \cdot 2^x + 12\right), \\ \log_x (x+2) > 2. \end{cases}$$

7.119. $2 < \log_3 2 + \log_2 3 < 3$ теңсіздігінің орындалатынын көрсетіңдер.

7.120. $\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5} - x + 1\right) > 0$ теңсіздігінің барлық бүтін шешімдерін анықтаңдар.

7.121. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 |x-3|}$ функциясының анықталу облысын табыңдар.

7.122*. $\ln\dfrac{n+1}{2} > \dfrac{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots \ln n}{n}$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

7.123. $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

7.124. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\left(\sqrt{ab} - \dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right) : \dfrac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b}}{a-b}$;

2) $\left(a + b^{\frac{3}{2}} : \sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

7.125. $y = 3 - \log_{\frac{1}{3}} x^2$ функциясының мәндер жиынын анықтаңдар.

7.126. Есептеңдер: $\left(27^{\log_3 2} + 5^{\log_{25} 49}\right) \cdot \left(81^{\log_9 4} - 8^{\log_4 9}\right)$.

«КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР» бөлімінің қорытындысы

$a > 0$, $a \neq 1$ және $b > 0$ үшін $a^x = b$ теңдеуін *қарапайым көрсеткіштік теңдеу* деп атайды.

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b.$$

Теңдеуді шешудің жиі кездесетін әдістері — теңдеудің екі жағын бірдей негізге келтіру, көбейткіштерге жіктеу және жаңа айнымалы енгізу әдісі.

$a > 0$, $a \neq 1$ үшін $\log_a x = p$ түріндегі теңдеуді *қарапайым логарифмдік* теңдеу деп атайды.

Логарифмдік теңдеуді шешу әдістері: логарифмнің анықтамасын қолдану, жаңа айнымалы енгізу әдісі, мүшелеп логарифмдеу әдісі және логарифмдік теңдеуді $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ түріне келтіру, яғни:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 1, a \neq 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$\log_a u(x) < \log_a v(x)$ теңсіздігі

1) егер $a > 1$ болса, $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) < v(x) \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесіне;

2) егер $0 < a < 1$ болса, $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) > v(x) \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесіне парапар.

$\log_a u(x) < b$ түріндегі теңсіздікті $\log_a u(x) < \log_a a^b$ түріне келтіріп шешеді.

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Көрсеткіштік теңдеу	Показательное уравнение	Exponential equation
2	Көрсеткіштік теңсіздік	Показательное неравенство	Exponential inequality
3	Логарифмдік теңдеу	Логарифмическое уравнение	Logarithmic equation
4	Логарифмдік теңсіздік	Логарифмическое неравенство	Logarithmic inequality
5	Экспоненттік өсу (кему)	Экспоненциальный рост (распад)	Exponential growth(decay)

VIII бөлім. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Температурасы 20° С бөлмеде шайдың температурасы 100° С-тан 90° С-қа 5 минутта суыды. Қанша уақытта шайдың температурасы 50° С-қа дейін суитынын осы тарау барысында анықтауды үйренесіңдер.

Сендер математикалық анализдің ең қызықты тақырыптарының бірі дифференциалдық теңдеулермен танысуды бастайсыңдар. Дифференциалдық теңдеулердің ғылымдағы қолданыс аясы өте кең, өйткені табиғаттағы көптеген процестің математикалық моделі — интегралдық-дифференциалдық теңдеулермен өрнектеледі.

Халық санының, жануарлар, бактериялар санының өсуі немесе кемуі, қандай да бір инфекцияның таралуы және қарапайым гармоникалық қозғалыс сияқты көптеген физикалық процестерді дифференциалдық теңдеулер арқылы модельдеуге болады. Сол сияқты температураның да өзгерісін дифференциалдық теңдеумен модельдеуге болады.

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

8.1. Дифференциалдық теңдеулер жайлы негізгі түсініктер
8.2. Айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер
8.3. Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеулер

8.1 Дифференциалдық теңдеулер жайлы негізгі түсініктер

Бұл тақырыпта дифференциалдық теңдеулердің негізгі түсініктерімен танысып, соңында:

- дифференциалдық теңдеудің анықтамасын білесіңдер;
- дифференциалдық теңдеулердің практикада қолданылуымен танысасыңдар;
- дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі және дербес шешімінің анықтамаларын білесіңдер.

Табиғатта кездесетін көптеген құбылыстар дифференциалдық теңдеулер деп аталатын ерекше теңдеулермен сипатталады. *Дифференциалдық теңдеулер* деп құрамында тәуелсіз айнымалы, белгісіз функция мен оның туындылары кездесетін теңдеулерді айтады. Мысалы, $f'(x) + 5f(x) = 0$, $f''(x) = x \cdot f^3(x)$ және т.с.с.

Туынды табуды *дифференциалдау* деп атайды. Ал дифференциалдық теңдеулер бөлімі функцияның дифференциалы ұғымымен тікелей байланысты.

Анықтама. ***$y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі дифференциалы*** *деп функцияның туындысы мен аргументі өсімшесінің көбейтіндісін айтады:*

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{1}$$

Егер $y = x$ функциясын қарастырсақ, $dx = x' \cdot \Delta x$, ал $x' = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow dx = \Delta x$. Осыны ескеріп, (1) теңдеуді

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

немесе

$$df(x) = f'(x) \cdot dx.$$

түрінде жазамыз. Бұдан $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$. (2)

Дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін бірнеше мысалдар қарастырайық.

1-мысал (халық санының өсімі). Халық санының өсімін зерттеу барысында оның өсу жылдамдығының тұрғындар санына пропорционалдығы анықталған. Айталық, t уақытта тұрғындар саны $N(t)$-ға тең болсын. Онда халықтың t уақыттағы өсу жылдамдығы $N'(t)$ туындысына тең. Сондықтан жоғарыда айтылған пропорционалдық заңдылық бойынша

$$N'(t) = k \cdot N(t)$$

теңдігін аламыз. Мұнда k — халықтың өсу қарқынын білдіретін тұрақты шама. Бұл теңдеуді

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k$$

түрінде жазып интегралдасақ және

$\int \dfrac{N'(t)}{N(t)} dt = \int k dt \Rightarrow N'(t) = \dfrac{dN(t)}{dt}$ екенін ескерсек, $\int \dfrac{dN(t)}{N(t)} = kt + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln N(t)=kt + C \Rightarrow N(t) = Ce^{kt}.$$

Мұнда $e^c = C$ арқылы қайта белгіледік. Осыдан $N'(t) = k \cdot N(t)$ дифференциалдық теңдеуінің барлық шешімдері $N(t) = Ce^{kt}$ түрінде жазылатынын көреміз. Халық санының өсу жылдамдығы тұрғындар санына пропорционал болғанда бұл формула халық санының өсу заңдылығын анықтайды.

2-мысал. (Радиоактивті ыдырау). Эксперимент арқылы заттың радиоактивті ыдырау жылдамдығының оның бастапқы мөлшеріне пропорционалдығы анықталған. Осы заңдылыққа сүйеніп, радиоактивті ыдырау есептері шығарылады. Айталық, $m(t)$ арқылы t уақыттағы радиоактивті заттың массасын (грамм) белгілейік. Онда

$$m'(t) = -\lambda m(t).$$

Мұндағы $\lambda > 0$ — пропорционалдық коэффициент. «–» таңбасы уақыт өтуіне қарай радиоактивті зат массасының кемитінін білдіреді, яғни $m'(t)$ туындысы теріс болуы қажет. Радиоактивті ыдырау заңы

$$m(t) = Ce^{-\lambda t}$$

функциясымен анықталады. Бастапқы уақыт мезетінде ($t = 0$) радиоактивті заттың массасы m_0 г десек, бұл заңдылық

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

түрінде жазылады ($m_0 = m(0) = Ce^{-\lambda 0} = C$).

3-мысал. Айталық, массасы m материялық дене F күшінің әрекетінен түзу сызықты қозғалсын. Мұнда F күшінің бағыты дене қозғалысымен бағыттас деп үйғарайық. Ньютонның II заңы бойынша t уақыт мезетіндегі дене қозғалысының үдеуі осы уақыт ішінде өзін тудыратын F күшіне тура пропорцонал және дене массасы m-ге кері пропорцианал: $a = \dfrac{F}{m}$.

Туындының физикалық мағынасына сәйкес үдеу дененің s жүрген жолының t уақыт бойынша алынған екінші ретті туындысына тең. Осыны ескерсек, денеге әрекет етуші күш

$$F(t) = m \cdot s''(t).$$

4-мысал. Қисық сызықтың әр нүктесіне жүргізілген жанаманың координаталар өстерімен шектелген кесінділерінің ұзындығы тұрақты және a-ға тең. Осы қисықтың дифференциалдық теңдеуін жазайық.

▲ Айталық, $y = f(x)$ бізге қажетті қисықтың теңдеуі болсын. Қисыққа $(x, f(x))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуі

$$Y - f(x) = f'(x)\,(X - x).$$

Жанаманың Ox және Oy өстерімен қиылысу нүктелерін анықтайық.

$$Ox: \quad Y = 0 \Rightarrow X = \frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)}; \; Oy: \quad X = 0 \Rightarrow Y = f(x) - xf'(x).$$

Сонымен, қисық координаталық өстерімен $A\left(\frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)}; 0\right)$ және $B(0;\ f(x) - xf'(x))$ нүктелерінде қиылысады. Шарт бойынша $AB = a$, яғни

$$\left(\frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)}\right)^2 + \left(f(x) - xf'(x)\right)^2 = a^2.$$

$f'(x) = y'$, $f(x) = y$ алмастыруын жасасақ,

$$\left(\frac{xy' - y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = a^2,$$

$$x^2(y')^2 + y^2 - 2xyy' + y^2(y')^2 - 2xy(y')^3 + x^2(y')^4 = a^2(y')^2$$

түріндегі дифференциалдық теңдеуді аламыз. ■

Бұл қарастырылған мысалдардан табиғатта кездесетін құбылыстардың дифференциалдық теңдеулермен сипатталатынын көреміз. Енді дифференциалдық теңдеулер түсінігіне қысқаша тоқталайық.

Анықтама. *Белгісіз $y(x)$ функциясын, оның туындыларын және x тәуелсіз айнымалысын байланыстыратын теңдеуді* ***дифференциалдық теңдеу*** *деп атайды.*

Дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функцияның туындылары ретінің ең үлкенін осы *теңдеудің реті* деп атайды. Мысалы,

$$y'''(y'' + 2y)^2$$

теңдеуінің реті 3-ке тең.

$$y'' = \frac{\sin x}{y + x}$$ — екінші ретті дифференциалдық теңдеу.

Топтық жұмыс

1-4-мысалдардағы дифференциалдық теңдеудің ретін атаңдар.

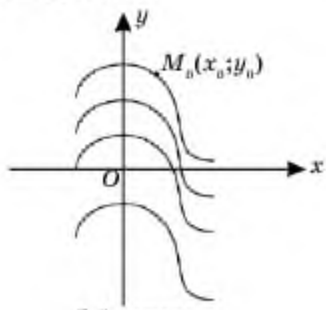
Анықтама. *Дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция мен оның туындыларының орнына қойғанда бұл теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын әрбір $y(x)$ функциясын* ***дифференциалдық теңдеудің шешімі*** *деп атайды.*

Мысалы, $y = Ce^{ax}$ функциялары $y' = ay$ теңдеуінің шешімі болады. Осы сияқты, $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} + C$ (C = const) функциясы $y' = \frac{x^4 - 1}{x^3}$ теңдеуінің шешімі. Шынында да, $y'(x) = x - \frac{1}{x^3} = \frac{x^4 - 1}{x^3}$.

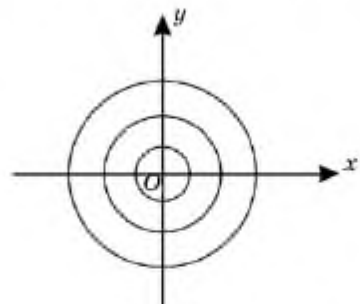
Дифференциалдық теңдеу шешімінің графигі осы теңдеудің *интегралдық қисығы* деп аталады. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің ең қарапайымы $y' = f(x)$ түрінде жазылады. Бұл теңдеуді шешу үшін туындысы $f(x)$-ке тең белгісіз $y(x)$ функциясын табу қажет. Бұл есептің интегралдау арқылы шешілетінін жақсы білеміз:

$$y(x) = \int f(x)dx.$$

Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$-тің қандай да бір алғашқы функциясы болса, бұл шешім $y(x) = F(x) + C$ түрінде жазылады. Осыдан $y' = f(x)$ теңдеуінің шексіз көп шешімі бар екенін көреміз. Бұл функциялардың графиктері (интегралдық қисықтары) бір-бірінен параллель көшіру арқылы алынады. Сонымен бірге, жазықтықтағы әрбір $M_0(x_0;y_0)$ нүктесі арқылы тек бір ғана интегралдық қисық өтеді (8.1-сурет).



8.1-сурет



8.2-сурет

Мысалы, $y \cdot y' + x = 0$ теңдеуінің интегралдық қисықтары — центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан концентрлі шеңберлер.

Берілген теңдеуді $y \cdot y' = -x$ түрінде жазып, тең функциялардың дифференциалдары да тең болатынын ескерсек, $y \cdot y'dx = -xdx$. Ал $y'dx = dy$. Олай болса,

$$y \cdot dy = -xdx$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдікті интегралдаймыз:

$$\int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = C.$$

Мұнда белгісіз тұрақты C-ның орнына $\frac{C}{2}$ деп алыну себебі оның C не $\frac{C}{2}$ болуы маңызды емес. Ал $x^2 + y^2 = C$ $(C > 0)$ теңдеуімен концентрлі шеңберлер анықталатынын жақсы білеміз (8.2-сурет). Осы мысалдардан бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдері C тұрақты шамасына тәуелді екенін көреміз. Бұл тұрақты шама анықталмаған интегралды есептеу барысында пайда болады. Сондықтан бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінде бір тұрақты шама бар.

> ➤ **Қосымша электрондық ресурстар**
>
> https://www.youtube.com/watch?v=48vearVtLLs&list=PLEOOwQomrpAggQM2ub3EW1OEPEd36s9Jd

Осылайша $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ функциясы қарастырылған $y \cdot y' + x = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі болып табылады. Дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерімен бірге олардың дербес шешімдері ұғымы да қарастырылады. Атап айтқанда, дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімдеріндегі тұрақты шама C-ға белгілі бір сан мәнін беру арқылы алынатын шешімді осы теңдеудің ***дербес шешімі*** деп атайды.

Мысалы, $y \cdot y' + x = 0$ теңдеуінің $y(1) = -2$ теңдігін қанағаттандыратын шешімін табу қажет. Бұл есепте $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ теңдігіне шартқа сәйкес $x = 1$, $y = -2$ шамаларын орнына қойсақ, $C = 5$. $y < 0$ болғандықтан, $y = -\sqrt{5 - x^2}$ функциясы — берілген теңдеудің бізге қажетті дербес шешімі.

Енді екінші ретті теңдеулерді қарастырайық. Бұлардың ішіндегі ең қарапайымы

$$y'' = f(x)$$

түрінде жазылады.

Бұл теңдеуді шешу үшін $z = y'$ деп белгілеуін енгізейік. $z' = (y')' = y''$, сондықтан теңдеуді $z' = f(x)$ түрінде жазамыз. Осыдан

$$z = \int f(x)dx = F(x) + C_1.$$

Мұндағы $F(x)$ функциясы — $f(x)$-тің алғашқы функциясы. Енді $y' = z$ болғандықтан, $y' = F(x) + C_1$ теңдеуінен

$$y = \int (F(x) + C_1)\, dx = \Phi(x) + C_1 x + C_2$$

теңдігін аламыз. Мұндағы $\Phi(x)$ функциясы — $F(x)$-тің алғашқы функциясы, C_1, C_2 — интегралдық тұрақты шамалар. Осы мысалдан екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімдерінде екі тұрақты шама (C_1, C_2) көріп отырмыз. n-ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің құрамында n белгісіз тұрақты шама болады. Бұл тұжырымның толық дәлелдемесімен жоғары математика курсында танысасыңдар.

1. Қандай теңдеулерді дифференциалдық теңдеу деп атайды?
2. Дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін есептерге мысал келтіріңдер.
3. Дифференциалдық теңдеудің реті деп нені айтады?
4. Дифференциалдық теңдеудің шешімі деп нені айтады? Теңдеудің жалпы шешімі деген не?

Есептер

А

8.1. Төмендегі теңдеулердің ішінен дифференциалдық теңдеулерді көрсетіп, оның ретін анықтаңдар:

1) $y''' - 2x(y')^2 = x^2$; 2) $\dfrac{xy''}{x^2 + y^2} = 1$;

3) $\ln y = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$; 4) $x^2 + 3xy^2 = 0$.

8.2. $f(x)$ функциясы көрсетілген дифференциалдық теңдеудің шешімі болатынын тексеріңдер:

1) $f(x) = e^{2x}$, $y' = 2y$; 2) $f(x) = e^{-x} + 1$, $y' + y = 1$;

3) $f(x) = e^{-3x} + e^{x}$, $y' + 3y = 4e^{x}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $y' + y^2 = 0$.

8.3. $v = 20e^{-2t} + 5$ функциясы $\dfrac{dv}{dt} = 10 - 2v$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімі екенін дәлелдеңдер.

8.4. Сұйықта батып бара жатқан тастың үдеуі $\dfrac{dv}{dt} = 4 - v$ теңдеуімен сипатталады. $v(t) = Ae^{-t} + 4$ функциясының дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратынын көрсетіңдер. Тастың бастапқы жылдамдығы 8 м/с. А шамасын есептеңдер.

8.5. $y = Ae^{x} - (x^2 + 2x + 2)$ функциясы $\dfrac{dy}{dx} = y + x^2$ дифференциалдық теңдеуінің шешімі болатынын көрсетіңдер.

8.6. $\dfrac{dv}{dt} = 10 - 0{,}5v$ дифференциалдық теңдеуінің шешімі $v = 20(1 - e^{-0,5t})$ функциясы болатынын көрсетіңдер. $t = 0$ болғандағы v шамасын табыңдар. t-ның үлкен мәндерінде жылдамдық v қалай өзгереді?

8.7. Төмендегі функциялардың қайсысы $\dfrac{dy}{dx} = -8y$ теңдеуінің шешімі болады?

A. $y = 4e^{-8x}$; B. $y = 8e^{-4x}$; C. $y = 4e^{-8x} + 2$;

D. $y = 4e^{-8x} + 8$; E. $y = 8e^{-8x}$.

8.8. Дененің T температурасы өзгерісінің математикалық моделі $\frac{dT}{dt} = 2 - 0{,}1T$ дифференциалдық теңдеуімен берілген. $T = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ функциясы дифференциалдық теңдеудің шешімі болатынын көрсетіңдер.

