АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

Оқулық

11

Қоғамдық-гуманитарлық бағыт

ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР:

! — жаңа тақырыпты игеру барысында қойылатын оқыту мақсаттары

— өздігінен орындауға арналған тапсырмалар

— теореманың немесе қасиеттің дәлелдеуінің соңы

? — өзіндік тексеру сұрақтары

A — барлық оқушылардың орындауы міндетті жаттығулар

B — орта деңгейдегі жаттығулар

— электронды ресурстарды қолдануға арналған жаттығулар

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқушылар! Сендерге ұсынылып отырған оқулық 10-сыныпта өткен "Алгебра және анализ бастамалары" курсының жалғасы болып табылады.

11-сыныпта сендер алғашқы функция, анықталмаған және анықталған интеграл, қисықсызықты трапеция, n-ші дәрежелі түбір, рационал көрсеткішті дәреже, логарифм, көрсеткіштік және логарифмдік функциялар ұғымдары және осы ұғымдардың қасиеттерімен танысасыңдар. Сонымен қатар, дәрежелік функция, математикалық статистика элементтері бойынша білімдеріңді кеңейтесіңдер.

Иррационал теңдеулерді, көрсеткіштік, логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктер және олардың жүйелерін шешуді, сонымен қатар, жазық фигуралардың ауданын анықталған интеграл арқылы табуды үйренесіңдер.

Оқулық 6 тараудан, 22 параграфтан тұрады.

Әрбір параграфтың алдында жаңа білімді меңгеруге арналған тірек ұғымдар берілген.

Материалды меңгеру процесіне оқушыларды белсене қатыстыру мақсатында параграфтың ішінде өздігінен орындауға арналған сұрақтар мен тапсырмалар ұсынылған.

Параграфтың соңында оқушылардың тақырып бойынша білімдерін тиянақтауға арналған сұрақтар берілген.

Жаттығулар тобы А және В деңгейінен тұрады. А деңгейіндегі тапсырмалар толығымен орындалғаннан кейін В деңгейінің тапсырмалары қарастырылады. Сонымен қатар, 10-11-сыныптардағы алгебра және анализ бастамалары курсын қайталауға арналған жаттығулар ұсынылған.

Өзін-өзі тексеру үшін әрбір тараудың соңында тест тапсырмалары және математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар берілген.

Оқулықтың соңында глоссарий, сондай-ақ, жаттығулардың шешімін тексеру үшін есептердің жауаптары келтірілген.

10-СЫНЫПТАҒЫ АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

1. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = 1 - \cos\frac{x}{2}$; 2) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \cos^2 x + \sin^2 x + 1$; 4) $y = 2\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$.

2. Функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x}$;

3) $y = 4\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x - 5$; 4) $y = 3 - \frac{\sin 2x}{2\cos x}$.

3. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар:

1) $2\sin 0,25x + \sin\frac{\pi}{2}$; 2) $2\cos\left(\frac{x}{7} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 90^\circ - 2$;

3) $\mathrm{tg}0,125x + 4$; 4) $\mathrm{ctg}\left(0,5x + \frac{\pi}{4}\right) + 6\sin 180^\circ$.

4. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin^2 x - 10\sin x = 0$; 2) $\sin 3x = \sin x$;

3) $\cos^2 x + 0,1\cos x = 0$; 4) $\cos 15x = \cos 3x$;

5) $4\cos^2 x = \sin x \cos x$; 6) $2\sin^2 x = 3\sin x$.

5. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\sin x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x$; 2) $\sin^2 x - 0,25 = 0$;

3) $\sin^2 x - 1,5\sin x = -0,5$; 4) $\cos^2 x - 0,5\cos x = 0,5$;

5) $\sin^2 2x - \sin 4x = 3\cos^2 2x$; 6) $3\sin^2 3x + \sin 6x - \cos^2 3x = 0$.

6. Теңсіздікті шешіңдер:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) > \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\mathrm{tg}\left(0,5 - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$;

5) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0,5$; 6) $\mathrm{ctg}\left(2,5x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $y = \arcsin\frac{1}{x} + \sqrt{4 - 3x - x^2}$; 2) $y = \arcsin(x - 3) + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

8. Егер $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sin x$ және $q(x) = \sqrt{x + 1}$ болса, онда мына күрделі функцияларды құрастырыңдар:

1) $f(g(x))$; 2) $f(q(x))$; 3) $q(g(x))$;

4) $g(f(x))$; 5) $f(g(q(x)))$; 6) $g(q(f(x)))$.

9. $y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = 10 - 10x^7 + 2,5x^{10}$; 2) $f(x) = \frac{3x + 5}{4 - x}$;

3) $f(x) = \sqrt{11x - x^2}$; 4) $f(x) = (2x - x^3)\sqrt{2 - x^2}$;

5) $f(x) = 6\cos^3(4 - 3x)$; 6) $f(x) = \sin(4 - 3x)\text{tg}(4 - 3x)$;

7) $f(x) = \frac{\sin 5x}{1 + 3x}$; 8) $f(x) = \frac{2 - 5x}{\cos 10x}$.

10. $y = f(x)$ функциясы туындысының x_0 нүктесіндегі мәнін табыңдар:

1) $f(x) = 4x^3 - x^4 + 10,\ x_0 = -1$; 2) $f(x) = \frac{3}{x - 1},\ x_0 = 3$;

3) $f(x) = \cos^2 3x + \text{tg}x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$; 4) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4},\ x_0 = 2\sqrt{2}$.

11. 1) $y = x^3 + x$ функциясы графигіне абсциссасы 2-ге тең болатын нүкте арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

2) $y = 3x^3 - 2$ функциясы графигінің қандай нүктесі арқылы жүргізілген жанама абсцисса осіне параллель болады?

3) $y = x^2 - 5x + 4$ функциясы графигіне жүргізілген жанаманың абсцисса осімен құрайтын бұрышының тангенсін табыңдар.

12. 1) Егер $f(x) = x^2 + 3x - 36$ болса, онда $f(x) + f'(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер;

2) егер $f(x) = -x^2 - 6x + 6$ болса, онда $f(x) - f'(x) < 0$ теңсіздігін шешіңдер.

13. Функцияның бірсарындылық аралықтарын табыңдар:

1) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x + 3}$;

3) $f(x) = \frac{2x}{16 - x^2}$; 4) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$;

5) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x + 4)$; 6) $f(x) = \sqrt{x - 1} \cdot (5 - x)$.

14. Функцияның сындық, максимум және минимум нүктелерін табыңдар:

1) $y = 0,25x^4 - 0,25x + 9$; 2) $y = 5x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 11$.

15. Функцияның өсу және кему аралықтарын, экстремумдарын табыңдар:

1) $y = 5x^2 + 3x - 2$; 2) $y = 4x^3 - 3x + 1$;

3) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$; 4) $y = \frac{3}{x^2 + x}$.

16. Функцияның кему аралықтарын, максимум және минимум нүктелерін табыңдар:

1) $y = (x - 5)(x + 1)^3 \cdot (x - 2)^4$; 2) $y = (x + 1,5) \cdot (x - 1,5)^2 \cdot (x - 2)^3$.

17. Функцияны зерттеңдер және графигін салыңдар:

1) $y = 2x^2 - 3x$; 2) $y = x^3 + 6x$; 3) $y = \frac{1}{1 - x^2}$; 4) $y = -\frac{2}{1 + x^2}$.

18. "Жанды геометрия" немесе "GeoGebra" бағдарламасын қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = \frac{1 + x}{x}$; 2) $y = \frac{x}{1 + x}$;

3) $y = 5 - 2\sqrt{x + 1}$; 4) $y = 3 + 2\sqrt{x - 1}$.

График бойынша функцияның қасиеттерін атаңдар.

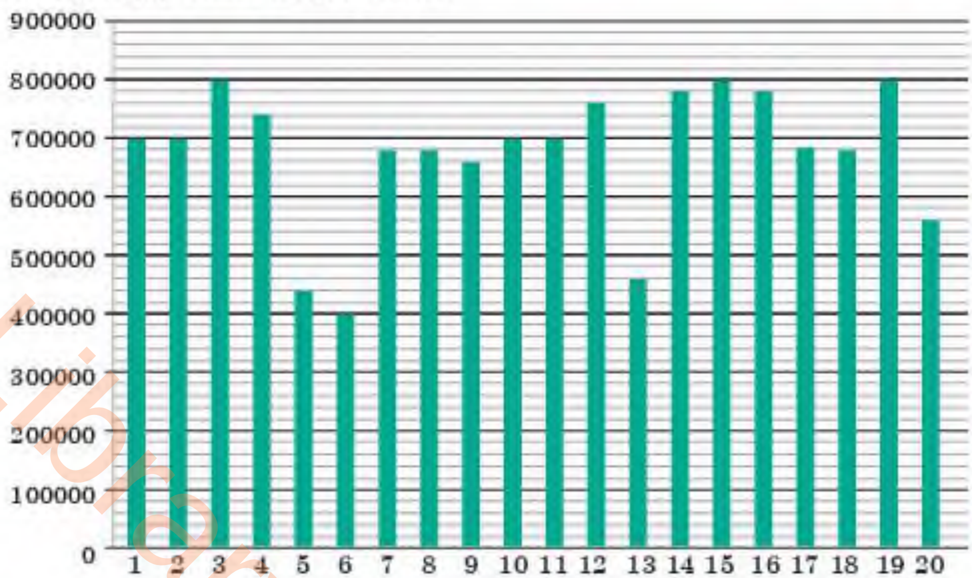
19. "Жанды геометрия" немесе "GeoGebra" бағдарламасын қолданып функцияның графигін салыңдар:

1) $y = -2\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$; 2) $y = -2 + 5\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = 4 - 2\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Практикаға бағытталған тапсырмалар

20. Диаграммада 2019 жылдың 1-20 тамызы аралығында «Спорт жаңалықтары» сайтын қараған адамдар саны берілген (1-сурет). Горизонталь сызық бойымен айдың күндері, вертикаль сызық бойымен адамдар саны көрсетілген.



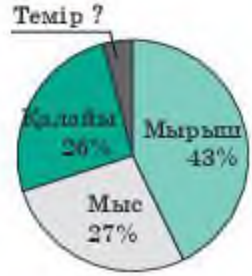
1-сурет

1) Айдың қай күні «Спорт жаңалықтары» сайты адамдар ең көп қараған?

2) Қанша күн сайтты қараған адамдар саны 600 000-ден кем болды?

3) Сайтқа кірушілер саны 700 000-нан кем болмаған күндер санын табыңдар.

4) Сайтқа кірушілердің ең аз саны сайтқа кірушілердің ең көп санының қанша пайызын құрайтынын табыңдар.



2-сурет

21. Массасы 100 кг болатын қорытпа құрамы 2-суретте берілген.

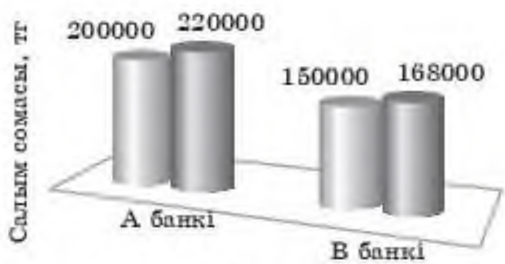
1) Қорытпадағы мыс пен мырыш қанша килограмды құрайды?

2) Қорытпада қанша килограмм темір бар?

3) Қорытпадағы темірдің құрамы 10% болу үшін осы қорытпаға қанша килограмм темір қосу керек?

4) Егер қорытпадағы темірдің салмағы 10% болса, онда қорытпадағы қалайының пайыздық мөлшері қандай болады?

22. Диаграммада бастапқы салым сомасы мен A және B банктеріндегі жылдық өсімді ескергендегі салым сомасы туралы деректер берілген (3-сурет).



3-сурет

1. A және B банктеріндегі салым сомасының жылдық пайыздық өсімін табыңдар.

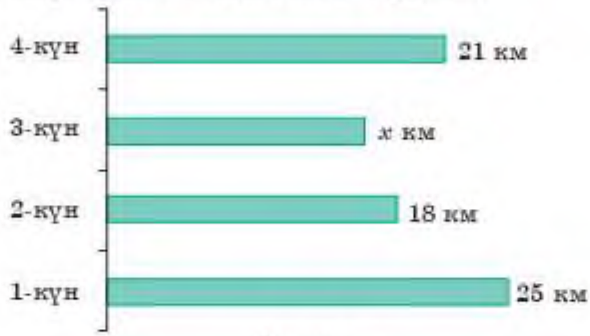
2. A және B банктеріндегі жылдық пайыздық өсімдер арасындағы айырмашылықты табыңдар.

23. 4-суретте тұрғын үй кешеніндегі пәтерлер саны көрсетілген.

4-сурет

1) Бір бөлмелі пәтерлер саны жалпы пәтерлер санының қанша пайызын береді:
A) 30%; B) 45%; C) 35%; D) 36%; E) 50%?
2) Бір бөлмелі пәтерлер саны төрт бөлмелі пәтерлер санынан қанша есе артық:
A) 3,5 есе; B) 3,6 есе; C) 4 есе; D) 2,5 есе; E) 4,5 есе?

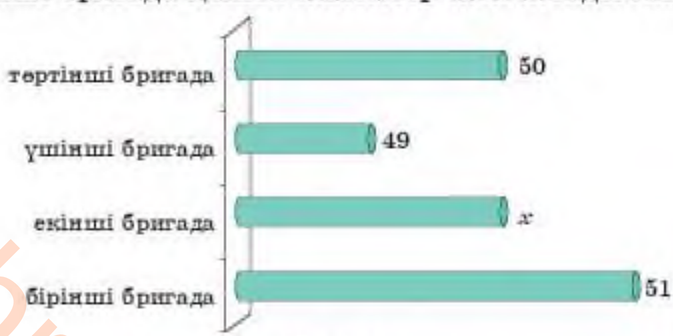
24. Диаграммада туристердің төрт күнде жүрген жолы туралы мәліметтер көрсетілген (5-сурет). Егер үшінші күні туристердің жүрген жолы төрт күнде жүрген жолдың бестен бір бөлігіне тең болса, онда олар үшінші күні қанша километр жүрген?



5-сурет

A) 15 км; B) 20 км; C) 16 км; D) 15,5 км; E) 17 км.

25. 6-суретте төрт бригаданың жөндеген жолдарының ұзындығы келтірілген. Егер екінші бригаданың жөндеген жолының ұзындығы барлық жөнделген жолдың ұзындығының төрттен біріне тең болса, онда екінші бригада қанша километр жол жөндегенін табыңдар.



6-сурет

A) 60; B) 55; C) 45; D) 50; E) 53.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция ұғымы, функцияның шегі, туынды, күрделі функцияның туындысы, туындыны есептеу ережелері, туындының геометриялық және физикалық мағынасы, функциялар туындысының кестесі.

I ТАРАУ
АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛ

§ 1. АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

Сендер алғашқы функция ұғымымен танысасыңдар және функцияның алғашқы функциясын табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, анықталу облысы, тұрақты сан, туынды, функцияның графигі

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

1. $f(x) = x^9$ функциясының туындысы $f'(x) = 9x^8$.
2. $f'(x) = 6x^5$ қандай да бір функцияның туындысы болсын. Функцияның туындысы бойынша білімді қолданып, оның $f(x) = x^6$ функциясының туындысы екенін аламыз.

Анықтама. *Кез келген X жиынында өзгеретін x үшін*

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

теңдігі орындалса, онда F(x) функциясы осы жиында f(x) функциясының ***алғашқы функциясы*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

1. Кез келген $x \in (-\infty; +\infty)$ үшін $F(x) = x^5 - 5x$ функциясы $f(x) = 5x^4 - 5$ функциясының алғашқы функциясы болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеу. Алғашқы функцияның анықтамасы бойынша $F(x) = x^5 - 5x$ функциясының туындысын табамыз:

$$F'(x) = (x^5 - 5x)' = (x^5)' - (5x)' = 5x^4 - 5.$$

Демек, кез келген $x \in (-\infty; +\infty)$ үшін $F(x) = x^5 - 5x$ функциясы $f(x) = 5x^4 - 5$ функциясының алғашқы функциясы болады.

МЫСАЛ

2. Кез келген $x \in (0; +\infty)$ үшін $F(x) = \frac{2}{x} + 1$ функциясы $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ функциясының алғашқы функциясы болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеу. Ол үшін алғашқы функцияның анықтамасы бойынша $F(x) = \frac{2}{x} + 1$ функциясының туындысын табамыз:

$$F'(x) = \left(\frac{2}{x} + 1\right)' = \left(\frac{2}{x}\right)' + 1' = -\frac{2}{x^2}, \text{ мұндағы } x \neq 0.$$

Демек, кез келген $x \in (0; +\infty)$ үшін $F(x) = \frac{2}{x} + 1$ функциясы $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ функциясының алғашқы функциясы болады.

МЫСАЛ 3. Барлық нақты сандар жиынында $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ функциясы $f(x) = \frac{6}{x^3}$ функциясының алғашқы функциясы болмайтынын дәлелдейік.

Дәлелдеу. Алғашқы функцияның анықтамасы бойынша $F'(x) = f(x)$. Сондықтан $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ функциясының туындысын табамыз:

$$F'(x) = \left(-\frac{3}{x^2}\right)' = -3 \cdot (x^{-2})' = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3}, \text{ мұндағы } x \neq 0.$$

Демек, барлық нақты сандар жиынында $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ функциясы $f(x) = \frac{6}{x^3}$ функциясының алғашқы функциясы болмайды, себебі $x = 0$ нүктесі функциялардың анықталу облысына кірмейді.

Егер $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ және $f(x) = \frac{6}{x^3}$ функцияларын $(-\infty; 0)$ немесе $(0; +\infty)$ интервалдарында қарастырсақ, онда $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ функциясы $f(x) = \frac{6}{x^3}$ функциясының алғашқы функциясы болады, себебі $F'(x) = f(x)$ теңдігі $(-\infty; 0)$ немесе $(0; +\infty)$ интервалдарының кез келген нүктесінде орындалады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Берілген функцияның туындысын табу *дифференциалдау* деп аталатыны белгілі.

Функцияның белгілі туындысы бойынша алғашқы функциясын табу *интегралдау* деп аталады.

Интегралдау амалы дифференциалдау амалына кері амал. Интегралдаудың негізгі мақсаты — интегралданатын функцияның барлық алғашқы функцияларын табу.

Мысалы, $f(x) = x^2$ функциясының алғашқы функциясы ретінде $F(x) = \frac{x^3}{3}$ функциясын ғана емес, $G(x) = \frac{x^3}{3} - 4$, $Q(x) = \frac{x^3}{3} + 0{,}9$, $K(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{10}{7}$ және т.с.с. функцияларды алуға болады. Себебі бұл алғашқы функциялардың туындысын табатын болсақ, барлық жағдайда да $f(x) = x^2$ функциясына келеміз. Олай болса, кез келген $f(x)$ функциясы үшін бір алғашқы функция табылса, онда оның шексіз көп алғашқы функциялары бар болады.

Демек, алғашқы функцияның негізгі қасиетін төмендегі теоремамен беруге болады.

Теорема. *Егер $F(x)$ функциясы X аралығында $f(x)$ функциясының алғашқы функцияларының бірі болса, онда бұл функцияның барлық алғашқы функцияларының жиыны*

$$G(x) = F(x) + C \quad (1)$$

формуласымен табылады.

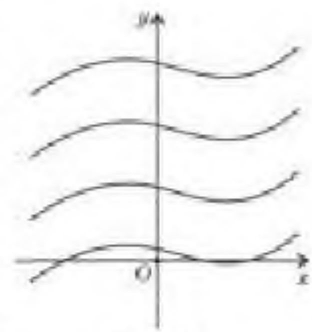
Мұндағы C — тұрақты сан.

Дәлелдеу. Ол үшін (1)-теңдіктің екі жағынан да туынды алайық: $G'(x) = F'(x) + C'$ немесе $G'(x) = F'(x)$, өйткені тұрақтының туындысы нөлге тең. Теореманың шарты бойынша $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болғандықтан алғашқы функцияның анықтамасы бойынша $F'(x) = f(x)$. Онда $G'(x) = f(x)$ теңдігі орындалып, $F(x) + C$ функциясы да $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болады. ■

(1)-формула алғашқы функцияның жалпы түрін береді.

❗ Сендер алғашқы функцияның геометриялық мағынасын білетін боласыңдар.

$f(x)$ функциясының алғашқы функцияларының жалпы түрін беретін (1)-формуладағы тұрақтыны нөлге тең деп алып, $y = F(x)$ функциясының графигін саламыз. Қалған алғашқы функциялардың айырмашылығы тұрақты C-ның мәніне байланысты болғандықтан, олардың графиктерін $y = F(x)$ функциясының графигін Oy осі бойымен C бірлікке параллель көшіру арқылы аламыз. Демек, *алғашқы функцияның геометриялық мағынасы графиктері өзара параллель қисықтар тобын береді* (7-сурет).



7-сурет

Алғашқы функцияларды табу кестесі:

1-*кесте*

Функция	Алғашқы функцияның жалпы түрі
$f(x) = k$ (k — *тұрақты*)	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in Z$, $\alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \mathrm{tg}\,x + C$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\mathrm{ctg}\,x + C$

Алғашқы функцияларды табу ережелерін қарастырайық.

1-ереже. *Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының, ал $P(x)$ функциясы $p(x)$ функциясының алғашқы функциялары болса, онда $F(x) + P(x)$ функциясы $f(x) + p(x)$ функциясының алғашқы функциясы болады.*

Дәлелдеу. Шарт бойынша $F(x)$, $P(x)$ функциялары сәйкесінше $f(x)$, $p(x)$ функцияларының алғашқы функциясы. Олай болса анықтама бойынша $F'(x) = f(x)$ және $P'(x) = p(x)$, ал қосындының туындысын табу ережесін қолдансақ,

$$(F(x) + P(x))' = F'(x) + P'(x) = f(x) + p(x).$$

2-ереже. *Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы, ал k тұрақты болса, онда $kF(x)$ функциясы $kf(x)$ функциясының алғашқы функциясы болады.*

2-ереженің дәлелдеуін өздерің қарастырыңдар.

3-ереже. *Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы, ал k және b тұрақтылар болса (мұндағы $k \neq 0$), онда $\frac{1}{k}F(kx + b)$ функциясы $f(kx + b)$ функциясының алғашқы функциясы болады.*

Дәлелдеу. Күрделі функцияның туындысын табу ережесі бойынша $\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b) \cdot (kx + b)' = \frac{1}{k}F'(kx + b)\,k = f(kx + b)$ аламыз.

МЫСАЛ

4. 1) $f(x) = x^4$; 2) $f(x) = \cos x - 2x^6$; 3) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{10 - 3x}} + \frac{5}{\sin^2(6x - 1)}$ функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табайық.

Шешуі. 1) $f(x) = x^4$ функциясының алғашқы функцияларының бірі $\frac{x^5}{5}$. Демек, берілген функция үшін алғашқы функцияның жалпы түрі мынадай болады: $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$;

2) $f(x) = \cos x - 2x^6$ функциясының алғашқы функциясын табу үшін 1- және 2-ережелерді және алғашқы функцияларды табу кестесін қолданамыз:

$$F(x) = \sin x - 2 \cdot \frac{x^7}{7} = \sin x - \frac{2x^7}{7} + C;$$

3) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{10 - 3x}} + \frac{5}{\sin^2(6x - 1)}$ функциясының алғашқы функциясын табу үшін жоғарыда берілген үш ережені және алғашқы функцияны табудың кестесін қолданамыз:

$$F(x) = 2 \cdot 2\sqrt{10 - 3x} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 5(-\mathrm{ctg}(6x - 1)) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{4}{3}\sqrt{10 - 3x} - \frac{5}{6}\mathrm{ctg}(6x - 1) + C.$$

Жауабы: 1) $\frac{x^5}{5} + C$; 2) $\sin x - \frac{2x^7}{7} + C$;

3) $-\frac{4}{3}\sqrt{10 - 3x} - \frac{5}{6}\mathrm{ctg}(6x - 1) + C$.

Сендер анықталмаған интеграл ұғымымен танысасыңдар және анықталмаған инегралды табуды үйренесіңдер.

Анықтама. *$f(x)$ функциясының алғашқы функцияларының жалпы түрін, яғни $F(x) + C$ өрнегін осы функцияның* ***анықталмаған интегралы*** *деп атайды.*

Анықталмаған интегралды табу формуласы:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \qquad (2)$$

(2)-формуладағы $\int f(x)dx$ — анықталмаған интеграл, $\int$ — интегралдау амалының белгісі, $f(x)$ — интеграл таңбасының ішіндегі функция, $f(x)\,dx$ — интеграл таңбасының ішіндегі өрнек, x — интегралдау айнымалысы.

Анықталмаған интегралды табу кестесі:

2-кесте

$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, мұндағы $n \neq -1$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

Сендер анықталмаған интеграл қасиеттерін білесіңдер.

Анықталмаған интегралдың қасиеттері:

1) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

2) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx$, мұндағы k — тұрақты;

3) $\int f(kx + b)dx = \dfrac{1}{k}F(kx + b) + C$.

МЫСАЛ

5. 1) $\int x^8\,dx$; 2) $\int 8\sin x dx$; 3) $\int (4x^3 - 1)dx$ интегралын табайық.

Шешуі. Анықталмаған интегралдың анықтамасын, қасиеттерін, оны табу кестесін қолданамыз:

1) $\int x^8\,dx = \dfrac{x^9}{9} + C$;

2) $\int 8\sin x\,dx = 8\int \sin x\,dx = -8\cos x + C$;

3) $\int (4x^3 - 1)\,dx = x^4 - x + C$.

Жауабы: 1) $\dfrac{x^9}{9} + C$; 2) $-8\cos x + C$; 3) $x^4 - x + C$.

МЫСАЛ

6. $f(x) = 4x - 6x^2$ функциясы үшін графигі $M(2; -4)$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функцияны табайық.

Шешуі. Алдымен берілген функцияның алғашқы функциясының жалпы түрін жазамыз:

$$F(x) = 4\cdot\frac{x^2}{2} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + C = 2x^2 - 2x^3 + C, \text{ яғни } F(x) = 2x^2 - 2x^3 + C.$$

Енді берілген нүктенің координаталарын ескеріп C-ның мәнін есептейміз:

$$-4 = 2\cdot 2^2 - 2\cdot 2^3 + C \text{ немесе } C = 4.$$

Сонда $F(x) = 2x^2 - 2x^3 + 4$.

Жауабы: $2x^2 - 2x^3 + 4$.

1. Алғашқы функция ұғымын енгізу үшін қанша функция қарастырылады? Ол функциялар қандай шарттарды қанағаттандыруы керек?
2. Бір функцияның екі алғашқы функциясы бар болса, олардың айырмашылығын қалай анықтауға болады?
3. Алғашқы функцияны табу мен интегралдаудың арасында айырмашылық бар ма?
4. Алғашқы функцияның жалпы түрі мен анықталмаған интеграл ұғымын байланыстыратын формуланы атаңдар.
5. $f(x) = 3(2x - 3) + \cos 2x - 5$ функциясының алғашқы функциясын табу үшін қандай ережелер қолданылады?

Жаттығулар

А

Көрсетілген аралықта $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы бола ма (**1.1—1.4**):

1.1. 1) $F(x) = 2x^2 + x + 1,$ $\quad f(x) = 4x + 1,\ x \in R;$

2) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1,$ $\quad f(x) = x + 1,\ x \in R?$

1.2. 1) $F(x) = 3\sin x + \frac{2}{x},$ $\quad f(x) = 3\cos x - \frac{2}{x^2},\ x \in (-\infty;\ 0);$

2) $F(x) = 2\cos x - \frac{3}{x},$ $\quad f(x) = -2\sin x + \frac{3}{x^2},\ x \in (0;\ +\infty).$

1.3. 1) $F(x) = \sqrt{x} + 1,$ $\quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in (0;\ +\infty);$

2) $F(x) = 3 - 2\sqrt{x},$ $\quad f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}},\ x \in (0;\ +\infty).$

1.4. 1) $F(x) = 3\operatorname{tg} x,$ $\quad f(x) = \frac{3}{\cos^2 x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right);$

2) $F(x) = 5\operatorname{ctg} x,$ $\quad f(x) = -\frac{5}{\sin^2 x},\ x \in (0;\ \pi).$

Берілген функциялар үшін алғашқы функциялардың жалпы түрін жазыңдар (**1.5—1.7**):

1.5. 1) $f(x) = 1 - x;$ $\quad$ 2) $f(x) = 2x - 1;$

3) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1;$ $\quad$ 4) $f(x) = 2 - 4x - 3x^2.$

1.6. 1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2;$ $\quad$ 2) $f(x) = 4x^3 - 6x^5 + 1;$

3) $f(x) = x^{10} + \frac{13}{12}x^{12};$ $\quad$ 4) $f(x) = -x^9 + \frac{15}{14}x^{14}.$

1.7. 1) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x;$ $\quad$ 2) $f(x) = 5\sin x + 6\cos x;$

3) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + 8x^7;$ $\quad$ 4) $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} - 9x^8.$

Анықталмаған интегралды табыңдар (1.8-1.9):

1.8. 1) $\int x^{21}dx$; 2) $\int x^{-15}dx$;

3) $\int \frac{1}{4\sqrt{x}}dx$; 4) $\int \frac{5}{\sin^2 x}dx$.

1.9. 1) $\int(x^4 - x^3 + x^2)dx$; 2) $\int(4x^3 + 5x^4 + 6x^5)dx$;

3) $\int(\cos x - 2)dx$; 4) $\int(3 + \sin x)dx$.

Графигі $M(a;\ b)$ нүктесі арқылы өтетін $f(x)$ функциясының $F(x)$ алғашқы функциясын табыңдар (1.10-1.11):

1.10. 1) $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$, $M(1;\ 3)$; 2) $f(x) = 2 + 4x$, $M(-1;\ 1)$;

3) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; 4) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{3\pi}{2}; 2\right)$.

1.11. 1) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$, $M(4;\ 5)$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$, $M\left(0; \frac{2}{3}\right)$;

3) $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$; 4) $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 3\right)$.

1.12. Түзусызықты қозғалатын нүктенің жылдамдығы $v(t) = t + 3t^2$ заңдылығымен өзгереді (уақыт с-пен, жылдамдық м/с-пен өлшенеді). Нүкте координатасы өзгерісінің уақытқа тәуелділігін табыңдар.

1.13. Түзусызықты қозғалатын нүктенің жылдамдығы $v(t) = 2t + 6t^2$ заңдылығымен өзгереді (уақыт с-пен, жылдамдық м/с-пен өлшенеді). Нүкте координатасы өзгерісінің уақытқа тәуелділігін табыңдар.

B

Берілген аралықта $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы бола ма (1.14—1.16):

1.14. 1) $F(x) = x\sin x$, $f(x) = \sin x + x\cos x$, $x \in R$;

2) $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$, $x \in R$;

3) $F(x) = 2\sin 6x$, $f(x) = 12\cos 6x$, $x \in R$;

4) $F(x) = -5\cos\frac{x}{5}$, $f(x) = \sin\frac{x}{5}$, $x \in R$;

5) $F(x) = 2\cos 2x - \sin 4x$, $f(x) = -4(\sin 2x + \cos 4x)$, $x \in R$;

6) $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\cos 8x$, $f(x) = \cos 3x - 2\sin 8x$, $x \in R$?

1.15. 1) $F(x) = \frac{3}{x^2} + 2x$, $\qquad f(x) = 2 - \frac{6}{x^3}$, $x \in (0; +\infty)$;

2) $F(x) = 3x - \frac{2}{x^3}$, $\qquad f(x) = 3 + \frac{6}{x^4}$, $x \in (0; +\infty)$.

1.16. 1) $F(x) = \sqrt{4x - 5}$, $\qquad f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 5}}$, $x \in \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$;

2) $F(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $\qquad f(x) = -\frac{2}{\sqrt{5 - 4x}}$, $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$.

Анықталмаған интегралды табыңдар **(1.17—1.18)**:

1.17. 1) $\int \left(0,75x^2 + \frac{x^9}{9}\right)dx$; $\qquad$ 2) $\int \left(\frac{x^{-7}}{6} - 1,25x^4\right)dx$;

3) $\int \left(\frac{10}{\sqrt{5 + 2x}} - 3x^{-11}\right)dx$; $\qquad$ 4) $\int \left(15x^{24} - \frac{28}{\sqrt{6 - 7x}}\right)dx$.

1.18. 1) $\int 18 \sin 6x \, dx$; $\qquad$ 2) $\int 27 \cos 9x \, dx$;

3) $\int \frac{15}{\cos^2 10x} dx$; $\qquad$ 4) $\int \frac{20}{\sin^2 2,5x} dx$.

$y = f(x)$ функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін табыңдар **(1.19—1.23)**:

1.19. 1) $f(x) = (2x + 3)^3$; $\qquad$ 2) $f(x) = (3x - 2)^8$;

3) $f(x) = \sin(3x - 4)$; $\qquad$ 4) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

1.20. 1) $f(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)}$; $\qquad$ 2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{8}\right)}$;

3) $f(x) = 1 - \frac{5}{\sin^2\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)}$; $\qquad$ 4) $f(x) = 1 + \frac{6}{\cos^2\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{5}\right)}$.

1.21. 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 2}} + \sin\left(3 - \frac{x}{4}\right)$; $\qquad$ 2) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 5}} + \cos\left(2 + \frac{x}{3}\right)$;

3) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3 - 4x}} + \frac{1}{(x + 2)^3}$; $\qquad$ 4) $f(x) = \frac{4}{5\sqrt{2 + 3x}} - \frac{1}{(2 - x)^4}$.

1.22. 1) $f(x) = \cos^2\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3}$; $\qquad$ 2) $f(x) = \sin\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{4}$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{8} \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{8} + x^2$; $\qquad$ 4) $f(x) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{6}$.

1.23. 1) $f(x) = \cos^2 x$;

2) $f(x) = \sin^2 x$;

3) $f(x) = \cos\frac{x}{4} \sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{x}{4} \cos\frac{\pi}{9}$;

4) $f(x) = \sin\frac{x}{5} \cdot \sin\frac{\pi}{10} - \cos\frac{x}{5} \cdot \cos\frac{\pi}{10}$.

$y = f(x)$ функциясы үшін $F(a) = b$ шартын қанағаттандыратын алғашқы функцияны табыңдар (**1.24-1.25**):

1.24. 1) $f(x) = \dfrac{2}{(2x+5)^2}$, $\quad F(-2) = \dfrac{1}{2}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{2}+3\right)^3}$, $\quad F(-4) = 3$.

1.25. 1) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$, $\quad F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)}$, $\quad F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

1.26. Түзусызықты қозғалыстағы нүктенің үдеуі $a = 2t$ (уақыт с-пен, үдеу м/с^2-пен өлшенеді) заңдылығымен өзгереді. Егер:

1) 1 с уақыт өткеннен кейін қозғалыстағы нүктенің жүрген жолы 10 м және оның жылдамдығы 4 м/с болса;

2) 2 с уақыт өткеннен кейінгі жылдамдығы 6 м/с, ал 3 с-тан кейін жүрген жолы 40 м-ге тең болса, онда дененің қозғалыс заңдылығы қалай өрнектеледі?

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИКТЕР ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

1.27. $\int$ белгісін Готфрид Вильгельм Лейбниц, «интеграл» терминін Иоганн Бернулли ұсынған. "Интеграл" термині алғашқы рет Якоб Бернулли еңбектерінде кездеседі.

Я. Бернулли
(1655—1705)

Г.В Лейбниц
(1646—1716)

Функция және оның графигі, функцияның үзіліссіздігі және шегі, туынды, алғашқы функция және оның негізгі қасиеті, алғашқы функцияны есептеу ережелері, алғашқы функцияны табу кестесі.

§ 2. ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ТРАПЕЦИЯНЫҢ АУДАНЫ

Сендер қисықсызықты трапеция ұғымымен танысасыңдар.

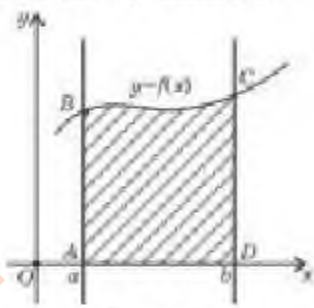
ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, алғашқы функция, анықталмаған интеграл, интеграл астындағы функция, трапеция, аудан, координаталық жазықтық

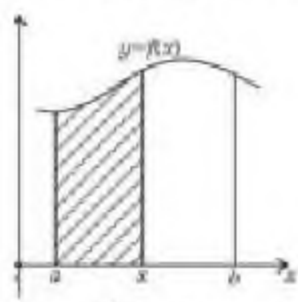
Геометрия курсынан көпбұрыштардың ауданын есептеу формуласын білесіңдер. Дегенмен математикада белгілі геометриялық формулалар арқылы ауданын есептеуге келмейтін жазық фигуралар кездеседі. Осындай жазық фигуралардың ауданын табу жолын қарастырайық.

Анықтама. *Жоғарыдан үзіліссіз, теріс емес $y = f(x)$ функциясының графигімен, ал төменгі жағынан Ox осінің $[a;\ b]$ кесіндісімен, бүйір жақтарынан $x = a$, $x = b$ түзулерінің кесінділерімен шектелген жазық фигураны* ***қисықсызықты трапеция*** *деп атайды.*

Мұндағы $[a;\ b]$ кесіндісі — қисықсызықты трапецияның табаны.



8-сурет



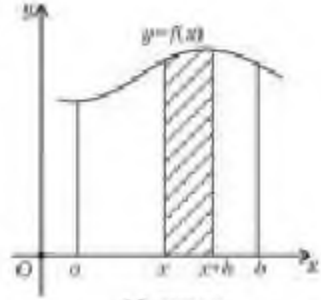
9-сурет

8-суретте $ABCD$ қисықсызықты трапеция берілген.

Сендер қисықсызықты трапецияның ауданын табу формуласымен танысасыңдар.

Қисықсызықты трапецияның ауданын $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)$ арқылы есептеуге болатынын көрсетейік. Ол үшін қисықсызықты трапецияның ауданын S деп белгілейік.

Егер $[a;\ b]$ кесіндісіне тиісті кез келген x нүктесін алып, осы нүктеден $y = f(x)$ функциясының графигімен қиылысқанға дейін Oy осіне параллель түзу жүргізсек, онда табаны $[a;\ x]$ кесіндісі болатын қисықсызықты трапеция шығады (9-сурет). Осы қисықсызықты трапеция ауданын $S(x)$ функциясы деп қарастыруға болады. Себебі аудан айнымалы x нүктесіне тәуелді. Егер $x = a$ болса, онда $S(a) = 0$, ал $x = b$ болса, онда $S(b) = S$ шығады.



10-сурет

Сонымен, $[a; b]$ кесіндісіне тиісті x айнымалысы үшін $S(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болатынын, яғни $[a; b]$ кесіндісінде $S'(x) = f(x)$ теңдігі орындалатынын дәлелдейік.

Дәлелдеу үшін $[a; b]$ кесіндісінен тағы бір $x + h > 0$ болатын ішкі нүкте алып, осы нүктеден $y = f(x)$ функциясының графигімен қиылысқанға дейін Oy осіне параллель түзу жүргіземіз (10-сурет).

Сонда аудандары $S(x)$ және $S(x + h)$-қа тең екі қисықсызықты трапецияларды аламыз. Ал $S(x + h) - S(x)$ айырымы табаны $[x; x + h]$ кесіндісі болатын қисықсызықты трапецияның ауданын береді. h-тың аз мәнінде қисықсызықты трапецияның ауданын табаны $[x; x + h]$ кесіндісі және биіктігі $f(x)$ болатын тіктөртбұрыштың ауданымен алмастыруға болады: $S(x + h) - S(x) \approx f(x) \cdot h$. Бұдан $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x)$ өрнегі шығады. Соңғы өрнектен $h \to 0$ ұмтылғандағы шекке көшсек,

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \to f(x).$$

Туындының жалпы анықтамасы бойынша $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \to S'(x)$, яғни $S'(x) = f(x)$. Демек,

$$F(x) = S(x) + C. \qquad (1)$$

(1)-теңдіктен $x = a$ болса, онда $F(a) = S(a) + C = C$ шығады, өйткені $S(a) = 0$. Ал $x = b$ болса, онда $F(b) = S(b) + C = S + F(a)$ немесе

$$F(b) = S + F(a), \qquad (2)$$

өйткені $S(b) = S$, $F(a) = C$. Онда (2)-теңдіктен $S = F(b) - F(a)$ теңдігін алуға болады.

Сонымен, қисықсызықты трапецияның ауданын

$$S = F(b) - F(a) \qquad (3)$$

формуласы бойынша есептеуге болады, мұндағы $F(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясы.

АЛГОРИТМ

Қисықсызықты трапецияның ауданын есептеу алгоритмі:

1) берілген қисықты координаталық жазықтыққа салу;

2) фигураны Ox осі бойымен шектеген кесіндінің ұштары болатын a және b-ның мәндерін табу;

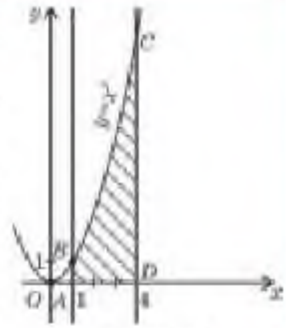
3) $f(x)$ функциясының алғашқы функциясын табу;

4) (3)-формуланы қолданып қисықсызықты трапецияның ауданын есептеу.

Енді алгоритмді қолдану арқылы қисықсызықты трапецияның ауданын есептеуге мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ 1. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ қисықтарымен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын табайық.

Шешуі. Алдымен берілген қисықтарды бір координаталық жазықтыққа салайық. $y = x^2$ функциясының графигі төбесі $(0; 0)$ нүктесі болатын, тармақтары жоғары бағытталған парабола; $y = 0$ түзуі Ox осін береді, ал $x = 1$ және $x = 4$ түзулері сәйкесінше $(1; 0)$ және $(4; 0)$ нүктелері арқылы өтетін Oy осіне параллель түзулер (11-сурет).



11-сурет

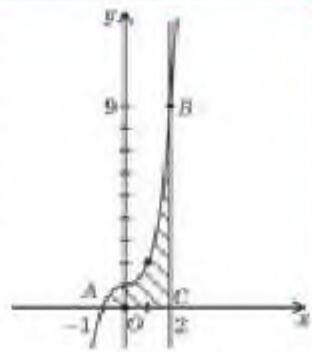
Алынған $ABCD$ қисықсызықты трапециясындағы $f(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 4$. Онда $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Демек, (3)-формула бойынша

$$S_{\text{қ. тр.}} = F(4) - F(1) = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

Жауабы: 21 кв. бірл.

МЫСАЛ 2. $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 2$ қисықтарымен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын есептейік.

Шешуі. Берілген функциялардың графигін координаталық жазықтыққа салайық. $y = x^3 + 1$ функциясының графигі $(0; 1)$ нүктесі арқылы өтетін кубтық парабола, $x = 2$ түзуі $(2; 0)$ нүктесі арқылы өтетін Oy осіне параллель түзу, ал $y = 0$ түзуі Ox осін береді (12-сурет). Суретте ABC қисықсызықты трапециясында $f(x) = x^3 + 1$, ал $b = 2$. Енді a-ның мәнін табу үшін $y = x^3 + 1$ және $y = 0$ қисықтарының қиылысу нүктесін есептейміз, яғни $x^3 + 1 = 0$ теңдеуін шешеміз. Сонда $a = -1$, ал $F(x) = \frac{x^4}{4} + x$. Демек, (3)-формула бойынша



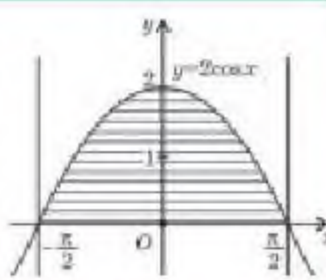
12-сурет

$$S_{\text{қ. тр.}} = F(2) - F(-1) = \left(\frac{2^4}{4} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + (-1)\right) = 6 + \frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}.$$

Жауабы: $6\frac{3}{4}$ кв. бірл.

МЫСАЛ 3. $y = 2\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ қисықтарымен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын есептейік.

Шешуі. Алгоритм бойынша бір координаталық жазықтыққа берілген қисықтарды саламыз. $y = 2\cos x$ функциясының графигін салу үшін $y = \cos x$ функциясының графигін Oy осі бойымен екі есе созамыз. $y = 0$ түзуі Ox осін береді. Ал $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ түзулері



13-сурет

сәйкесінше $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ және $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ нүктелері арқылы өтетін Oy осіне параллель түзулер. Сонда 13-суретте кескінделген қисықсызықты трапецияны аламыз.

Мұндағы $f(x) = 2\cos x$, $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, онда $F(x) = 2\sin x$. Шыққан қисықсызықты трапецияның ауданын екі тәсілмен есептеуге болады.

I тәсіл. Қисықсызықты трапецияның ауданын (3)-формуланы қолданып есептейміз:

$$S_{\text{қ.тр.}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(1 + 1) = 4.$$

II тәсіл. 10-суретте кескінделген фигура Oy осіне қарағанда симметриялы, сондықтан $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісіндегі қисықсызықты трапецияның ауданын есептеп, екіге көбейтуге болады, мұндағы $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$. Сонда $S_{\text{қ.тр.}} = 2 \cdot \left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right) =$
$= 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4(1 - 0) = 4.$

Жауабы: 4 кв. бірл.

1. Қисықсызықты трапеция ұғымының трапеция ұғымынан айырмашылығы неде?
2. Қисықсызықты трапецияның ауданын геометриядан белгілі формулалар арқылы есептеуге бола ма?
3. $[a; b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы қандай функция болуы керек?

Жаттығулар

А

Берілген қисықтармен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын табыңдар (2.1—2.3):

2.1. 1) $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

2) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

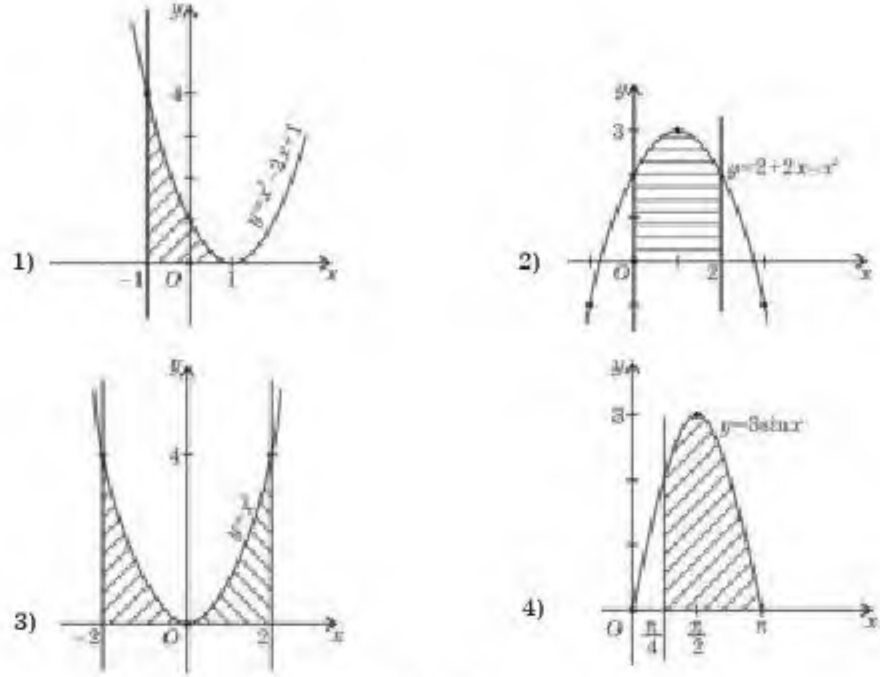
2.2. 1) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

2) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

2.3. 1) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

2) $y = 1 - x^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

2.4. 14-суретте кескінделген қисықсызықты трапецияның ауданын есептеңдер:



14-сурет

B

Берілген қисықтармен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын табыңдар (**2.5—2.8**):

2.5. 1) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, $\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 2;$

2) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$, $\quad y = 0,\quad x = -1,\quad x = 0.$

2.6. 1) $y = 3x^2 - 4x$, $\quad y = 0,\quad x = -2,\quad x = -1;$

2) $y = 3x - x^2$, $\quad y = 0,\quad x = 2,\quad x = 1.$

2.7. 1) $y = \sin\frac{x}{2}$, $\quad y = 0,\quad x = \frac{\pi}{2},\quad x = \frac{3\pi}{2};$

2) $y = \cos 2x$, $\quad y = 0,\quad x = -\frac{\pi}{4},\quad x = \frac{\pi}{4}.$

2.8. 1) $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $\quad y = 0,\quad x = -\frac{3}{4},\quad x = 1;$

2) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = -3.$

$[a;\ b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясының графигімен, $[b;\ c]$ кесіндісінде $y = g(x)$ функциясының графигімен және Ox осімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын есептеңдер **(2.9-2.10)**:

2.9. 1) $f(x) = -x^2 + 2x$, $[0;\ 1]$ және $g(x) = 1{,}5 - 0{,}5x$, $[1;\ 3]$;

2) $f(x) = x$, $[0;\ 1]$ және $g(x) = x^2 - 4x + 4$, $[1;\ 2]$.

2.10. 1) $f(x) = 0{,}5x + 1{,}5$, $[-3;\ -1]$ және $g(x) = -x^2 - 2x$, $[-1;\ 0]$;

2) $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $[-2;\ -1]$ және $g(x) = -x$, $[-1;\ 0]$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Алғашқы функция ұғымы мен оның негізгі қасиеті және оны есептеу ережелері, анықталмаған интеграл және оны табу кестесі, функцияның шегі, қисықсызықты трапеция мен оның ауданын есептеу формуласы және алгоритмі.

§ 3. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ. НЬЮТОН—ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСЫ

Сендер анықталған интеграл ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, алғашқы функция, анықталған интеграл, интеграл астындағы функция

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Сендер анықталмаған интеграл ұғымын және қисықсызықты трапецияның ауданын есептеу формуласын білесіңдер.

Қисықсызықты трапецияның ауданын табудың тағы бір жолын қарастырайық. Ол үшін анықталған интегралдың анықтамасын берейік.

Анықтама. $F(b) - F(a)$ *айырымын* $y = f(x)$ *үзіліссіз функциясының* $[a;\ b]$ *кесіндісіндегі* ***анықталған интегралы*** *деп атайды.*

Анықталған интегралдың белгіленуі:

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Оқылуы: “интеграл a-дан b-ға дейін икстен эф дэ икс”.

Анықталған интегралдың белгілеуіндегі a-ны интегралдың *төменгі шегі*, b-ны интегралдың *жоғарғы шегі*, $f(x)$ функциясын *интеграл таңбасының ішіндегі функция* дейді, ал $f(x)dx$ — интеграл таңбасының астындағы өрнек, x — интегралдау айнымалысы.

Сендер Ньютон—Лейбниц формуласымен танысасыңдар.

Анықталған интегралдың анықтамасы бойынша

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

(2)-формула *Ньютон—Лейбниц формуласы* деп аталады.

Ньютон—Лейбниц формуласы $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз кез келген $f(x)$ функциясы үшін ақиқат.

Алдыңғы параграфтан қисықсызықты трапецияның ауданы $S = F(b) - F(a)$ формуласымен анықталатыны белгілі.

Демек, $[a;\ b]$ кесіндісінде $f(x) \geqslant 0$ болса, онда қарастырылатын қисықсызықты трапецияның ауданы

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

формуласымен есептелінеді.

Алдағы уақытта анықталған интегралды мына формуламен есептейміз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Егер интегралдау шектері мәндерінің орындарын ауыстырсақ, мына тепе-теңдікті аламыз:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (4)$$

(4)-тепе-теңдіктің ақиқаттығын өздерің дәлелдеңдер.