8.9. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - x + 1$ дифференциалдық теңдеуінің екі жағын да интегралдап жалпы шешімін табыңдар және $x = 1$ шамасына сәйкес $y = 4$ болатын дербес шешімді анықтаңдар.

8.10. $\frac{ds}{dt} = 4 - 10t$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңдар және $t = 0$ шамасына сәйкес $s = 11$ болатын дербес шешімді анықтаңдар.

B

8.11. $y^2y' = 2$ және $y(2) = 2$ деп алып, $y(x)$ функциясын табыңдар.

8.12. Берілген функция көрсетілген теңдеудің шешімі болатындай етіп, k-ның мәнін табыңдар:

1) $y = kx + 1$, $y' = 2$;
2) $x = kt^2$, $x' = 12t$;
3) $y = e^{kx}$, $y' = y$;
4) $y = e^{kx}$, $y' = ky$;
5) $u = x^3$, $u' = kx^2$;
6) $y = \frac{1}{x+1}$, $y' = ky^2$.

8.13. $y = Cx^2$ параболалар жиынтығының $C = 0$, $C = \pm 1$, $C = \pm 2$ болғандағы графиктерін салыңдар және осы функциялар жиынтығы жалпы шешімі болатындай дифференциалдық теңдеу құрастырыңдар.

8.14. Берілген дифференциалдық теңдеудің интегралдық қисығына (1; 2) нүктесінде жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффициентін табыңдар:

1) $y' = 2x$; 2) $y' = -y$; 3) $y' = y + x$; 4) $y' + xy = 1$.

8.15. Жалпы шешімдері бойынша 1-ретті дифференциалдық теңдеу құрастырыңдар:

1) $y^2 = 2Cx$; 2) $y = C_1x + C_2$; 3) $y = Ce^x$; 4) $x^2 + y^2 = C^2$.

8.16. $y' + xy = 1$ теңдеуінің барлық интегралдық қисықтарына олардың Oy өсімен қиылысу нүктесінде жүргізілген жанамалары өзара параллель болатынын дәлелдеңдер.

8.17. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңдар:

1) $y' = e^{-3x}$; 2) $y' = \dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}x$; 3) $e^{y'} = 1$; 4) $\cos y' = 1$.

C

8.18. Кез келген жанамасының Ox-пен қиылысу бұрышының тангенсі жанасу нүктесі абсциссасының $\dfrac{2}{3}$ бөлігіне тең болатын қисықтардың жалпы теңдеуін жазыңдар.

8.19. Кедергісі бар ортадағы дененің еркін түсуінің дифференциалдық теңдеуін жазыңдар. Мұнда ортаның кедергі күші жылдамдықтың квадратына пропорционал.

Қайталауға арналған жаттығулар

8.20*. Анықталмаған интегралды есептеңдер:

1) $\int \ln(x^2 + 4)dx$; 2) $\int (5x - 2)\, e^{3x}dx$;

3) $\int \dfrac{xdx}{\sin^2 x}$; 4) $\int x\sin^2 x dx$.

8.2 Айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Тақырыпты оқу-үйрену барысында сендер:

- айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді шешуді үйренесіңдер;
- физикалық, қолданбалы есептерді шешкенде дифференциалдық теңдеулерді пайдаланасыңдар.

Айнымалылары ажыратылатын теңдеулерді шешу

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің жалпы түрі

$$F(x;\, y;\, y') = 0. \qquad (1)$$

Егер бұл теңдеуді y' туындысына қатысты шешу мүмкін болса,

$$y' = f(x;\, y) \qquad (2)$$

түрінде жазылады. (1) не (2) түрде берілген кез келген реттегі теңдеулерді шешудің жоғары математика курсында түрлі әдістері қарастырылады. Біз (2) түріндегі теңдеулердің ең қарапайымы — айнымалылары ажыратылатын теңдеулерді қарастырамыз. Оның жалпы түрі былай жазылады:

$$y' = f(x) \cdot g(y). \tag{3}$$

Бұл теңдеудің оң жақ бөлігі x және y-ке тәуелді екі функцияның көбейтіндісі түрінде жазылған ($f(x)$ және $g(y)$ функциялары үздіксіз деп есептеледі), сол жақ бөлігінде белгісіз функцияның туындысы тұр.

Егер қандай да бір y_0 саны үшін $g(y_0) = 0$ теңдігі орындалса, $y = y_0$ саны (3) теңдеудің шешімі болады.

Шынында да, $(y_0)' = 0$ (y_0 — тұрақты сан) болғандықтан, $(y_0)' = f(x) \cdot g(y_0) \Rightarrow 0 = f(x) \cdot 0$ тепе-теңдігін аламыз.

Тең функциялардың дифференциалдары да тең болуы қажет.

Сондықтан $\dfrac{y'}{g(y)}dx = f(x)dx$.

$y'dx = dy$ болатынын ескерсек,

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \tag{4}$$

түріндегі айнымалылары бөлінетін дифференциалдар теңдігін аламыз. $\dfrac{1}{g(y)}$-тің алғашқы функциясы $G(y)$, $f(x)$-тің алғашқы функциясы $F(x)$ болса, (4) теңдікті интегралдаймыз:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Rightarrow G(y) = F(x) + C. \tag{5}$$

Сонымен, біз $g(y) \neq 0$ болғанда айнымалылары ажыратылатын (3) дифференциалдық теңдеулердің тікелей интегралдау арқылы шешілетінін және оның шешімі (5) түрде жазылатынын көрдік.

Сонымен қатар, біз жоғарыда айнымалылары ажыратылатын (3) теңдеуден (4) түрдегі дифференциалдар теңдігіне көшуді де негіздедік. Ал іс жүзінде, есептер шығару барысында (3) теңдеуден (4) түрдегі теңдеуге көшудің, пропорция заңдарымен орындалатын «формальды» әдістері жиі қолданылады:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad g(y) \neq 0 \ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $x^3 \cdot y' = 2y$ теңдеуінің жалпы шешімін табу қажет.

▲ $y = 0$ — теңдеудің шешімі. Егер $y \neq 0$, $x \neq 0$ болса, берілген теңдеудегі бірдей айнымалыларды бір жаққа жинап, ажыратамыз және оны интегралдаймыз:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x^3}.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x^3} \Rightarrow \ln y = -\frac{1}{x^2} + C_1 \Rightarrow y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Жауабы: $y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$. ■

Анықтама. *$y' = f(x; y)$ теңдеуінің $y(x_0) = y_0$ теңдігін қанағаттандыратын шешімін табу есебін **Коши есебі** деп атайды.*

$y(x_0) = y_0$ шартын Коши есебінің алғашқы мәні (бастапқы шарты) деп атайды.

2-мысал. $y' = xe^{-y}$, $y(1) = 0$ Коши есебін шешейік.

▲ Берілген теңдеудегі айнымалыларды ажыратамыз:

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = xdx \Rightarrow e^y dy = xdx.$$

Енді теңдеудің екі жағын интегралдасақ,

$$\int e^y dy = \int xdx \Rightarrow e^y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

$y(1) = 0$ шартын қолдансақ, $0 = \ln(0{,}5 + C) \Rightarrow C = 0{,}5$.

Коши есебінің шешімі $y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$ түрінде жазылады. ■

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрін жазыңдар.
2. Қандай теңдеулерді айнымалысы ажыратылатын теңдеу деп атайды?
3. Айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеулерді қалай шешеді?

Есептер

А

8.21. Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің ішінен айнымалылары ажыратылатын теңдеулерді бөліп жазыңдар:

1) $y' = xy^2$; 2) $u' + x^2u = e^x$;

3) $y' = \dfrac{1}{x-1}$; 4) $y' = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$.

8.22. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулерді шешіңдер:

1) $y' = y$; 2) $y' = 2x$; 3) $y' = xy^2$; 4) $y' = e - x$.

8.23. Дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін айнымалыларды ажырату әдісімен табыңдар:

1) $\dfrac{dy}{dx} = xy$; 2) $\dfrac{dy}{dx} = x + yx$; 3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{y^2}$;

4) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-y}$; 5) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$; 6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x(x-1)}$.

8.24. Коши есебін айнымалыларды ажырату әдісімен шешіңдер:

1) $x\dfrac{dy}{dx} = y^2$, $x = 1$ болғанда $y = 10$;

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x}$, $y(1) = 2$;

3) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}\sin 2x$, $x = 0$ болғанда $y = 0$;

4) $\dfrac{dy}{dx} = x^2e^{-y}$, $x = 0$ болғанда $y = 10$.

Дифференциалдық теңдеулер қолданбалы есептерді шешуде жиі қолданылады. Оның бір мысалы — Ньютонның салқындау заңы. Салқындау процесінің математикалық моделі — айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеу.

Ньютонның салқындау заңы

Дене температурасының өзгеру жылдамдығы дене температурасы мен қоршаған орта температурасының айырымына тура пропорционал:

$T' = k(T - T_{\text{орта}})$ — Ньютонның салқындау заңы. Мұндағы $T_{\text{орта}}$ — қоршаған ортаның температурасы.

Практикалық тапсырма

8.25. Температурасы 20^0 С болатын бөлмеде шайдың температурасы 100^0 С-тан 90^0 С-қа 5 минутта суыды. Қанша уақытта шайдың температурасы 50^0 С-қа дейін суитынын анықтаңдар.

▲ Ньютонның салқындау заңы бойынша $T' = k(T - 20)$. Осы дифференциалдық теңдеуді айнымалыларды ажырату әдісімен шешеміз:

$$T' = k(T - 20) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - 20) \Rightarrow \frac{dT}{T-20} = kdt.$$

Теңдеудің екі жағын да интегралдаймыз:

$$\int \frac{dT}{T-20} = \int kdt \Rightarrow \ln|T - 20| = kt + C.$$

Бөлменің температурасы 20^0 С болғандықтан, шайдың температурасы одан төменге суымайды, сондықтан $T - 20 > 0$, $|T - 20| = T - 20$. Теңдіктің екі жағын да экспонентаға келтіреміз:

$$T - 20 = e^{kt + C} \Rightarrow T = 20 + e^{kt + C}.$$

Бұл — дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі.

Шайдың температурасы 100^0 С-тан 90^0 С-қа 5 минутта суыды, сондықтан $T(0) = 100$, $T(5) = 90$ шарттарын қолданып k, C мәндерін анықтаймыз:

$$T(0) = 100 \Rightarrow 20 + e^{k\cdot 0 + C} = 100 \Rightarrow e^C = 80 \Rightarrow C = \ln 80,$$

$$T(5) = 90 \Rightarrow 20 + e^{5k + \ln 80} = 90 \Rightarrow 80e^{5k} = 70.$$

$$e^{5k} = \frac{7}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{5}\ln\frac{7}{8}.$$

Сонымен, $k = \frac{1}{5}\ln\frac{7}{8} \approx -0{,}027$. $C = \ln 80 \approx 4{,}382$.

$$T = 20 + e^{-0{,}027t + 4{,}382}.$$

Қанша уақытта шайдың температурасы 50^0 С-қа дейін суитынын анықтайық:

$$20 + e^{-0{,}027t + 4{,}382} = 50 \Rightarrow e^{-0{,}027t + 4{,}382} = 30,$$

$$-0{,}027t + 4{,}382 = \ln 30 \approx 3{,}401,$$

$$t = \frac{3{,}401 - 4{,}382}{-0{,}027} = 36{,}3.$$

Жауабы: шай құйылған соң 36,3 минуттан кейін оның температурасы 50^0 С болады. ■

8.26. $T(t) = \alpha + Ae^{-kt}$ функциясы $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - \alpha)$, $k > 0$ (Ньютонның салқындау заңы) дифференциалдық теңдеуінің шешімі екенін көрсетіңдер. 90^0C температурадағы 1 кесе шай 25^0C температурадағы бөлмеге әкелінді. Осы процесті сипаттайтын Ньютонның салқындау заңын жазыңдар және α мен A шамасын анықтаңдар.

8.27. Қайнаған су 10 минутта 100°C-тан 60°C-қа дейін суиды. Қоршаған ортаның температурасы 20°C деп алып, судың температурасы қанша уақыттан соң 25°C болатынын табыңдар.

8.28. 20 м/с бастапқы жылдамдықпен қозғалған материялық нүкте жылдамдығының моделі $\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{v^2}{10}$ теңдеуімен берілген. Теңдеудің бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңдар. Жылдамдықтың бастапқы шамасынан 10%-ға азаюы үшін қанша уақыт керек?

8.29. $y = \dfrac{-2}{x^2 + 2}$ функциясы $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$ дифференциалдық теңдеуінің $y(0) = -1$ шартын қанағаттандыратын шешімі болатынын көрсетіңдер.

B

8.30. Материялық нүктенің сұйық ішіндегі қозғалысы $\dfrac{dv}{dt} = -0{,}2\,(v + v^2)$ дифференциалдық теңдеуімен сипатталады. Осы теңдеудің $v(0) = 40$ шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңдар.

8.31. Дифференциалдық теңдеулерді шешіңдер:

1) $(1 + x^2)\, yy' = (1 + y^2)$; 2) $y' = xye^{x^2} \ln y$;

3) $y'\mathrm{tg}x = y + 1$; 4) $y'\sin x = (1 - y)\cos x$.

8.32. Коши есебін шешіңдер:

1) $y' + xy = x$, $y(0) = 2$;

2) $yy'\sqrt{1 + x^2} - x\sqrt{1 + y^2} = 0$, $y(0) = -2$;

3) $(1 + e^x)\, yy' = e^x$, $y(0) = 2$.

Практикалық тапсырмалар (8.33–8.34):

8.33. Ыдыстың төменгі жағындағы тесіктен су ағып жатыр. Су көлемі азайған сайын деңгейі де өзгеруде. $4\dfrac{dh}{dt} = -\sqrt{20}h$ дифференциалдық теңдеуі — су деңгейі өзгерісінің математикалық моделі, мұндағы t минутпен, h сантиметрмен өлшенеді. Судың бастапқы деңгейі 81 см. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңдар. Судың толығымен ағып кетуіне қанша уақыт керек? (Су деңгейі 0,05 см болғанда оны толығымен ағып кетті деп есептеңдер).

▲ Дифференциалдық теңдеудің айнымаларын ажыратамыз: $4\dfrac{dh}{dt} = -\sqrt{20}h \Rightarrow$

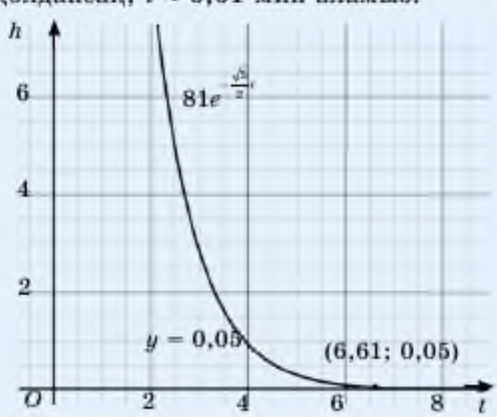
$\Rightarrow 4\dfrac{dh}{h} = -\sqrt{20}dt$;

$4\displaystyle\int \frac{dh}{h} = -\sqrt{20}\int dt \Rightarrow 4\ln h = -\sqrt{20}t + C$;

$\ln h = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}t + C$; $h = Ce^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}$. Бұл — жалпы шешім. Судың бастапқы деңгейі 81 см. Сол себепті

$$h(0) = 81 \Rightarrow 81 = Ce^{-\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 0} \Rightarrow C = 81.$$

Демек, $h = 81e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}$. Бұл — дербес шешім. Су деңгейінің биіктігі 0,05 см болғанда су толығымен ағып кетті деп есептейміз. $0{,}05 = 81e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}$ теңдеуінен, инженерлік калькуляторды қолдансақ, $t \approx 6{,}61$ мин аламыз.



■

8.34. Қызған тастың бастапқы температурасы 100° С. Оны 20° С температурадағы суға салды. Температура өзгерісінің математикалық моделі $\frac{dT}{dt} = -0,5(T - 20)$ дифференциалдық теңдеуімен өрнектеледі, мұндағы t минутпен берілген уақыт. 1) Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін; 2) бастапқы шарттарды қолданып дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табыңдар; 3) қанша уақыттан соң тастың температурасы 50° С болатынын анықтаңдар.

8.35. Әр нүктесіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті жанасу нүктесінің ординатасының квадратына тең және $A(-2;1)$ нүктесі арқылы өтетін қисықтың теңдеуін жазыңдар.

Практикалық тапсырма

8.36. Егеуқұйрықтың дүниеге келгендегі салмағы 30 г. Ол 3 айда ересек егеуқұйрыққа айналады. Оның салмағының өсуі $\frac{dm}{dt} = 120(t - 3)^2$ дифференциалдық теңдеуімен сипатталады. Мұндағы m — егеуқұйрықтың массасы (граммен), t — уақыт (аймен). 1) Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңдар; 2) дербес шешімін анықтаңдар; 3) ересек егеуқұйрықтың салмағын табыңдар.

C

Практикалық тапсырма

8.37. Салмағы 80 кг парашютші тікұшақтан секірді. Тікұшақтан x метр қашықтықта төмен құлдырағанда оның жылдамдығы v м/с болды. Парашютшіге әрекет ететін күштер: ауырлық күші және амплитудасы kv^2-қа тең ауа кедергісі. Оның соңғы жылдамдығы 70 м/с. $v\frac{dv}{dx} = 9,8 - 0,002v^2$ дифференциалдық теңдеуі қозғалыстың математикалық моделі болатынын дәлелдеңдер.

8.38. Әр нүктесіне жүргізілген жанамасы жанасу нүктесі мен координаталар бас нүктесін қосатын кесіндіге перпендикуляр болатын қисықтың теңдеуін жазыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

8.39*. Есептеңдер:

1) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)(1-x)^2}$;

3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; 4) $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$;

5) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 6) $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

8.3. Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеулер

Тақырыпты оқып-үйрену барысында сендер:

- біртекті дифференциалдық теңдеудің анықтамасын білесіңдер;
- $ay'' + by' + cy = 0$ түріндегі, мұндағы a, b, c — тұрақтылар, екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің анықтамасын білесіңдер және оларды шеше аласыңдар;
- гармоникалық тербелістің теңдеуін құрып, оны шешуді үйренесіңдер;
- физикалық, қолданбалы есептерді шешкенде дифференциалдық теңдеулерді қолданасыңдар.

8.3.1. Екінші ретті сызықтық біртекті теңдеуді шешу

Анықтама. $ay'' + by' + cy = 0$ *түріндегі дифференциалдық теңдеуді* ***екінші ретті сызықтық біртекті*** *теңдеу* деп атайды, мұндағы a, b, c — коэффициенттер.

Егер $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары $ay'' + by' + cy = 0$ теңдеуінің шешімдері болса, кез келген C_1 және C_2 тұрақты сандары үшін $y = C_1 \cdot f(x) + C_2 \cdot g(x)$ функциясы да осы теңдеудің шешімі болады.

$ay'' + by' + cy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімінің құрамына екі C_1 және C_2 тұрақты шамалары енеді. Енді осы теңдеуді шешу жолын қарастырайық. Бұл теңдеудің шешімдерін $y = e^{\lambda x}$ көрсеткіштік функциясы түрінде іздестіру қажет. Өйткені оның барлық туындылары өзінен тек тұрақты көбейткіштерге ғана өзгешеленеді.

$$\left.\begin{array}{l} ay'' + by' + cy = 0, \\ y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(e^{\lambda x}\right)'' + b\left(e^{\lambda x}\right)' + ce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)e^{\lambda x} = 0\,.$$

Мұнда $e^{\lambda x} > 0$, сондықтан $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ болуы қажет. Енді осы $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ квадрат теңдеуін шешіп, теңдеудің дербес шешімдерін $y = e^{\lambda x}$ түрінде табуға болады.

Анықтама. *$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ теңдеуін $ay'' + by' + cy = 0$ екінші ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеуінің **сипаттамалық теңдеуі*** деп атайды.

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ — квадрат теңдеу. Квадрат теңдеудің дискриминантына байланысты үш түрлі шешімі бар.

1. $D = b^2 - 4ac > 0$. Теңдеудің әртүрлі екі нақты түбірлері бар: λ_1 және λ_2. Онда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің екі түрлі дербес шешімі бар: $y = e^{\lambda_1 x}$ және $y = e^{\lambda_2 x}$. Сондықтан теңдеудің жалпы шешімі былай жазылады: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

2. $D = b^2 - 4ac = 0$. Сипаттамалық теңдеудің өзара тең екі нақты түбірі бар деп есептеледі: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Бұл жағдайда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің екі дербес шешімі $y = e^{\lambda x}$ және $y = e^{\lambda x}$ түрінде болып, оның жалпы шешімі былай жазылады:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

немесе

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}.$$

3. $D = b^2 - 4ac < 0$. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері өзара түйіндес комплекс сандар: $\lambda_1 = m + in$ және $\lambda_2 = m - in$. Бұл жағдайда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің екі дербес шешімі $y = e^{mx}\cos nx$ және $y = e^{mx}\sin nx$ түрінде болып, оның жалпы шешімі былай жазылады:

$$y = C_1 e^{mx}\cos nx + C_2 e^{mx}\sin nx,$$

немесе

$$y = e^{mx}(C_1\cos nx + C_2\sin nx).$$

Ескерту. Мұнда комплекс сандардың көрсеткіштік және тригонометриялық түрлеріне сүйендік:

$$e^{(m+ni)x} = e^{mx}(\cos nx + i\cdot\sin nx).$$

➤ **Қосымша электрондық ресурстар**

https://www.youtube.com/watch?v=QnSva-VNg_U

1-мысал. Екінші ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеулерді шешу керек:

1) $y'' + 5y' + 6y = 0$; 2) $3y'' - y' = 0$ және $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;
3) $y'' + 6y' + 34y = 0$.

▲ 1) $y'' + 5y' + 6y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің сипаттамалық теңдеуін жазсақ, $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ квадрат теңдеуін аламыз. Оның түбірлері: $\lambda_1 = -3$ және $\lambda_2 = -2$. Сондықтан $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$ функциясы — теңдеудің жалпы шешімі.

2) $3y'' - y' = 0$ және $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ дифференциалдық теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі мына квадрат теңдеу:

$$3\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ және } \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Сондықтан $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{\frac{1}{3}x} = C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}x}$ функциясы — теңдеудің жалпы шешімі.

Енді $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімді анықтайық. Ол үшін жалпы шешімге берілген шамаларды қойып, C_1 мен C_2 тұрақтыларын анықтау қажет:

$$y = C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow y' = 0 + C_2\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} = \frac{C_2}{3}e^{\frac{1}{3}x};$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}\cdot 0} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0;$$

$y'(0) = 3 \Rightarrow \frac{C_2}{3}e^{\frac{1}{3}\cdot 0} = 3 \Rightarrow C_2 = 9 \Rightarrow C_1 = -9$. Бізге қажет дербес шешім былай жазылады: $y = -9 + 9e^{\frac{1}{3}x}$.

3) $y'' + 6y' + 34y = 0$ теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі: $\lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0$. Дискриминанты теріс сан болғандықтан, теңдеудің түбірлері комплекс сандар: $\lambda_1 = -3 + 5i$ және $\lambda_2 = -3 - 5i$. Сондықтан $y = C_1e^{-3x}\cos 5x + C_2e^{-3x}\sin 5x$ функциясы — теңдеудің жалпы шешімі. ■

8.3.2. Гармоникалық тербелістің математикалық моделі болатын дифференциалдық теңдеу

2-мысал.

$$y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

функциясы тұрақты C_1 мен C_2-нің кез келген мәндерінде $y'' + \omega^2\cdot y = 0$ теңдеуінің шешімі болатынын көрсетелік және бұл теңдеудің $y(0) = a$, $y'(0) = b$ жағдайындағы дербес шешімдерін анықтайық.

▲ $y' = -C_1 \cdot \omega \cdot \sin\omega t + C_2 \cdot \omega \cdot \cos\omega t;$

$$y'' = -C_1\omega^2 \cdot \cos\omega t - C_2\omega^2 \cdot \sin\omega t = -\omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t)$$

мәндерін $y'' + \omega^2 y = 0$ теңдеуіне қойып,

$$-\omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + \omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) = 0$$

тепе-теңдігін аламыз. $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ функциясы кез келген C_1 мен C_2 үшін $y'' + \omega^2 y = 0$ теңдеуінің шешімі болады. Енді теңдеудің дербес шешімін анықтайық. $t = 0$ болғанда:

$$y(0) = C_1\cos0 + C_2\sin0 = C_1,\ y(0) = a \Rightarrow C_1 = a;$$

$$y'(0) = -C_1\omega\sin0 + C_2\omega\cos0 = C_2\omega,\ y'(0) = b \Rightarrow C_2 = \frac{b}{\omega}.$$

Сондықтан теңдеудің дербес шешімі мына түрде жазылады:

$$y = a \cdot \cos\omega t + \frac{b}{\omega} \cdot \sin\omega t.$$ ■

$y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ теңдеуінің $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ жалпы шешімін $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ түрінде жазуға болады. Шынында да, қосымша бұрыш әдісін қолдансақ,

$$y = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cdot \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\omega t\right).$$

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $\alpha = \arcsin\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ белгілеулерін енгізсек, екі бұрыштың қосындысының синусы формуласы бойынша $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ теңдігін аламыз. Осындай заңдылыққа бағынатын қозғалысты *гармоникалық тербеліс* деп атайды. Мұндағы A — тербелістің *амплитудасы*, ω — *жиілігі*, α — *бастапқы фазасы*.

1. Біртекті сызықты дифференциалдық теңдеудің анықтамасын жазыңдар.
2. Коэффициенті тұрақты екінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулерді қалай шешеді?
3. Сипаттамалық теңдеудің шешімдері екінші ретті біртекті сызықты теңдеудің жалпы шешімдеріне қалай әсер етеді?
4. Гармоникалық тербелісті қалай түсінесіңдер? Оның негізгі сипаттамаларын атаңдар.

Есептер

А

8.40. Екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің сипаттамалық теңдеуін жазыңдар және оның түбірін табыңдар:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$;
2) $6y'' + 5y' + y = 0$;
3) $2y'' + y' - y = 0$;
4) $y'' + y' - 5y = 0$;
5) $y'' - 4y = 0$;
6) $y'' - 3y' = 0$.

8.41. Көрсетілген функциялар сәйкес теңдеулердің жалпы шешімі болатынын тексеріңдер:

1) $y = C_1 \cdot \cos 2t + C_2 \cdot \sin 2t$, $y'' + 4y = 0$;
2) $y = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{-3x}$, $y''' - 9y' = 0$.

8.42. Дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін және берілген шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімдерін анықтаңдар:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $x = 0$ болғанда $y = 1$ және $y' = 0$;
2) $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 0$ және $y(0)' = 1$;
3) $y'' - 5y' = 0$, $x = 0$ болғанда $y = 0$ және $y' = 4$;
4) $v'' - v = 0$, $v(-1) = -1$ және $v(1) = 1$.

8.43. Гармоникалық тербелістің амплитудасын, жиілігін және алғашқы фазасын табыңдар:

1) $y = \cos 2x - \sin 2x$;
2) $y = 3\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$;
3) $y = \cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x$;
4) $y = -3\sin\frac{x}{3} + 4\cos\frac{x}{3}$.

8.44. Берілген дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін анықтаңдар:

1) $y'' - 2y' + y = 0$;
2) $9y'' - 12y' + 4y = 0$;
3) $4y'' + 4y' + y = 0$;
4) $y'' + 8y' + 16y = 0$;
5) $9y'' - 6y' + y = 0$;
6) $y'' + 10y' + 25x = 0$.

8.45. Жалпы шешімі бойынша дифференциалдық бірінші ретті теңдеу құрастырыңдар:

1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$; 2) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-x}$.

8.46. Дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдері мен берілген шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімдерін анықтаңдар:

1) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $x = 0$ болғанда $y = 1$ және $y' = 0$;
2) $4y'' + 4y' + y = 0$; $y(0) = 4$ және $y(2) = 0$;
3) $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 1$ және $y'(0) = 0$;
4) $y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = 0$ және $y(1) = 2$;
5) $y'' + 2ky' + k^2y = 0$; $y(0) = 0$ және $y'(0) = 2$.

8.47. Алғашқы фазалары нөл және жиіліктері өзара тең екі гармоникалық тербелістің қосындысы да гармоникалық тербеліс болатынын көрсетіңдер.

8.48. Дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін анықтаңдар:

1) $y'' - 4y' + 5y = 0$;
2) $y'' - 2y' + 5y = 0$;
3) $y'' + 2y' + 4y = 0$;
4) $4y'' + 4y' + 5y = 0$;
5) $y'' + 3y' + 6y = 0$;
6) $y'' - 4y' + 8y = 0$.

B

8.49. $x(t)$ функциясы үшін Коши есебін шешіңдер:

1) $x'' + 9x = 0$; $t = 0$ болғанда $x = 0$ және $x' = 1$;
2) $x'' + 4x = 0$; $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ және $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
3) $x'' + 12x = 0$; $x(0) = 0$ және $x(1) = 3$.

C

8.50. $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ функциясы $y'' + \omega^2 y = 0$ теңдеуінің шешімі болатынын көрсетіңдер. Бұл 2-мысалға қайшы келмей ме? Жауаптарыңды негіздеңдер.

8.51. Дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін анықтаңдар:
1) $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$ және $y'(0) = 2$;
2) $y'' - 3y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$ және $y'(0) = 0$;
3) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$ және $y'(0) = 0$.

Қайталауға арналған жаттығулар

8.52*. Есептеңдер:
1) $\int \sin^4 x dx$; 2) $\int \cos^3 x dx$; 3) $\int x^2 e^{-2x} dx$.

8.53. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ функциясының графигі ординаталар өсін $y = 2$ нүктесінде қиып өтетін алғашқы функциясын табыңдар.

«ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР» бөлімінің қорытындысы

Дифференциалдық теңдеулер деп құрамында тәуелсіз айнымалы, белгісіз функция мен оның туындылары кездесетін теңдеулерді айтады. Дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция туындылары ретінің ең үлкенін осы *теңдеудің реті* деп атайды. Дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция мен оның туындыларының орнына қойғанда бұл теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын функцияларды *дифференциалдық теңдеудің шешімі* деп атайды. Дифференциалдық теңдеу шешімінің графигі осы теңдеудің *интегралдық қисығы* деп аталады. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімдеріндегі тұрақты шама C-ға белгілі бір сан мән беру арқылы алынатын шешім осы теңдеудің *дербес шешімі* деп аталады.

$y' = f(x) \cdot g(y)$ түріндегі дифференциалдық теңдеулерді айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті *дифференциалдық теңдеу* деп атайды.

$y' = f(x;\ y)$ теңдеуінің $y(x_0) = y_0$ теңдігін қанағаттандыратын шешімін табу есебін *Коши есебі* деп атайды. $y(x_0) = y_0$ шартын Коши есебінің алғашқы мәні деп атайды.

$$T' = k(T - T_{\text{орта}})$$ — Ньютонның салқындау заңы.

$ay'' + by' + cy = 0$ түріндегі дифференциалдық теңдеуді екінші ретті *сызықтық біртекті теңдеу* деп атайды, мұндағы a, b, c — коэффициенттер.

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ теңдеуін $ay'' + by' + cy = 0$ екінші ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеуінің *сипаттамалық теңдеуі* деп атайды.

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ — квадрат теңдеу. Квадрат теңдеудің дискриминантына байланысты үш түрлі шешімі болады:

1. Егер $D = b^2 - 4ac > 0$ болса, сипаттамалық теңдеудің әртүрлі екі нақты түбірі бар: λ_1 және λ_2. Онда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің екі түрлі дербес шешімі бар: $y = e^{\lambda_1 x}$ және $y = e^{\lambda_2 x}$. Сондықтан теңдеудің жалпы шешімі былай жазылады:

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}.$$

2. Егер $D = b^2 - 4ac = 0$ болса, сипаттамалық теңдеудің өзара тең екі нақты түбірі бар деп есептеледі: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Бұл жағдайда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің екі түрлі дербес шешімі $y = e^{\lambda x}$ және $y = xe^{\lambda x}$ түрінде, ал оның жалпы шешімі былай жазылады:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

3. Егер $D = b^2 - 4ac = 0$ болса, сипаттамалық теңдеудің түбірлері өзара түйіндес комплекс сандар: $\lambda_1 = m + in$ және $\lambda_2 = m - in$.

Бұл жағдайда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің екі дербес шешімі $y = e^{nx}\cos nx$ және $y = e^{nx}\sin nx$ түрінде, ал оның жалпы шешімі былай жазылады:

$$y = C_1 e^{mx}\cos nx + C_2 e^{mx}\sin nx.$$

$y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ функциясы тұрақты C_1 мен C_2-нің кез келген мәндерінде $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ теңдеуінің шешімі болады.

$y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ заңдылығымен берілген қозғалысты *гармоникалық тербеліс* деп атайды. Мұндағы A — тербелістің амплитудасы, ω — жиілігі, α — бастапқы фазасы.

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Айнымалыларды ажырату (бөлу)	Разделение переменных	Separation of variables
2	Бірінші (екінші) ретті дифференциалдық теңдеу	Дифференциальное уравнение первого (второго) порядка	First (second) order differential equation
3	Біртекті функция	Однородная функция	Homogenous function
4	Гармоникалық тербеліс	Гармоническое колебание	Harmonic motion
5	Ньютонның салқындау заңы	Закон охлаждения Ньютона	Newton's low of cooling
6	Сипаттамалық теңдеу	Характеристическое уравнение	Auxiliary equation

IX бөлім. ОРТА МЕКТЕП КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕР

Сендер орта мектептің алгебра және математикалық анализ бағдарламасын толық аяқтадыңдар. Білімді пысықтау мақсатында қайталау есептері ұсынылады.

9.1. Арифметика. Нақты сандар

9.1.1. Натурал және бүтін сандар

9.1. $5431a$ саны 1) 2-ге; 2) 3-ке; 3) 4-ке; 4) 5-ке; 5) 6-ға; 6) 9-ға; 7) 10-ға; 8) 11-ге еселік болуы үшін a-ның орнына қандай цифр жазу керек?

9.2. Бүтін санның 1) 18-ге; 2) 25-ке бөлінгіштік белгілерін айтыңдар.

9.3. Егер $a > c$ болса, $\overline{abc} - \overline{cba}$ саны 9-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

9.4. Әрбір натурал n үшін 1) $n^4 - n^2$ саны 12-ге; 2) $n^9 - n^3$ саны 504-ке; 3) $5^n - 5$ саны 20-ға; 4) $7^n - 7$ саны 42-ге бөлінетінін дәлелдеңдер.

9.5. Тізбектес орналасқан төрт натурал санның көбейтіндісі 24-ке бөлінетінін дәлелдеңдер.

9.6. Натурал санның кубы мен сол санның айырымы 6-ға бөлінетінін дәлелдеңдер.

9.7. Тақ санның квадратын 1-ге кеміткенде 8-ге еселік сан шығатынын дәлелдеңдер.

9.8. Егер 3-тен үлкен үш жай сан арифметикалық прогрессияның тізбектес мүшелері болса, бұл прогрессияның айырымы 6-ға еселік болатынын дәлелдеңдер.

9.9. 1) $a : b = 4 : 7$ және $(a, b) = 8$;
2) $[a, b] = 124$ және $(a, b) = 31$;
3) $ab = 375$ және $[a, b] = 75$ деп алып, a және b сандарын анықтаңдар.
(a, b) — a және b сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші.
$[a, b]$ — a және b сандарының ең кіші ортақ еселігі.

9.1.2. Рационал және иррационал сандар. Квадрат түбірлер

Есептеңдер **(9.10—9.12):**

9.10. 1) $15\frac{6}{7}-12\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)$; 2) $\left(2,125\cdot1\frac{15}{17}-1\frac{7}{12}\right):7,25$;

3) $\frac{12,8:0,64+3,05:0,05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1}$; 4) $\frac{203,4:9-(5,39-7,39)}{\frac{3}{14}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}$.

9.11. 1) $\left(1\frac{1}{3}\cdot0,27-3\frac{1}{3}\cdot0,15\right)-1500\cdot(-0,1)^{0}$;

2) $\left(\frac{6}{64}\cdot5\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}+(-1)^{5}$;

3) $(0,3)^{-3}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot\frac{3}{4}+(-1)^{6}\cdot6$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}+\left(-\frac{6}{46}\right)^{0}\cdot\frac{1}{8}-0,25^{-2}\cdot16$.

9.12. 1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^{2}}+1$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^{2}}-3$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^{2}}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^{2}}$; 4) $\left(\sqrt{5}-3\right)\cdot\sqrt{14+6\sqrt{5}}$;

5) $\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; 6) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

7) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

9.13. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\sqrt{0,63}$ және $\sqrt{0,83}$; 2) $\sqrt{0,63}$ және $\sqrt[3]{0,63}$;

3) $\sqrt{1,63}$ және $\sqrt[3]{1,63}$; 4) $\sqrt{2}$ және $\sqrt[3]{3}$.