Сендер анықталған интегралды табуды үйренесіңдер.

МЫСАЛ

1. 1) $\int_0^3 x^2dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$; 3) $\int_{-1}^{1} \frac{8}{\sqrt{5+4x}}dx$ интегралдарын есептейік.

Шешуі. 1) $f(x) = x^2$ функциясының алғашқы функцияларының бірі $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Енді Ньютон—Лейбниц формуласын қолданамыз:

$$\int_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9.$$

2) $f(x) = \sin x$ функциясының алғашқы функцияларының бірі $F(x) = -\cos x$. Демек,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

3) $f(x) = \frac{8}{\sqrt{5+4x}}$ функциясының алғашқы функциясын табу үшін $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясының алғашқы функцияларының бірі мен алғашқы функцияны табудың екінші және үшінші ережелерін қолданамыз:

$$\int_{-1}^{1} \frac{8}{\sqrt{5+4x}}dx = 8\cdot 2\cdot \frac{1}{4}\sqrt{5+4x}\Big|_{-1}^{1} = 4\left(\sqrt{5+4\cdot 1} - \sqrt{5+4\cdot(-1)}\right) = 4(3-1) = 8.$$

Жауабы: 1) 9; 2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; 3) 8.

МЫСАЛ

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin x\, dx = \int\limits_0^1 6x^2 dx$ теңдігінің ақиқат екенін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Ол үшін теңдікте берілген анықталған интегралдардың мәндерін есептеп, салыстыру керек.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin x\, dx = -4\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -4\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -4\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2;$$

$$\int\limits_0^1 6x^2 dx = 6\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2x^3\Big|_0^1 = 2\cdot 1^3 - 2\cdot 0^3 = 2.$$

Анықталған интегралдардың мәндері өзара тең. Демек, берілген теңдік ақиқат.

МЫСАЛ

3. x-тің қандай мәнінде $\int\limits_0^x (6-2t)\, dt = 5$ теңдігі орындалатынын көрсетейік.

Шешуі. Алдымен интеграл өрнегін табайық:

$$\int\limits_0^x (6-2t)\, dt = (6t - t^2)\Big|_0^x = (6x - x^2) - (6\cdot 0 - 0^2) = 6x - x^2.$$

Соңғы өрнекті 5 санына теңестіріп, шыққан $6x - x^2 = 5$ теңдеуін шешеміз.
$x^2 - 6x + 5 = 0$ теңдеуінің түбірлері $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Демек, берілген теңдік $x = 1$ және $x = 5$ мәндерінде орындалады.

Жауабы: 1; 5.

?

1. Анықталған интегралдың анықталмаған интегралдан қандай айырмашылығы бар?
2. $\int\limits_a^b f(x)dx$ неге анықталған интеграл деп аталады?
3. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Ньютон—Лейбниц формуласын жазу үшін $f(x)$ функциясы қандай шартты қанағаттандыруы керек?

Жаттығулар

А

Интегралды есептеңдер (3.1—3.10):

3.1. 1) $\int\limits_0^1 x^5 dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

3) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^4} dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$.

3.2. 1) $\int\limits_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$; 4) $\int_{9}^{16} \frac{3}{\sqrt{x}} dx$.

3.3. 1) $\int_{-2}^{1} 4x^3\, dx$; 2) $\int_{-1}^{1} 5x^4 dx$;

3) $\int_{1}^{3} \frac{x^2}{5} dx$; 4) $\int_{-2}^{1} \frac{x^3}{2} dx$.

3.4. 1) $\int_{2}^{3} (2x - 1)dx$; 2) $\int_{0}^{1} (3x + 2)dx$;

3) $\int_{0}^{3} (x^3 - 2)dx$; 4) $\int_{2}^{4} (3x^2 + 1)\, dx$.

3.5. 1) $\int_{1}^{2} (2x - x^2)dx$; 2) $\int_{0}^{2} (2x + x^2)dx$;

3) $\int_{0}^{1} (1 + x^4)dx$; 4) $\int_{-1}^{0} (1 - x^5)dx$.

3.6. 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1)dx$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \sin x)dx$;

3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (3 - 5\cos x)dx$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (4\sin x + 3)dx$.

3.7. 1) $\int_{0}^{1} (8x^7 + 2)dx$; 2) $\int_{-1}^{0} (3 - 9x^8)dx$;

3) $\int_{-1}^{1} (6x^5 - 4)dx$; 4) $\int_{1}^{2} (7x^6 + 9)dx$.

3.8. 1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 3\cos x)\, dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 5\sin x)dx$;

3) $\int_{0}^{\pi} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{4}\right)dx$; 4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{2}\right)dx$.

3.9. 1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)dx$;

3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$.

3.10. 1) $\int_{1}^{4} \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int_{4}^{9} \left(6 - \frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int\limits_{-5}^{0}\left(\frac{4}{\sqrt{x+9}}+5\right)dx$; 4) $\int\limits_{0}^{8}\left(7-\frac{5}{\sqrt{1+x}}\right)dx$.

Теңдіктердің ақиқат екенін дәлелдеңдер (3.11-3.12):

3.11. 1) $\int\limits_{1}^{2}3x^2dx=\int\limits_{0}^{1}14xdx$; 2) $\int\limits_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_{1}^{3}dx$.

3.12. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\limits_{0}^{1}4x^3\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1}5x^4\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$.

3.13. x-тің қандай мәндерінде төмендегі теңдіктер орындалады:

1) $\int\limits_{-1}^{x}3t^2\,dt=2$; 2) $\int\limits_{x}^{1}4t\,dt=2$;

3) $\int\limits_{0}^{x}15t^4\,dt=96$; 4) $\int\limits_{x}^{0}9t^2\,dt=3$?

B

Есептеңдер (3.14—3.19):

3.14. 1) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(2x+1)^3dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{0}\left(3-\frac{x}{2}\right)^2dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}(3x-2)^3\,dx$; 4) $\int\limits_{-4}^{0}\left(5+\frac{x}{4}\right)^2dx$.

3.15. 1) $\int\limits_{3}^{4}\frac{dx}{(x-2)^2}$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x+3)^2}$;

3) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(0,5x+1)^4}$; 4) $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{(2-0,2x)^5}$.

3.16. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$; 2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2\frac{x}{2}\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi}3\cos^2 2x\,dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{4}\sin^2 4x\,dx$.

3.17. 1) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{1-x^2}{1-x}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1}\frac{16-x^4}{2-x}dx$;

3) $\int\limits_{1}^{2}\frac{1-8x^3}{1-2x}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3+2x^2+4x+3}{x+1}\,dx$.

3.18. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$; 2) $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{12}\right)dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi} \left(1 - 2\cos^2\frac{x}{6}\right)dx$.

3.19. 1) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{3x - 2}}$; 2) $\int\limits_{4}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x + 4}}$;

3) $\int\limits_{4}^{20} \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} - 1}}$; 4) $\int\limits_{0}^{9} \frac{dx}{4 \cdot \sqrt{\frac{x}{3} + 1}}$.

x-тің қандай мәндерінде берілген теңдіктер орындалады (**3.20-3.21**):

3.20. 1) $\int\limits_{0}^{x} (5 - 2t)dt = 4$; 2) $\int\limits_{0}^{x} (8 - 2t)dt = 12$?

3.21. 1) $\int\limits_{0}^{x} (3 - 2t)dt = 4 - 2x$; 2) $\int\limits_{0}^{x} (1 - 4t)dt = 12 - 9x$?

x-тің қандай мәндерінде берілген теңсіздіктер орындалады (**3.22-3.23**):

3.22. 1) $\int\limits_{0}^{x} 3dt > 1$; 2) $\int\limits_{x}^{x^2} 4dt < 0$?

3.23. 1) $\int\limits_{x}^{1} 5dt > 9$; 2) $\int\limits_{x}^{2} (2t - 1)dt > 0$?

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

3.24. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ белгісі француз математигі және физигі Жан-Батист Жозеф Фурьенің жұмыстарынан кейін кеңінен қолданыла бастады.

Ж. Фурье
(1768—1830)

Функция және оның графигі, алғашқы функция, оның қасиеті және алғашқы функцияны табу ережелері мен есептеу кестесі, қисықсызықты трапеция және оның ауданын табу алгоритмі, анықталған интеграл, Ньютон—Лейбниц формуласы, көпбұрыштар және олардың ауданын есептеу формулалары.

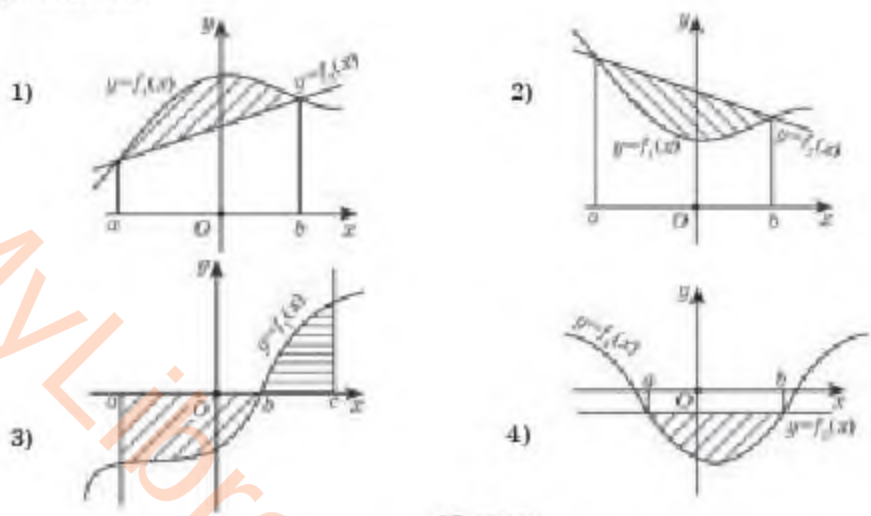
§ 4. ЖАЗЫҚ ФИГУРАНЫҢ АУДАНЫН ЖӘНЕ АЙНАЛУ ДЕНЕСІНІҢ КӨЛЕМІН АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ КӨМЕГІМЕН ЕСЕПТЕУ

Сендер берілген сызықтармен шектелген жазық фигураның ауданын есептеуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, алғашқы функция, анықталған интеграл, жазық фигура, айналу денесі, аудан, көлем

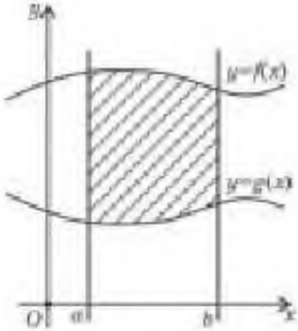
Сендер қисықсызықты трапецияның ауданын есептеуді үйрендіңдер. Ал енді бұл параграфта геометриядан белгілі формулалар арқылы есептелмейтін кез келген жазық фигураның ауданын қалай табуға болатынына тоқталамыз. Жазық фигуралардың орналасуының әртүрлі жағдайлары 15-суретте көрсетілген.



15-сурет

Осындай жазық фигуралардың аудандарын анықталған интеграл арқылы есептеуді қарастырайық.

Жоғарыдан $y = f(x)$ функциясының графигімен, ал төменнен $y = g(x)$ функциясының графигімен, сол жағынан $x = a$, оң жағынан $x = b$ түзулерімен шектелген жазық фигура берілсін (16-сурет).



16-сурет

16-суреттен екі қисықсызықты трапецияны көруге болады. Демек, штрихпен берілген жазық фигураның ауданын анықтау үшін үлкен қисықсызықты трапецияның ауданынан кіші қисықсызықты трапецияның ауданын азайту керек:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Сонымен,

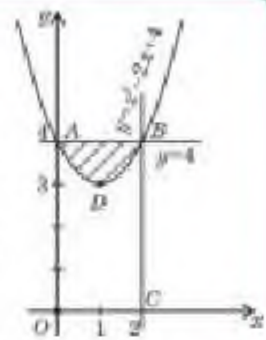
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx. \qquad (1)$$

МЫСАЛ **1.** $y = x^2 - 2x + 4$ және $y = 4$ қисықтарымен шектелген фигураның ауданын табайық.

Шешуі. Алдымен бір координаталық жазықтыққа берілген функциялардың графиктерін саламыз. $y = x^2 - 2x + 4$ функциясының графигі төбесі (1; 3) нүктесі болатын, тармақтары жоғары бағытталған парабола, ал $y = 4$ қисығы (0; 4) нүктесі арқылы өтетін Ox осіне параллель түзу (17-сурет).

Енді графиктердің қиылысу нүктелерін табамыз. Ол үшін $x^2 - 2x + 4 = 4$ теңдеуін шешеміз. Сонда $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Демек, интегралдау шектері $a = 0$ және $b = 2$.

Штрихталған жазық фигураның ауданын есептеудің екі тәсілін қарастырайық, мұнда $f(x) = 4$ және $g(x) = x^2 - 2x + 4$.



17-сурет

I тәсіл. (1)-формуланы қолданамыз:

$$S_ф = \int_0^2 (4 - x^2 + 2x - 4)dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

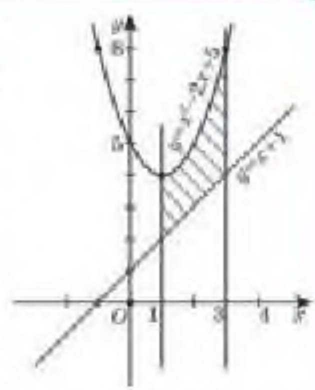
II тәсіл. $OABC$ тіктөртбұрышының ауданынан $OADBC$ қисықсызықты трапецияның ауданын аламыз: $S_ф = S_{OABC} - S_{қ.тр.}$, $S_{OABC} = AB \cdot BC = 2 \cdot 4 = 8$.

$$S_{қ.тр.} = \int_0^2 (x^2 - 2x + 4)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 8 = \frac{20}{3}.$$ Сонда $S_ф = 8 - \frac{20}{3} = \frac{4}{3}$.

Жауабы: $\frac{4}{3}$ кв. бірл.

МЫСАЛ **2.** $y = x^2 - 2x + 5$, $y = x + 1$ функцияларының графиктерімен және $x = 1$, $x = 3$ түзулерімен шектелген жазық фигураның ауданын есептейік.

Шешуі. Бір координаталық жазықтыққа берілген қисықтарды саламыз. $y = x^2 - 2x + 5$ функциясының графигі төбесі (1; 4) нүктесі болатын, Oy осімен (0; 5) нүктесінде қиылысатын, тармақтары жоғары бағытталған парабола; $y = x + 1$ функциясының графигі (−1; 0) және (0; 1) нүктелері арқылы өтетін түзу, ал $x = 1$ және $x = 3$ түзулері сәйкесінше (1; 0), (3; 0) нүктесі арқылы өтетін Oy осіне параллель түзулер (18-сурет). Суретте кескінделген жазық фигураның ауданын табу үшін (1)-формуланы қолданамыз. Мұнда $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $g(x) = x + 1$, $a = 1$ және $b = 3$.



18-сурет

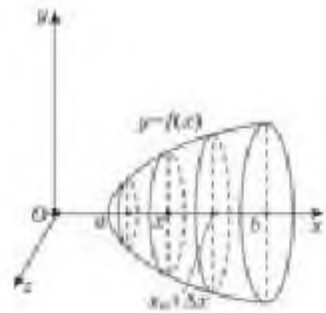
Сонда

$$S_ф = \int_1^3((x^2 - 2x + 5) - (x + 1))dx = \int_1^3 (x^2 - 2x + 5 - x - 1)dx = \int_1^3 (x^2 - 3x + 4)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 = \frac{14}{3}.$$

Жауабы: $\frac{14}{3}$ кв. бірл.

Сендер айналу денесінің көлемін анықталған интеграл көмегімен есептеу формуласымен танысасыңдар.



19-сурет

Айналу денесінің көлемін табу үшін интегралдың қолданылуын қарастырайық.

Ол үшін $[a; b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясының графигімен шектелген қисықсызықты трапеция берілсін.

Осы қисықсызықты трапецияны Ox осінен айналдырғанда пайда болған геометриялық дененің көлемін табу керек болсын (19-сурет).

$[a; b]$ кесіндісінің бойынан кез келген x нүктесін алайық. Егер осы нүкте арқылы Ox осіне перпендикуляр жазықтық жүргізсек, онда жазықтық айналу денесін дөңгелек бойымен қиып өтеді (қимада дөңгелек пайда болады). Ал шыққан дөңгелектің радиусы y-ке тең. Демек, қиманың ауданы $Q(x) = \pi y^2$.

$[a; b]$ кесіндісінде $Q(x)$ қимасының ауданы үзіліссіз екені айқын. $[a; x]$ кесіндісіне сәйкес дене бөлігінің көлемін $V(x)$ арқылы өрнектейік (19-сурет).

$V(x)$ функциясының туындысын табамыз. Ол үшін қандай да бір x_0 мәнін алып, оған Δx өсімшесін берейік. Δx мәні нөлден үлкен немесе нөлден кем болуы мүмкін. $\Delta x > 0$ деп есептесек, $V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)$ айырымы Ox осінен алынған x_0 және $x_0 + \Delta x$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтар арасында орналасқан дененің көлемі болады (19-сурет). Суреттен мына теңдік орындалады:

$$Q(x_0) \cdot \Delta x \leqslant V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) \leqslant Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Мұндағы $Q(x_0) \cdot \Delta x$ — алынған қабат ішіне толығымен тиісті болатын цилиндрлік дененің көлемі, ал $Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$ — осы қабатты қамтитын дененің көлемі $\Delta x > 0$ болғандықтан

$$Q(x_0) \leqslant \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} \leqslant Q(x_0 + \Delta x).$$

$Q(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз. Сондықтан ол x_0 нүктесінде де үзіліссіз. Демек, егер Δx мәні нөлге ұмтылса, онда $Q(x_0 + \Delta x)$ мәні $Q(x_0)$ мәніне ұмтылады. Сондықтан $\Delta x \to 0$ жағдайында $\dfrac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x}$ мәні $Q(x_0)$ мәніне ұмтылады. Сонымен, $V'(x_0) = \dfrac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = Q(x_0)$. Ендеше, $V(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде $Q(x)$ функциясы үшін алғашқы функция болады. Сонда

$$\int_a^b Q(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a).$$

Енді айналу денесінің көлемін табу үшін a-дан b-ға дейінгі аралықта $Q(x) = \pi y^2$ функциясының интегралын есептеген жеткілікті, яғни

$$V = \int_a^b Q\ (x)\ dx = \pi\int_a^b y^2 dx. \qquad (2)$$

МЫСАЛ 3. $y = 2x^2$ параболасын $x = 0$-ден $x = 2$-ге дейін абсцисса осіне қатысты айналдырғанда шыққан дененің көлемін табайық.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $a = 0$, $b = 2$ және $y = 2x^2$. Дененің көлемін табу үшін (2)-формуланы қолданамыз. Сонда

$$V = \pi\int_0^2 (2x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 4x^4 dx = 4\pi\int_0^2 x^4 dx = 4\pi\,\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = 4\pi\cdot\frac{2^5}{5} = 4\pi\cdot 6{,}4 = 25{,}6\pi.$$

Жауабы: $25{,}6\pi$ куб. бірл.

?

1. Қандай жағдайда фигураның ауданын анықталған интегралдың көмегімен есептейді?
2. Жазық фигураның тек қана қисықсызықты трапециялардан тұруы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар (**4.1-4.2**):

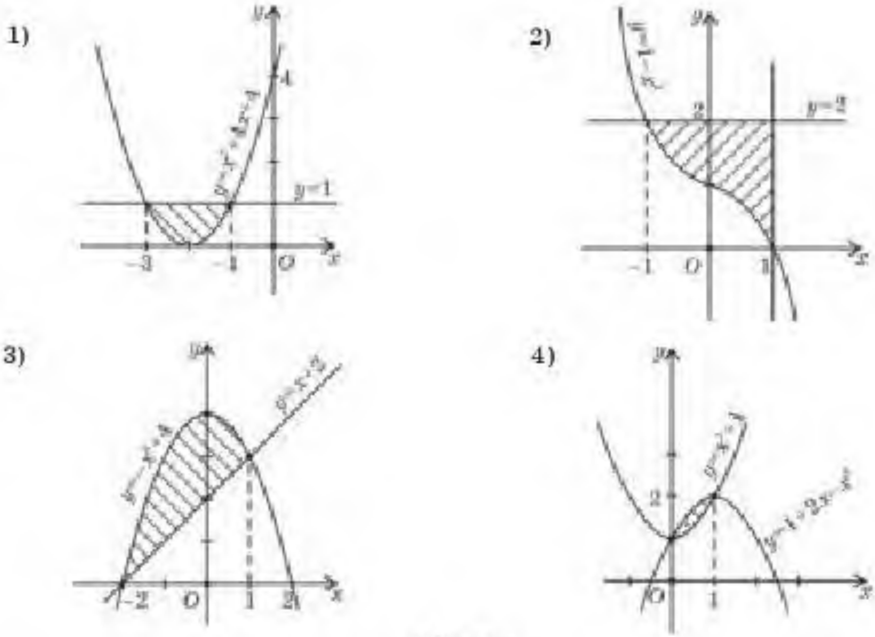
4.1. 1) $y = x^2$, $y = x$; 2) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$;

3) $y = x^2$, $y = 4$; 4) $y = -x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

4.2. 1) $y = (x + 1)^2$, $y = 1$; 2) $y = x^3$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$;

3) $y = x^2 + 1$, $y = 5$; 4) $y = 3 - x^2$, $y = 2$;

5) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$; 6) $y = x^3 + 1$, $y = 1$, $x = 1$.



20-сурет

4.3. 20-суретте кескінделген фигуралардың аудандарын есептеңдер.

4.4. Аргументі $[a;\ b]$ кесіндісінде өзгеретін $y = f(x)$ функциясының графигімен және Ox осімен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

1) $f(x) = \sin x$, $[0;\ 2\pi]$; 2) $f(x) = \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

4.5. $y = x^2$ параболасын $x = 0$-ден $x = 3$-ке дейін абсцисса осі бойымен айналдырғанда шыққан дененің көлемін табыңдар;

4.6. $y = 3x^2$ параболасын $x = 1$-ден $x = 2$-ге дейін абсцисса осі бойымен айналдырғанда шыққан дененің көлемін есептеңдер.

4.7. 1) $y = \frac{2}{x}$ гиперболасын $x = 1$-ден $x = 3$-ке дейін абсцисса осі бойымен айналдырғанда шыққан дененің көлемін табыңдар;

2) $y = \frac{3}{x}$ гиперболасын $x = 1$-ден $x = 2$-ге дейін абсцисса осі бойымен айналдырғанда шыққан дененің көлемін табыңдар.

B

4.8. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = 2\cos x$, $y = 2\sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$;

3) $y = x$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$; 4) $y = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = \frac{1}{2}$.

4.9. 1) $y = 2x^3$ функциясының графигімен, осы графикке $(-1; -2)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанамамен және $x = 1$ түзуімен шектелген жазық фигураның ауданын есептеңдер.

2) $y = 0$ түзуімен, $y = 2x - x^2$ параболасы және осы параболаның $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ нүктесінен өтетін жанамамен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар.

Берілген функциялардың графигімен шектелген жазық фигураның ауданын есептеңдер (4.10-4.11):

4.10. 1) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$; 2) $y = x^2 + 2x + 4$, $y = x + 6$;

3) $y = -x^2 + 3$, $y = 2x - 6$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = 1 - 2x$.

4.11. 1) $y = x^2 - 8x + 12$, $y = -x^2 + 8x - 18$;

2) $y = x^2 + 6x + 5$, $y = x^2 - 6x - 11$;

3) $y = x^2 - 4x - 1$, $y = -x^2 - 4x + 7$;

4) $y = x^2 + 3x - 5$, $y = -x^2 + 3x - 3$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Алғашқы функциясы $F(x) = 9x^2 - 0,5x$ болатын $y = f(x)$ функциясын көрсетіңдер:

A) $18x + \frac{1}{2}$; B) $4,5x - 0,5$;

C) $4,5x + 0,5$; D) $18x - \frac{1}{2}$.

2. $y = 4x + 6x^3$ функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін көрсетіңдер:

A) $8x + 1,5x^2 + C$; B) $2x^2 + 1,5x^4 + C$;

C) $8x^2 + \frac{3}{2}x^4 + C$; D) $4 + 18x^2 + C$.

3. $y = 3x^2 - 1$ функциясы үшін $A(0; 0)$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функцияны табыңдар:

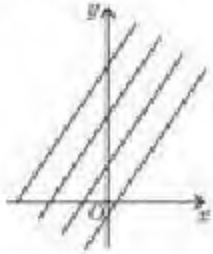
A) $x^3 - x + 1$; B) $x^3 - x$;

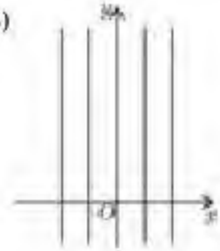
C) $x^3 - x - 1$; D) $x^3 + x + 1$.

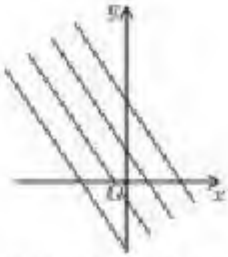
4. Қандай аралықта $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2x^2}$ функциясы үшін $F(x) = \frac{2x^3}{9} + \frac{3}{2x}$ функциясы алғашқы функция болып табылады:

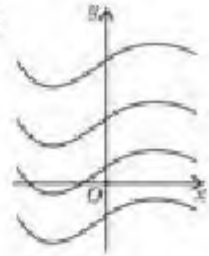
A) $(-\infty; +\infty)$; B) $(0; +\infty)$; C) $(-\infty; 1)$; D) $(-1; +\infty)$?

5. Берілген графиктердің қайсысы алғашқы функцияның геометриялық мағынасын кескіндемейді?

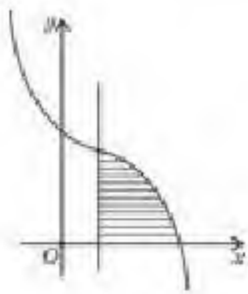
A)


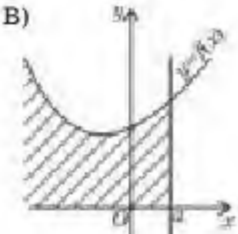
B)


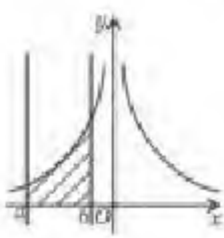
C)


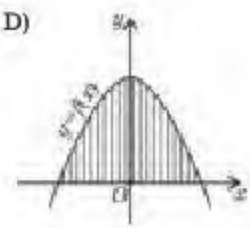
D)


6. Суретте кескінделген фигуралардың қайсысы қисықсызықты трапеция болмайды?

A)


B)


C)


D)


7. $y = x^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$ қисықтарымен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданын табыңдар:

A) 3; B) 1; C) $\frac{7}{3}$; D) $\frac{5}{3}$.

8. $\int\limits_{-1}^{1} x^{10}dx$ интегралын есептеңдер:

A) 0; B) $\frac{2}{11}$; C) 22; D) $\frac{1}{22}$.

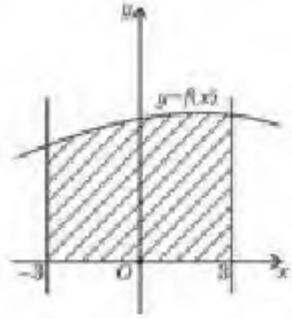
9. Суретте көрсетілген фигураның ауданын табу формуласын жазыңдар:

A) $S = \int\limits_a^b f(x)dx$;

B) $S = 2\int\limits_{-3}^{0} f(x)dx$;

C) $S = \int\limits_{3}^{-3} f(x)dx$;

D) $S = \int\limits_{-3}^{3} f(x)dx$.



10. $\int\limits_4^9 \frac{25\sqrt{x}}{x}dx$ интегралының мәнін табыңдар:

A) 50; B) 10; C) 5; D) 25.

11. $[a;\ b]$ кесіндісінде берілген үзіліссіз және теріс емес функциядан алынған анықталған интеграл нені білдіреді:

A) қисықсызықты трапецияның ауданын;

B) алғашқы функцияның жалпы түрін;

C) функцияның туындысын;

D) айналу денесінің көлемін?

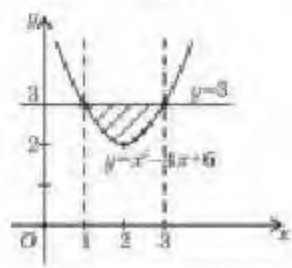
12. Суретте кескінделген жазық фигураның ауданын есептеңдер:

A) $\frac{3}{4}$;

B) $\frac{14}{3}$;

C) $\frac{4}{3}$;

D) $\frac{32}{3}$.



13. $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болу үшін қандай шарт орындалуы қажет:

A) $F(x) = f(x)$; C) $F(x) = f'(x)$;

B) $F'(x) = f(x)$; D) $F'(x) = f'(x)$?

14. C-ның қандай мәнінде $f(x) = 5\sin 5x$ функциясының $F(x)$ алғашқы функциясы $K\left(\frac{\pi}{5};\ 1\right)$ нүктесі арқылы өтеді:

A) 0; B) 2; C) −1; D) 1?

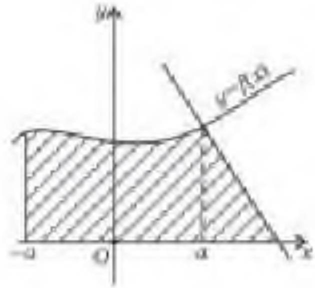
15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4}\cos x dx$ интегралының мәнін табыңдар:

A) $\frac{1}{16}$; B) $-\frac{1}{16}$; C) $-\frac{1}{8}$; D) $\frac{1}{8}$.

16. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^3-4x^2-5x}{x-5}dx$ интегралының мәнін есептеңдер:

A) $\frac{1}{6}$; B) $-\frac{1}{6}$; C) $\frac{5}{6}$; D) $-\frac{5}{6}$.

17. Суретте кескінделген жазық фигураның ауданын табу формуласын жазыңдар:



A) $S=\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx+S_{\Delta}$;

B) $S=\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$;

C) $S=\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx-S_{\Delta}$;

D) $S=2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx+S_{\Delta}$.

18. Төменде берілген салыстырулардың қайсысы ақиқат емес:

A) $\int\limits_{1}^{2} x^2dx<\int\limits_{2}^{3} xdx$; B) $\int\limits_{1}^{9} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx>\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$;

C) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$; D) $\frac{1}{7}\int\limits_{3}^{4} dx<\int\limits_{100}^{101} dx$?

19. x-тің қандай мәндерінде $\int\limits_{0}^{x} (2t-5)dt=-6$ теңдігі орындалады:

A) ондай мән жоқ; B) -2; -3;

C) кез келген сан; D) 2; 3?

20. x-тің қандай мәндерінде $\int\limits_{0}^{x} (2t-4)dt\leq-3$ теңсіздігі орындалады:

A) (1; 3); B) $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$;

C) [1; 3]; D) [−3; −1]?

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Өрнек, санның дәрежесі, дәреженің негізі, дәреженің көрсеткіші, санның түбірі, арифметикалық түбір, түбірдің қасиеттері, рационал және иррационал сандар.

II ТАРАУ

ДӘРЕЖЕ ЖӘНЕ ТҮБІР. ДӘРЕЖЕЛІК ФУНКЦИЯ

§ 5. n-ші ДӘРЕЖЕЛІ ТҮБІР ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Сендер n-ші дәрежелі түбір ұғымымен және n-ші дәрежелі арифметикалық түбір анықтамасымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің көрсеткіші, түбір, квадрат түбір, арифметикалық квадрат түбір, түбірдің мәні

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Мысалы, 25 санының арифметикалық квадрат түбірі 5-ке тең, өйткені $5^2 = 25$.

a санының квадрат түбірі квадраты a санына тең болатын қандай да бір сан.

Тура осылай a санының ***n-ші дәрежелі түбірінің*** анықтамасын беруге болады.

Анықтама. ***a санының n-ші дәрежелі түбірі*** *деп n-ші дәрежесі a санына тең болатын b санын айтады.*

Анықтама бойынша $\sqrt[n]{a} = b$, мұндағы $a = b^n$. (1)

Мұнда a саны — n-ші дәрежелі түбір таңбасының ішіндегі сан, n — түбірдің көрсеткіші және $n \in N$ $(n \neq 1)$, b саны a санының n-ші дәрежелі түбірі.

Мысалы, 27 санының үшінші дәрежелі түбірі 3-ке тең: $\sqrt[3]{27} = 3$, өйткені $3^3 = 27$.

n-ші дәрежелі түбір анықтамасындағы түбір көрсеткішінің жұп және тақ болатын жағдайларын жеке қарастырайық.

n жұп сан болса, онда $b^n = a \geq 0$, тек қана оң сан, себебі кез келген санның жұп дәрежесі теріс емес сан болады. Демек, жұп дәрежелі түбір таңбасының ішіндегі a саны теріс сан болуы мүмкін емес.

Егер түбір көрсеткіші n тақ болса, онда кез келген саннан n-ші дәрежелі түбірді есептеуге болады. Бұл жағдайда $b^n = a$ теңдігіндегі a және b сандарының таңбалары бірдей, яғни оң саннан оң, теріс саннан теріс түбір шығады.

Мысалы, 1) $\sqrt[5]{-32} = -2$, себебі $(-2)^5 = -32$;

2) $\sqrt[3]{64} = 4$, себебі $4^3 = 64$.

a санының n-ші дәрежелі түбірі x-ке тең болсын. Онда анықтама бойынша $x^n = a$ теңдеуін аламыз. n жұп болғанда, $x^n = a$ теңдеуінің (мұндағы $a > 0$, $n \in N$, $n \neq 1$) $-\sqrt[n]{a}$ және $\sqrt[n]{a}$ екі түбірі, ал n тақ болғанда $\sqrt[n]{a}$ шамасына тең бір түбірі болады.

Мысалы, 7 және −7 сандары $x^4 = 2301$ теңдеуінің түбірі болады, өйткені $7^4 = 2301$ және $(-7)^4 = 2301$.

Анықтама. *Теріс емес a санының n-ші дәрежелі* ***арифметикалық түбірі*** *деп n-ші дәрежесі a санына тең болатын теріс емес b санын айтады.*

Сендер n-ші дәрежелі түбір қасиеттерін білесіңдер.

$n \in N$ және $k \in N$ болғанда a және b теріс емес нақты сандары үшін n-ші және k-ші дәрежелі түбірлердің мына қасиеттері орындалады:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
5. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Берілген n-ші дәрежелі түбірдің қасиеттерін дәрежелеу және түбір табу амалдарының анықтамаларын пайдаланып дәлелдеуге болады.

Екінші қасиетті $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ дәлелдейік.

Дәлелдеу. n-ші дәрежелі түбірдің анықтамасы бойынша $\sqrt[n]{ab}$ дегеніміз — n-ші дәрежесі ab-ға тең теріс емес сан. $\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$ болғандықтан, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ саны теріс емес. Сондықтан натурал көрсеткішті дәреженің $(a \cdot b)^n = a^n b^n$ қасиеті мен n-ші дәрежелі түбірдің анықтамасынан $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$ немесе

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$$

теңдігін алуға болады. Сонымен, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Алтыншы қасиетті $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ дәлелдейік.

Дәлелдеу. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ өрнегін nk дәрежесіне шығарайық: $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right]^k =$

$= (\sqrt[k]{a})^k = a$. Соңғы теңдіктен $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)$ өрнегі a санының nk дәрежелі түбірі

екені шығады.

1-, 3-, 4-, 5-қасиеттердің дәлелдеуін өздерің қарастырыңдар.

МЫСАЛ

1. Берілген өрнектерді түрлендірейік:

1) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$; 2) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{7}}$; 4) $\sqrt[21]{128}$.

Шешуі. 1) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{8\cdot 4}=\sqrt[5]{32}=2$;

2) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}=1,5$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[15]{7}$;

4) $\sqrt[21]{128}=\sqrt[21]{2^7}=\sqrt[3]{2}$.

Жауабы: 1) 2; 2) 1,5; 3) $\sqrt[15]{7}$; 4) $\sqrt[3]{2}$.

МЫСАЛ 2. 1) $\sqrt[4]{243b^4}$, $b>0$; 2) $\sqrt{45b^6}$, $b<0$; 3) $\sqrt[3]{500a^6b^8}$ түбірлерінен көбейткішті түбір таңбасының алдына шығарайық.

Шешуі. 1) $b>0$ болғандықтан, түбір таңбасының ішінен оң таңбалы көбейткіш шығады:

$$\sqrt[4]{243b^4}=\sqrt[4]{3\cdot 81\cdot b^4}=3b\sqrt[4]{3};$$

2) $b<0$, сондықтан түбір таңбасының ішінен теріс таңбалы көбейткіш шығады:

$$\sqrt{45b^6}=\sqrt{5\cdot 9\cdot (b^3)^2}=-3b^3\sqrt{5};$$

3) $\sqrt[3]{500a^6b^8}=\sqrt[3]{125\cdot 4\cdot (a^2)^3\cdot (b^2)^3\cdot b^2}=5a^2b^2\sqrt[3]{4b^2}$.

Жауабы: 1) $3b\sqrt[4]{3}$; 2) $-3b^3\sqrt{5}$; 3) $5a^2b^2\sqrt[3]{4b^2}$.

МЫСАЛ 3. 1) $4\sqrt[3]{3}$; 2) $-a\sqrt[6]{3}$, $a>0$ өрнектеріндегі көбейткішті түбір астына енгізейік.

Шешуі. 1) $4\sqrt[3]{3}$ өрнегінде түбір үшінші дәрежелі болғандықтан, 4 санын түбір таңбасының ішіне үшінші дәрежемен енгіземіз:

$$4\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{4^3\cdot 3}=\sqrt[3]{192}.$$

2) $-a\sqrt[6]{3}$ өрнегіндегі a саны теріс емес сан және түбір алтыншы дәрежелі болғандықтан, түбір таңбасының ішіне a санының алтыншы дәрежесін енгіземіз:

$$-a\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{3a^6}.$$

Жауабы: 1) $\sqrt[3]{192}$; 2) $-\sqrt[6]{3a^6}$.

? 1. n-ші дәрежелі түбір мәнінің саны неге байланысты? Жауабын түсіндіріңдер.
2. Неге теріс санның жұп дәрежелі түбірі болмайды? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

Берілген теңдіктердің орындалатынын тексеріңдер (**5.1-5.2**):

5.1. 1) $\sqrt[3]{64}=4$; 2) $\sqrt[5]{-1}=-1$; 3) $\sqrt[10]{1024}=2$; 4) $\sqrt[5]{-243}=-3$.

5.2. 1) $\sqrt[21]{1}=1$; 2) $\sqrt[6]{64}=2$; 3) $\sqrt[3]{-125}=-5$; 4) $\sqrt[17]{0}=0$.

Есептеңдер (**5.3-5.4**):

5.3. 1) $\sqrt[5]{-32}$; 2) $\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[3]{-64}$; 4) $\sqrt[3]{-216}$.

5.4. 1) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{625}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{256}{81}}$.

Теңдеулерді шешіңдер (**5.5-5.6**):

5.5. 1) $x^3 + 8 = 0$; 2) $x^6 = 7$; 3) $x^3 = 4$; 4) $x^4 = 16$.

5.6. 1) $16x^4 - 1 = 0$; 2) $0{,}01x^3 + 10 = 0$;

3) $x^7 + 128 = 0$; 4) $x^6 - 64 = 0$.

Өрнектің мәнін табыңдар (**5.7—5.11**):

5.7. 1) $\left(-\sqrt[4]{13}\right)^4$; 2) $\left(3\sqrt[5]{(-3)}\right)^5$; 3) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3$; 4) $\left(-\sqrt[6]{2}\right)^6$.

5.8. 1) $\sqrt[4]{625\cdot 81}$; 2) $\sqrt[5]{243\cdot 32}$; 3) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; 4) $\sqrt[4]{0{,}0001\cdot 81}$.

5.9. 1) $\sqrt[5]{625\cdot 160}$; 2) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; 3) $\sqrt[4]{27\cdot 48}$; 4) $\sqrt[3]{45\cdot 75}$.

5.10. 1) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[9]{8}$; 2) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{-8}$; 3) $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}$; 4) $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[6]{25}$.

5.11. 1) $\frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{-8}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; 4) $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}$.

5.12. Көбейткішті түбір таңбасының алдына шығарыңдар ($x > 0$, $y > 0$):

1) $\sqrt[6]{64x^{11}y^{13}}$; 2) $\sqrt[4]{256x^8\cdot y^9}$; 3) $\sqrt[3]{54x^{12}\cdot y^{13}}$; 4) $\sqrt[4]{16x^5y^7}$.

5.13. Түбір сыртындағы көбейткішті түбір таңбасының ішіне енгізіңдер ($x > 0$, $y > 0$):

1) $x^2y\sqrt[3]{4}$; 2) $xy^2\sqrt[5]{\frac{3y^3}{x^4}}$; 3) $x^2y^3\sqrt[4]{8}$; 4) $xy^2\sqrt[3]{-5}$.

Өрнектерді ықшамдаңдар (**5.14-5.15**):

5.14. 1) $\sqrt[7]{x^7}$ өрнегін $x \geqslant 0$, $x < 0$ жағдайлары үшін қарастырыңдар;

2) $\sqrt[8]{x^8}$, мұндағы $x \geqslant 0$; 3) $\sqrt[5]{x^5}$; 4) $\sqrt{x^2}$, мұндағы $x \geqslant 0$.

5.15. 1) $\sqrt[3]{a^3}-\sqrt{a^2}$, мұндағы $a \leqslant 0$; 2) $\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[6]{x^6}$, мұндағы $x \geqslant 0$;

3) $\sqrt[4]{b^4}+2\sqrt[7]{b^7}$, мұндағы $b \geqslant 0$; 4) $\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[8]{x^8}$, мұндағы $x \leqslant 0$.

Есептеңдер (**5.16—5.18**):

5.16. 1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{-9}$; 2) $\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\cdot\sqrt[3]{100}$;

3) $\frac{\sqrt[3]{28}\cdot\sqrt[3]{45}}{\sqrt[3]{35}}\cdot\sqrt[3]{6}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{12}}$.

5.17. 1) $3-\sqrt{1\frac{9}{16}}-0{,}2\sqrt[4]{625}$; 2) $2\cdot\sqrt{1\frac{24}{25}}+0{,}8\sqrt[3]{0{,}008}$;

3) $0{,}25\cdot\sqrt[3]{729}-0{,}15\sqrt[4]{0{,}0016}$; 4) $5{,}6\cdot\sqrt[5]{243}+0{,}75\sqrt[3]{1{,}331}$.

5.18. 1) $\left(3\sqrt{175}-2\sqrt{112}-3\sqrt{63}\right)^2+0{,}25\sqrt[4]{10000}$;

2) $\left(5\sqrt{150}-3\sqrt{24}+2\sqrt{54}\right)^2-0{,}02\sqrt[4]{625}$;

3) $\sqrt[3]{375}+0{,}25\sqrt[3]{192}+10\sqrt[3]{3000}$;

4) $5\sqrt[3]{24}+\sqrt[4]{0{,}1296}-1{,}6\sqrt[3]{375}$.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

5.19. $\sqrt{\ }$ және $\sqrt[n]{\ }$ белгілерін француз математигі Альберт Жирар, неміс философы және математигі Гольфрид Вильгельм Лейбниц бірінен соң бірі қолдана бастады.

А. Жирар
(1595—1632)

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің негізі және көрсеткіші, натурал көрсеткішті дәреже, бүтін көрсеткішті дәреже мен оның қасиеттері, рационал сан, n-ші дәрежелі түбір және оның қасиеттері.

§ 6. РАЦИОНАЛ КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕ. РАЦИОНАЛ КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕСІ БАР ӨРНЕКТЕРДІ ТҮРЛЕНДІРУ

Сендер рационал көрсеткішті дәреже ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің көрсеткіші, *n*-ші дәрежелі түбір, рационал сан, өрнек

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Кез келген санды натурал дәрежеге, нөлден өзгеше санды нөлінші және теріс бүтін дәрежеге шығару, сонымен қатар кез келген a және b сандары мен кез келген m және n бүтін сандары үшін мына қасиеттердің орындалатыны белгілі:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$
6. Егер $m > n$ болса, онда

$a > 1$ жағдайында $a^m > a^n$

$0 < a < 1$ жағдайында $a^m < a^n$

Енді кез келген теріс емес санды оң және теріс бөлшек дәрежеге шығаруды қарастырайық.

Мысалы, $3^{\frac{5}{6}};\ 4^{\frac{2}{8}};\ 16^{\frac{3}{4}};\ 5^{-\frac{3}{4}}$.

Рационал көрсеткішті $a^{\frac{m}{n}}$ санын алайық, мұндағы $n \in N$, ал $m \in Z$. Осы өрнекті n-ші дәрежеге шығарсақ, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$.

n-ші дәрежелі түбірлердің анықтамасына сәйкес соңғы теңдіктен $a^{\frac{m}{n}}$ саны a^m санының n-ші дәрежелі түбірі болады. Енді рационал көрсеткішті дәреженің анықтамасын берейік.

Анықтама. *$a > 0$ **санының** $\frac{m}{n}$ **рационал көрсеткішті дәрежесі** деп a^m санынан алынған n-ші дәрежелі түбірдің мәнін айтады.*

Анықтама бойынша

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad (1)$$

мұндағы m — кез келген бүтін, n — кез келген натурал сан $(n > 1)$ және n — түбір көрсеткіші, m — түбір таңбасының ішіндегі a санының дәрежесі.

МЫСАЛ 1. Рационал көрсеткішті дәрежені түбір түрінде жазайық:

1) $6^{\frac{2}{5}}$; 2) $a^{-\frac{4}{13}}$; 3) $5^{1,7}$.

Шешуі. (1)-формуланы қолданып өрнекті: 1) $6^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{6^2}$; 2) $a^{-\frac{4}{13}} = \sqrt[13]{a^{-4}}$ түрінде жазамыз; 3) көрсеткіштегі ондық бөлшекті жай бөлшекке айналдырған соң (1)-формуланы қолданамыз: $5^{1,7} = 5^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{5^{17}}$.

Жауабы: 1) $\sqrt[5]{6^2}$; 2) $\sqrt[13]{a^{-4}}$; 3) $\sqrt[10]{5^{17}}$.

МЫСАЛ

2. 1) $8^{\frac{4}{3}}$; 2) $625^{0,75}$; 3) $128^{-\frac{3}{7}}$ өрнектерінің мәндерін есептейік.

Шешуі. (1)-формуланы қолданамыз: 1) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{8^3 \cdot 2^3} = 8 \cdot 2 = 16;$

2) $625^{0,75} = \sqrt[4]{625^3} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125;$

3) $128^{-\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{128^{-3}} = \sqrt[7]{(2^{-3})^7} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}.$

Ескерту. Егер $a < 0$ болса, онда рационал көрсеткішті дәреже бірмәнді анықталмайды.

Мысалы, $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$. Ал $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$. Сонда $(-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} =$
$= \sqrt[6]{27^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3.$

Демек, дәреженің негізі теріс сан бола алмайды.

Жауабы: 1) 16; 2) 125; 3) $\frac{1}{8}$.

! Сендер рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттерін білесіңдер.

Дәреженің қасиеттері рационал көрсеткішті дәрежелер үшін де орындалады.

$a > 0$, $b > 0$ және кез келген r мен s рационал сандары үшін мына теңдіктер орындалады:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

2- және 5-қасиеттердің дәлелдеулерін келтірейік.

Ол үшін $r = \dfrac{m}{n}$, $s = \dfrac{p}{q}$ деп белгілейік, мұндағы n және q — натурал сандар, ал m, p — бүтін сандар.

$a^r : a^s = a^{r-s}$ теңдігінің орындалатынын дәлелдейік.

Дәлелдеу.

$$a^r : a^s = a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{np}{nq}} =$$
$$= a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{r-s}, \text{ демек, } a^r : a^s = a^{r-s}.$$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$ $(b \neq 0)$ теңдігінің ақиқат болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеу. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\dfrac{a^m}{b^m}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{a^r}{b^r}$, яғни $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.

1-, 3-, 4-қасиеттердің дәлелдеуін өздерің қарастырыңдар.

Енді рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттеріне мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ **3. Өрнектерді ықшамдайық:**

$$1)\ \frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}+y^{\frac{1}{4}};\qquad 2)\ \frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}:\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}.$$

Шешуі. 1) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}+y^{\frac{1}{4}}=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}+y^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{4}}.$

Берілген өрнекті ықшамдау кезінде $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ формуласы қолданылды.
2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ формуласын, ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығару, рационал бөлшектерді көбейту, бөлу амалдарын және қысқартуды қолданып ықшамдаймыз:

$$\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}:\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}\cdot y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{4}}}=$$

$$=x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}.$$

Жауабы: 1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.

Сонымен қатар, рационал көрсеткішті дәреженің теңсіздік арқылы берілетін келесі екі қасиеті бар.

6. r — рационал сан және $0<a<b$ болса, онда

$r>0$ болғанда $a^r<b^r$;
$r<0$ болғанда $a^r>b^r$.

7. Кез келген r және s рационал сандары үшін $r>s$ теңсіздігінен

$a>1$ болса, онда $a^r>a^s$;
$0<a<1$ болса, онда $a^r<a^s$

шығады.

Сендер рационал көрсеткішті дәреже қасиеттерін алгебралық өрнектерді түрлендіруде қолдануды үйренесіңдер.

МЫСАЛ **4.** Берілген сандарды салыстырайық:

1) $\sqrt[5]{27}$ және $\sqrt[4]{9}$; 2) $\sqrt[9]{16}$ және $\sqrt[7]{8}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}$ және $\left(\frac{1}{6}\right)^{200}$.

Шешуі. 1) Алдымен n-ші дәрежелі түбірлерді негіздері бірдей рационал көрсеткішті дәрежеге келтіреміз: $\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{3^3}=3^{\frac{3}{5}}=3^{0,6}$; $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=3^{0,5}$. Енді 7-қасиетті қолданамыз: $3>1$ және $0,6>0,5$ болғандықтан, $3^{0,6}>3^{0,5}$. Демек, $\sqrt[5]{27}>\sqrt[4]{9}$.

2) n-ші дәрежелі түбірлерді негіздері бірдей рационал көрсеткішті дәрежеге келтірейік: $\sqrt[9]{16}=\sqrt[9]{2^4}=2^{\frac{4}{9}}$; $\sqrt[7]{8}=\sqrt[7]{2^3}=2^{\frac{3}{7}}$. Енді 7-қасиетті қолданамыз: $2>1$ және $\frac{4}{9}>\frac{3}{7}$ болғандықтан, $\sqrt[9]{16}>\sqrt[7]{8}$.

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}$ және $\left(\frac{1}{6}\right)^{200}$ рационал көрсеткішті дәрежелерді түрлендіру арқылы бірдей көрсеткіштерге келтірейік: $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}=\left(\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)^{100}=\left(\frac{1}{64}\right)^{100}$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{200}=\left(\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)^{100}=\left(\frac{1}{36}\right)^{100}$.

Енді 6-қасиетті қолданамыз: $0<\frac{1}{64}<\frac{1}{36}$ және $100>0$ болғандықтан,

$\left(\frac{1}{64}\right)^{100}<\left(\frac{1}{36}\right)^{100}$. Демек, $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}<\left(\frac{1}{6}\right)^{200}$.

?

1. Рационал көрсеткішті дәреженің анықталу облысын атаңдар. Жауабын түсіндіріңдер.
2. "Негізі бүтін сан болғанда, рационал көрсеткішті дәреженің мәндері бүтін сандар жиынын береді" деген тұжырым ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.
3. $a^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{a^3}$ теңдігі a-ның қандай мәндерінде дұрыс болады?