9.14. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$ сандарының иррационал болатынын көрсетіңдер.

9.15. 1) $y=\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x^{2}}$; $y=\left(\sqrt{x}\right)^{2}$ функцияларының графиктерін салыңдар.

9.2. Алгебралық өрнектерді тепе-тең түрлендіру

9.2.1. Қысқаша көбейту формулалары

9.16. Төмендегі формулаларды дәлелдеңдер:
1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
7) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
8) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
9) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
10) $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$;
11) $a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + \dots - a + 1)$;
12) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$.

Өрнекті көбейткіштерге жіктеңдер **(9.17—9.18)**:

9.17. 1) $9(x + 5)^2 - (x - 7)^2$; 2) $49(y - 4)^2 - 9(y + 2)^2$;
3) $x^3 + y^3 + 2xy(x + y)$; 4) $5a^2 - 5 - 4(a - 1)^2$;
5) $2(x + y)^2 + x^2 - y^2$; 6) $a^2 + ab^3 - a^3b - b^4$;
7) $(x - y + 4)^2 - x^2 + 2xy - y^2$; 8) $(a - b)^3 + (a + b)^3$;
9) $(x + 2y)^3 + (2x - y)^3$.

9.18. 1) $5xy^3 + 30x^2z^2 - 6x^3yz - 25y^2z$;
2) $15m^3n^2p - 35p^2nq^3 + 25mn^3q^2 - 21m^2p^3q$;
3) $32c^5 - 3^5$; 4) $(4a)^5 + (2b)^5$; 5) $(2x)^6 + (3y)^6$.

9.19. Өрнекті екімүше түрінде жазыңдар:
1) $(2x + 1)(16x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 2x + 1)$;
2) $\left(\frac{2}{3}x - 3ab\right)\cdot\left(\frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2ab + 6xa^2b^2 + 27a^3b^3\right)$.

9.20. 1) $143^{15} - 81^{15}$ саны 62-ге; 2) $12^{31} + 28^{31}$ саны 80-ге еселік болатынын көрсетіңдер.

9.2.2. Алгебралық өрнекті түрлендіру

9.21—9.28-есептерде берілген өрнекті ықшамдаңдар:

9.21. $\left(\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{1}{x+y}\left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)\right) : \frac{x - y}{x}$.

9.22. $\left(\dfrac{m^2-n^2}{m^2n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)-\left(\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)\cdot\dfrac{p^2+n^2}{p^2n^2}\right):\dfrac{p^2+m^2}{p^2m^2}$.

9.23. $\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)\cdot\left(\dfrac{a(b-a)}{a^2-ab+b^2}+1\right)$.

9.24. $\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\dfrac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}\right)$.

9.25. $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2-c^2+2bc}$.

9.26. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}$.

9.27. $\dfrac{(x^2-y^2-z^2-2yz)(x+y-z)}{(x+y+z)(x^2-y^2+z^2-2xz)}$.

9.28. $\dfrac{a\sqrt{a}+9a+27\sqrt{a}+27}{a+6\sqrt{a}+9}$.

9.3. Сан тізбегі және прогрессиялар. Комбинаторика

9.3.1. Сан тізбегі. Арифметикалық және геометриялық прогрессиялар

9.29. Тізбектің алғашқы бес мүшесін жазыңдар:

1) $x_n = 2n + 3$;
2) $x_n = (-1)^n2$;
3) $x_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$;
4) $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

9.30. Тізбектің жалпы мүшесін формуламен жазыңдар:

1) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \ldots$;
2) 3, 6, 12, 24, 48, ...;
3) $1, \dfrac{2}{101}, \dfrac{4}{201}, \dfrac{8}{301}, \ldots$;
4) $\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, -\dfrac{16}{81}, \ldots$.

9.31. Егер $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ тізбегі айырымы d-ға тең арифметикалық прогрессия болса, онда $a_n = a_1 + (n-1)d$, $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, $S_n = \dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$ формулаларын дәлелдеңдер. Мұндағы S_n — арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы.

9.32. b_1, b_2, ... b_n, ... тізбегі еселігі q-ге тең геометриялық прогрессия болса, $b_n = b_1q^{n-1}$, $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формулаларын дәлелдеңдер. Мұндағы S_n — геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы.

9.33. b_1, b_2, ...b_n, ... шексіз кемімелі геометриялық прогрессия (еселігі $|q|<1$) болса, $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \frac{b_1}{1-q}$ формуласын дәлелдеңдер.

9.34. Арифметикалық прогрессияның алғашқы 10 мүшесінің қосындысын табыңдар:

1) $a_2 = 7$; $a_4 = 11$; 2) $a_3 = 5$; $a_8 = 13$; 3) $a_5 + a_6 = 11$.

9.35. a_1, a_2, ...a_n — арифметикалық прогрессиясының тізбектес мүшелері, $a_1 = a$, $a_n = b$ ($a > 0$, $b > 0$ $a \neq b$) болса, $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$ қосындысын a, b және n арқылы өрнектеңдер.

9.36. –7; 11; 29; ... және –3; 11; 25; ... арифметикалық прогрессияларының жалпы мүшелерін формуламен жазыңдар.

9.37. Геометриялық прогрессияның алғашқы мүшесі мен еселігін анықтаңдар:

1) $b_2 = 7$; $b_3 = -1$; 2) $b_3 = 2$; $b_5 = 8$;

3) $b_{12} = -131$; $b_{185} = 243$; 4) $b_2 + b_3 = 7$, $b_3 + b_4 = 49$.

9.38. 5 және 25 сандарының арасына осы сандармен бірге геометриялық прогрессия құрайтындай етіп, жеті мүше орналастырыңдар.

9.39. a-ның қандай мәндерінде $x^2 - 5x + 4 = 0$ және $2x - a = 0$ теңдеулерінің түбірлері геометриялық прогрессияның алғашқы үш мүшесін анықтайды?

9.40. Егер b_1, b_2, ... b_n, ... шексіз кемімелі геометриялық прогрессия болса,

1) $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$; 2) $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots$; 3) $b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots$ қатарларының қосындыларын b_1 мен q арқылы өрнектеңдер.

9.41. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі 0,3-ке, қосындысы 0,9-ға тең. Прогрессияның еселігін табыңдар.

9.42. Қатардың қосындысын табыңдар:

1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\dots$; 2) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\dots$.

9.43. Периодты бөлшекті жай бөлшекке айналдырыңдар:

1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) 3,(31); 4) 2,1(4).

9.44. Біріншісі 1-ге тең үш сан геометриялық прогрессияның тізбектес үш мүшесі болып табылады. Егер бұл үш санның біреуін екі еселеп берілген ретімен алсақ, онда арифметикалық прогрессия шығады. Осы сандарды табыңдар.

9.45. Арифметикалық прогрессияның 8-мүшесі 60-қа тең. Егер a_1, a_7 және a_{25} мүшелері геометриялық прогрессия құрайтын болса, осы прогрессияның еселігін табыңдар.

9.3.2. Комбинаторика

9.46. n(A) арқылы A жиыны элементтерінің санын белгілейді. Элементтерінің саны санаулы кез келген A, B және C жиындары үшін:

1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;

2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ теңдіктерінің орындалатынын дәлелдеңдер.

9.47. 1) Барлық n-нен k бойынша алынған қайталанбалы орналастырулар саны $\widetilde{A}_n^k = n^k$ формуласымен;

2) барлық n-нен k-бойынша алынған қайталанбайтын орналастырулар саны $A_k^n = n(n-1)\dots(n-k+1)$ немесе $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ формуласымен;

3) n элементтердің барлық алмастырулары саны $P_n = n!$ формуласымен;

4) барлық n-нен k бойынша алынған терулер саны (теру коэффициенттері) $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ формуласымен анықталатынын дәлелдеңдер.

9.48. Ньютон биномы, яғни $(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$ формуласы орындалатынын дәлелдеңдер.

9.49. Әрі 2-ге, әрі 7-ге бөлінетін неше екі таңбалы сан бар?

9.50. Екі оқушыға 8 оқулықты неше тәсілмен 1) тең үлестіріп; 2) үлестіріп беруге болады?

9.51. 1, 2, 3, 4, 5 цифрларын пайдаланып, неше 1) үш таңбалы; 2) цифрлары қайталанбайтын үш таңбалы сандар құрастыруға болады?

9.52. Егер $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ биномының жіктелуіндегі бірінші және үшінші қосылғыштар коэффициенттерінің қосындысы 46-ға тең болса, бұл жіктелудің x-і жоқ мүшесін табыңдар.

9.53. 1) $(1 + x + x^2)^3$; 2) $(1 + x^2 - x^3)^4$ көпмүшесіндегі x^5-тің коэффициентін анықтаңдар.

9.4. Алгебралық теңдеулер

9.4.1. Квадрат теңдеу. Виет теоремасы

9.54. Егер $k^2 - ac > 0$ болса, $ax^2 + 2kx + c = 0$ теңдеуінің түбірлері $x_{1/2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ формулаларымен анықталатынын дәлелдеңдер.

9.55. Виет теоремасын дәлелдеңдер.

9.56. Теңдеуді шешіп, квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеңдер:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; 2) $4x^2 - x - 14 = 0$;

3) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; 4) $7x^2 + x - 8 = 0$.

9.57. $a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = ax^2 + bx + c$ теңдігін дәлелдеңдер.

9.58. $a+b+c=0$ болса, $ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуінің түбірлері $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$ болатынын көрсетіңдер.

9.59. Егер $a-b+c=0$ болса, $ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуінің түбірлері $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a}$ болатынын көрсетіңдер.

9.60. a-ның қандай мәндерінде $(x^2 - a)(x^2 + 3ax + a) = 0$ теңдеуінің әртүрлі екі түбірі болады?

9.61. a-ның қандай мәндерінде $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - a) = 0$ теңдеуінің тура үш түбірі болады?

9.62. $3x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуінің түбірлерін таппай-ақ,
1) $x_1 + x_2$; 2) $x_1 x_2$;
3) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;
5) $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$; 6) $x_1^4x_2 + x_1x_2^4$; 7) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$
өрнектерінің мәндерін анықтаңдар.

9.63. Түбірлері бойынша квадрат теңдеу құрастырыңдар:
1) $x_1 = -3,\ x_2 = 5$; 2) $x_1 = x_2 = 7$;
3) $x_1 = 3a + 1,\ x_2 = 5a - 2$; 4) $x_1 = 6 - \sqrt{5}, x_2 = 6 + \sqrt{5}$;
5) $x_1 = \sqrt{7} - \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{7} + \sqrt{6}$.

9.64. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ xy = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ xy = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

9.4.2. Көпмүшелер және олардың түбірлері

9.65. Көпмүшені көпмүшеге қалдықпен бөліңдер:
1) $x^4 + x^2 + 1$-ді $x+5$-ке; 2) $x^7 - 1$-ді $x^3 + x + 1$-ге;
3) $x^6 - 64$-ті $x-3$-ке.

9.66. a-ның қандай мәнінде қалдық нөлге тең болады:
$(x^3 + 6x^2 + ax + 12) : (x + 4)$?

9.67. $f(x)$ көпмүшесін $x-a$ екімүшесіне бөлгенде $f(a)$-ға тең қалдық қалатынын дәлелдеңдер (Безу теоремасы).

9.68. α саны — $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ көпмүшесінің бүтін түбірі. a_n санының α-ға қалдықсыз бөлінетінін көрсетіңдер. Мұндағы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — бүтін сандар.

9.69. Көпмүшелердің бүтін түбірлерін тауып, оларды көбейткіштерге жіктеңдер:
1) $x^3 - 7x - 6$; 2) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;
3) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$; 4) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
5) $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 38x - 24$; 6) $x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 4$.

9.70. Әрбір натурал n саны үшін $n^5 - 5n^3 + 4n$ өрнегінің мәні 120-ға қалдықсыз бөлінетінін дәлелдеңдер.

Теңдеуді шешіңдер (**9.71—9.72**):

9.71. 1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $7x^4-x^2-6=0$;
3) $3x^4-5x^2+2=0$; 4) $(5x^2+x+1)^2-(5x^2+x+1)-2=0$;
5) $(3x^2-x-1)^2-18x^2+6x-1=0$.

9.72. 1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$; 2) $x^2+5x+8+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$;
3) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$;
4) $10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0$.

9.4.3. Рационал теңдеулер

9.73—9.82-есептерде берілген теңдеулерді шешіңдер.

9.73. 1) $\frac{3x+1}{5x-6}=0$; 2) $\frac{9x^2-1}{3x+1}=0$; 3) $\frac{5x+7}{49-25x^2}=0$.

9.74. 1) $\frac{x^2-3x}{x^2+7x-30}=\frac{5x^2-x-42}{x^2+7x-30}$; 2) $x^2+\frac{3x-1}{x+4}=16-\frac{1-3x}{4+x}$.

9.75. 1) $\frac{1}{3x+2}+\frac{3}{5x+6}=\frac{2}{7x+8}$; 2) $\frac{12}{x^2-9}+\frac{x}{x+3}=\frac{2}{x-3}$.

9.76. 1) $\frac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\frac{15x-10}{2x^2-5x+4}=6$; 2) $\frac{x^2+5x-1}{2x-1}+\frac{2x-1}{x^2+5x-1}=5,2$.

9.4.4. Иррационал теңдеулер

9.77. 1) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2$.

9.78. 1) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$;
2) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x+2\sqrt{x^2-16}$.

9.79. 1) $\sqrt{2x^2+5x+2}+\sqrt{2x^2+5x-9}=1$;
2) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}-\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$;
3) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$.

9.80. 1) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$;

2) $x\cdot\sqrt[3]{35-x^3}\cdot\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$.

9.81. 1) $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$;

2) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

9.82. 1) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt[3]{(1+x)^2}-\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+x}}=1$.

*9.4.5. Модуль таңбасы бар және параметрлі теңдеулер

9.83—9.86-есептерде берілген теңдеуді шешіңдер.

9.83. 1) $|x-2|+|x+4|=8$; 2) $|x-5|-|x-2|=-3$.

9.84. 1) $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$; 2) $\left|x^2-3x-2\right|=2$.

9.85. 1) $x|x|-\left|x^2+3x+3\right|+8=0$; 2) $(x-2)|x+3|=5\left|x^2-x+2\right|-20$.

9.86. 1) $||2x-8|-x|=7-x$; 2) $||2x-1|-5|+x=|6-x|$.

9.87. a параметрінің әрбір мәніне сәйкес теңдеуді шешіңдер:

1) $a(a-1)x=a$; 2) $x^2+ax+36=0$;

3) $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0$; 4) $\dfrac{x-a}{x-3}=0$;

5) $\dfrac{x^2-a^2}{x-3}=0$; 6) $\dfrac{x^2-a^2}{x+4}=0$.

9.88. a параметрінің әрбір мәніне сәйкес теңдеуді шешіңдер:

1) $|x+3|-a(x-1)=4$; 2) $3|x-2|-a|2x+3|=10{,}5$.

9.89. $x-a=2|2|x|-a^2|$ теңдеуінің әртүрлі үш түбірі болатындай етіп, a параметрінің барлық мәнін табыңдар.

9.90. $x|x+2a|+1=a$ теңдеуінің әртүрлі екі түбірі болатындай етіп, a параметрінің барлық мәнін табыңдар.

9.4.6. Теңдеулер жүйесі

9.91—9.93-есептерде берілген теңдеулер жүйесін шешіңдер.

9.91. 1) $\begin{cases} 3x+5y=11, \\ 2x-3y=17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 20x-15y=51, \\ 4x-3y=10,2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+5y=20, \\ 6x+10y=7. \end{cases}$

9.92. 1) $\begin{cases} x+2y=3, \\ x^2-3xy+5y^2=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+4y=12, \\ x^2+y^2=5,76; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x-12y=60, \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+5xy+7y^2=31. \end{cases}$

9.93. 1) $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ x^2+3xy+5y^2=47; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0, \\ x^2+3xy+5y^2=5. \end{cases}$

9.94. *a*-ның қандай мәндерінде:

$$\begin{cases} y^2+2y(2+x)+(x^2+2x)(4-x^2)=0, \\ y-ax-3a=0 \end{cases}$$

жүйесінің кем дегенде әртүрлі үш түбірі болады?

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**9.95—9.97**):

9.95. 1) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{15}, \\ x^2-y^2=16. \end{cases}$

9.96. 1) $\begin{cases} xy+x+y=7, \\ yz+y+z=-3, \\ xz+x+z=-5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy+xz=8, \\ yz+xy=9, \\ xz+yz=-7. \end{cases}$

9.97. 1) $\begin{cases} \sqrt{3x+y}+\sqrt{y-x}=7, \\ 2\sqrt{y-x}+\sqrt{4x+15}=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12, \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12. \end{cases}$

9.5. Алгебралық теңсіздіктер

*9.5.1. Теңсіздікті дәлелдеу

Теңсіздіктерді дәлелдеңдер (**9.98—9.99**):

9.98. 1) $(6u-1)(u+2)<(3u+4)(2u+1)$;

2) $(3v - 1)(2v + 1) > (2v - 1)(2 + 3v)$;

3) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$; 4) $a + \frac{1}{a} \geqslant 2, a > 0$.

9.99. 1) $\frac{a+b+c}{2} \geqslant \sqrt[3]{abc}$; 2) $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqslant 4, (x > 0, y > 0)$;

3) $a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}, (a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0)$;

4) $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geqslant 8abc$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ a + b + c = 1)$.

9.100. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы оның жарты периметрінен кем болатынын дәлелдеңдер.

9.101. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\frac{86}{87}$ және $\frac{87}{88}$; 2) $\sqrt{23} - \sqrt{11}$ және $\sqrt{22} - \sqrt{10}$;

3) $\frac{113}{112}$ және $\frac{112}{111}$; 4) $\sqrt{38} + \sqrt{20}$ және $\sqrt{37} + \sqrt{21}$.

9.102. Моторлы қайықтың тұнық суда 20 км, өзен ағысы бойымен 10 км және өзен ағысына қарсы 10 км жүрген жолына жұмсайтын уақыттарын салыстырыңдар.

9.5.2. Рационал теңсіздіктерді шешу. Интервалдар әдісі

9.103. Теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $17 - x > 10 - 6x$; 2) $30 + 5x \leqslant 18 - 17x$;
3) $6x - 34 \geqslant x + 1$; 4) $3u - 1 < 6u - 1$;
5) $5x^2 - 5x(x + 4) \geqslant 100$; 6) $p(p - 1) - p^2 > 12 - 6p$.

9.104. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} -3 < 2x - 3 < -1, \\ 1 - 4x < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0 < 1 - 3x < 1, \\ 3 - 4x < 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 3 \leqslant 0, \\ \frac{2x-5}{x-2} \geqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2 \leqslant 5x - 8, \\ \frac{2x-1}{2-x} < 4. \end{cases}$

9.105. Теңсіздіктерді интервалдар әдісімен шешіңдер:

1) $(2x + 7)(3x - 4)(x + 5) > 0$; 2) $(x - 6)(0{,}5x + 4)(5x + 10) < 0$.

Теңсіздікті шешіңдер **(9.106—9.109)**:

9.106. 1) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$; 2) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 3$;

3) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$; 4) $\frac{x-2}{x+2} \geqslant \frac{2x-3}{4x-1}$.

9.107. 1) $x^2 - 3x - 4 > 0$; 2) $x^2 - 5x - 60 \leqslant 0$; 3) $x^2 \geqslant 16$.

9.108. 1) $\frac{x+4}{x-2} \leqslant \frac{2}{x+1}$; 2) $\frac{1}{x^2+x} \leqslant \frac{1}{2x^2+2x+3}$.

9.109. 1) $(x^2-x)^2 - 8(x^2-x) + 12 \geqslant 0$; 2) $x^2 + (x+2)^2 < \frac{60}{x^2+2x+3}$.

9.5.3. Иррационал теңсіздіктер

9.110–9.116-есептерде берілген теңсіздіктерді шешіңдер.

9.110. 1) $\sqrt{x^2-3x+2} > 2-x$; 2) $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$;

3) $\sqrt{x^2-3x-10} < x-5$; 4) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 1$.

9.111. 1) $(x+1)\sqrt{9-x^2} \leqslant 0$; 2) $(x-1) + \sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$;

3) $x\sqrt{10-x^2} > x^2 - 6$; 4) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \leqslant 1$.

9.112. 1) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} > 1{,}5\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

2) $(12-x)\sqrt{\frac{12-x}{x-2}} + (x-2)\sqrt{\frac{x-2}{12-x}} < \frac{82}{3}$.

9.5.4. Модуль таңбасы бар және параметрлі теңсіздіктер

9.113. 1) $|x-1| + |x-4| \geqslant 5$; 2) $|x-2| + |x+5| \leqslant 7$.

9.114. 1) $\left|\frac{x^2-3}{x+3}\right| \leqslant 1$; 2) $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geqslant 1$.

9.115. 1) $|2x+3| \leqslant 4x$; 2) $x^2-|5x+6|>0$.

9.116. 1) $|x^2-7x+5| \leqslant 5$; 2) $|x^2-3x| \leqslant x$; 3) $|x^2-3x|>x$.

9.117. a-ның қандай мәнінде $x^2-3ax+1>0$ теңсіздігі кез келген x үшін орындалады?

9.118. a-ның қандай мәнінде $x=1$ саны $ax^2+(3a^2+1)x-3>0$ теңсіздігінің шешімі болады?

9.119. a-ның қандай мәнінде $x^2-3x-4<0$ теңсіздігінің әрбір шешімі $x^2-a^2<0$ теңсіздігінің шешімі болады?

9.120. a-ның қандай мәнінде $x^2-5x+40 \leqslant 0$ теңсіздігінің әрбір шешімі $x^2-a^2>0$ теңсіздігінің шешімі болады?

9.6. Тригонометрия

9.6.1. Негізгі формулалар

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha\neq\pi+\pi n, n\in Z;$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1, \alpha\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z;$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Қосу формулалары

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta\mp1}{\mathrm{ctg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta}.$$

Қосындыны көбейтіндіге түрлендіретін формулалар:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Көбейтіндіні қосындыға түрлендіретін формулалар

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

Қос аргументтің формулалары

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Жарты аргументтің формулалары

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Үш еселенген аргументтің формулалары

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Келтіру формулаларының кестесі

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$, $90^\circ-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$, $90^\circ+\alpha$	$\pi-\alpha$, $180^\circ-\alpha$	$\pi+\alpha$, $180^\circ+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$, $270^\circ-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$, $270^\circ+\alpha$	$2\pi-\alpha$, $360^\circ-\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

9.6.2. Тригонометриялық өрнектерді түрлендіру

9.121. 1) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\alpha = -2\sqrt{6}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

деп алып, α бұрышының қалған тригонометриялық функцияларын анықтаңдар.

9.122. a-ның қандай мәнінде $\frac{\pi}{6}$ саны

$3\sin 6x + 2\sin 5x + 5\cos 4x - 3\sin 3x + 2\cos 2x - \sin^2 x = a$ теңдеуінің түбірі болады?

9.123. Егер $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болса, онда бірлік шеңбердің бойынан

1) x, $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$; 2) $x + 2k\pi$, $k \in Z$;

3) $\pm x + 2k\pi$, $k \in Z$; 4) $x + k\pi$, $k \in Z$;

5) $(-1)^k + k\pi$, $k \in Z$ бұрыштарына сәйкес келетін нүктелерді табыңдар.

9.124. Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $1 + \sin(\pi - \varphi)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)$; 2) $1 - \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$;

3) $1 + \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}2\beta$; 4) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}2\alpha$.

9.125. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:
1) $(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = \mathrm{ctg}^2\alpha$;
2) $(1 + \mathrm{tg}^2\beta)(1 - \cos^2\beta) = \mathrm{tg}^2\beta$;
3) $\dfrac{\sin x + \cos x\,\mathrm{tg}x}{\cos x + \sin x\,\mathrm{ctg}x} = 2\mathrm{tg}x$;
4) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} - \dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y} = \cos 2y$.

126. Өрнектің мәні y-ке тәуелсіз болатынын көрсетіңдер:
1) $\cos(38^\circ + y)\cos(52^\circ - y) - \sin(38^\circ + y)\sin(52^\circ - y)$;
2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{10} - y\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{15} + y\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{10} - y\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{15} + y\right)$.

9.127—9.129-есептерде берілген өрнектерді ықшамдаңдар.

9.127. 1) $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$; 2) $\dfrac{\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x}{\cos x - 3\cos 2x + \cos 3x}$.

9.128. 1) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

9.129. 1) $\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} - 2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha} - \dfrac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)} - \mathrm{tg}\beta\cdot\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}\right)$;

3) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

9.130. $\cos\alpha = -\dfrac{9}{41}, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ деп алып, $\mathrm{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ мәнін табыңдар.

9.131. $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{4}{5}, 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ деп алып, $\sqrt{1-\cos\alpha} + \sqrt{1+\cos\alpha}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

9.132. $2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 1$ деп алып, $\cos 2\alpha$ мәнін табыңдар.

9.133. Есептеңдер:

1) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$; 2) $\cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ$.

9.6.3. Тригонометриялық теңдеулер

Негізгі формулалар:

$$\sin x = a,\ |a| < 1 \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = a,\ |a| < 1 \Rightarrow x = \pm\arccos a + 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, x = a \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = \mathrm{arctg}\, a + n\pi,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\, x = a \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = \mathrm{arcctg}\, a + n\pi,\ n \in Z.$$

$a = 0$, $a = 1$ және $a = -1$ болғандағы дербес жағдайларда

$$\sin x = 0, \Rightarrow x = n\pi,\ n \in Z;$$

$$\sin x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, x = 0 \Rightarrow x = n\pi,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\, x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z.$$

9.134—9.142-есептерде берілген теңдеулерді шешіңдер.

9.134. 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

9.135. 1) $2\sin x + 3\cos x = 0$; 2) $\sin^2 3x = \cos^2 3x$.

9.136. 1) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\sin x\right) = \frac{1}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\sin 2x\right) = 1$.

9.137. 1) $2\cos x = 1 + \cos 2x$; 2) $2\sin^2 2x = 3\cos^2 2x$.

9.138. 1) $\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$; 2) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

9.139. 1) $\sin x + \mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 2$; 2) $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\mathrm{tg}\, x$.

9.140. 1) $\cos x = \sqrt{3}\sin x + 2\cos 3x$; 2) $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.

9.141. 1) $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}$; 2) $\sqrt{3}\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{3}$.

9.142. 1) $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$;
2) $4 - \sin 2x = 4(\cos x - \sin x)$.

9.143. $\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 3x$ теңдеуінің $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ аралығында жататын барлық түбірлерін табыңдар.

9.144. $\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$ теңдеуін a параметрінің әрбір нақты мәндері үшін шешіңдер.

9.6.4. Кері тригонометриялық теңдеулер

Негізгі формулалар

$$\arcsin x = \alpha,\ |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\alpha$$

$$\arccos x = \alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi \Rightarrow x = \cos\alpha$$

$$\operatorname{arctg} x = \alpha,\ |\alpha| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{arcctg} x = \alpha,\ 0 < \alpha < \pi \Rightarrow x = \operatorname{ctg}\alpha$$

9.145—9.149-есептерде берілген теңдеулерді шешіңдер.

9.145. 1) $\arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(1 - 2x) = \frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(2 - 3x) = -\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arcctg}(3x + 2) = \frac{\pi}{4}$.

9.146. 1) $\operatorname{arctg}^2(3x + 2) + 2\operatorname{arctg}(3x + 2) = 0$;

2) $2\arcsin x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9\arcsin x}$.

9.147. 1) $\arccos\frac{x}{2} = 2\operatorname{arcctg}(x - 1)$; 2) $\arccos x - \pi = \arccos\frac{4x}{3}$.

9.148. 1) $\arcsin x - \arccos\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos x - \arcsin x = \arccos\sqrt{3x}$.

9.149. 1) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

9.150. $2\arccos x = a + \dfrac{a^2}{\arccos x}$ теңдеуін a параметрінің әрбір нақты мәні үшін шешіңдер.

9.6.5. Тригонометриялық теңсіздіктер

Негізгі формулалар

$\sin x > a,\ |a| < 1 \Rightarrow x \in (\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n),\ n \in Z;$

$\sin x < a,\ |a| < 1 \Rightarrow x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n;\ \arcsin a + 2\pi n),\ n \in Z;$

$\cos x > a,\ |a| < 1 \Rightarrow x \in (-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n),\ n \in Z;$

$\cos x < a,\ |a| < 1 \Rightarrow x \in (\arccos a + 2\pi n;\ \pi - \arccos a + 2\pi n),\ n \in Z;$

$\mathrm{tg}\,x > a,\ a \in R \Rightarrow x \in (\mathrm{arctg}\,a + \pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n),\ n \in Z;$

$\mathrm{tg}\,x < a,\ a \in R \Rightarrow x \in (-\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \mathrm{arctg}\,a + \pi n),\ n \in Z;$

$\mathrm{ctg}\,x > a,\ a \in R \Rightarrow x \in (\pi n;\ \mathrm{arcctg}\,a + \pi n),\ n \in Z;$

$\mathrm{ctg}\,x < a,\ a \in R \Rightarrow x \in (\mathrm{arcctg}\,a + \pi n;\ \pi + \pi n),\ n \in Z.$

9.151—9.154-есептерде берілген теңсіздіктерді шешіңдер.

9.151. 1) $\sin 2x < \dfrac{1}{2}$; 2) $\cos\dfrac{x}{3} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

9.152. 1) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) \geqslant 1$; 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqslant 1$.

9.153. 1) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) > 1$; 2) $4\sin 2x\cos 2x \geqslant \sqrt{2}$.

9.154. 1) $\sin x \geqslant \cos x$; 2) $\cos^2 x + \sin x\cos x \geqslant 1$;
3) $1 - \sin x + \cos x < 0$; 4) $2\cos 2x + \sin 2x > \mathrm{tg}\,x$.

9.155. Теңсіздіктің көрсетілген аралықтағы шешімдерін табыңдар:
1) $\cos\dfrac{x}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$; 2) $\sin 2x < \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x \in [0; \pi]$.

9.156. Функцияның анықталу облысын табыңдар:
1) $y = \arcsin(1 + \mathrm{tg}^2\pi x)$; 2) $y = \sqrt{\mathrm{tg}\,x - \sin x}$.

9.157. Теңсіздіктерді шешіңдер:

1) $\sin 3x > 4\sin x\cos 2x$; 2) $5 + 2\cos 2x \leqslant 3|2\sin x - 1|$.

9.7. Дәрежелік, көрсеткіштік және логарифмдік функциялар

9.7.1. Рационал көрсеткішті дәреже

9.158—9.163-есептерде берілген өрнектерді ықшамдаңдар.

9.158. 1) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^2}$; 2) $\dfrac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}$; 3) $\dfrac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$.

9.159. 1) $\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}:\left(\dfrac{1}{b^{-n}}-\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$; 2) $\dfrac{a^{-2n}+b^{-2n}}{a^{-n}-b^{-n}}\cdot\left(\dfrac{1}{b^{-n}}+\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$.

9.160. 1) $a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^4$; 2) $\left(c^{-\frac{3}{7}}x^{-0,4}\right)^3 c^{\frac{2}{7}}x^{0,2}$; 3) $\sqrt[10]{c\sqrt[3]{c^2}}$.

9.161. 1) $\sqrt[3]{y^2\cdot\sqrt[4]{y^{-3}}}$; 2) $\sqrt[7]{x^4}:\sqrt[14]{x}$; 3) $\sqrt[5]{m^2\sqrt{m}}:\sqrt[3]{m^2\sqrt{m}}$.

9.162. $$\frac{\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(n^{-\frac{1}{3}}-m^{-\frac{1}{3}}\right)\left(n^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}}\right)}-2n+\frac{4n^2}{n-m}.$$

9.163. $$\frac{\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^3b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)}-\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{a+b}{2}.$$

9.164. x пен y-тің арасындағы тәуелділікті анықтаңдар:

1) $x=t^{\frac{1}{2}},\ y=t^{-\frac{1}{2}}$; 2) $x=t^{\frac{1}{3}},\ y=t^{\frac{1}{6}}$;

3) $x=3t^{\frac{1}{2}},\ y=2t^{-\frac{1}{2}}$; 4) $x=0,5t^{-\frac{1}{2}},\ y=0,4t^{-\frac{1}{2}}$.

9.7.2. Көрсеткіштік және логарифмдік өрнектерді түрлендіру

9.165. Функцияның өспелі не кемімелі болатынын анықтаңдар:

1) $y=\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$; 2) $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$;

3) $y=\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^{x}$; 4) $y=\left(\dfrac{2}{3-2\sqrt{2}}\right)^{x}$.

9.166. Сандарды салыстырыңдар:

1) $2^{1,5}$ және $2^{\sqrt{2}}$; 2) $3^{-0,1}$ және 3^{0}; 3) $2^{\frac{1}{7}}$ және $2^{0,143}$.

9.167. Есептеңдер:

1) $\log_6\sqrt{\dfrac{1}{6}}$; 2) $\log_{a^2}\sqrt[7]{a}$; 3) $\log_{\sqrt{a}}\sqrt[6]{c^5}$; 4) $5^{1+\log_5 4}$.

9.168. Сандарды салыстырыңдар:

1) $\log_5 2$ және $\log_{25} 8$; 2) $\log_5\dfrac{1}{625}$ және $\log_3\dfrac{1}{27}$.

9.169. Есептеңдер:

1) $2^{\log_{\sqrt{2}} 3+\log_{4\sqrt{2}} 5}$; 2) $\log_3\log_4\log_2 16$.

9.170. $\log_6 2 = m$ деп алып, $\log_{24} 72$ –ні табыңдар.

9.171—9.173-есептерде берілген өрнекті ықшамдаңдар.

9.171. 1) $125^{\log_5\sqrt{3}}$; 2) $2^{\log_2 5}-5^{\log_5 2}$; 3) $10^{3-\lg 4}+49^{\log_7 15}$.

9.172. 1) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$; 2) $81^{\frac{1}{\log_4 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

9.173. 1) $\left(n^{\frac{\log_{100} m}{\lg m}}\cdot m^{\frac{\log_{100} n}{\lg n}}\right)^{2\log_{mn}(m+n)}$; 2) $\sqrt{a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}}+8^{\frac{1}{3\log_a\sqrt{2}}}+1}$.

9.174. $\log_{abc} x=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_b x}+\dfrac{1}{\log_c x}}$ тепе-теңдігін дәлелдеңдер.

9.7.3. Көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер

9.175—9.182-есептерде берілген теңдеулерді шешіңдер.

9.175. 1) $2^{3x}=512^{\frac{1}{3x}}$; 2) $(0,2)^{x+1}=5$.

3) $\log_{0,3}(5-x)=-1$; 4) $\log_3(2x+3)=0$.

9.176. 1) $3^{|3x-4|}=9^{2x-2}$; 2) $2^{2x-3}=4^{x^2-3x-1}$.

9.177. 1) $\log_3\log_2^2(x-4)=0$; 2) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5,5$.

9.178. 1) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1}=6$; 2) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{x}+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=84$.

9.179. 1) $\lg^2(8x-9)=\lg^2(6x-4)$; 2) $\log_2\dfrac{x-2}{x-1}-1=\log_2\dfrac{3x-7}{3x-1}$.

9.180. 1) $4^{x+1,5}+9x=6^{x-1}$; 2) $2\cdot 4^x+25\cdot 25^x=15\cdot 10^x$.

9.181. 1) $\log_5 x=\sqrt{\log_2 5x-\log_5 x}$; 2) $\sqrt{\log_{27}\dfrac{1}{3x^2}}+\log_x 9=0$.

9.182. 1) $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0$; 2) $2\log_9 x+9\log_x 3=10$;

3) $x^{\log_5 x-2}=125$; 4) $x=10^{1-\frac{1}{4}\lg x}$.

9.183—9.186-есептерде берілген жүйені шешіңдер.

9.183. 1) $\begin{cases}2^x+2^y=5,\\ 2^{x+y}=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x2^y=576,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4.\end{cases}$

9.184. 1) $\begin{cases}y^x=1,5+y^{-x},\\ y^{2,5+x}=64;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3.\end{cases}$

9.185. 1) $\begin{cases}3^{\lg x}=4^{\lg y},\\ (4x)^{\lg 4}=(3y)^{\lg 3};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^y=243,\\ \sqrt[y]{1024}=\left(\dfrac{2x}{3}\right)^2.\end{cases}$

9.186. 1) $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2,\\ x^2+y=42;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=6,\\ \log_4 x+\log_4 y=-3.\end{cases}$

9.187. a-ның қандай мәндерінде $x^2-4x-\log_2 a=0$ теңдеуінің нақты түбірлері бар?

9.188. Егер $3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\cdot\ldots\cdot 3^{3n-1}=27^5$ болса, натурал n санын табыңдар.

9.189. a-ның қандай мәндерінде $3\cdot 4^{x-2}+27=a+a\cdot 4^{x-2}$ теңдеуінің нақты шешімі бар?