Жаттығулар

А

6.1. Берілген өрнектерді түбір түрінде жазыңдар:

1) $3^{1,5}$; 2) $2^{1,6}$; 3) $6^{-1,5}$; 4) $7^{1,2}$.

6.2. Берілген түбірді рационал көрсеткішті дәреже түрінде жазыңдар:

1) $\sqrt[3]{x^{-2}}$; 2) $\sqrt[7]{3y}$; 3) $\sqrt[15]{x^{-10}}$; 4) $\sqrt[8]{5^3}$.

Өрнектердің мәнін табыңдар (**6.3-6.4**):

6.3. 1) $81^{0,5}$; 2) $\left(\frac{256}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 3) $16^{\frac{7}{4}}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$.

6.4. 1) $\left(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right):8^{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt[3]{100}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}}\cdot(5)^{\frac{1}{3}}$;

3) $81^{0,75}:8^{\frac{7}{3}}$; 4) $\left(\frac{36}{25}\right)^{0,5}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Өрнектерді көбейткіштерге жіктеңдер (**6.5-6.6**):

6.5. 1) $(bx)^{\frac{1}{3}}+(by)^{\frac{1}{3}}$; 2) $b-b^{\frac{1}{2}}$;

3) $3+3^{\frac{1}{3}}$; 4) $(5x)^{\frac{1}{2}}+(3x)^{\frac{1}{2}}$.

6.6. 1) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}+1$; 2) $c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}$;

3) $5-5^{\frac{2}{3}}$; 4) $x+y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.

Бөлшектерді қысқартыңдар (**6.7-6.8**):

6.7. 1) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{x-8}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}$;

3) $\dfrac{x-16}{x^{\frac{1}{2}}-4}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a+b}$.

6.8. 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{2}}-1}{a-a^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{4}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{4}{9}}-b^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\dfrac{x^{1,2}-y^{2,1}}{x^{0,8}+x^{0,4}y^{0,7}+y^{1,4}}$.

6.9. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $320^{\frac{1}{3}}-2\cdot(135)^{\frac{1}{3}}+3\cdot(40)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}}+1}{3^{\frac{1}{2}}-1}+\dfrac{3^{\frac{1}{2}}-1}{3^{\frac{1}{2}}+1}$;

3) $10\cdot 0{,}027^{\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}+4\cdot 16^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{1-5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{1}{3}\cdot 5^{\frac{1}{3}}$.

B

6.10. Өрнекті рационал көрсеткішті дәреже түрінде жазыңдар:

1) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^{15}\cdot ax^{5}}$; 2) $\sqrt[3]{a^{7}\sqrt[4]{a}}$; 3) $\sqrt[9]{b^{8}}\cdot\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27\cdot\sqrt[3]{x}}$.

6.11. Өрнекті түбір түрінде жазыңдар:

1) $5\cdot 7^{-\frac{3}{5}}$; 2) $a^{\frac{3}{4}}:b^{\frac{2}{3}}$; 3) $3b^{-\frac{4}{5}}$; 4) $b^{\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{3}{7}}$.

6.12. Өрнектердің анықталу облысын табыңдар:

1) $(x+1)^{\frac{3}{7}}$; 2) $x^{\frac{3}{5}}$; 3) $x^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(x-3)^{\frac{2}{3}}$.

6.13. Ықшамдаңдар:

1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}},\ a>0,\ b>0;$ 2) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}},\ x\neq y;$

3) $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}},\ a>0,\ b>0;$

4) $\left(a\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+b\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-2(ab)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot(ab)^{\frac{1}{2}},\ a>0,\ b>0.$

Есептеңдер (**6.14-6.15**):

6.14. 1) $\dfrac{4-3\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\left(2^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}\right)^2};$ 2) $\dfrac{\left(24^{\frac{1}{4}}+6^{\frac{1}{4}}\right)^2}{4\cdot 3^{\frac{1}{2}}+3\cdot 6^{\frac{1}{2}}};$

3) $\dfrac{\left(9^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{2}}\right)^2}{3^{\frac{1}{3}}+2\cdot 3^{\frac{1}{6}}+1};$ 4) $\dfrac{1-2\cdot 5^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{2}}}{\left(5^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{3}{4}}\right)^2}.$

6.15. 1) $\left(\dfrac{1}{13^{\frac{1}{2}}-17^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{17^{\frac{1}{2}}+13^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot 13^{\frac{1}{2}};$ 2) $\left(\dfrac{5}{6^{\frac{1}{2}}+11}+\dfrac{5}{6^{\frac{1}{2}}-11}\right)\cdot 0{,}1\cdot 6^{\frac{1}{2}};$

3) $\left(8-28^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}+\left(8+28^{\frac{1}{2}}\right)^{-1};$ 4) $\left(6+4\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}+\left(6-4\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}.$

6.16. Ықшамдаңдар:

1) $\left(\dfrac{1}{(a+1)^{\frac{1}{2}}}+(1-a)^{\frac{1}{2}}\right):\left((1-a^2)^{\frac{1}{2}}+1\right),\ -1<a<1;$

2) $\dfrac{1+a^{\frac{1}{2}}}{1+a+a^{\frac{1}{2}}}:\dfrac{1}{1-a^{\frac{3}{2}}},\ a>0,\ a\neq 1.$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Өрнек, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, өрнектерді тепе-тең түрлендіру, толық квадрат, тепе-теңдікті дәлелдеу, n-ші дәрежелі түбір және оның қасиеттері, рационал көрсеткішті дәреже және оның қасиеттері.

§ 7. ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІ ТҮРЛЕНДІРУ

Сендер иррационал өрнектерді түрлендіруде n-ші дәрежелі түбір қасиеттерін қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Дәреже, n-ші дәрежелі түбір, иррационал өрнек, қасиет, түрлендіру

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Көбейткішті түбір алдына шығару, көбейткішті түбір астына енгізу, бөлшектің бөлімін иррационалдықтан босату сендерге 8-сыныптың алгебра курсынан белгілі. Алдыңғы параграфтарда n-ші дәрежелі түбір, рационал көрсеткішті дәреже және олардың қасиеттерін оқып-үйрендіңдер.

Енді осы түрлендірулерді иррационал өрнектерге қолдануды қарастырамыз.

МЫСАЛ 1. $(5\sqrt{3}+4\sqrt{2})(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ көбейтіндісін көпмүше түрінде жазайық.

Шешуі. $(5\sqrt{3}+4\sqrt{2})(\sqrt{2}-2\sqrt{3}) = 5\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3} =$
$= 5\sqrt{6}+8-30-8\sqrt{6} = -22-3\sqrt{6}$.

Жауабы: $-22-3\sqrt{6}$.

МЫСАЛ 2. $15\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+30-2\sqrt[3]{b}$ өрнегін көбейткіштерге жіктейік.

Шешуі. $15\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+30-2\sqrt[3]{b} = (15\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b})+(30-2\sqrt[3]{b}) =$
$= \sqrt[3]{a}(15-\sqrt[3]{b})+2(15-\sqrt[3]{b}) = (15-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+2)$.

Жауабы: $(15-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+2)$.

Иррационал өрнектерді түрлендіру кезінде мәні оң да, теріс те болатын өрнектен n-ші дәрежелі түбір шығару қажет болады.

Өрнектен n-ші дәрежелі түбірін шығарғанда мына ережелерді қолдану қажет:

1) егер n жұп сан болса, онда түбірдің мәні модуль таңбасымен алынады;

2) егер n тақ сан болса, онда түбірдің мәні модульсіз алынады.

МЫСАЛ 3. $\sqrt{34+24\sqrt{2}}+\sqrt{34-24\sqrt{2}}$ өрнегінің мәнін табайық.

Шешуі. Түбір ішіндегі өрнектерді түрлендіреміз: $34+24\sqrt{2}=(4+3\sqrt{2})^2$ және $34-24\sqrt{2}=(4-3\sqrt{2})^2$.

Сонда

$$\sqrt{34+24\sqrt{2}}+\sqrt{34-24\sqrt{2}}=\sqrt{\left(4+3\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(4-3\sqrt{2}\right)^2}=\left|4+3\sqrt{2}\right|+\left|4-3\sqrt{2}\right|=$$
$$=4+3\sqrt{2}-4+3\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

Жауабы: $6\sqrt{2}$.

Енді бөлшектің бөлімін иррационалдықтан босатуға мысалдар келтірейік.

МЫСАЛ

4. 1) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{5}}$; 2) $\dfrac{6}{3+\sqrt{3}}$ бөлшектерінің бөлімінде түбір таңбасы болмайтын етіп түрлендірейік.

Шешуі. 1) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{5}}$ бөлшегінің бөлімінде $\sqrt[3]{5}$ саны берілген. Осы түбірдің астындағы өрнекті 5^3, яғни тура түбір шығатын етіп толықтырамыз. Ол үшін 5-ті 25 санына көбейту қажет. Демек, берілген бөлшектің алымы мен бөлімін $\sqrt[3]{25}$ санына көбейтеміз:

$$\frac{15}{\sqrt[3]{5}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{25}}{5}=3\sqrt[3]{25}.$$

2) $\dfrac{6}{3+\sqrt{3}}$ бөлшегінің алдыңғы бөлшектен айырмашылығы — бөлімінде бір қосылғышы радикал болып келген қосынды берілген. Мұндай жағдайда бөлімін түбірден босату үшін бөлшектің алымы мен бөлімін бөліміндегі өрнектің түйіндес өрнегіне, яғни $3-\sqrt{3}$ өрнегіне көбейтеміз:

$$\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\frac{6\cdot(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{6}=3-\sqrt{3}.$$

Жауабы: 1) $3\sqrt[3]{25}$; 2) $3-\sqrt{3}$.

? 1. Рационал өрнектерді және иррационал өрнектерді түрлендіруде айырмашылық бар ма?

Жаттығулар

А

7.1. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt[3]{20+\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{20-\sqrt{57}}$;   2) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$;

3) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$;   4) $-\dfrac{\sqrt[3]{\left(4+\sqrt{17}\right)^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}}-\sqrt{17}$.

Есептеңдер (7.2—7.4):

7.2. 1) $3\sqrt{8}-5\sqrt{18}+12\sqrt{50}$;   2) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt[4]{225}$;

3) $\left(2\sqrt{2}-3\right)^2\cdot\sqrt[6]{8}$; 4) $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{17}+5}$.

7.3. 1) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$; 2) $\frac{1}{4+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4-2\sqrt{3}}$;

3) $\frac{3}{6-2\sqrt{6}}+\frac{3}{6+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{3}+2+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

7.4. 1) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-3\sqrt{\frac{3}{8}}+4\sqrt{1,5}\right)\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\sqrt{0,75}+3\sqrt{\frac{1}{27}}-\sqrt{6,75}\right)\cdot\sqrt{3}$;

3) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{6}}-\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{4,5}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$; 4) $\left(\sqrt[4]{\frac{125}{27}}-\sqrt[4]{375}-\frac{1}{\sqrt[4]{135}}\right)\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$.

7.5. Бөлшектің бөлімінде радикалдар (түбір таңбасы) болмайтын етіп келесі өрнектерді түрлендіріңдер:

1) $\frac{6}{\sqrt{7}-1}$; 2) $\frac{5}{\sqrt{6}+1}$; 3) $\frac{2}{x+\sqrt{a}}$; 4) $\frac{3}{x-\sqrt{a}}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; 6) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; 7) $\frac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$; 8) $\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$.

B

Ықшамдаңдар (**7.6-7.7**):

7.6. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\frac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}-1}$;

2) $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}+\sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{a+\sqrt{a}\sqrt{b}}+\frac{1}{a-\sqrt{a}\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$;

4) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

7.7. 1) $\frac{p-q}{\sqrt[3]{p}-\sqrt[3]{q}}-\sqrt[3]{pq}$, $p\neq q$;

2) $\frac{\sqrt{p^3}+\sqrt{q^3}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}+\sqrt{pq}$, $p>0$, $q>0$;

3) $\frac{\sqrt{ab^2}-a\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}-\sqrt{b^3}+\sqrt{a}$, $a>0$, $b>0$;

4) $\frac{\sqrt[3]{a^2b}-a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{ab}}+\sqrt[3]{a^2}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

7.8. Бөлшектің бөлімін иррационал өрнектен босатыңдар:

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; 3) $-\dfrac{7}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$;

4) $\dfrac{15}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 5) $\dfrac{6}{2-\sqrt[3]{2}}$; 6) $\dfrac{32}{3+\sqrt[3]{5}}$;

7) $\dfrac{1-b}{\sqrt{1-\sqrt{b}}}$, $0<b<1$; 8) $\dfrac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}$, $a>0$.

7.9. Ықшамдаңдар:

1) $\left(1+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\right):\left(1-\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\right)$; 2) $\left((a-b)\cdot\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің негізі және көрсеткіші, функция, оның қасиеттері мен графигі.

§ 8. ДӘРЕЖЕЛІК ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

Сендер нақты көрсеткішті дәрежелі функцияның ұғымымен танысасыңдар; дәреже көрсеткішіне тәуелді дәрежелі функция графигін салуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, график, дәрежелі функция, дәреженің көрсеткіші, нақты сан

Кез келген нақты α саны үшін оң айнымалы x^{α} санын анықтауға болады.

Анықтама.

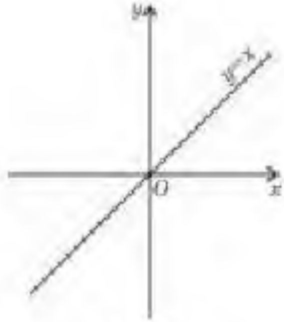
$$f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \in R \qquad (1)$$

*формуласымен берілген функцияны **дәрежелік функция** деп атайды.*

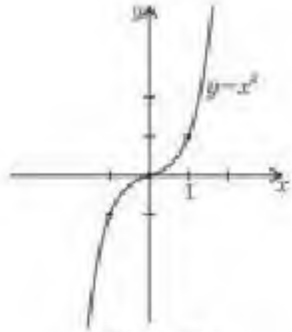
Мұнда дәреженің негізі ретінде x тәуелсіз айнымалысы, ал оның дәреже көрсеткіші ретінде α нақты саны алынған.

Төменгі сыныптарда дәрежелік функцияның көрсеткіші натурал және бүтін сандар болған жағдайларды қарастырдыңдар.

Мысалы, $\alpha = 1$ болғанда графигі координаталар жазықтығының I және III ширектерінің биссектрисасын беретін $y = x$ сызықтық функциясы (21-сурет), ал $\alpha = 3$ болғанда $y = x^3$ үшінші дәрежелі функцияның графигі кубтық параболаны беретіні белгілі (22-сурет).



21-сурет



22-сурет

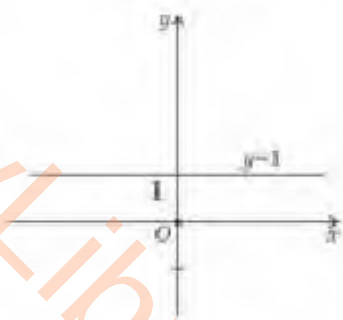
1. Натурал дәрежелі функциялардың барлығын

$$y = x^n,\ n \in N \qquad (2)$$

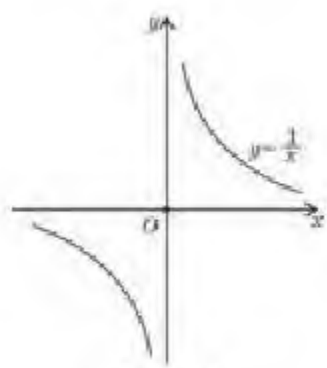
формуласымен беруге болады. $n = 1$, $n = 3$ болғандағы натурал көрсеткішті дәрежелік функциялар қарастырылды.

(2)-формулада $n = 0$ болған жағдайда $f(x) = x^0 = 1$, онда функцияның графигі ординаталары 1-ге тең абсцисса осіне параллель болатын $y = 1$ түзуін береді (23-сурет).

(2)-формуладағы n саны жұп сандар (2; 4; 6; 8; ...) болса, онда олардың графиктері 2; 4; 6; 8; ... дәрежелі параболалар, ал тақ сандар (3; 5; 7; 9; ...) болса, онда 3; 5; 7; 9; ... дәрежелі параболалар болады. Жұп дәрежелі функциялардың графиктері — ордината осіне қарағанда симметриялы, ал тақ дәрежелі функциялар графиктері бас нүктеге қарағанда симметриялы қисықтар.



23-сурет



24-сурет

2. (2)-формуладағы n санын $-n$ санымен алмастырсақ,

$$y = x^{-n},\ n \in N \qquad (3)$$

бүтін теріс көрсеткішті дәрежелік функция аламыз.

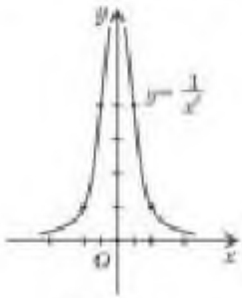
24-суретте $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ функциясының, ал 25-суретте $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ функциясының графигі көрсетілген.

$y=\dfrac{1}{x^2}$ және $y=\dfrac{1}{x^3}$ функцияларының мәндер жиыны бірдей болуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.

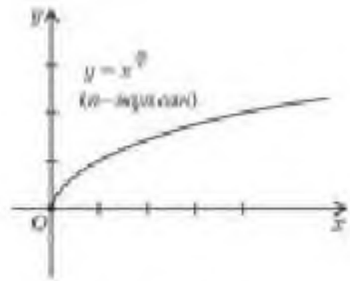
Енді оң және теріс бөлшек көрсеткішті дәрежелік функцияны қарастырайық.

3. Егер $\alpha=\dfrac{m}{n}$ (n, m — өзара жай натурал сандар) және $m<n$ болса, онда оң бөлшек көрсеткішті $y=x^{\frac{m}{n}}$ дәрежелік функциясын аламыз.

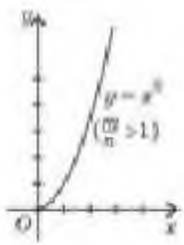
Бұл функцияның графигі 26-суретте берілген.



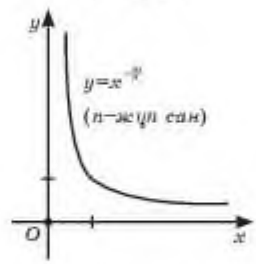
25-сурет



26-сурет



27-сурет



28-сурет

4. $\alpha=\dfrac{m}{n}$ (n, m — өзара жай натурал сандар) және $\dfrac{m}{n}>1$ жағдайында оң бөлшек көрсеткішті $y=x^{\frac{m}{n}}$ дәрежелік функциясын аламыз. Бұл функцияның графигі 27-суретте берілген.

5. Егер $\alpha=-\dfrac{m}{n}$ (n, m — өзара жай натурал сандар) болса, онда теріс бөлшек көрсеткішті $y=x^{-\frac{m}{n}}$ дәрежелік функциясын аламыз.

$y=x^{-\frac{m}{n}}$ функциясы графигінің жалпы түрі 28-суретте көрсетілген.

Иррационал көрсеткішті дәреже туралы түсінік.

$a>0$ және α саны иррационал сан болсын. Онда иррационал дәрежелі a санының, яғни a^{α} санының мағынасын анықтайық. Ол үшін мына үш жағдайды қарастырамыз.

1) $a = 1$ болса, онда $1^{\alpha} = 1$.

2) $a > 1$ және α иррационал саны r_1 рационал санынан үлкен ($\alpha > r_1$), бірақ r_2 рационал санынан кіші ($\alpha < r_2$) болсын, яғни $r_1 < \alpha < r_2$. Онда $r_1 < r_2$ және $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Демек, иррационал көрсеткішті a^{α} саны дәрежелері кез келген r_1, r_2 рационал сандары болатын a^{r_1} мен a^{r_2} сандарының арасында орналасқан сан: $a^{r_1} < a^{\alpha} < a^{r_2}$. Осы заңдылық кез келген $a > 1$ және кез келген иррационал сан α үшін орындалады.

3) Енді $0 < a < 1$ аралығын қарастырайық. Бұл жағдайда $r_1 < \alpha$ және $r_2 > \alpha$ үшін $r_1 < r_2$ және $a^{r_1} > a^{r_2}$ шығады, олай болса $a^{r_2} < a^{\alpha} < a^{r_1}$ аламыз. Осы заңдылық кез келген $0 < a < 1$ және кез келген α иррационал саны үшін орындалады.

Рационал көрсеткішті дәрежелердің қасиеттері иррационал көрсеткішті дәрежелер үшін де орындалады.

Енді көрсеткіші нақты сандар болғандағы дәрежелік функцияны, яғни $y = x^{\alpha}$ (α — кез келген нақты сан, x — дәрежелік функцияның аргументі) формуласымен берілген дәрежелік функцияны қарастырайық.

Егер $\alpha > 0$ болса, дәрежелік функцияны $x = 0$ жағдайында да анықталған функция деп есептейміз, себебі $0^{\alpha} = 0$.

Егер $\alpha \in Z$ болса, дәрежелік функция $x > 0$ немесе $x < 0$ жағдайында да анықталған функция болып табылады. α саны жұп сан болса, онда $y = x^{\alpha}$ функциясы жұп функция, ал α тақ сан болса, онда тақ функция болады. Сондықтан $y = x^{\alpha}$ дәрежелік функциясын $x \in (0; +\infty)$ интервалында зерттеген жеткілікті.

?

1. Дәрежелік функцияның дәреже көрсеткішіне байланысты түрлерін атаңдар және оған мысал келтіріңдер.
2. $[0; +\infty)$ аралығында орналасқан $y = x^2$ және $y = \sqrt{x}$ функцияларының графиктеріне сипаттама беріңдер.
3. $y = x^{-2,5}$ және $y = x^{2,5}$ функцияларының анықталу облыстарында қандай айырмашылық бар? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

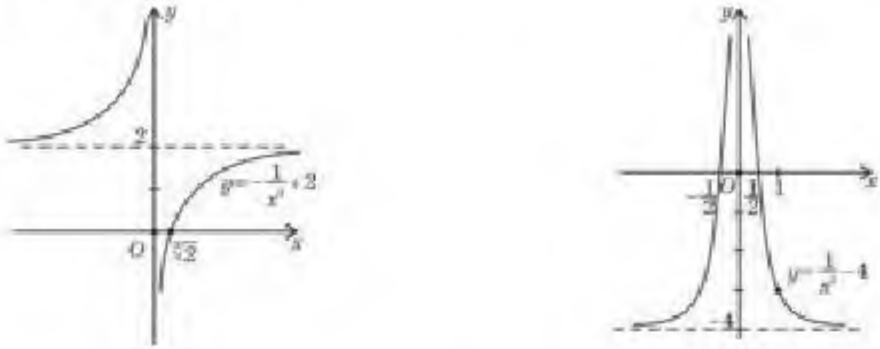
A

$y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар (**8.1-8.2**):

8.1. 1) $f(x) = x^6$; 2) $f(x) = x^{-5}$; 3) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$.

8.2. 1) $f(x) = x^{\pi}$; 3) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$; 2) $f(x) = x^{-\pi}$; 4) $f(x) = (3x)^{\frac{1}{3}}$.

8.3. Берілген график бойынша $y = f(x)$ функциясының қасиеттерін атаңдар (29-сурет):



1) 2)

29-сурет

В

8.4. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 3;$ 2) $f(x) = x^{4,5} + 2;$

3) $f(x) = x^{-2,5} + 2;$ 4) $f(x) = -\frac{1}{x^3} + 4.$

8.5. $y = f(x)$ функциясының мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 5;$ 2) $f(x) = \frac{1}{x^4} + 3,5;$

3) $f(x) = x^{3,7} - 2;$ 4) $f(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{7}.$

Қарапайым түрлендірулерді қолданып $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар. Графикті қолданып функцияға сипаттама беріңдер (**8.6-8.7**):

8.6. 1) $f(x) = -\frac{1}{x^3};$ 2) $f(x) = \frac{1}{x^6} + 3,5;$

3) $f(x) = x^{0,5} - 2;$ 4) $f(x) = 3 + 2x^{0,5}.$

8.7. 1) $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} + 4;$ 2) $f(x) = -\frac{3}{(x+2)^3} + 1,5;$

3) $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{4}} - 2,5;$ 4) $f(x) = (x+1)^{-\frac{3}{4}} + 3,5.$

8.8. Теңдеулердің неше түбірі болатынын графиктік тәсілмен көрсетіңдер:

1) $\frac{1}{x^2} = 4,5;$ 2) $x^2 - x^{3,7} = 0;$ 3) $\frac{1}{x^3} = x^4;$ 4) $\sqrt{x} = -\frac{1}{x^2}.$

8.9. Теңсіздіктер жүйесін графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $\begin{cases} y > x^2, \\ y \leq x + 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \geq -x^2, \\ y < -x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y < x^3, \\ y \geq x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leq x^5, \\ y > -x^4. \end{cases}$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Дәрежелік функция, туынды, интеграл және оның қасиеттері.

§ 9. ДӘРЕЖЕЛІК ФУНКЦИЯНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДАУ

Сендер нақты көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысын табу ережелерін қолдануды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, дәрежелі функция, туынды, алғашқы функция, интеграл

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Дәрежелік функцияның дербес жағдайларының туындысын есептеу формулалары белгілі.

$f(x) = x^n$, $n \in Z$ және $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ функцияларының туындысы сәйкесінше $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ және $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ формулаларымен табылады.

Енді $f(x) = x^\alpha$, $x \neq 0$ және α кез келген нақты сан болғандағы дәрежелік функцияның туындысын есептеу формуласын берейік.

Теорема. *Егер $x > 0$ және α кез келген нақты сан болса, онда $f(x) = x^\alpha$ дәрежелік функциясының туындысы*

$$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \tag{1}$$

формуласымен табылады.