9.7.4. Көрсеткіштік және логарифмдік теңсіздіктер

9.190—9.194-есептерде берілген теңсіздіктерді шешіңдер.

9.190. 1) $2^x\cdot 5^x>0,1(10^{x-1})^5$; 2) $(\lg 3)^{8x-7}>(\log_3 10)^{7x-3}$;

3) $6^{3-x} > 216$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-(x+2)} \geqslant 81$.

9.191. 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x} - 5 > 0$; 2) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$;

3) $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 0$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$.

9.192. 1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x < \log_{\frac{1}{3}} (5x+24)$; 2) $\lg(x-2) + \lg(27-x) \leqslant 2$.

9.193. 1) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{1+\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 2$;

3) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)\right) > 0$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4\left(x^2-5\right)\right) > 0$.

9.194. 1) $\log_x(2x - 0,75) > 2$; 2) $\log_{x+3}(x^2 - x) < 1$;

3) $\log_{-6x-5x^2} 6x > 0$; 4) $2^{\sqrt{|x|-2}} > 4$.

9.195. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \frac{\lg\left(2^x - 3^x\right)}{\sqrt{11 - 9x - 2x^2}}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{8 - \lg^3(3x-2)}}$.

9.196. $\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5} - x + 1\right) > 0$ теңсіздігінің барлық бүтін шешімдерін табыңдар.

9.8. Туынды және оның қолданулары

9.8.1. Функцияның туындысын анықтау

9.197—9.206-есептерде берілген функцияның туындысын табыңдар.

9.197. 1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$; 2) $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$.

9.198. 1) $y = x - 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$.

9.199. 1) $y = 9\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x}$; 2) $y = \frac{10}{\sqrt[5]{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

9.200. 1) $y = \sin 2x - \operatorname{tg} x$; 2) $y = x^2 - \operatorname{ctg} x$.

9.201. 1) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

9.202. 1) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

9.203. 1) $y = (2 - 3x^2)^3$; 2) $y = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$.

9.204. 1) $y = x^2 - 3^x$; 2) $y = x^2 \cdot e^{-2x}$.

9.205. 1) $y = x - \operatorname{arctg} x$; 2) $y = \arccos(1 - 2x)$.

9.206. 1) $\left(x^2+4\right)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} - 2x$; 2) $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$.

9.207. Функцияның берілген нүктедегі туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$;

2) $f(x) = \ln(1 + a^{-2x})$, $f'(0)$;

3) $f(x) = \sqrt{1+\cos^2 x^2}$, $f'\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$;

4) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $f'(1)$.

9.8.2. Туындының қолданылуы

9.208. Функцияның өспелі және кемімелі аралықтарын табыңдар:

1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \ln x$; 4) $y = \dfrac{x^2-2}{2x+3}$.

9.209. Функцияның өспелі аралықтарын табыңдар:

1) $y = x^2 + 4x + 5$; 2) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3$; 3) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

9.210. Функцияның кемімелі аралықтарын табыңдар:

1) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$; 2) $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$; 3) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

9.211. 9.209-есепте берілген функцияның графигіне $x = 1$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

9.212. Функцияның көрсетілген аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2$, $[-1; 1]$; 2) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$, $[-2; 1]$;

3) $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x, \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $f(x) = \text{tg}x + \text{ctg}x, \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

9.213. 9.210-есепте берілген функцияның экстремумдарын табыңдар.

9.214. Функцияның экстремумдарын табыңдар:

1) $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$; 2) $y=\frac{x^2}{x-2}$; 3) $y = x - 2\ln x$.

9.215. Функцияны зерттеп, графигін салыңдар:

1) $y=\frac{x^3}{3}+x^2$; 2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; 3) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$;

4) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$; 5) $y=\frac{\ln x}{x}$; 6) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

9.216. 9.209-есепте берілген функция графигінің Oy өсімен қиылысу нүктесінде жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффициентін табыңдар.

9.217. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x-4$ функциясы графигінің қай нүктесіне жүргізілген жанамасы Ox өсінің оң бағытымен 45° бұрыш жасайды?

9.218. Табаны a-ға және биіктігі h-қа тең үшбұрышқа ауданы ең үлкен болатын тіктөртбұрыш іштей сызылған. Осы тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

9.219. Шар көлемі оған іштей сызылған ең үлкен цилиндр көлемінен неше есе артық?

9.220. Дөңгелектен центрлік бұрышы α-ға тең сектор қиып алынып, осы сектордан конус жасалды. α-ның қандай мәнінде жасалған конус көлемі ең үлкен болады?

9.221. Дене 10 м биіктіктен вертикаль жоғары, бастапқы жылдамдығы 20 м/с болатындай етіп лақтырылды. Дене t секундта қандай x биіктікке көтеріледі? Неше секундтан соң дене ең биік нүктесіне көтеріледі және ол нүкте қандай биіктікте жатады?

9.222. Химиялық реакция кезінде алынатын зат мөлшері x пен t уақыты арасындағы байланыс $x = A(1 - e^{-kt})$ теңдігімен өрнектеледі. Реакция жылдамдығын анықтаңдар.

9.9. Алғашқы функция, интеграл және оның қолданулары

9.9.1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

9.223. Берілген функцияның алғашқы функциясын анықтаңдар:

1) $f(x) = 3x^2 + 2x$; 2) $f(x) = \sin x$;

3) $f(x) = \dfrac{2}{\sin^2 x}$; 4) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

5) $f(x) = 4x^3 + \dfrac{3}{x^2+4}$; 6) $f(x) = \cos x + e^x$.

9.224—9.229-есептерде берілген анықталмаған интегралдарды табыңдар.

9.224. 1) $\int\left(x^2 + 2x - \dfrac{1}{2}\right)dx$; 2) $\int \dfrac{x^2+1}{x^2}dx$;

3) $\int\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$; 4) $\int \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

9.225. 1) $\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx$; 2) $\int \dfrac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$;

3) $\int e^{-3x}\,dx$; 4) $\int (3x - \sin 4x)\,dx$.

9.226. 1) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$; 2) $\int \cos^5 x \sin x\,dx$.

9.227. 1) $\int \sin^2 x\,dx$; 2) $\int \cos^2 2x\,dx$.

9.228. 1) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; 2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$.

9.229. 1) $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x\,dx$; 2) $\int \sin 3x \cdot \cos 2x\,dx$.

9.9.2. Анықталған интеграл. Ньютон—Лейбниц формуласы

9.230—9.232-есептерде берілген интегралдарды есептеңдер.

9.230. 1) $\int_0^2 (x^3 - 2x + 3)\,dx$; 2) $\int_1^2 \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)dx$;

3) $\int_1^4 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

9.231. 1) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}\,dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx$;

3) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$.

9.232. 1) $\int_0^a \left(x^2 - ax\right) dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

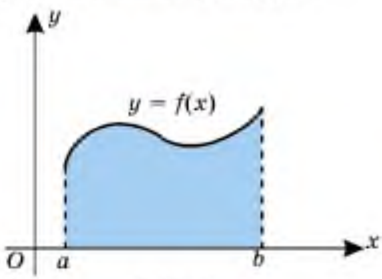
3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$.

9.9.3. Интегралдың қолданулары. Негізгі формулалар

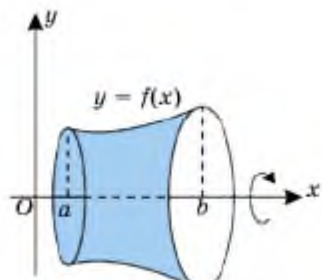
$f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$) функциясының графигімен, $x = a$, $x = b$ түзулерімен және Ox өсімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданы (9.1-сурет)

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

формуласымен анықталады.



9.1-сурет



9.2-сурет

Сәйкесінше, жоғарыдан және төменнен $f(x)$ және $g(x)$ ($f(x) \geqslant g(x)$) функцияларының графиктерімен шектелген, екі бүйір жағынан $x = a$, $x = b$ түзулерімен шектелген фигураның ауданы

$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

формуласымен анықталады.

$y = f(x)$ функциясы графигінің Ox өсінен айналғанда шыққан айналу денесінің көлемін анықтау формуласы:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad \text{(9.2-сурет).}$$

Материялық нүкте Ox өсі бойымен $F(x)$ күшінің әрекетімен $x = a$, нүктесінен $a = b$ нүктесіне жылжығанда жасалатын жұмыс

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

формуласымен анықталады.

9–5168

9.233—9.243-есептерде берілген қисықтармен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын табыңдар және тиісті сызбаларын салыңдар.

9.233. $f(x) = 3x^2 + 2x$, $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$.

9.234. $f(x) = 4x^3$, $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.

9.235. $f(x) = \frac{2}{x}$, $x = 1$; $x = 4$; $y = 0$.

9.236. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.

9.237. $f(x) = \sin 2x$, $x = \frac{\pi}{8}$; $x = \frac{\pi}{4}$; $y = 0$.

9.238. $f(x) = e^x$, $x = 0$; $x = \ln 4$; $y = 0$.

9.239. $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x + 1$.

9.240. $f(x) = 6 + 3x - 2x^2$, $g(x) = x + 2$.

9.241. $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

9.242. $f(x) = x + 1$, $g(x) = (x - 1)^2$.

9.243. $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = x^2 + 1$.

9.244—9.247-есептерде берілген қисықтарды Ox өсінен айналдырғанда шыққан дененің көлемін табыңдар.

9.244. $y = \frac{x^3}{3}$, $x \in [0; 2]$.

9.245. $y = 2x - 6$, $x \in [3; 5]$.

9.246. $y = e^x$, $x \in [0; \ln 3]$.

9.247. $y = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

9.248. Материялық нүктеге оның жүрген жолына сызықты тәуелді болатын күш әрекет етеді. Егер қозғалыс басында күш шамасы 100 Н болса, нүкте 10 м жылжығаннан кейін күштің шамасы 600 Н болды. Күштің әрекетінен нүктенің жасаған жұмысын табыңдар.

9.249. Тепе-теңдік күйдегі серіппені 10 см созғанда жасалатын жұмысты табыңдар. Серіппені 1 см-ге созу үшін 5Н күш қажет.

9.10. Теңдеу құруға берілген есептер

9.250. Шебер үш күнде 48 тетік жасады. Бірінші, екінші, үшінші күндері жасаған тетіктерінің саны сәйкесінше 5, 4 және 3 сандарына пропорционал. Шебер алғашқы екі күнде неше тетік жасаған?

9.251. 60 т жүк тасымалдау үшін бірнеше автокөліктерге тапсырыс берілді. Әрбір көлікке 0,5 т жүк кем тиегендіктен, қосымша тағы да 4 автокөлік қажет болды. Алғашында неше автокөлікке тапсырыс берілген?

9.252. Моторлы қайық өзен ағысы бойымен 14 км және өзен ағысына қарсы 9 км жол жүргеніне 5 сағат жұмсады. Егер осы қайықтың көлде жүзу жылдамдығы 5 км/сағ болса, өзен ағысының жылдамдығы қандай?

9.253. Аудандары 80 га және 120 га болатын екі жер телімдерінен барлығы 7200 ц астық жиналды. Бірінші жер телімінің 3 гектарынан жиналған астық мөлшері екінші жер телімінің 2 гектарынан жиналған астық мөлшерінен 10 ц артық деп алып, жер телімдерінің әр гектарынан неше центнерден астық жиналғанын табыңдар.

9.254. 64 теңге тұратын акварель бояуының бағасы 72 теңге болды. Бояудың бағасы неше пайыз өсті?

9.255. Цинк пен никельдің екі түрлі қоспасы бар. Бір қоспадағы металдардың мөлшерлерінің қатынасы 2:3, ал екіншісінде 3:7. Құрамында цинк пен никель 5:11 қатынасында болатындай 8 кг жаңа қоспа алу үшін әр қоспадан неше килограмм қажет?

9.256. Көрермендер залында 320 орын болған. Әр қатарға 4 орындықтан және тағы бір қатар қосқаннан соң залдағы орындар саны 420-ға жетті. Бастапқыда неше қатар орын болған?

9.257. Бассейнді екі құбыр 12 сағатта толтырады. Бірінші құбыр екіншісіне қарағанда бассейнді 10 сағат ерте толтырады. Бассейнді әр құбыр жеке-жеке неше сағатта толтырады?

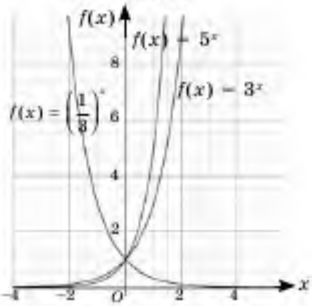
9.258. Бағасы 2,2 мың теңге тұратын тауардан дүкен 10% табыс табады. Егер осы тауар бағасын 1,8 мың теңгеге түсірсе, онда дүкен 43 мың теңге шығынға ұшырар еді. Дүкенде осындай қанша тауар бар?

9.259. Екі таңбалы санды өзінің цифрларының қосындысына бөлсек, бөлінді 4-ке, қалдығы 3-ке тең болады. Егер осы санды цифрларының көбейтіндісіне бөлсек, бөлінді 3-ке, қалдығы 5-ке тең болар еді. Осы санды табыңдар.

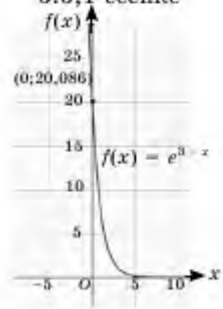
VI бөлім

6.1. 1) $x > 0$; 2) $x < 0$; 3) $x = 0$. **6.2.** 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x = 0$. **6.3.** Суретке қараңдар. **6.4.** 1) $x \neq -3$; 2) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. **6.5.** 1) кемімелі, суретке қараңдар.

6.3-есепке

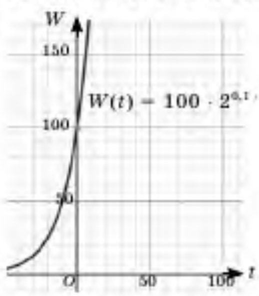


6.5,1-есепке



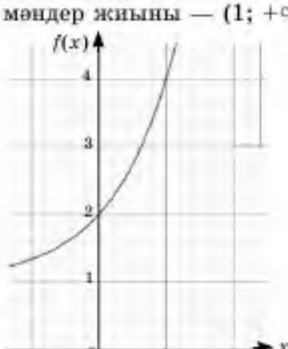
6.6. 1) 1000 га; 2) 4000 га. **6.7.** 1) 100 гр; 2) ≈ 132.

3)

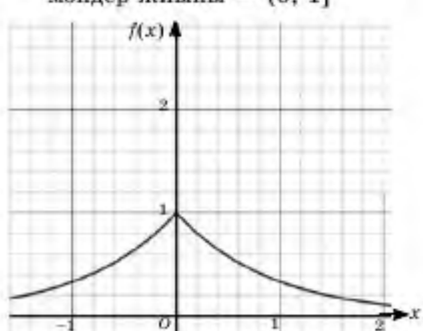


6.8. 1) 27; 2) 450 %. **6.9.** 1) $2^{1,5} > 2^{\sqrt{2}}$; 2) $2^{\frac{1}{3}} > 2^{0,3}$; 3) $3^{0,1} > 3^{0}$; 4) $3^{-0,1} < 3^{0}$; 5) $2^{-1,42} < 2^{-\sqrt{2}}$; $2^{\frac{1}{7}} < 2^{0,143}$. **6.10.** 1) 250; 2) ≈ 112; 3) ≈ 346. **6.11.** 1) 100C°; 2) ≈ 81 °C; 3) ≈ 76 °C.

6.12. 1) Анықталу облысы — $(-\infty; +\infty)$; мәндер жиыны — $(1; +\infty)$

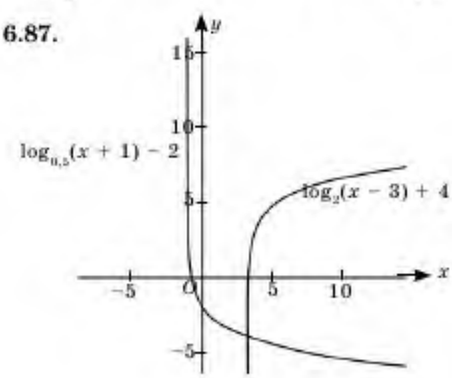


4) Анықталу облысы — $(-\infty; +\infty)$; мәндер жиыны — $(0; 1]$



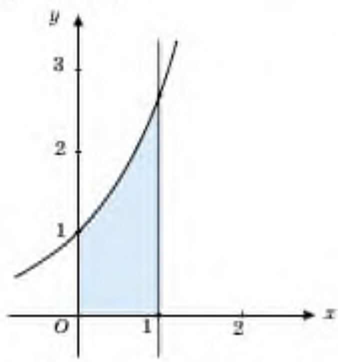
6.13. 1) өспелі; 2) кемімелі; 3) кемімелі; 5) өспелі. **6.14.** 1) бар, оң; 2) бар, теріс; 5) жоқ. **6.15.** $0 < a < 1$. **6.17.** $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$. **6.18.** $\sqrt{17} - 3$; 1. **6.20.** Толық квадратқа келтіру керек. **6.22.** 1) $x > 39$. **6.25.** 1) 1; 2) − 1; 3) 2; 5) − 3. **6.26.** 1) 1; 2) − 1; 5) − 3. **6.28.** 1) 5; 2) − 2; 3) 0,5; 4) 7; 8) $\frac{1}{3}$. **6.30.** 1) 4; 2) 9; 3) $\frac{1}{64}$; 5) 2. **6.31.** 1) 5; 2) 8; 3) $\frac{1}{14}$; 4) 1,5; 5) 0. **6.32.** 2) 0; 5) 1,5. **6.33.** 1) $10^{\lg 6}$; 2) $10^{\lg 6+1}$. **6.34.** 1) lg16; 2) ln4; 3) lg8. **6.35.** 1) lg96; 2) ln72; 6) ln0,5. **6.36.** 1) 2; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) − 2. **6.38.** 2) $\sqrt{5}$; 6) 1,5. **6.39.** 1) $p + q$; 2) $2p + 3q$; 3) $r + 2q$. **6.40.** 1) $\log_5 2 = \frac{1}{\log_4 25}$; 2) $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$; 3) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \frac{1}{\log_3 2}$. **6.41.** 1) $\lg \sqrt[6]{10} < \log_2 \sqrt{2}$; 2) $\log_4 2 = \log_{0,0625} 0,25$. **6.44.** 1) 9; 2) 80; 3) 150; 4) $\frac{1}{25}$. **6.45.** $\frac{mnk}{mn + mk + kn}$. **6.46.** 2) 0,5; 4) 1/3. **6.48.** 2) $\log_a a^2$; 2) $\log_a \sqrt{a}$; 3) $\log_a \frac{1}{a}$. **6.50.** $\frac{2 + m}{1 + 2m}$. **6.51.** $\frac{3 - 2m}{3}$. **6.52.** $\frac{2n + 2m}{1 - 2n}$. **6.53.** 1) $\frac{17}{24}$; 2) 3. **6.54.** 1) 10; 2) 346; 3) 20. **6.55.** $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ формуласын қолдану керек. **6.56.** 1) $a + b$; 2) $a + 1$. **6.58.** $2a + 2b - 1$. **6.59.** 8. **6.60.** $\log_a b - \log_b a$. **6.69.** 1) 1; 2) 1. **6.70.** Квадрат теңдеудің дискриминанты нөлге тең, (1; 7). **6.71.** 2. **6.73.** 1) оң; 2) теріс; 3) оң. **6.74.** 1) $x \neq 1$; 2) $x > 1$. **6.75.** Анықталу облыстары тең емес. **6.76.** 1) $\log_3 4 < \log_3 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{65} > \log_{\frac{3}{2}} 8$. **6.79.** 1) иә; 2) иә; 3) жоқ. **6.80.** 1) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$. **6.81.** 1) $x > -5$, өспелі; 2) $x < 3$, өспелі. **6.82.** 1) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; 3) $(-2; 0,5) \cup (2; +\infty)$. **6.83.** 1) $\lg \sqrt[6]{10} < \log_2 \sqrt{2}$; 2) $\log_4 5 > \log_6 5$; 3) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[4]{6} < \log_9 7$. **6.84.** 1) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} < \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$; 2) $\log_5 7 < 3\log_5 2$. **6.85.** $\frac{q + p}{1 - q}$. **6.86.** 1) − 1; 2) $\frac{1}{3}$.