Дәлелдеу. 10-сыныпта берілген туындының анықтамасы бойынша дәлелдеу алгоритмін қолданамыз:

1) x-ке Δx өсімшесін береміз: $x + \Delta x$;

2) аргументтің өсімшесіне сәйкес функцияның өсімшесін анықтаймыз:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right];$$

3) функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын табамыз:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=$$

$$=x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\frac{\Delta x}{x}};$$

4) шыққан қатынастың $\Delta x \to 0$ кезіндегі шегін табамыз:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\to\alpha\cdot x^{\alpha-1}, \text{ яғни } f'(x)=(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Кез келген нақты α саны үшін $\Delta x \to 0$ кезінде $\dfrac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}\to\alpha$ болады. $\alpha=\frac{1}{2}$ үшін $\Delta x\to 0$ жағдайда $\dfrac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{2}$ екенін дәлелдейік.

Дәлелдеу. Алдымен бөлшектің алымын иррационалдықтан босатайық. Ол үшін бөлшектің алымын да, бөлімін де алымына түйіндес өрнекке көбейтеміз:

$$\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]}{\frac{\Delta x}{x}\cdot\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]}=\frac{1+\frac{\Delta x}{x}-1}{\frac{\Delta x}{x}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]}=$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1}.$$

Соңғы бөлшектің $\Delta x \to 0$ ұмтылғандағы мәні $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ болады.

$\alpha=1$, $\alpha=2$ үшін $\Delta x \to 0$ жағдайда $\dfrac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha$ болатынын өздерің дәлелдеңдер.

МЫСАЛ **1.** Берілген функциялардың туындысын табайық:

1) $f(x) = 11x^{-\frac{3}{11}} + x^{\sqrt{6}}$; 2) $f(x) = \sqrt[5]{3x-1} - 5x^{0,75}$.

Шешуі. Туындыны есептеу ережелері мен (1)-формуланы қолданамыз:

1) $f'(x) = (11x^{-\frac{3}{11}} + x^{\sqrt{6}})' = 11 \cdot \left(-\frac{3}{11}\right) \cdot x^{-\frac{3}{11}-1} + \sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1} = -3x^{-\frac{14}{11}} + \sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1}$;

2) $f'(x) = (\sqrt[5]{3x-1} - 5x^{0,75})' = ((3x-1)^{\frac{1}{5}} - 5x^{0,75})' = \frac{1}{5}(3x-1)^{-\frac{4}{5}} \cdot 3 - 5 \times$
$\times\, 0,75x^{-0,25} = \frac{3}{5}(3x-1)^{-\frac{4}{5}} - 3,75x^{-\frac{1}{4}}$.

Жауабы: 1) $-3x^{-\frac{14}{11}} + \sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1}$; 2) $\frac{3}{5}(3x-1)^{-\frac{4}{5}} - 3,75x^{-\frac{1}{4}}$.

! Сендер нақты көрсеткішті дәрежелік функцияның интегралын табуды үйренесіңдер.

Дәрежелік функцияның алғашқы функциясын есептеу формуласын берейік.

Теорема. $\alpha \neq -1$ *болғанда* $y = x^{\alpha}$ *дәрежелік функциясының алғашқы функциясы*

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (2)$$

формуласымен табылады.

Дәлелдеу. $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ функциясы $f(x) = x^{\alpha}$ функциясының алғашқы функциясы болатынын көрсету керек. Ол үшін алғашқы функцияның анықтамасын қолданамыз:

$$F'(x) = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (x^{\alpha+1})' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1)\, x^{\alpha+1-1} = x^{\alpha} = f(x).$$

МЫСАЛ **2.** Анықталмаған интегралды табайық:

1) $\int x^3\,dx$; 2) $\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx$; 3) $\int x^{\frac{5}{4}}\,dx$.

Шешуі. (2)-формуланы қолданамыз.

1) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$; 2) $\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$;

3) $\int x^{\frac{5}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C$.

Жауабы: 1) $\frac{x^4}{4} + C$; 2) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$; 3) $\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C$.

МЫСАЛ **3.** Анықталған интегралдың мәнін есептейік:

1) $\int\limits_2^5 x^2 dx$; 2) $\int\limits_1^9 x^{\frac{3}{2}} dx$.

Шешуі. (2)-формула мен анықталған интегралды есептеу формуласын қолданамыз.

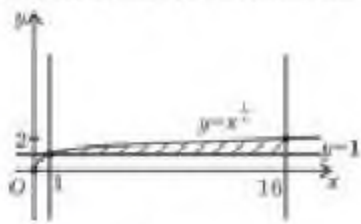
1) $\int\limits_2^5 x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_2^5 = \dfrac{5^3}{3} - \dfrac{2^3}{3} = \dfrac{125}{3} - \dfrac{8}{3} = 39$;

2) $\int\limits_1^9 x^{\frac{3}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Big|_1^9 = \dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\Big|_1^9 = \dfrac{2\cdot 9^{\frac{5}{2}}}{5} - \dfrac{2\cdot 1}{5} = \dfrac{2}{5}(243-1) = \dfrac{484}{5} = 96{,}8.$

Жауабы: 1) 39; 2) 96,8.

МЫСАЛ **4.** $y = \sqrt[4]{x}$ қисығы және $y = 1$, $x = 1$, $x = 16$ түзулерімен шектелген жазық фигураның ауданын есептейік.

Шешуі. Жазық фигураның геометриялық кескіні 30-суретте берілген. Жазық фигураның ауданын есептеу формуласын қолданамыз:



30-сурет

$S_ф = \int\limits_1^{16} (\sqrt[4]{x} - 1)dx = \int\limits_1^{16} (x^{\frac{1}{4}} - 1)dx = \left(\dfrac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} - x\right)\Bigg|_1^{16} = \left(\dfrac{4}{5}\cdot 16^{\frac{5}{4}} - 16\right) -$

$- \left(\dfrac{4}{5} - 1\right) = 9{,}6 + 0{,}2 = 9{,}8.$

Жауабы: 9,8 кв. бірл.

?

1. Егер $f(x) = x^{-n}$ $(n \in N)$ болса, онда $f'(x) \in R$ тұжырымы дұрыс па? Жауабын түсіндіріңдер.
2. $y = x^{-n}$ $(n \in N)$ функциясының қандай нүктеде алғашқы функциясын табуға болмайды? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

A

$y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар (9.1-9.2):

9.1. 1) $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$; 2) $f(x) = x^{-\frac{3}{7}}$; 3) $f(x) = x^{\sqrt{5}}$; 4) $f(x) = x^{-1+\sqrt{3}}$.

9.2. 1) $f(x) = x^{1,4}$; 2) $f(x) = x^{3,5}$; 3) $f(x) = x^{\pi}$; 4) $f(x) = x^{-\pi}$.

9.3. $y = f(x)$ функциясының графигіне $N(a;\ b)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $N\left(\frac{1}{27};\ 3\right)$; 2) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x$, $N(1;\ 2)$;

3) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, $N(1;\ 1)$; 4) $f(x) = x^{3} + 3x^{\frac{2}{3}}$, $N(1;\ 4)$.

9.4. $y = f(x)$ функциясының $[a;\ b]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $[1;\ 4]$; 2) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $[1;\ 8]$;

3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $[-8;\ -1]$; 4) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$, $[1;\ 16]$.

9.5. $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясын жазыңдар:

1) $f(x) = x^{3\sqrt{2}}$; 2) $f(x) = -2x^{-\pi}$;

3) $f(x) = \frac{1}{4}x^{-4}$; 4) $f(x) = 0,5x^{-0,5}$.

9.6. Интегралды есептеңдер:

1) $\int_{1}^{8} x^{-\frac{1}{3}}dx$; 2) $\int_{1}^{4} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$;

3) $\int_{16}^{81} 4x^{-\frac{1}{4}}dx$; 4) $\int_{1}^{32} 6x^{\frac{1}{5}}dx$.

9.7. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

2) $y = \frac{1}{x^{6}}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;

3) $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $x = 1$, $x = 8$, $y = 0$;

4) $y = \frac{1}{x^{4}}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

B

9.8. $y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = x^{\sqrt{5}} + x^{2,5} + 10$; 2) $f(x) = x^{\sqrt{3}-3} - x^{-\frac{1}{8}} - 5,8$;

3) $f(x) = x^{-\frac{5}{6}} + (x-2)^{\sqrt{2}}$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{8}} - (1 + x^{3})^{-\frac{5}{4}}$.

9.9. $y = f(x)$ функциясының графигіне $N(a;\ b)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $N\left(\frac{1}{8}; 2\right)$; 2) $f(x) = x^{-\frac{1}{4}} + 2x$, $N(1; 3)$;

3) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$, $N(-1; 1)$; 4) $f(x) = x^3 - 3x^{\frac{2}{3}}$, $N(-1; -4)$.

9.10. $y = f(x)$ функциясының $[a; b]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәнін табыңдар:

1) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $[1; 9]$; 2) $f(x) = x^{-5}$, $[2; 3]$;

3) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, $[8; 27]$; 4) $f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$, $[1; 16]$.

9.11. $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясын жазыңдар:

1) $f(x) = x^{-1+\sqrt{5}} + x^{2,5}$; 2) $f(x) = -2x^{-53} + \sqrt{x}$;

3) $f(x) = x^{3+\sqrt{2}} + \sqrt[4]{x^3}$; 4) $f(x) = 5x^{-\sqrt{6}-1} - \sqrt[5]{x^2}$.

Интегралды есептеңдер (9.12-9.13):

9.12. 1) $\int_0^7 (x+1)^{-\frac{2}{3}} dx$; 2) $\int_{-4}^{3} \frac{dx}{(5+x)^{\frac{1}{3}}}$.

9.13. 1) $\int_0^5 5(1+3x)^{-0,75} dx$; 2) $\int_0^{155} 0,4\,(1+0,2x)^{-0,6} dx$.

9.14. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = x^{-2}$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 1$;
2) $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$;
3) $y = x^{-3}$, $x = -4$, $x = -1$, $y = -1$;
4) $y = -x^3$, $x = -3$, $x = -2$, $y = 2$.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

9.15. Швейцар математигі Иоганн Бернулли x^r функциясының анықталған интегралын табудың формуласын қорытып шығарған.

И. Бернулли
(1667—1748)

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $\sqrt{0,64} + \sqrt[3]{-15\frac{5}{8}} + \sqrt[4]{16}$ өрнегінің мәнін есептеңдер:

A) 5,3; B) 0,3; C) 2,8; D) 3.

2. $a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{4}}$ өрнегін квадраттаңдар:

A) $a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} + 2b^{\frac{1}{2}}$; B) $a + 4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} + 4b^{\frac{1}{2}}$;

C) $a + 4b^{\frac{1}{2}}$; D) $a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} + 4b^{\frac{1}{2}}$.

3. $\sqrt[5]{2^3 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[5]{2^7 \cdot 3^3}$ өрнегінің мәнін есептеңдер:

A) 56; B) 18; C) 12; D) 36.

4. a-ның қандай мәнінде $\left(a^8\right)^{\frac{1}{4}} = a^2$ теңдігі ақиқат болады:

A) a — оң сан; B) a — кез келген сан;

C) ондай мән жоқ; D) a — теріс емес сан?

5. Арасында $12^{\frac{1}{4}}$ өрнегі орналасқан тізбектес екі бүтін санды атаңдар:

A) 1 және 2; B) 2 және 3;

C) 3 және 4; D) 4 және 5.

6. $\left(\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[4]{y}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{y}\right) + 4\sqrt[8]{y^7} : \sqrt[8]{y^3}$ өрнегін ықшамдаңдар:

A) $x^{\frac{1}{2}}$; B) $x^{\frac{1}{2}} - 8y^{\frac{1}{2}}$; C) $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$; D) $8y^{\frac{1}{2}}$.

7. $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ мәні неге тең:

A) 1; B) $\frac{2}{9}$; C) 0,5; D) $\frac{1}{3}$?

8. Егер $c = \frac{1}{13}$ болса, онда $\sqrt[4]{625c^4} + \sqrt[5]{32c^5} + \sqrt{36c^2}$ өрнегінің мәнін табыңдар:

A) 13; B) −13; C) −1; D) 1.

9. $\frac{a - b}{a^{0,5}b^{0,5} - b}$ бөлшегін қысқартыңдар:

A) $\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{b^{0,5}}$; B) $\frac{a^{0,5} + b^{0,5}}{b^{0,5}}$; C) $\frac{a^{0,5}}{b}$; D) $\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{b}$.

10. $\sqrt[3]{54a^5b^7c^3}$ өрнегіндегі көбейткішті түбір таңбасының алдына шығарыңдар:

A) $54abc\sqrt[3]{a^2b}$;　　B) $3abc\sqrt[3]{ab^2}$;

C) $3ab^2c\sqrt[3]{2a^2b}$;　　D) $3abc\sqrt[3]{54a^2b}$.

11. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{b}}$ бөлшегінің бөлімін иррационалдықтан босатыңдар:

A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5-b}$;　　B) $\dfrac{25+b}{5-b}$;　　C) $\dfrac{5+\sqrt{5b}}{5-b}$;　　D) $\dfrac{25-\sqrt{5b}}{5+b}$.

12. $x^4 - 16 = 0$ теңдеуінің неше түбірі бар:

A) бір түбірі бар;　　B) екі түбірі бар;

C) шексіз көп;　　D) төрт түбірі бар?

13. $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}$ өрнегін ықшамдаңдар:

A) $\dfrac{2}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$;　　B) $\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$;　　C) 1;　　D) $\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}+2}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$.

14. $y = x^{\frac{1}{4}}$ функциясының графигіне абсциссасы $x = 1$ болатын нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

A) $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}$;　　B) $y = x - \dfrac{1}{4}$;

C) $y = \dfrac{1}{4}x + 2$;　　D) $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$.

15. $\int_0^1 \dfrac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} dx$ интегралының мәнін табыңдар:

A) 1;　　B) $\dfrac{25}{16}$;　　C) $-\dfrac{25}{16}$;　　D) -1.

16. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$ қисықтарымен шектелген жазық фигураның ауданын есептеңдер:

A) $\dfrac{8}{3}$;　　B) $\dfrac{3}{16}$;　　C) $\dfrac{16}{3}$;　　D) $\dfrac{2}{3}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Теңдеу, теңдеудің түбірі, анықталу облысы, мәндес теңдеулер, n-ші дәрежелі түбір, дәрежеге шығару.

§ 10. ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУ

Сендер иррационал теңдеудің анықтамасын білесіңдер, иррационал теңдеудегі айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңдеу, иррационал теңдеу, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, теңдеудің шешімі, бөгде түбір

ЕСКЕ ТҮСІРІҢДЕР

Кестені толтырыңдар:

3-кесте

	Теңдеудің атауы	Теңдеудің шешімі
$2x + 3 = -10$		
$x^2 + 2x - 3 = 0$		
$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$		
$\frac{5 + x}{x - 6} = 0$		

Кестені толтыру барысында рационал теңдеулерді шешу жолдары еске түсірілді. Енді теңдеудің келесі түріне көшеміз.

$\sqrt{x} = 4$, $10 - \sqrt{x} = 4$, $10 - x^{\frac{1}{3}} = 4$ теңдеулерінің жоғарыда қарастырылған теңдеулерден қандай айырмашылығы бар?

Мұндай теңдеулер иррационал теңдеулердің мысалдары болады.

Анықтама. *Айнымалысы түбір таңбасының ішінде берілген немесе бөлшек көрсеткіштің негізінде берілген теңдеулер* ***иррационал теңдеулер*** *деп аталады.*

МЫСАЛ

1. $x + \sqrt{3x + 7} = 0$, $6 + x^{\frac{1}{3}} = 0$, $\sqrt[4]{x} = 16$, $2 - \sqrt[5]{x} = 1$ теңдеулері иррационал теңдеулер болады. Бірінші, үшінші және төртінші теңдеулерде айнымалы түбір ішінде, ал екінші теңдеуде айнымалы бөлшек көрсеткішті дәреженің негізінде берілген.

Сонымен қатар, бірінші және үшінші теңдеулердегі түбірдің көрсеткіші жұп сан, ал төртінші теңдеудегі түбірдің көрсеткіші тақ сан болады.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Көрсеткіші жұп сан болатын түбірлердің түбір ішіндегі өрнегінің мағынасы айнымалының мәні теріс емес болған жағдайында болады.

Сондықтан көрсеткіші жұп сан болатын түбірлері бар иррационал теңдеулерді шешу барысында арифметикалық квадрат түбір ұғымы ескеріледі және айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны ізделінеді.

$\sqrt[4]{x} = -16$ иррационал теңдеуінің шешімі неліктен бос жиын болады?

МЫСАЛ

2. $\sqrt{2x+3} = x$ иррационал теңдеуінде түбірдің көрсеткіші жұп екенін ескеріп, түбір таңбасының ішіндегі өрнектің айнымалының қандай мәндерінде мағынасы болатынын анықтау керек.

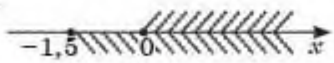
Демек, айнымалының мүмкін болатын мәндерін табу иррационал теңдеудің құрамдас бөлігі болып табылады.

Сендер айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын табу бойынша білімдеріңді кеңейтесіңдер.

МЫСАЛ

3. $\sqrt{2x+3} = x$ иррационал теңдеуіндегі айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын табайық.

Шешуі. Теңдеудегі түбірдің көрсеткіші жұп сан болғандықтан $\begin{cases} 2x+3 > 0, \\ x > 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін аламыз. Будан $\begin{cases} x > -1,5, \\ x > 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі $[0; +\infty)$ аралығы болады (31-сурет).



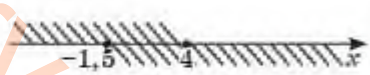
31-сурет

Жауабы: $[0; +\infty)$.

МЫСАЛ

4. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 0$ иррационал теңдеуіндегі айнымалының мүмкін болатынын мәндер жиынын табайық.

Шешуі. Теңдеуде квадрат түбірлер берілген, сондықтан $\begin{cases} 2x+3 > 0, \\ 4-x > 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін аламыз. Будан $\begin{cases} x \geq -1,5, \\ x \leq 4 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі $[-1,5; 4]$ аралығы болады (32-сурет).



32-сурет

Жауабы: $[-1,5; 4]$.

$\sqrt{2x-1}+\sqrt{-4-x}=0$ иррационал теңдеуіндегі айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны бос жиын болатынын өздерің қарастырыңдар.

Иррационал теңдеуді шешу — оның шешімдер жиынын табу.

МЫСАЛ

5. 3 және -1 сандары $\sqrt{2x+3}=x$ иррационал теңдеуінің түбірлері бола ма?

Шешуі. Ол үшін сандарды берілген теңдеуге қоямыз. Яғни, $\sqrt{2\cdot 3+3}=3$ теңдігі ақиқат, ал $\sqrt{2\cdot(-1)+3}=-1$ теңдігі ақиқат емес екенін аламыз. Сонда 3 саны теңдеудің түбірі, ал -1 саны бөгде түбір болады.

Жауабы: 3 саны түбірі болады; -1 бөгде түбір.

1. Иррационал теңдеудің рационал теңдеуден қандай өзгешелігі бар?
2. Иррационал теңдеу мен рационал теңдеудің қандай ұқсастықтары бар?

Жаттығулар

A

10.1. Айнымалының қандай мәндерінде өрнектің мағынасы болады:

1) $\sqrt{x-5}$; 2) $\sqrt[4]{7-x}$; 3) $\sqrt[3]{x+16}$; 4) $\sqrt[5]{11-x}$?

10.2. Айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын табыңдар:

1) $\sqrt{x^2-8x}$; 2) $\sqrt[3]{x^2-25}$; 3) $\sqrt{6x+x^2}+x$; 4) $x+\sqrt{4x^2-49}$.

10.3. Түбірі берілген сан болатын иррационал теңдеуді құрастырыңдар:

1) $x=5$; 2) $x=-6$; 3) $x=-0{,}2$; 4) $x=2{,}3$.

10.4. Иррационал теңдеудің түбірлері тиісті болатын жиынды табыңдар:

1) $\sqrt{x+4}=x$; 2) $\sqrt{23-x}=x$; 3) $\sqrt{x^2-1}=2x$; 4) $\sqrt{5x+x^2}=3x$.

10.5. Берілген сан (сандар) иррационал теңдеудің түбірі (түбірлері) бола ма:

1) $\sqrt{x-5}=3$ және $x=14$; 2) $\sqrt[3]{7-x}=0$ және $x=-20$;

3) $\sqrt{2x+24}=0$ және $x=-4$, $x=6$;

4) $\sqrt{3x+2}=0$ және $x=2$, $x=1$?

B

10.6. Айнымалының қандай мәндерінде өрнектің мағынасы болады:

1) $\sqrt{x+4}+\sqrt{5-x}$; 2) $\sqrt{10-2x}+\sqrt{49+7x}$;

3) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x-2}$; 4) $\sqrt{4+x}+\sqrt{16-x^2}$?

10.7. Айнымалының мүмкін болатын мәндер жиынын табыңдар:

1) $\sqrt{\dfrac{x+1}{15-x}}+x$; 2) $\sqrt{\dfrac{x-7}{8-x}}-x$;

3) $\sqrt{\dfrac{x}{x^2-36}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$; 4) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{4-x^2}{x+1}}$.

10.8. Берілген сандар иррационал теңдеудің түбірлері бола ма:

1) $\sqrt{6x-x^2}=x$ және $x=0$, $x=-3$;

2) $\sqrt{14-20x-x^2}=x$ және $x=2$, $x=5$?

§ 11. ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

Сендер теңдеудің екі жағын бірдей n-ші дәрежеге шығару әдісі арқылы иррационал теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Иррационал теңдеу, теңдеудің түбірі, теңдеуді шешу тәсілі

Иррационал теңдеулерді шешудің екі тәсілін қарастырамыз:

1) теңдеудің екі жақ бөлігін бірдей дәрежеге шығару;

2) жаңа айнымалы енгізу.

АЛГОРИТМ

I. Теңдеудің екі жағын бірдей дәрежеге шығару тәсілі арқылы иррационал теңдеулерді шешу алгоритмі:

1) берілген иррационал теңдеуді түрлендіру арқылы $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ түріне келтіру;

2) теңдеудің екі жақ бөлігін n-ші дәрежеге шығарып $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n=(g(x))^n$, шешу әдісі белгілі $f(x)=g^n(x)$ теңдеуін алу;

3) соңғы теңдеуді шешу; табылған түбірлерді берілген теңдеуге қойып тексеру;

4) теңдеуді қанағаттандыратын түбірлерді теңдеудің түбірлері ретінде алу.

МЫСАЛ

1. $x+\sqrt{3x+7}=7$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Радикалы бар өрнекті теңдіктің сол жағында қалдырып, теңдеудің қалған мүшелерін теңдіктің оң жағына шығарамыз: $\sqrt{3x+7}=7-x$. Теңдеудің екі жақ бөлігін квадраттаймыз: $\left(\sqrt{3x+7}\right)^2=(7-x)^2$. Осыдан $3x+7=49-14x+x^2$ немесе $x^2-17x+42=0$. Соңғы теңдеудің түбірлері $x_1=3$ және $x_2=14$.

Табылған x-тің мәндерін берілген теңдеуге қойып, теңдіктің орындалатынын тексереміз:

1) $x_1=3$ түбірін x-тің орнына қойсақ, $3+\sqrt{3\cdot3+7}=7$; $3+\sqrt{16}=7$; $3+4=7$; $7\equiv7$, яғни теңдік орындалады.

Бірінші түбір берілген иррационал теңдеуді қанағаттандырады.

2) $x_2 = 14$, яғни $14 + \sqrt{3 \cdot 14 + 7} = 7$; $14 + \sqrt{49} = 7$; $14 + 7 = 7$; $21 \neq 7$. Екінші түбір берілген иррационал теңдеуді қанағаттандырмайды. Демек, $x_2 = 14$ бөгде түбір.

Жауабы: 3.

МЫСАЛ 2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Теңдеуді шешу үшін түбір таңбасы бар өрнектердің біреуін теңдеудің сол жақ бөлігінде қалдырып, екіншісін теңдеудің оң жақ бөлігіне көшіреміз: $\sqrt{2x+6} = 6 - \sqrt{x-1}$. Теңдеуді шешу үшін оның екі жақ бөлігін екінші дәрежеге шығарамыз: $\left(\sqrt{2x+6}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{x-1}\right)^2$, $2x + 6 = 36 - 12\sqrt{x-1} + x - 1$ немесе $12\sqrt{x-1} = 29 - x$. Иррационал теңдеу шыққандықтан, соңғы теңдеудің екі жақ бөлігін екінші рет квадраттаймыз: $144(x-1) = (29-x)^2$, $144x - 144 = 841 - 58x + x^2$; $x^2 - 202x + 985 = 0$. Шыққан теңдеудің түбірлері: $x_1 = 5$ және $x_2 = 197$.
Тексеру жүргізе отырып $x_1 = 5$ берілген теңдеудің түбірі болатынын, ал $x_2 = 197$ бөгде түбір екенін анықтаймыз.

Жауабы: 5.

МЫСАЛ 3. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6x-11}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеу қарастырылған теңдеулерден бірнеше радикал белгісімен ерекшеленеді. Сондықтан түрлендіру жасамай, бірден теңдеудің екі жақ бөлігін квадраттаймыз:

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3})^2 = (\sqrt{6x-11})^2;$$

$$x - 2 + 2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} + x + 3 = 6x - 11;$$

$$2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} = 4x - 12 \text{ немесе } \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} = 2x - 6.$$

Соңғы теңдеуді тағы да квадраттаймыз: $(x-2)(x+3) = (2x-6)^2$ немесе $3x^2 - 25x + 42 = 0$. Бұл теңдеудің түбірлері $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 6$.

Табылған түбірлер үшін теңдіктің орындалатынын тексерейік: $x_1 = \frac{7}{3}$ түбірі үшін $\sqrt{\frac{7}{3} - 2} + \sqrt{\frac{7}{3} + 3} = \sqrt{6 \cdot \frac{7}{3} - 11}$; $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{16}{3}} \neq \sqrt{3}$. Демек, $x_1 = \frac{7}{3}$ — бөгде түбір.

Енді $x_2 = 6$ үшін тексереміз: $\sqrt{6-2} + \sqrt{6+3} = \sqrt{6 \cdot 6 - 11}$; $2 + 3 = 5$; $5 \equiv 5$.
Демек, $x_2 = 6$ берілген иррационал теңдеудің түбірі болады.

Жауабы: 6.

! Сендер айнымалыны алмастыру әдісі арқылы иррационал теңдеулерді шешуді үйренесіңдер.

II. ***Иррационал теңдеуді жаңа айнымалы енгізу арқылы шешу.***

МЫСАЛ

4. $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}+\sqrt{\frac{2x+3}{3x-2}}=2,5$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=t>0$ жаңа айнымалысын енгізейік. Сонда $\sqrt{\frac{2x+3}{3x-2}}=\frac{1}{t}$ болады. Осыны ескерсек, берілген иррационал теңдеудің орнына $t+\frac{1}{t}=2,5$ теңдеуін аламыз. Шыққан бөлшек-рационал теңдеуді бүтін теңдеуге келтіреміз: $t^2-2,5t+$ $+1=0$, бұдан $t_1=2$; $t_2=\frac{1}{2}$. Түбірлерді ескерсек, $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=2$ және $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=\frac{1}{2}$ иррационал теңдеулерін аламыз. Енді шыққан иррационал теңдеулерді шешеміз.

1) $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=2$ теңдеуінің екі жақ бөлігін екінші дәрежеге шығарамыз: $\frac{3x-2}{2x+3}=4$ немесе $3x-2=8x+12$, бұдан $x=-2,8$.

2) $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}}=\frac{1}{2}$ теңдеуінің екі жақ бөлігін екінші дәрежеге шығарамыз: $\frac{3x-2}{2x+3}=\frac{1}{4}$ немесе $12x-8=2x+3$, бұдан $x=1,1$.

Табылған түбірлердің берілген теңдеуді қанағаттандыратынын тексерейік.

$x=-2,8$ үшін $\sqrt{\frac{3\cdot(-2,8)-2}{2\cdot(-2,8)+3}}+\sqrt{\frac{2\cdot(-2,8)+3}{3\cdot(-2,8)-2}}=\sqrt{\frac{-8,4-2}{-5,6+3}}+\sqrt{\frac{-5,6+3}{-8,4-2}}=$ $=\sqrt{4}+\sqrt{\frac{1}{4}}=2+\frac{1}{2}=2,5.$

$x=-2,8$ түбірі берілген иррационал теңдеуді қанағаттандырады.

$x=1,1$ үшін $\sqrt{\frac{3\cdot1,1-2}{2\cdot1,1+3}}+\sqrt{\frac{2\cdot1,1+3}{3\cdot1,1-2}}=\sqrt{\frac{1,3}{5,2}}+\sqrt{\frac{5,2}{1,3}}=\frac{1}{2}+2=2,5.$

$x=1,1$ мәні де берілген иррационал теңдеуді қанағаттандырады.

Жауабы: 1,1; −2,8.

МЫСАЛ

5. $\sqrt[5]{(x-2)^2}-\sqrt[5]{x-2}=2$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Берілген иррационал теңдеуді жаңа айнымалы енгізу тәсілімен шешеміз. $\sqrt[5]{x-2}=u$ деп алсақ, $\sqrt[5]{(x-2)^2}=u^2$. Берілген теңдеу жаңа айнымалы енгізу арқылы квадрат теңдеуге келтіріледі: $u^2-u-2=0$. Бұл теңдеудің түбірлері: $u_1=-1$; $u_2=2$. Сонда $\sqrt[5]{x-2}=-1$ және $\sqrt[5]{x-2}=2$ иррационал теңдеулерін аламыз. Енді алынған теңдеулерді шешейік:

1) $\sqrt[5]{x-2}=-1$ теңдеуін шешу үшін оның екі жақ бөлігін бесінші дәрежеге шығарамыз: $\left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5=(-1)^5$, бұдан $x-2=-1$ немесе $x_1=1$;

2) $\sqrt[5]{x-2}=2$ теңдеуін шешу үшін теңдеудің екі жақ бөлігін бесінші дәрежеге шығарамыз: $\left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5=2^5$, $x-2=2^5$, бұдан $x-2=32$, $x_2=34$. Бұл алынған $x_1=1$ және $x_2=34$ түбірлері берілген теңдеуді қанағаттандырады.

Жауабы: 1; 34.

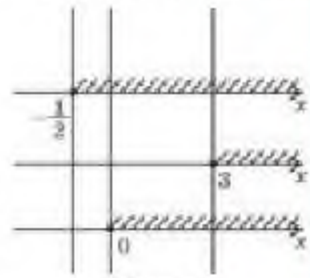
Шешімдері көрсетілген барлық есептерде түбірлердің теңдеуді қанағаттандыратынын тексердік. Иррационал теңдеулердің түбірлерін табудан бұрын түбірлері болатын жиын анықталса, онда анықталған жиынға ғана тиісті түбірлерді тексерген жеткілікті, ал тиісті емес түбірлер бірден бөгде түбір болады. Осыған мысал қарастырайық.

МЫСАЛ

6. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Алдымен берілген теңдеудің шешімдері болатын жиынды анықтайық. Теңдеудегі радикалдардың әрқайсысы квадрат түбірлер болғандықтан, мына теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} 2x+1 > 0, \\ x-3 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ x > 3, \\ x > 0. \end{cases}$$



33-сурет

Әрбір теңсіздіктің шешімдер жиынын жеке координаталық түзуге белгілеп, аралықтардың қиылысуын табайық (33-сурет). Сонда x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиыны $[3; +\infty)$ аралығы болады.

Сонымен, берілген иррационал теңдеудің түбірлері $[3; +\infty)$ аралығынан болуы тиіс. Енді берілген $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$ теңдеуін шешеміз. Ол үшін теңдеудің екі жағын квадраттаймыз: $\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3}\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\right)^2$, бұдан $2x+1+2\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-3}+$ $+x-3=4x$ немесе $2\cdot\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-3} = x+2$. Соңғы теңдеуді тағы да квадраттаймыз. Сонда $4(2x+1)(x-3) = x^2+4x+4$; $8x^2+4x-24x-12 = x^2+4x+4$ немесе $7x^2-24x-16=0$, ал түбірлері $x_1 = 4$ және $x_2 = -\dfrac{4}{7}$.

$x_1 = 4$ түбірі берілген теңдеудің шешімі болатын жиынға тиісті. Демек, бұл түбір үшін тексеру жүргізіп, оның берілген теңдеуді қанағаттандыратынын көреміз.

Екінші түбір $x_2 = -\dfrac{4}{7}$ теңдеудің шешімі болатын жиынға, яғни $x > 3$ жиынына тиісті болмағандықтан, тексеру жүргізбей бірден оны бөгде түбір деп айта аламыз.

Жауабы: 4.

?

1. Иррационал теңдеулерді шешкенде не себептен бөгде түбір пайда болады?
2. Иррационал теңдеулердің түбірлерін міндетті түрде тексеру керек пе? Жауабын түсіндіріңдер.
3. Мүмкін болатын мәндер жиыны белгілі болған жағдайда иррационал теңдеудің бөгде түбірлерін қалай көрсетуге болады?

Жаттығулар

А

Теңдеулерді шешіңдер (**11.1—11.4**):

11.1. 1) $\sqrt{x+2} = 4$; 2) $\sqrt{x^2-28} = 6$;

3) $\sqrt[3]{3-x^2}=-1$;   4) $\sqrt[4]{x^3-11}=2$.

11.2. 1) $\sqrt{x+2}=x$;   2) $\sqrt{4x-3}=x$;

3) $\sqrt[3]{1-x^3}=1-x$;   4) $\sqrt[4]{x^4+x^2-1}=x$.

11.3. 1) $x+\sqrt{x+3}=3$;   2) $\sqrt{2x+18}-5=x$;

3) $\sqrt[3]{x^3-8}+2=x$;   4) $\sqrt[3]{4x+3x^3}=x$.

11.4. 1) $\sqrt{3x+4}=2-x$;   2) $\sqrt{2x^2-3x+2}=2x-2$;

3) $\sqrt{7-3x}=1-x$;   4) $\sqrt{2x^3-5x+4}=2x+2$.

B

Теңдеулерді шешіңдер (**11.5—11.9**):

11.5. 1) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$;   2) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+1}=2$;

3) $x-1+\sqrt{x-1}=2$;   4) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$.

11.6. 1) $\sqrt{(4x+5)(3x-2)}=4x+5$;   2) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$;

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$;   4) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$.

11.7. 1) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$;   2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$;

3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$;   4) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+2}$.

11.8. 1) $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=5$;   2) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$;

3) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$;   4) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$.

11.9. 1) $\sqrt{\dfrac{3x-5}{3x+5}}+\left(\dfrac{3}{4}x+2\right)\cdot\sqrt{9x^2-25}=0$;

2) $\sqrt{\dfrac{6x-5}{6x+5}}+(3x+4)\cdot\sqrt{36x^2-25}=0$;

3) $\dfrac{2}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{\dfrac{x+6}{x+3}}$;

4) $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{2x+1}$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $\sqrt{x^2 - 8x}$ өрнегіндегі айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны:

A) $(0; 8)$; B) $[0; 8]$; C) $(-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$;

D) $(-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$; E) $(0; 8]$.

2. $\sqrt{64 - x^2}$ өрнегіндегі айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны:

A) $(-8; 8)$; B) $[-8; 8]$; C) $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$;

D) $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$; E) $(-8; 8]$.

3. $y = 2 - \sqrt{x^2 + 3}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) $(-\infty; -3)$; B) $[-\infty; \sqrt{3}]$; C) кез келген сан; D) $[\sqrt{3}; +\infty)$.

4. $\sqrt{x - 4} = 7$ теңдеуін шешіңдер:

A) 0; B) 49; C) 50; D) 53.

5. $\sqrt{2x + 3} = x$ теңдеуінің түбірі неге тең:

A) -3; B) 1; C) 3; D) -1?

6. $\sqrt{3x - 5} = x - 3$ теңдеуін шешіңдер:

A) 2,7; B) 7; C) 2; D) шешімі жоқ.

7. $\sqrt{x + 4} = \sqrt{5 - x}$ теңдеуінің түбірлерін табыңдар:

A) 4,5; B) $-4,5$; C) $-0,5$; D) 0,5; E) бос жиын.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция ұғымы, оның қасиеттері мен графигі, функцияның шегі, туындысы, дәреже, дәреженің негізі және көрсеткіші, үзіліссіздік.

IV ТАРАУ

КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАР

§ 12. КӨРСЕТКІШТІК ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

Сендер көрсеткіштік функция ұғымымен таныcасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, функция графигі, көрсеткіштік функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның қасиеттері

Анықтама.

$$y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1 \qquad (1)$$

формуласы арқылы берілген функцияны ***көрсеткіштік функция*** *деп атайды.*

Мұндағы a саны — көрсеткіштік функцияның *негізі*, ал тәуелсіз айнымалы x — дәреженің *көрсеткіші*.

Көрсеткіштік функцияның негізгі қасиеттері:

1) анықталу облысы — барлық нақты сандар жиыны, яғни $x \in R$;

2) мәндер жиыны — барлық оң нақты сандар жиыны, яғни $y \in R_+$;

3) негізі $a > 1$ болғанда функция анықталу облысында өспелі, ал $0 < a < 1$ болғанда кемімелі функция;

4) барлық $x \in R$ нақты сандар жиынында $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) функциясы үзіліссіз;

5) кез келген $a > 0$ үшін $a^0 = 1$, демек, $y = a^x$ функциясының графигі координаталары (0; 1) болатын нүкте арқылы өтеді.

Көрсеткіштік функция үшін x және y-тің кез келген нақты мәндерінде мына теңдіктер орындалады:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\ (ab)^x = a^x \cdot b^x;\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};\ (a^x)^y = a^{xy}.$$

Функцияның жоғарыда аталған қасиеттерін дәлелдейік.

Дәлелдеу. 1) Негізі $a > 0$ болғанда, x-тің кез келген мәні үшін a^x дәрежесін есептеуге болады. Олай болса, $y = a^x$ функциясының анықталу облысы — барлық нақты сандар жиыны.

2) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциясының мәні кез келген x нақты саны үшін оң сан. Демек, $y = a^x$ функциясының мәндер жиыны барлық оң нақты сандар жиыны болады.

3) Ox осінің бойынан кез келген x_1 және x_2 ($x_1 < x_2$) нүктелерін (сандарын) алсақ, осы екі нүктеге сәйкес келетін функция мына мәндерді қабылдайды: $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$.

$a > 1$ жағдайында кіші аргументке функцияның кіші мәні, үлкен аргументке функцияның үлкен мәні сәйкес болғандықтан, $a^{x_1} < a^{x_2}$. Осы заңдылық функцияның анықталу облысының жиынындағы кез келген екі нүкте үшін орындалады. Олай болса, $a > 1$ болғанда $y = a^x$ функциясы — өспелі функция.

Көрсеткіштік функцияның негізі $0 < a < 1$ болғанда жоғарыда айтылған заңдылық керісінше орындалады, кіші аргументке функцияның үлкен мәні, үлкен аргументке функцияның кіші мәні сәйкес болғандықтан $a^{x_1} > a^{x_2}$. Демек, $0 < a < 1$ аралығында $y = ax$ функциясы — кемімелі функция.

Сендер көрсеткіштік функцияның графигін салуды үйренесіңдер.

Мысал ретінде $y = 3^x$ және $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функцияларының графиктерін қарастырайық.

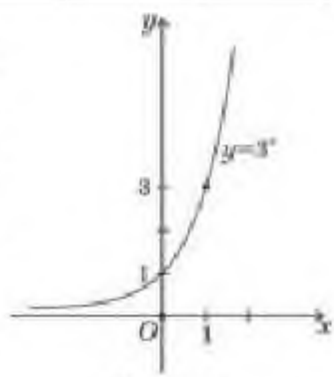
I. $y = 3^x$ функциясының графигін салу үшін төмендегі кестені құрамыз:

4-кесте

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

$\left(-3; \frac{1}{27}\right)$, $\left(-2; \frac{1}{9}\right)$, $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$, $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 9)$, $(3; 27)$ нүктелерін координаталық жазықтыққа түсіргеннен кейін оларды қоссақ, $y = 3^x$ функциясының графигін аламыз (34-сурет).

Графиктен берілген функцияның өспелі функция екенін байқаймыз.



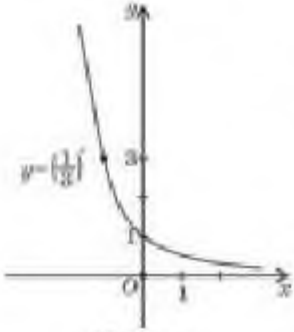
34-сурет

II. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциясының графигін салу үшін мына кестені құрамыз:

5-кесте

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

$(-3; 27)$, $(-2; 9)$, $(-1; 3)$, $(0; 1)$, $\left(1; \frac{1}{3}\right)$, $\left(2; \frac{1}{9}\right)$, $\left(3; \frac{1}{27}\right)$ нүктелерін координаталық жазықтыққа түсіріп және оларды қоссақ, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциясының графигін аламыз (35-сурет).



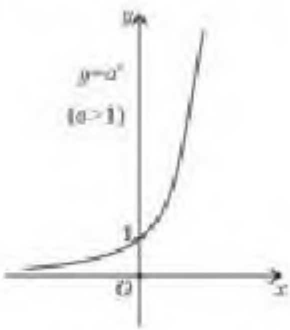
35-сурет

Графиктен берілген функцияның анықталу облысында кемімелі екенін көреміз.

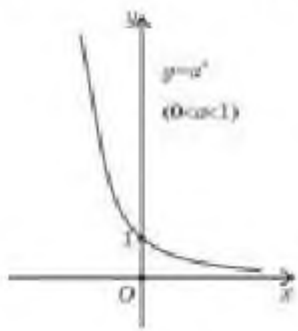
Енді $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциясының графигін жалпы түрде берейік.

$a > 1$ болғандағы $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциясының графигі 36-суретте, ал $0 < a < 1$ болғандағы графигі 37-суретте көрсетілген.

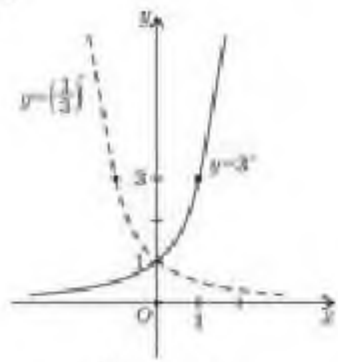
$y = 3^x$ және $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ көрсеткіштік функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салайық (38-сурет). Суреттен аталған функциялардың графиктері Oy осіне қарағанда симметриялы екенін көреміз. Осыдан мына тұжырымды аламыз: *егер екі көрсеткіштік функцияның негіздері өзара кері сандар болса, онда ол функциялардың графиктері Oy осіне қарағанда симметриялы.*



36-сурет



37-сурет



38-сурет

4) Көрсеткіштік функцияның үзіліссіздігін дәлелдейік.

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциясы берілсін. Аргумент x-ке Δx өсімше берсек, аргумент өсімшесіне сәйкес функция да өсімше қабылдайды:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x = a^x\,(a^{\Delta x} - 1).$$

Енді осы өсімшенің $\Delta x \to 0$ ұмтылғандағы шегін табайық:

$$\Delta y \to a^x \cdot (a^0 - 1) = 0.$$

Аргументтің шексіз аз өсімшесіне функцияның да шексіз аз өсімшесі сәйкес келеді. Осы заңдылық $y = a^x$ функциясы үшін аргументтің анықталу облысының кез келген нүктесінде орындалады. Демек, $y = a^x$ функциясы өзінің анықталу облысының кез келген нүктесінде үзіліссіз.

Сендер көрсеткіштік функция қасиеттерін есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

МЫСАЛ **1.** $y = 5^{x-1} + 1$ функциясының графигін салайық.

Шешуі. Алдымен $y = 5^x$ функциясының графигін салу керек. Ол үшін $a = 5 > 1$ екенін ескеріп 36-сурет бойынша барлық нақты сандар жиынында өспелі функцияның графигін жүргіземіз. Одан кейін салынған графикті Ox осі бойымен бір бірлікке оң бағытта параллель көшіреміз. Шыққан графикті Oy осі бойымен бір бірлікке жоғары параллель көшіреміз (39-сурет).

МЫСАЛ **2.** $0,27^4$ және $0,27^{10}$ сандарын салыстырайық.

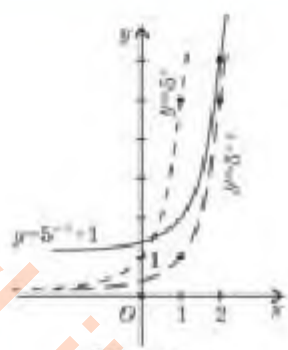
Шешуі. Берілген сандардың негіздері бірдей және 0,27-ге тең. Осы негізді 1 санымен салыстырамыз: $0,27 < 1$, бұл жағдайда көрсеткіштік функция кемімелі. Демек, кіші аргументке функцияның үлкен мәні сәйкес. Сондықтан $0,27^4 > 0,27^{10}$.

Жауабы: $0,27^4 > 0,27^{10}$.

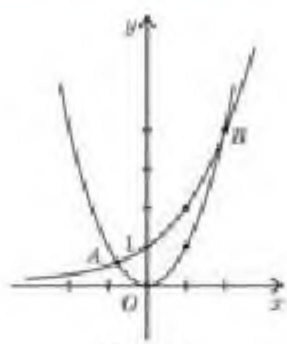
МЫСАЛ **3.** $y = 2^x$ және $y = x^2$ функцияларының графиктері неше нүктеде қиылысатынын көрсетейік.

Шешуі. Ол үшін бір координаталық жазықтыққа $y = 2^x$ және $y = x^2$ функцияларының графиктерін саламыз. Бірінші функция көрсеткіштік функция және негізі 1-ден үлкен. Демек, $y = 2^x$ функциясының графигі (0; 1) нүктесі арқылы өтетін және R-де өспелі қисық. Ал $y = x^2$ функциясының графигі төбесі (0; 0) нүктесі болатын, тармақтары жоғары бағытталған парабола. Графиктер A және B нүктелерінде қиылысады (40-сурет).

Жауабы: екі нүктеде қиылысады.



39сурет



40-сурет

?

1. Көрсеткіштік функцияның өспелі немесе кемімелі екенін қалай анықтауға болады?
2. Неге барлық көрсеткіштік функциялардың графиктері (0; 1) нүктесінен өтеді? Жауабын түсіндіріңдер.
3. Неге $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциясы жоғарыдан шектелмеген, ал төменнен шектелген ($a > 1$ және $0 < a < 1$ жағдайлары үшін қарастырыңдар)?

Жаттығулар

А

$y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар (**12.1-12.2**):

12.1. 1) $f(x) = 5^x$; 2) $f(x) = 1,5^x$;

3) $f(x) = 0,85^x$; 4) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

12.2. 1) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 2) $f(x) = \left(1\frac{1}{6}\right)^x$;

3) $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$; 4) $f(x) = 4^x$.

12.3. Берілген график бойынша функцияның қасиеттерін атаңдар (41-сурет):

41-сурет

12.4. $y = f(x)$ функциясының мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = 0,24^x + 3$; 2) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x - 2$;

3) $f(x) = -7^x + 1$; 4) $f(x) = 36^x - 4$.

12.5. Сандарды салыстырыңдар:

1) $1,8^3$ және 2^3; 2) $0,8^2$ және $0,54$;

3) $0,5^3$ және $0,5^7$; 4) $3,2^{1,6}$ және $3,2^{1,7}$;

5) $0,2^{\sqrt{2}}$ және $0,2^{1,4}$; 6) 3^{π} және $3^{3,149}$.

12.6. 1; 8; 32; $\frac{1}{64}$; 0,25; 0,0625 сандарын 2 санының дәрежесі ретінде жазыңдар.

12.7. Есептеңдер:

1) $4^{1-3\sqrt{2}} \cdot 64^{\sqrt{2}-1}$; 2) $\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $49^{\sqrt{7}} : 7^{2\sqrt{7}}$; 4) $6^{2\sqrt{5}+1} : 36^{\sqrt{5}}$.

12.8. Ықшамдаңдар:

1) $\left(\frac{1}{a}\right)^{3+\sqrt{3}} \cdot a^{\sqrt{3}+2}$; 2) $\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}} \cdot \left(a^{\sqrt{5}+1} : a^{\sqrt{5}}\right)$;

3) $b^{3,5} : \left(b\sqrt{b^{3}}\right)$; 4) $b^{\sqrt{5}} \cdot b^{1,4} : \sqrt[5]{b^{5\sqrt{5}}}$.

12.9. $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының графиктері неше нүктеде қиылысатынын көрсетіңдер:

1) $f(x) = 3^{x}$ және $g(x) = 3x$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{x}$ және $g(x) = x^{2}$;

3) $f(x) = 7^{x}$ және $g(x) = \frac{1}{x}$; 4) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x}$ және $g(x) = x^{3}$.

B

12.10. $y = a^{x}$ функциясының графигіне қарапайым түрлендірулерді қолданып $y = g(x)$ функциясының графигін салыңдар:

1) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 2$; 2) $g(x) = 4^{x} + 3$;

3) $g(x) = (2,5)^{x-1} + 2$; 4) $g(x) = (2,25)^{x+3} - 4$.

12.11. $y = f(x)$ функциясының мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = 4^{x} - 5,6$; 2) $f(x) = (0,35)^{x} + 3$;

3) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} - 1$; 4) $f(x) = 1 - 3^{x}$.

12.12. Салыстырыңдар:

1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ және $3^{1,5}$;

2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{5}}$ және $6^{-2,25}$;

3) $(7 - 4\sqrt{3})^{3,5}$ және $(7 - 4\sqrt{3})^{3,5}$;

4) $(5 + 2\sqrt{6})^{3,3}$ және $(5 + 2\sqrt{6})^{-3,1}$.

12.13. $y = g(x)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар:

1) $g(x) = 3^{\cos x}$; 2) $g(x) = 2^{\sin x}$;

3) $g(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{2\sin x}$; 4) $g(x) = 4 - 16^{\frac{1}{2}\cos x}$.

12.14. Егер:

1) $b = 5$ болса, онда $\left(b^{4}\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(b^{3}\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{7}}$;

2) $b = 3$ болса, онда $\left(b^{3}\sqrt{b}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot \left(b^{5}\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{9}{16}}$;

3) $b = 2$ болса, онда $\left(b^3\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \left(b^2\sqrt[4]{b}\right)^{\frac{8}{9}}$;

4) $b = 4$ болса, онда $\left(b\sqrt[4]{b}\right)^{\frac{8}{5}} \cdot \left(b^2\sqrt[5]{b}\right)^{\frac{5}{11}}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

12.15. $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының графиктері неше нүктеде қиылысатынын көрсетіңдер:

1) $f(x) = 5^x$ және $g(x) = 6 - x$;

2) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ және $g(x) = 3 - x$;

3) $f(x) = 2^x - 2$ және $g(x) = 1 - x$;

4) $f(x) = 3^{-x}$ және $g(x) = -\frac{3}{x}$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің негізі және қасиеттері, көрсеткіштік функция, оның қасиеттері мен графигі.

§ 13. САННЫҢ ЛОГАРИФМІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Сендер санның логарифмі ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Сан, логарифм, ондық логарифм, натурал логарифм, e саны

Анықтама. *Негізі a болатын оң* ***b санының логарифмі*** *деп b санына тең болатын негіздің дәреже көрсеткішін айтамыз.*

Логарифмнің белгіленуі: log.

Логарифмнің жалпы түрі: $\log_a b$, мұндағы a — *логарифмнің негізі,* b — *логарифм таңбасының астындағы өрнек.*

Логарифмнің жалпы түрінің оқылуы: негізі a болатын b санының логарифмі.

Анықтама бойынша

$$\log_a b = u, \ a > 0, \ a \neq 1, \ b > 0, \qquad (1)$$

яғни $a^u = b > 0$.

Мысалы: $\log_5 25 = 2$, өйткені $5^2 = 25$; $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{81} = 4$, өйткені $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

МЫСАЛ 1. 16; 64; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{128}$ сандарының негізі 2 болатын логарифмдерін табайық.