6.87.

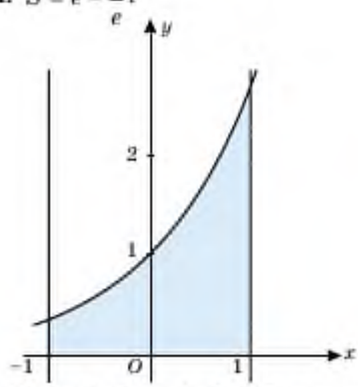


6.88. Анықталу облыстары тең емес. **6.90.** 1) $3\frac{3}{4}$; 2) 25. **6.91.** 1) $2\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5} < 3\log_3 26$; 2) $2\log_3 4 < 3\log_{27}17$. **6.92.** $\frac{5-b}{2(ab+a-2b+1)}$. **6.93.** 1) $\sqrt{11} < 9^{0,5\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_9 2}$; 3) $\sqrt{8} > 2^{2\log_2 5+\log_{0,5}9}$. **6.94.** 3/5. **6.100.** 1) жоқ; 2) иә. **6.104.** 1) $x=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$. **6.105.** 6 л. **6.106.** 1) 2,5. **6.107.** 1) $3e^{3x}$; 2) $5e^{2+5x}$; 3) $-a^{1-x}\ln a$. **6.108.** D. **6.109.** D. **6.110.** 2) $\frac{e^{3x}}{3}+C$; 5) $\frac{2^{2x-1}}{2\ln 2}+C$. **6.111.** 1) $xe^x - e^x + C$; 2) $(2x+1)e^{x-1} - 2e^{x-1} + C$. **6.112.** 1) $5e-8\frac{3}{4}$; 2) $e-\frac{1}{2}$.

6.113. $S = e - 1$.

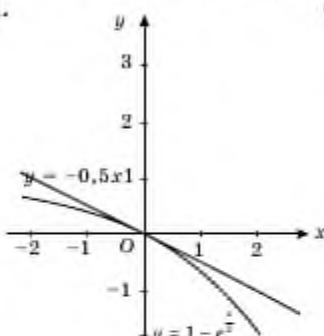


6.114. $S = e - \frac{1}{e}$.

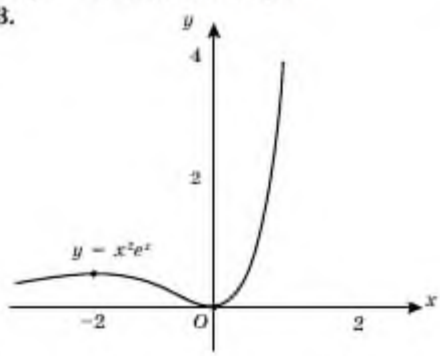


6.115. $e^x - \cos x + \sqrt{2}$. **6.116.** 1) $e^x(4x+3)$; 4) $7x^3e^{3x}(2+x)$. **6.117.** $y = ex$. **6.118.** $y = 0,5x + 0,5(1-\ln 0,5)$. **6.119.** $y = -ex$. **6.120.** arctg2.

6.121.



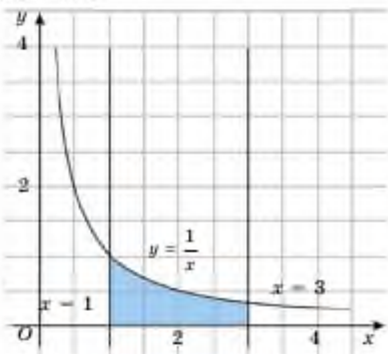
6.123.



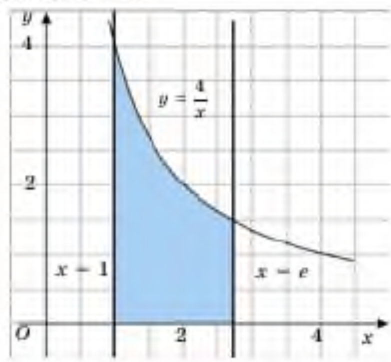
6.124. 1) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$; 3) $-e^{\operatorname{ctg}x}+C$; 4) $-e^{\cos x}+C$. **6.125.** 1) $-15e^{\frac{x}{2}}\cos 2x + 10\frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}\sin 2x$. **6.126.** 1) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$. **6.127.** $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$. **6.128.** $\frac{1}{2}e^x(\cos x +$

$+\sin x)+C$. **6.129.** 44550. **6.130.** Иә. **6.132.** 1) $\frac{3}{3x-2}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $-\frac{2}{1-x}$. **6.133.** B. **6.134.** D. **6.135.** 1) $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$; 3) $x-2\ln|x-1|+C$. **6.136.** 1) $x\ln 4x - x + C$; 2) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$; 3) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$; 4) $-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$. **6.137.** $\frac{1}{2}$. **6.138.** 1) $e-\ln 8-1$; 2) $2\ln 3$; 3) $\frac{3}{2}-\ln 2$.

6.139. $S=\ln 3$



6.140. $S=4$



6.141. 1) $\frac{2}{x(\ln x+1)^2}$; 2) $\frac{3\text{ctg}3x}{\ln 2}$; 3) $2(\text{ctg}2x+\text{tg}2x)=\frac{4}{\sin 4x}$. **6.142.** $y=\frac{x}{e}$. **6.143.** 1) $-\frac{9}{(3x-2)^2}$; 2) $\frac{1}{x+1}$. **6.144.** $F(x)=\ln x$. **6.145.** 1) $\frac{1}{2}x+\frac{13}{8}\ln(4x-7)+C$; 2) $\frac{3x}{5}-\frac{29}{25}\ln(5x+3)+C$. **6.146.** 1) $\frac{(\ln x)^2}{2}+C$; 2) $\frac{2(\ln x)^3}{3}+2\ln x+C$; 3) $-\ln|\cos x|+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln(x^2-4)+C$. **6.149.** 2) $-\left(\frac{10}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\ln x+\frac{6}{x^3}$. **6.150.** $\sqrt{e}$. **6.151.** 1. **6.152.** 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2}+C$; 2) $3\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(2x+3)+C$. **6.153.** Жоқ.

VII бөлім

7.1. 1) 4; 2) 10; 3) 6; 4) −3; 5) 3; 6) 6; 7) 6; 8) 2,4; 9) 0; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\log_3 7$; 12) −2. **7.2.** 1) ±1; 2) −2; 1; 3) 6; 4) $2\frac{1}{3}$; 5) −2; 1; 6) 4; 5. **7.4.** 1) ≈ 3,9; 2) ≈ 15,5. **7.5.** 1) ≈ 6,9; 2) ≈ 13,9. **7.6.** 1) ≈ 20 күн. **7.8.** 1) ≈ 6,2 жыл немесе ≈ 74 ай. **7.9.** 1) ≈ 3,4 жыл немесе ≈ 41 ай. **7.10.** 1) ≈ 11 ай. **7.11.** 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 8; 5) 3; 6) ± 2. **7.12.** 1) 1,5; 2) $\pm\sqrt{3}$; 3) 1; 4) 3. **7.13.** 1) − 2; 2) 0;

4; 3) 3; 11; 4) 1. **7.14.** 1) 0; $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3; 3) – 2,5; 3; 4) – 3,5; 2. **7.15.** 1) (3; 2); 2) (1; 2). **7.16.** 1) ≈ 17,3 апта; 2) ≈ 92,2 апта. **7.17.** 1) ≈ 8 с. **7.18.** 1) ≈ 50,7; 2) ≈ 152,1; 3) 4′. **7.19.** 1) 25; 2) ≈ 166. **7.20.** 1) 0; $3\frac{1}{6}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 1. **7.21.** 1) 2; 2) 2; 3) 0; 4) 0. **7.22.** 1) 1; 5; 2) –2; 5; 3) 1; 4) 1; 2. **7.23.** 1) $\log_5 10$; 2) – 0,4; 3) $\log_{0,25} 1,5$; 4) –3. **7.24.** 1) 66; 2) 1; 3) 0; 4) $1\frac{1}{2}$. **7.25.** 1) 1,5; 2) 5; 3) $\pm\sqrt{3}$. **7.26.** 1) – 2; 2) 0. **7.27.** 1) $x = \log_2 \sqrt{3}$; 2) 1. **7.28.** 1) 1; 2) $\log_3(1+\sqrt{2})$; $\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **7.29** . 1) 0; 2) ± 2. **7.30** .1) (0; 2); (2; 0); 2) (0,5; 4). **7.31.** 1) Жалғыз шешімі бар. **7.32.** 1) 1; 2) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; 3) – 1; 4) ∅. **7.33.** 1) 4; 2) – 7; 8; 3) 3; $\log_6 8$; 4) 3. **7.34.** 1) $a \neq 0,4$; 2) $a \neq 1,5$. **7.35.** 1) (1; 1); 2) (3; 5). **7.36** .1) 1; 2) $\{-3\} \cup (-1; +\infty)$. **7.41.** $\frac{m+n}{1-m}$. **7.42.** 1) – 1; 2) 7; 3) 2. **7.43.** 1) 0,5; 2) 2; 3) 2. **7.44.** 1) 1; 4; 2) 2; 3) 1; 5. **7.45.** 1) $1\frac{3}{5}$; 2) 8,5; 3) 49; 5) 1; –8; **7.46.** 1) $\frac{1}{3}$. **7.47.** – 3; – 2; 2. **7.48.** 1) ∅; 2) 10; 3) 2. **7.49.** 1) e; e^{-4}; 2) 2; $\sqrt[9]{2}$. **7.50.** 1) (2; 5); (5; 2); 2) (2; 32); (32; 2); 3) $\left(\frac{41}{9}; -\frac{40}{9}\right)$.

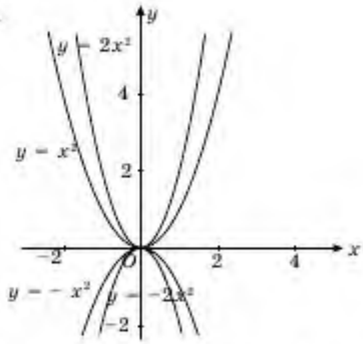
7.51. 1) (4; 8); (8; 4); 2) (2; 1); (1; 2); 3) (5; 3); (3; 5). **7.52.** 1) 4; 2) $32\frac{1}{2}$; 3) – 3. **7.53.** 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$; 2) – 5; 3; 3) $e^{2,5}$; e^{-2}. **7.54.** 1) 5; 2) 8; 5; 3) – 3; – 2; 0. **7.55.** 1) 10; 2) $\sqrt[4]{1000}$; 3) 4; 4) 1; **7.56.** 1) 1; 2) 0; 3) 2. **7.57.** 1) 2; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 2) 3; 3) 1; 16. **7.58.** 1) $\frac{1}{5}$; 125; 2) $\sqrt[5]{10000}$; 3) $\frac{1}{9}$; 9; 4) $\frac{1}{10}$; 1000; 5) $x > 0$; $x \neq 1$; 6) 3; $\frac{1}{9}$. **7.59.** 1) (1; 0,5); 2) ∅. **7.60.** 1) (2; 6); 2) $\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$; 3) (3; 12). **7.61.** 1) екі; 2) бір. **7.62.** 1) (7; 3); (6; 2); 2) (3; 2). **7.63.** 1) 2; 3) ∅. **7.64** 1) 1; 2) 10; 10^5. **7.65.** 1) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (3; 9). **7.66.** 1) (4; 16). **7.67.** $a > \frac{1}{16}$. **7.72.** 1) $x < 4$; 2) $x \leqslant -1$; 3) $x < 4$; 5) $x > \frac{4}{3}$. **7.73.** 1) $x < -3$; 2) $x < -3$; 3) $x < -3$; 4) $x < -1$; $x > 2$. **7.74.** 1) 2; 2) 1; 3) – 1. **7.76.** 1) $x \leqslant 0$; 2) $-1 < x < 1$. **7.77.** 1) $x < 0$; 2) $x < 4,5$. **7.78** 1) $x < 0$; $x > \log_4 5$; 2) $\log_2 \frac{2}{3} < x < \log_2 9$. **7.79.** 1) $x \geqslant 2$; 3) $x < -1$. **7.80** . 1) $x > 11$; 2) (1; 9). **7.81.** 1) $x \leqslant 1$; 2) $x \geqslant -1$. **7.82.** 1) $x > -\frac{1}{4}$; 2) $x > 3$; 5) $x \geqslant -2$. **7.83.** 1) $\left(\frac{7}{8}; 3\right]$; 2) (– 1; 3); 3) [– 3; 2].

7.84. 1) $(-\infty;\ -6] \cup [2;\ +\infty)$; 2) $(-\sqrt{8};\ \sqrt{8})$. **7.85.** 1) $x > 2$; 2) $x > 0$. **7.86.** 1) $\left(-3\frac{1}{6};\ 0\right)$; 2) $x < 34$; 3) $x < 2$. **7.87.** 1) R; 2) $x > \log_3 2$; 3) $x \leqslant -2 \cup$ $\cup\ x \geqslant -1$. **7.88.** 1) 0; 2) -2. **7.89.** 1) 0; 2) -1; 3) 0. **7.90.** 1) $x < 2$; 2) $x < -2$; 3) $(-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ \log_2 3)$. **7.92.** 1) $(2;\ 3) \cup (4;\ +\infty)$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$. **7.93.** 2) $0 < x < 3$; 3) $x < 4{,}5$. **7.97.** 304. **7.98.** 1) $x > -\frac{1}{4}$; 2) $(-2;\ 7)$; 3) $(3;\ 11]$. **7.99.** 1) $x > 7$; 2) $x > 4$; 4) $\left(\frac{3}{4}; 2\right)$. **7.100.** 1) $x > 2$; 2) $x > 2$. **7.101.** 1) $x > 1$; 2) $(0{,}4;\ 0{,}46)$; 3) $(-0{,}2;\ 0{,}4) \cup (0{,}4;\ 1)$. **7.102.** 1) $\varnothing$; 2) $x > 2$; 3) $(2;\ 5)$. **7.103.** 1) $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$; 2) $\left(\frac{1}{5^6}; 5\right)$; 3) $(0;\ 1) \cup (1000; +\infty)$. **7.104.** 1) $[-1;\ 0)$; 2) $x > 1$. **7.105.** 1) $(-4;\ 2)$; 2) $(-2;\ -1) \cup (2;\ 3)$; 3) $(-\sqrt{6};\ \sqrt{6})$. **7.106** 1) $(1;\ 2]$; 2) $\left(1; 1\frac{2}{3}\right)$. **7.107.** 1) $(2;\ 5)$; $x \geqslant 2$. **7.108.** 1) $[4;\ 5)$; 2) $[1;\ 2]$. **7.109.** 1) $\left(\frac{1}{e}; e^3\right)$; 2) $\left(2; 2\frac{1}{4}\right) \cup (6; +\infty)$. **7.110.** 1) $(0;\ 1] \cup [16;\ +\infty)$. **7.111.** 1) $-\frac{2}{3} \leqslant x < 0$; 2) $x > 8$. **7.112.** 1) $(0;\ 1) \cup$ $\cup\ (2;\ +\infty)$. **7.113.** 1) $-1 < x < 10\frac{1}{9}$; 2) $(3;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$. **7.114.** 1) $\varnothing$; 2) $(1;\ 3)$. **7.115.** 1) $\frac{1}{3} < x < 3$; 2) $\left(1; 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{32}}\right) \cup (3; +\infty)$. **7.117.** 1) $\left(\log_2 \frac{5}{4}; \log_2 3\right)$; 2) $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. **7.118.** $(1;\ 2)$. **7.120.** 3. **7.121.** 1) $[0;\ 2) \cup (4;\ 6]$. **7.124.** 1) $a\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})$.

VIII бөлім

8.1. 1) 3-ретті; 2) 2-ретті. **8.4.** $A = 4$. **8.6.** $v(0) = 0$. t уақыттың өтуімен жылдамдықтың максимум мәні 20-ға жақындайды. **8.7.** A; E. **8.9.** $y = x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 2{,}5$. **8.10.** $s(t) = 4t - 5t^2 + C$ — жалпы шешім; $s(t) =$ $= 4t - 5t^2 + 11$ — дербес шешім. **8.11.** $y = \sqrt[3]{6x - 4}$. **8.12.** 1) $k = 2$; 2) $k = 6$; 3) $k = 1$; 4) $k = R$; 5) $k = 3$.

8.13. $y' = Cx$.



8.14. 1) $k = 2$; 2) $k = -2$; 3) $k = 3$; 4) $k = -1$. **8.15.** 1) $y' = \sqrt{\dfrac{c}{2x}}$; 2) $y' = C$; 3) $y' = Ce^x$; 4) $yy' = -x$. **8.16.** $x_0 = 0$; $k = y' = 1 - xy = 1$ — барлық жанамалардың бұрыштық коэффициенттері тең. **8.17.** 1) $y = -\dfrac{e^{-3x}}{3} + C$; 2) $y = \dfrac{x^2}{4} - \ln|\cos x| + C$; 3) $y = C$; 4) $y = 2\pi kx + C$. **8.18.** $y = \dfrac{x^2}{3} + C$. **8.19.** $y' = 10m - k\,(y')^2$. **8.20.** 1) $x\ln(x^2 + 4) - 2x + 4\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + C$. **8.21.** 1 және 3 теңдеулер. **8.22.** 1) $y = Ce^x$; 2) $y = x^2 + C$; 3) $y = -\dfrac{2}{x^2 + C}$; 4) $y = ex - \dfrac{x^2}{2} + C$. **8.23.** 1) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$; 2) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$; 3) $y = \sqrt[3]{-3\cos x + C}$; 4) $y = \ln(x^3 + C)$. **8.24.** 1) $y = \dfrac{1}{0,1 - \ln x}$; 2) $y = \dfrac{1}{0,5 - \ln x}$; 3) $y = \ln\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\cos 2x}{2}\right)$. **8.26.** $T(t) = 25 + 75e^{-kt}$; $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - 25)$. **8.27.** ≈40 мин. **8.28.** $v = \dfrac{10}{0,5 + t}$; ≈ 0,056 с. **8.30.** $v = \dfrac{40}{41e^{0,2t} - 40}$. **8.31.** 1) $y = \sqrt{Ce^{2\operatorname{arctg}x} - 1}$; 2) $\ln(\ln y) = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$. **8.32.** 1) $y = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$; 2) $\sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{5} - 1$. **8.34.** 1) $T = 20 + Ce^{-0,5t}$; 2) $T = 20 + 80e^{-0,5t}$; 3) ≈20 минут. **8.35.** $y = -\dfrac{1}{1 + x}$. **8.36.** 1) $m = 40(t - 3)^2 + C$; 2) $m = 40(t - 3)^2 + 1110$; 3) 1110 г. **8.39.** 1) $\dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}\ln(x^2 + 1) + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C$; 2) $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{1}{4}(1 - x^3) + C$. **8.40.** 1) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$; 2) $6\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$; $\lambda_2 = -\dfrac{1}{3}$; 3) $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$; $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$;

$\lambda_2 = -1$. **8.42.** 1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$; $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$; 2) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$; $y = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{-3x}$; 3) $y = C_1 + C_2e^{5x}$; $y = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}e^{5x}$. **8.43.** 1) $A = \sqrt{2}$; $\omega = 2$; $\frac{\pi}{4}$ — бастапқы фаза; 2) $A = \sqrt{10}$; $\omega = \frac{1}{2}$; $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$ — бастапқы фаза; 3) $A = \sqrt{2}$; $\omega = \sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}$ — бастапқы фаза. **8.44.** 1) $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$; 2) $y = C_1e^{\frac{2}{3}x} + C_2xe^{\frac{2}{3}x}$; 3) $y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$; 4) $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$. **8.45.** 1) $y'' - y = 0$; 2) $y'' + 2y' + y = 0$. **8.46.** 1) $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$; $y = e^{2x} - 2xe^{2x}$; 2) $y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$; $y = 4e^{-\frac{1}{2}x} - 2xe^{-\frac{1}{2}x}$; 3) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$; $y = e^{3x} - 3xe^{3x}$; 4) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$, $y = 2xe^{-x}$. **8.48.** 1) $y = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin x$; 2) $y = C_1e^{x}\cos 2x + C_2e^{x}\sin 2x$; 3) $y = C_1e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_2e^{-x}\sin\sqrt{3}x$. **8.49.** 1) $x = \frac{1}{3}\sin 3t$; 2) $x = \sin 2t$; 3) $x = \frac{3}{\sin 2\sqrt{3}}\sin 2\sqrt{3}t$. **8.51.** 1) $y = 2e^{-x}\sin x$; 2) $y = e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$. **8.52.** 1) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$; 2) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$. **8.53.** $F(x) = x^3 + x^2 + x + 2$.

IX бөлім

9.1. 4) 0; 5; 6) 5; 7) 0; 8) 8. **9.9.** 1) $a = 32$; $b = 56$. **9.11.** 1) 1,36. **9.12.** 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) 2; 4) -4; 5) 1; 6) 1; 7) 9. **9.17.** 1) $8(x + 11)\times(x - 2)$; 4) $(a - 1)(a + 9)$; 8) $2a(a^2 + 3b^2)$. **9.18.** 2) $(5mn^2 - 7p^2q)(3m^2p + 5nq^2)$. **9.24.** $\frac{2}{b}$. **9.27.** 1. **9.30.** 1) $a_n = \frac{1}{n^2}$; 2) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; 4) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **9.34.** 2) 90. **9.35.** $\frac{n-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **9.36.** $a_n = 18n - 25$; $b_n = 14n - 17$. **9.37.** 1) $b_1 = -49$; $q = -\frac{1}{7}$; 4) $b_1 = \frac{1}{8}$; $q = 7$. **9.39.** $a = 32$ не $a = \frac{1}{2}$, $a = \pm 4$. **9.40.** 3) $\frac{b_1^3}{1-q^3}$. **9.41.** $\frac{2}{3}$. **9.42.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{4}$. **9.44.** 1; $2(2+\sqrt{3})$; $(2+\sqrt{3})^2$. **9.45.** 3. **9.49.** 7. **9.50.** 1) 2^8; 2) $C_8^4 = 70$. **9.51.** 1) $\overline{A_5^3} = 125$; 2) $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$. **9.52.** $C_{10}^5 = 252$. **9.60.** $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{4}{9}\right)$. **9.61.** $a = 0$. **9.62.** 4) $\frac{1}{9}$; 7) $-\frac{7}{3}$. **9.64.** 2) (1; 6), (6; 1); 4) (1; 5), (5; 1); (2; 3) (3; 2). **9.65.** 2) $x^7-1=(x^3+x+1)(x^4-x^2-x+1)+2x^2-2$. **9.66.** $a=-11$. **9.69.** 3) $(x-1)(x^2-4x-1)$; 6) $(x+1)(x^3-7x^2-7x-4)$. **9.71.** 1) ±1, ±2. **9.72.** 2) $\left(1;\frac{3\pm\sqrt5}{2}\right)$. **9.73.** 1) $-\frac13$; 2) $\frac13$; 3) $\varnothing$. **9.74.** 1) $-3{,}5$; 2) 4. **9.75.** 1) -1; $-1\frac{1}{17}$. **9.77.** $\varnothing$. **9.78.** 1) 3. **9.79.** 1) $\varnothing$; 2) $x\geqslant3$; 3) 1; 4. **9.80.** 1) 4; 548; 2) 2; 3. **9.81.** 2) 0. **9.82.** 1) 0; 2) -1; -2; 0. **9.83.** 1) -5; 3; 2) $[5;+\infty)$. **9.84.** 1) -6; 2; 2) -1; 0; 3; 4. **9.85.** 1) $-\frac52$; $\frac53$; 2) $-\frac12$; 2. **9.86.** 1) $\frac12$; $\frac{15}{4}$; 2) $\left[\frac12;3\right]$. **9.87.** 3) $a\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow x_1=a$, $x_2=a+1$; 4) $a\neq3\Rightarrow x=a$; $a=3\Rightarrow x\in\varnothing$. **9.89.** $a=-2$; $-\frac12$. **9.91.** 1) $\left(\frac{118}{19};-\frac{29}{19}\right)$; 2) $x=\frac{15y+51}{20}$, $y\in R$; 3) $\varnothing$. **9.92.** 1) (2,2; 0,4), (1; 1); 4) $(\pm3;\pm1)$ **9.93.** 2) $\left(\pm\frac{\sqrt5}{3};\pm\frac{\sqrt5}{3}\right)$; $\left(\pm4\frac{\sqrt5}{\sqrt{33}};\pm\frac{\sqrt5}{\sqrt{33}}\right)$. **9.94.** Нұсқау: жүйенің бірінші теңдеуін y-ке тәуелді квадрат теңдеу ретінде қарастырыңдар. **9.95.** 1) $\left(\frac12;\frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac32;\frac{11}{2}\right)$; 2) (5; 3), $(-5;-3)$. **9.96.** 1) $(3;1;-2)$, $(-5;-3;0)$; 2) $(\pm4;\pm3;\mp1)$. **9.97.** 1) $\left(-\frac72;\frac{67}{4}\right)$; $\left(\frac{21}{4};\frac{37}{4}\right)$; 2) (5;4); (5;3). **9.104.** 1) $\left(\frac14;1\right)$; 2) $\left(\frac14;\frac13\right)$; 4) $[3;+\infty)$. **9.107.** 2) $[-1;6]$; 3) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$. **9.108.** 1) $(-1;2)$; 2) $(-1;0)$. **9.109.** 1) $(-\infty;-2)\cup$ $\cup[-1;2]\cup[3;+\infty)$; 2) $(-3;1)$. **9.110.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $[0;5]$; 3) $\varnothing$; 4) $[-1;1]$. **9.111.** 1) $[-3;-1]\cup\{3\}$; 3) $(-\sqrt2;3)$; 4) $[1;5]$. **9.112.** 1) $\left[1;\frac{25}{16}\right)$; 2) (3; 11). **9.113.** 1) $(-\infty;0]\cup[5;+\infty)$; 2) $[-5;2]$. **9.114.** 1) $[-2;-1]\cup[0;3]$; 2) $(-\infty;-2)\cup$ $\cup(-2;-1)\cup(-1;0]$. **9.115.** 1) $[1{,}5;+\infty)$ 2) $(-\infty;-3)\cup(-2;-1)\cup(6;+\infty)$. **9.116.** 3) $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(4;+\infty)$. **9.117.** $a\in\left(-\frac23;\frac23\right)$. **9.118.** $a\in(-\infty;-1)\cup$ $\cup\left(\frac23;+\infty\right)$. **9.119.** $a\in[4;+\infty)$. **9.121.** 1) $\cos\alpha=-\frac45$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac34$; 4) $\sin\alpha=-\frac15$; $\cos\alpha=\frac{2\sqrt6}{5}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{\sqrt6}{12}$. **9.122.** $a=-\frac{15}{4}$. **9.124.** 2) 0; 3) $\frac{1}{\cos2\beta}$. **9.127.** 1) $\mathrm{tg}\,2x$; 2) $\mathrm{tg}\,2x$. **9.128.** 1) $-2\,\mathrm{tg}\,\alpha$; 2) $\frac{2}{\sin\alpha}$. **9.129.** 1) -1; 2) 0; 3) 1,5. **9.130.** $\frac{31}{49}$. **9.131.** 1,6. **9.132.** $1-\sqrt3$. **9.133.** 2) $\frac{\sqrt3}{8}$. **9.134.** 1) $\frac{\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **9.135.** 1) $-\mathrm{arctg}\,1{,}5+\pi k$, $k\in Z$. **9.136.** 1) $(-1)^k\arcsin\frac14+\pi k$, $k\in Z$;

2) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$. **9.137.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k, 2\pi k, k \in Z$. **9.138.** 1) $\varnothing$. **9.139.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z$. **9.140.** 1) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{6}+\pi k, k \in Z$; 2) $\pi k, \pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$. **9.141.** 1) $2\operatorname{arctg}\sqrt{7}+2\pi k; \pi+2\pi k; k \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, -2\operatorname{arctg}(4+\sqrt{15})+2\pi k, k \in Z$. **9.142.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}+2\pi k, k \in Z$. **9.145.** 1) $6+\sqrt{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$. **9.146.** 1) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{\operatorname{tg}2+2}{3}$. **9.147.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $-\frac{3}{5}$. **9.148.** 1) 0; 2) 0; $\pm\frac{1}{2}$. **9.149.** 1) $x \in [0; 1]$; 2) $x \in [-1; 0]$. **9.150.** 1) $a=0 \Rightarrow x \in \varnothing$; $a \in (-\infty; -2\pi) \Rightarrow x \in \varnothing$; $a \in [-2\pi; 0] \Rightarrow x=\cos\frac{a}{2}$; $a \in (0; \pi] \Rightarrow x=\cos a$; $a \in (\pi; +\infty) \Rightarrow x \in \varnothing$. **9.152.** 1) $[4\pi k; \pi+4\pi k]$, $k \in Z$. **9.153.** 1) $\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right), k \in Z$. **9.154.** 4) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\operatorname{arctg}2+\pi k\right), k \in Z$. **9.155.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right]$. **9.156.** 2) $\left[\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right), k \in Z$.

9.158. 2) $-a-b$. **9.159.** 1) $a^n b^n$. **9.161.** 2) $\sqrt{x}$. **9.164.** 1) $x=y$; 4) $4x=5y$. **9.165.** 3) кемімелі. **9.166.** 1) $2^{1,5}>2^{\sqrt{2}}$. **9.167.** 2) $\frac{1}{14}$. **9.168.** 1) $\log_5 2>\log_{25} 8$. **9.169.** 2) 0. **9.170.** $\frac{m+2}{2m+1}$. **9.171.** 2) 3; 1) 25. **9.172.** 1) 20. **9.173.** 1) $m+n$; 2) $|a+1|$. **9.175.** 3) $\frac{5}{3}$; 4) $x=-1$. **9.176.** 1) $\frac{8}{7}$; 2) $2 \pm \sqrt{3,5}$. **9.177.** 1) 6; 2) 27. **9.178.** 1) 1,54. **9.179.** 1) $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{6}$; 2) 3. **9.180.** 1) $\log_{1,5} 2$; $2\log_{1,5} 2$; 2) -1; $\log_{0,4} 5$. **9.181.** 1) $5\sqrt{\log_2 5}$; 2) $\frac{1}{9}$. **9.182.** 1) $\sqrt[9]{10}$; 10; 2) 3; 3^9; 3) $\frac{1}{5}$; 125; 4) $\sqrt[5]{10^4}$. **9.183.** 1) (0; 2), (2; 0); 2) (2; 6). **9.184.** 1) $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. **9.185.** 1) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (3; 5). **9.186.** 1) (6; 6). **9.187.** $a \geqslant \frac{1}{16}$. **9.188.** $n=3$. **9.189.** $a \in (3; 27)$. **9.190.** 1) $(-\infty; 1,5)$; 3) $(0; +\infty)$. **9.191.** 1) $(-\infty; \log_{0,75} 5)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$. **9.192.** 1) $(8; +\infty)$; 2) $(2; 7] \cap [22; 27]$. **9.193.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$; 2) $(0,1; 1) \cup (1; 10)$; 3) $(1; \sqrt[3]{5})$. **9.194.** 1) $\left(\frac{3}{8}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$; 2) $(-3; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; 3)$; 4) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$. **9.195.** 1) $(-5,5; 0)$. **9.197.** 2) $2x+\frac{2}{x^3}$. **9.198.** 1) $1-\frac{3}{2\sqrt{x}}$. **9.199.** 2) $-\frac{2}{\sqrt[5]{x^6}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}$.

9.200. 1) $2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x}$. **9.201.** 2) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. **9.202.** 1) $\frac{1}{1-\sin x}$.
9.203. 2) $-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}\right)^2$. **9.204.** 1) $2x + 3^x\ln 3$. **9.205.** 2) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. **9.206.** 1) $2x\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}$.
9.207. 2) $-\ln a$. **9.208.** 1) $(-\infty; 1)$ — кемімелі; $(1; +\infty)$ — өспелі. **9.209.** 3) $(-\infty; 0)$.
9.210. 3) $(e; +\infty)$. **9.212.** 1) $f(-1) = 1$ — ең кіші мәні; $f(1) = 1$ — ең үлкен мәні. **9.213.** 2) $x = -2$ — максимум нүктесі, $f(-2) = -2$; $x = 2$ — минимум нүктесі, $f(2) = 2$. **9.214.** 3) $x = 2$ — минимум нүктесі, $f(2) = 2 - 2\ln 2$.
9.216. 2) $k = 0$. **9.217.** $\left(2; \frac{8}{3}\right)$, $\left(3; \frac{7}{2}\right)$. **9.219.** $\sqrt{3}$ есе. **9.220.** $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.
9.221. $t \approx 2{,}04$; $h = 30{,}41$. Нұсқау: дене қозғалысы $x = 10 + 20t - \frac{gt^2}{2}$ заңына сәйкес қозғалатынын ескеріңдер. **9.222.** $v(t) = kAe^{-kt}$. **9.223.** 1) $x^3 + x^2 + C$.
9.224. 1) $\frac{x^3}{3} + x^2 - \ln|x| + C$; 4) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x} + C$. **9.225.** 1) $-\frac{2}{\sin 2x} + C$;
4) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\cos 4x + C$. **9.226.** 1) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$. **9.227.** 1) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.
9.228. 2) $\frac{1}{2}\ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) + C$. **9.229.** 1) $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$. **9.230.** 2) $\frac{17}{6}$; 3) 2. **9.231.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}\ln 2$. **9.232.** 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 3) $\frac{\pi-2}{8}$. **9.233.** 12.
9.236. $\frac{\pi}{4}$. **9.238.** 3. **9.239.** $\frac{4}{3}$. **9.240.** 10. **9.241.** $\frac{15}{4} - \ln 2$. **9.242.** 4,5. **9.243.** $\frac{8}{3}$.
9.244. $\frac{128\pi}{63}$. **9.246.** 4π. **9.248.** 3500Дж. **9.250.** 36. **9.251.** 20. **9.252.** 2 км/сағ.
9.253. 30 ц, 40 ц. **9.254.** 12,5%. **9.255.** 1 кг, 7 кг. **9.256.** 4 не 20. **9.257.** 20 сағ, 30 сағ. **9.259.** 23.

МАЗМҰНЫ

VI бөлім. КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯ

VII бөлім. КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

VIII бөлім. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

IX бөлім. ОРТА МЕКТЕП КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕР

Оқу басылымы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Жұмабаев Ринат Нұрланұлы

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

Екі бөлімді

2-БӨЛІМ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы *А. Искаков*
Корректор *Е. Амангелді*
Техникалық редакторы *У. Рысалиева*
Компьютерде беттеген *Е. Огурцова*

ИБ 078

Теруге 25.03.2019 берілді. Басуға 10.06.2020 қол қойылды. Пішімі 60x90 $^{1}/_{16}$.
Офсеттік қағаз. Шартты баспа табағы 9,0. Есептік баспа табағы 6,61.
Таралымы 13000 дана. Тапсырыс 5168.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы,
Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің
Полиграфкомбинаты, 050002, Алматы қаласы, М.Мақатаев көшесі, 41.

Оглавление

page35
page36
page37
page38
page39
page40
page41
page42
page43
page44
page45
page46
page47
page48
page49
page50
page51
page52
page53
page54
page55
page56
page57
page58
page59
page60
page61
page62

page140
page141
page142
page143
page144