Шешуі. Логарифмдерді табу үшін (1)-формуланы пайдаланамыз:

$\log_2 16 = 4$, себебі $2^4=16$; $\log_2 64 = 6$, себебі $2^6 = 64$;

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, себебі $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $\log_2 \frac{1}{128} = -7$, себебі $2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$.

(1)-формуланы $a^u = b$ теңдігіне қойып, мына тепе-теңдікті алуға болады:

$$a^{\log_a b} = b. \qquad (2)$$

(2) тепе-теңдігін *негізгі логарифмдік тепе-теңдік* деп атайды.

Сендер логарифмнің қасиеттерін білесіңдер.

$a > 0$ және $a \neq 1$ және b, c оң сандар болғанда логарифмнің қасиеттеріне тоқталайық:

1) бір санының логарифмі нөлге тең: $\log_a 1 = 0$;

2) негізі a болатын a санының логарифмі бірге тең: $\log_a a = 1$;

3) көбейтіндінің логарифмі көбейткіштердің логарифмдерінің қосындысына тең:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c;$$

4) бөлшектің логарифмі бөлшектің алымының логарифмі мен бөлімінің логарифмінің айырымына тең:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

5) дәреженің логарифмі дәреженің көрсеткішін дәреженің негізінен алынған логарифмге көбейткенге тең:

$$\log_a b^k = k \log_a b;$$

6) жаңа негізге көшу: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $0 < c \neq 1$;

7) $\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b$.

Ескерту: $a^u = b$ болғандықтан, барлық формулаларда логарифм таңбасының астындағы сандар оң сандар болады.

Берілген қасиеттердің кейбірін дәлелдейік.

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ қасиетін дәлелдейік.

Дәлелдеу. $b = a^{\log_a b}$, $c = a^{\log_a c}$ болсын. b және c сандарының көбейтіндісін анықтайық:

$b \cdot c = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$, яғни $b \cdot c = a^{\log_a b + \log_a c}$. Осыдан логарифмнің анықтамасына сәйкес мына теңдікті аламыз:

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Енді $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ қасиетін дәлелдейік.

Дәлелдеу. Ол үшін негізгі логарифмдік $a^{\log_a b} = b$ тепе-теңдігінің екі жақ бөлігінен негіздері c-ға $(0 < c \neq 1)$ тең логарифм алсақ,

$$\log_c (a^{\log_a b}) = \log_c b.$$

Енді дәреженің логарифмінің формуласын пайдалансақ,

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

теңдігін аламыз. Осыдан $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Қалған қасиеттерді өздерің дәлелдеп көріңдер.

Сендер логарифм қасиеттерін білу және оны логарифмдік өрнектерді түрлендіруде қолдануды үйренесіңдер.

МЫСАЛ **2. Логарифмдерді есептейік:**

1) $\log_3 (27 \cdot 81)$; 2) $\log_2 (32)^3$; 3) $\log_5 \sqrt[5]{25}$.

Шешуі. 1) $\log_3 (27 \cdot 81) = \log_3 27 + \log_3 81 = 3 + 4 = 7$;

2) $\log_2 (32)^3 = 3\log_2 32 = 3\log_2 2^5 = 3 \cdot 5 = 15$;

3) $\log_5 \sqrt[5]{25} = \log_5 5^{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{5}\log_5 5 = \dfrac{2}{5}$.

Жауабы: 1) 7; 2) 15; 3) $\dfrac{2}{5}$.

Логарифмнің негізгі қасиеттері логарифмдері бар алгебралық өрнектерді тепе-тең түрлендіргенде қолданылады.

Алгебралық өрнек көбейтінді, бөлшек, дәрежелеу және түбір табу амалдары арқылы берілген оң сандардың өрнектері болса, онда оларды логарифмнің негізгі қасиеттерін қолданып логарифмдеуге болады.

МЫСАЛ **3.** $x = \dfrac{15^2 \cdot \sqrt{120}}{\sqrt[4]{58 \cdot 82}}$ өрнегін логарифмдейік.

Шешуі. Өрнек бөлшек түрінде берілген. Алдымен өрнектің оң жақ бөлігіне бөлшектің логарифмін, сонан соң көбейтінді және дәреженің логарифмін қолданып түрлендіреміз:

$\log_a x = \log_a \left(15^2 \cdot \sqrt{120}\right) - \log_a\left(\sqrt[4]{58 \cdot 82}\right) = \log_a 15^2 + \log_a \sqrt{120} - \log_a \sqrt[4]{58} - \log_a \sqrt[4]{82} =$

$= 2\log_a 15 + \dfrac{1}{2}\log_a 120 - \dfrac{1}{4}\log_a 58 - \dfrac{1}{4}\log_a 82$.

Сонымен, $\log_a x = 2\log_a 15 + \dfrac{1}{2}\log_a 120 - \dfrac{1}{4}\log_a 58 - \dfrac{1}{4}\log_a 82$.

Сендер ондық логарифм және натурал логарифм ұғымдарымен танысасыңдар.

Логарифм негізіне байланысты бірнеше түрге бөлінеді.

Негізі 10 саны болатын логарифмді *ондық логарифм* деп атайды. Белгіленуі: $\lg b$, олай болса, $\log_{10} b = \lg b$.

Математикада логарифмнің негізі есебінде алынатын e саны қарастырылады. e саны иррационал сан, $e \approx 2,718...$. Оның жүздік дәлдікпен алынатын жуық мәні $e \approx 2,72$.

Негізі $e \approx 2,718...$ санына тең логарифм *натурал логарифм* деп аталады. Оны $\ln b$ деп белгілейді, яғни $\log_e b = \ln b$.

МЫСАЛ

4. 1) $\lg 30 - \lg 3$; 2) $\ln 0,5 + \ln(2e^3)$ мәндерін есептейік.

Шешуі. 1) $\lg 30 - \lg 3$ өрнегінің мәнін табу үшін бөлшектің логарифмін табу қасиетін қолданамыз:

$\lg 30 - \lg 3 = \lg(30 : 3) = \lg 10 = 1$, себебі $10^1 = 10$;

2) $\ln 0,5 + \ln(2e^3)$ өрнегіне логарифмнің көбейтіндісінің қасиетін қолданып былай жазамыз: $\ln 0,5 + \ln(2e^3) = \ln(0,5 \cdot 2e^3) = \ln e^3 = 3\ln e = 3 \cdot 1 = 3$.

Жауабы: 1) 1; 2) 3.

Енді логарифмі қандай да бір өрнектердің логарифмдері арқылы берілген өрнекті табуды қарастырайық. Мұндай түрлендіруді *потенциалдау* деп атайды.

Потенциалдау үшін төмендегі тұжырымды қолданамыз:

$$\log_a t = \log_a s$$

теңдігі $t = s$ болғанда ғана орындалады, мұндағы $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$.

Потенциалдауға мысал қарастырайық.

МЫСАЛ

5. $\log_a x = 3\log_a 17 + \frac{2}{3}\log_a 5 - \frac{1}{7}\log_a 75 - \frac{1}{7}\log_a 96$ теңдігіндегі x-тің мәнін табайық.

Шешуі. Берілген теңдіктің оң жақ бөлігіндегі өрнекті логарифмнің қасиеттерін қолданып түрлендіреміз:

$3\log_a 17 + \frac{2}{3}\log_a 5 - \frac{1}{7}\log_a 75 - \frac{1}{7}\log_a 96 = \log_a 17^3 + \log_a \sqrt[3]{5^2} - \log_a \sqrt[7]{75} - \log_a \sqrt[7]{96} = \log_a \frac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$. Сонда $\log_a x = \log_a \frac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$. Демек, потенциалдау бойынша $x = \frac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$.

Жауабы: $\frac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$.

1. Теріс санның логарифмі бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.
2. Жаңа негізге көшу қасиеті қай уақытта қолданылады?
3. Потенциалдау кезінде логарифмнің негізі ескеріле ме? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

A

Теңдіктерді логарифм арқылы өрнектеңдер (13.1—13.3):

13.1. 1) $3^3 = 27$; 2) $2^5 = 32$;

3) $3^{-2} = \frac{1}{9}$; 4) $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

13.2. 1) $4^3 = 64$; 2) $2^{-6} = \frac{1}{64}$;

3) $3^4 = 81$; 4) $3^{-5} = \frac{1}{243}$.

13.3. 1) $27^{\frac{2}{3}} = 9$; 2) $32^{\frac{3}{5}} = 8$;

3) $81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$; 4) $125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{25}$.

Теңдіктердің ақиқат болатынын тексеріңдер (13.4—13.7):

13.4. 1) $\log_3 81 = 4$; 2) $\log_5 1 = 0$;

3) $\log_2 64 = 6$; 4) $\log_5 625 = 4$.

13.5. 1) $\log_5 0{,}04 = -2$; 2) $\log_7 2401 = 4$;

3) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$; 4) $\lg 0{,}001 = -3$.

13.6. 1) $\log_{\sqrt{2}} 16 = 8$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$;

3) $\log_3 243 = 5$; 4) $\lg 0{,}1 = -1$.

13.7. 1) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$; 2) $\log_{0,3} 0{,}09 = 2$;

3) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$; 4) $\lg 10^3 = 3$.

Берілген сандардың a негіздегі логарифмдерін табыңдар (13.8-13.9):

13.8. 1) 5; $\frac{1}{5}$; $\sqrt{5}$, $a = 5$; 2) 64; $\frac{1}{8}$; 128, $a = 2$;

3) 7; $\frac{1}{7}$; 49, $a = 7$; 4) 4; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{64}$, $a = 2$.

13.9. 1) 243; $\frac{1}{81}$; 27, $a = 3$; 2) 5; 25; $\frac{1}{625}$, $a = \frac{1}{5}$;

3) 4; 8; $\frac{1}{32}$, $a = \frac{1}{2}$; 4) 3; 9; $\frac{1}{27}$, $a = \frac{1}{3}$.

Есептеңдер (13.10—13.13):

13.10. 1) $\log_{12}3 + \log_{12}4$; 2) $\log_7 98 - \log_7 2$;

3) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} 5 - \log_{\frac{1}{3}} 405 + \log_{\frac{1}{3}} 9$.

13.11. 1) $3^{\log_3 5} + 5^{\log_5 6}$; 2) $25^{\log_5 3} + 49^{\log_7 2}$;

3) $7^{\log_7 6} - 8^{\log_8 9}$; 4) $0{,}04^{\log_{0,2} 5} + 0{,}36^{\log_{0,6} 5}$.

13.12. 1) $\lg 4 + \lg 250$; 2) $\log_2 6 - \log_2 \dfrac{6}{32}$;

3) $(\log_{12} 4 + \log_{12} 36)^2$; 4) $\lg 13 - \lg 1300$.

13.13. 1) $\left(\dfrac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}\right)^3$; 2) $\left(\dfrac{\log_3 16}{\log_3 4}\right)^{-1}$;

3) $(\log_2 13 - \log_2 52)^5$; 4) $(\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10)^4$.

13.14. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\log_3 x = -1$; 2) $\log_2 x = -5$;

3) $\log_3 x = 2$; 4) $\log_4 x = 3$;

5) $\log_4 x = -3$; 6) $\log_7 x = 0$;

7) $\log_{\frac{1}{7}} x = 1$; 8) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

B

Есептеңдер (**13.15—13.17**):

13.15. 1) $\log_2 \log_2 \log_3 81$; 2) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}$;

3) $\log_{\sqrt{3}} \log_5 125$; 4) $\log_4 \log_3 81$.

13.16. 1) $\dfrac{1}{\log_9 27}$; 2) $\dfrac{1}{\log_{16} 8}$;

3) $\log_2 128 \cdot \log_5 \dfrac{1}{125}$; 4) $\log_3 (\log_2 5 \cdot \log_5 8)$.

13.17. 1) $\dfrac{3}{\log_2 3} - \dfrac{2}{\log_9 4} - \dfrac{1}{\log_{27} 81}$; 2) $\dfrac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 3{,}6 + 1}$;

3) $2^{3-\log_2 5} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$; 4) $3^{2+\log_3 4} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_3 4}$.

13.18. Теңдеуді шешіңдер:

1) $\log_x 81 = 4$; 2) $\log_x \dfrac{1}{16} = 2$;

3) $\log_x \dfrac{1}{27} = -3$; 4) $\log_x 36 = 2$.

13.19. Берілген сандарды a негіздегі логарифм түрінде жазыңдар:

1) $2;\ \dfrac{1}{2};\ 1;\ 0,\ a = 2$; 2) $3;\ -1;\ -3;\ 1,\ a = 3$;

3) $4;\ 3;\ 0;\ -1,\ a = 4$; 4) $5;\ 3;\ 0;\ 1,\ a = 5$.

13.20. Берілген өрнектерді ондық логарифм арқылы жазыңдар:

1) $N = 100\sqrt{ab^3c}$; 2) $N = \dfrac{a^6}{0{,}1c^3\sqrt{6}}$;

3) $N = \sqrt[3]{10}\,a^{\frac{1}{3}}b^4c^{-\frac{1}{2}}$; 4) $N = \dfrac{0{,}001a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{c}\cdot b^3}$;

5) $N = 10^4 a^5 \sqrt{b}\, c^{-4}$;

6) $N = \dfrac{c^{\frac{2}{3}}}{10^3 b^6 c^4}$;

7) $N = 10^{-4} \cdot a^3 b^3 c^{\frac{2}{3}}$;

8) $N = \dfrac{c^{\frac{4}{7}}}{10^7 a^{\frac{3}{2}} b^9}$.

13.21. Дәлелдеңдер:

1) $\log_5 6 + \log_4 5 > -1$;

2) $\log_{\frac{1}{4}} 2 + \log_{\frac{2}{3}} 4 < 1$;

3) $8^{\log_7 9} = 9^{\log_7 8}$;

4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_4 \frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_4 \frac{1}{6}}$.

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

13.22. Ғалым-математик Джон Непер және оның "Логарифмдердің ғажайып кестесі" жайлы хабарлама дайындаңдар.

Дж. Непер
(1550—1617)

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция, функцияның анықталу облысы мен графигі, дәреже, көрсеткіштік функция және оның қасиеттері мен графиктері, логарифм және оның қасиеттері.

§ 14. ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯ, ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ГРАФИГІ

Сендер логарифмдік функция ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Функция, функция графигі, логарифмдік функция, анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның қасиеттері

Анықтама.

$$y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1 \qquad (1)$$

формуласымен берілген функцияны ***логарифмдік функция*** *деп атайды.*

Сендер логарифмдік функцияның қасиеттерімен танысасыңдар, графигін салуды үйренесіңдер.

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциясының негізгі қасиеттері:

1) анықталу облысы — барлық оң сандар жиыны: $x \in (0; +\infty)$;

2) логарифмдік функцияның мәндер жиыны — барлық нақты сандар жиыны: $y \in (-\infty; +\infty)$;

3) негізі $a > 1$ болғанда логарифмдік функция өспелі, ал негізі $0 < a < 1$ болғанда кемімелі;

$y = \log_a x$ функциясының негізі $a > 1$ болғандағы графигі 42.1-суретте, негізгі $0 < a < 1$ болғандағы графигі 42.2-суретте көрсетілген;

4) $y = \log_a x$ функциясы өзінің анықталу облысында үзіліссіз.

1) 2)

42-сурет

Функцияның қасиеттерін дәлелдейік.

1) Кез келген оң санның берілген негізде ($a > 0$, $a \neq 1$) логарифмі бар болатынын алдыңғы параграфта дәлелдедік. Демек, функцияның анықталу облысы — барлық оң сандар жиыны.

2) Логарифмнің анықтамасы бойынша кез келген u үшін мына теңдік орындалады:

$$\log_a a^u = u.$$

3) $y = \log_a x$ функциясының анықталу облысынан аргументтің кез келген x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ мәндерін алып және оларға сәйкес функцияның $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$ мәндерін қарастырайық.

$a > 1$ болған жағдайда $x_1 < x_2$ үшін $\log_a x_1 < \log_a x_2$ теңсіздігі орындалады.

Себебі негізі $a > 1$ болғанда үлкен санға үлкен логарифм, кіші санға кіші логарифм сәйкес келеді. Мысалы, $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$; $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, $2 < 3$.

Логарифмнің негізі $0 < a < 1$ болғанда $x_1 < x_2$ үшін

$$\log_a x_1 > \log_a x_2$$

орындалады. Себебі негізі $0 < a < 1$ болғанда кіші санға үлкен логарифм, үлкен санға кіші логарифм сәйкес келеді.

Мысалы, $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 2^2 = 2\log_{\frac{1}{2}} 2 = 2\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = -2$;

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} (2^3) = 3\log_{\frac{1}{2}} 2 = 3\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -3\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = -3$, сонда

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$. Демек, $\log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 8$.

4) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциясының үзіліссіздігін дәлелдейік.

Аргумент x-ке Δx өсімше берейік: $\Delta x = (x + \Delta x) - x$. Осыған сәйкес функция өсімше қабылдайды: $\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$, сонда $\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Теңдіктің екі жағынан $\Delta x \to 0$ ұмтылғандағы шекке көшсек,

$$\Delta y \to \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a 1 = 0,$$

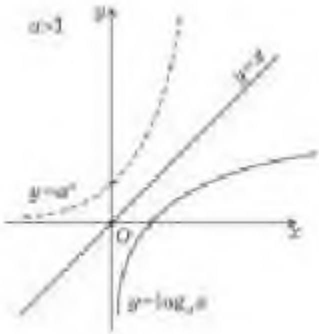
яғни аргументтің шексіз аз өсімшесіне функцияның шексіз аз өсімшесі сәйкес келеді.

Демек, $y = \log_a x$ функциясы x нүктесінде үзіліссіз функция. Ал x нүктесі — анықталу облысының кез келген нүктесі. Олай болса $y = \log_a x$ анықталу облысының кез келген нүктесінде үзіліссіз функция.

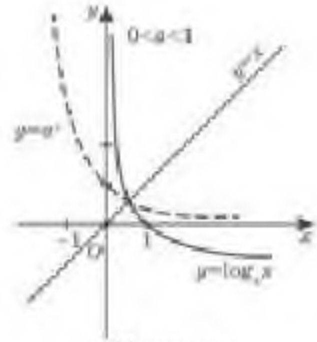
Енді функцияның графигіне тоқталайық (43, 44-суреттер).

$a > 1$ болғанда $x > 1$ мәндерінде $y = \log_a x > 0$, ал $0 < x < 1$ мәндерінде $y = \log_a x < 0$. $0 < a < 1$ болғанда $x > 1$ мәндерінде $y = \log_a x < 0$, ал $0 < x < 1$ мәндерінде $y = \log_a x > 0$.

$y = \log_a x$ және $y = a^x$ функцияларының графиктері $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы (43, 44-суреттер).



43-сурет



44-сурет

Сендер логарифмдік функция қасиеттерін есептер шығаруда қолдануды үйренесіңдер.

Логарифмдік функцияның негізгі қасиеттеріне мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ 1. 1) $f(x) = \log_3(8 - 3x)$; 2) $f(x) = \log_2(5x^2 - 8x - 4)$; 3) $f(x) = \log_4\dfrac{5x + 3}{6 - 7x}$ функцияларының анықталу облысын табайық.

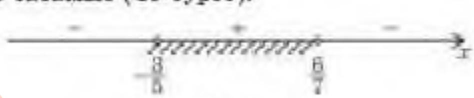
Шешуі. 1) Логарифмдік функцияның анықталу облысы — барлық оң сандар жиыны: $R_+ = (0; +\infty)$. Сондықтан $f(x) = \log_3(8 - 3x)$ функциясының аргументі $8 - 3x > 0$ немесе $x < \dfrac{8}{3}$.

Демек, $f(x) = \log_3(8 - 3x)$ функциясының анықталу облысы $\dfrac{8}{3}$-ден кіші сандар.

2) $f(x) = \log_2(5x^2 - 8x - 4)$ функциясының анықталу облысы $5x^2 - 8x - 4 > 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын сандар жиыны. Интервалдар әдісін қолданып $x < -0{,}4$ және $x > 2$, яғни $(-\infty; -0{,}4) \cup (2; +\infty)$ аралықтарын аламыз (45-сурет):

45-сурет

3) $f(x) = \log_4\dfrac{5x + 3}{6 - 7x}$ функциясының анықталу облысын табу үшін $\dfrac{5x + 3}{6 - 7x} > 0$ теңсіздігін қарастырамыз. Осы теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің мәндерін интервалдар тәсілімен табамыз (46-сурет):



46-сурет

Сонымен $f(x) = \log_4\dfrac{5x + 3}{6 - 7x}$ функциясының анықталу облысы $\left(-\dfrac{3}{5}; \dfrac{6}{7}\right)$ аралығы болып табылады.

Жауабы: 1) $\left(-\infty; \dfrac{8}{3}\right)$; 2) $(-\infty; -0{,}4) \cup (2; +\infty)$; 3) $\left(-\dfrac{3}{5}; \dfrac{6}{7}\right)$.

МЫСАЛ **2.** Берілген сандарды салыстырайық:
1) $\log_2 13$ және $\log_2 17$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} 3$ және $\log_{\frac{1}{4}} 5$.

Шешуі. 1) $\log_2 13$ және $\log_2 17$ логарифмдерінің негіздері бірдей және $a = 2$. Ал негізі $a > 1$ болғанда логарифмдік функция өспелі функция, яғни үлкен санға үлкен логарифм, кіші санға кіші логарифм сәйкес келеді. Сондықтан $\log_2 13 < \log_2 17$, өйткені $13 < 17$.

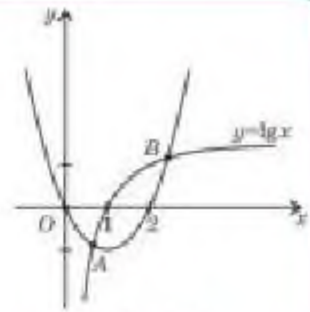
2) $\log_{\frac{1}{4}} 3$ және $\log_{\frac{1}{4}} 5$ логарифмдердің негіздері бірдей $\frac{1}{4}$-ге тең және $0 < \frac{1}{4} < 1$. Ал $0 < a < 1$ болғанда логарифмдік функция кемімелі. Демек, $3 < 5$ болғандықтан, $\log_{\frac{1}{4}} 3 > \log_{\frac{1}{4}} 5$.

Жауабы: 1) $\log_2 13 < \log_2 17$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} 3 > \log_{\frac{1}{4}} 5$.

МЫСАЛ **3.** $y = \lg x$ және $y = x^2 - 2x$ функциялары графиктерінің неше нүктеде қиылысатынын табайық.

Шешуі. Ол үшін бір координаталық жазықтыққа $y = \lg x$ және $y = x^2 - 2x$ функцияларының графигін саламыз (47-сурет).
Графиктер A және B нүктелерінде қиылысады.

Жауабы: екі нүктеде қиылысады.



47-сурет

1. Неге логарифмдік функцияның графигі Oy осіне қарағанда координаталық жазықтықтың оң жағында орналасқан?
2. Логарифмделінетін өрнектер қандай шарттарды қанағаттандыру керек?
3. Көрсеткіштік және логарифмдік функциялардың қандай ұқсастығы бар?
4. Көрсеткіштік және логарифмдік функцияларының мәндер жиынында айырмашылық бар ма? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

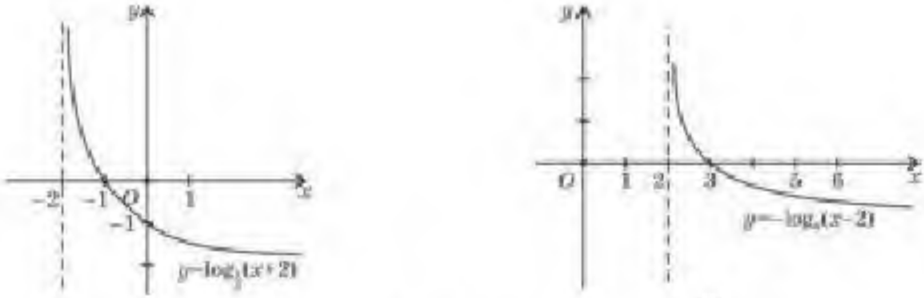
А

$y = g(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар (**14.1-14.2**):

14.1. 1) $g(x) = \log_2 (3 + 4x)$; 2) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} (7 - 2x)$;
3) $g(x) = \log_{5,2}(8 - 5x)$; 4) $g(x) = \log_{0,7}(x^2 - 49)$.

14.2. 1) $g(x) = \log_{0,12}(7 + 6x - x^2)$; 2) $g(x) = \log_{\sqrt{5}} \frac{x + 8}{2x - 7}$;
3) $g(x) = \lg\frac{3x + 15}{4 - x}$; 4) $g(x) = \ln(x^2 + x - 12)$.

14.3. Графиктері 48-суретте берілген функциялардың қасиеттерін атаңдар:



1) 2)

48-сурет

Салыстырыңдар (**14.4-14.5**):

14.4. 1) $\log_4 5{,}8$ және $\log_4 8{,}1$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 0{,}25$ және $\log_{\frac{1}{5}} 0{,}36$;

3) $\log_{6,5} \frac{5}{6}$ және $\log_{6,5} \frac{1}{6}$; 4) $\log_{\sqrt{3}} 5$ және $\log_{\sqrt{3}} 4$.

14.5. 1) $\log_{\sqrt{7}} 8$ және 1; 2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 10$ және $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8$;

3) $\log_{\pi} \frac{3}{16}$ және $\log_{\pi} \frac{1}{16}$; 4) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ және $\log_{0,9} 2$.

14.6. $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары графиктерінің неше нүктеде қиылысатынын көрсетіңдер:

1) $f(x) = \lg x$ және $g(x) = x$; 2) $f(x) = \lg x$ және $g(x) = -x$;

3) $f(x) = \log_2 x$ және $g(x) = x^2$; 4) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ және $g(x) = -x^2$.

B

14.7. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

1) $f(x) = \log_{1,5}(x^2 - 4) + \log_3(9 - x^2)$;

2) $f(x) = \log_4 x^3 - \log_{1,8}(x^2 - x)$;

3) $f(x) = \log_{1,5} \frac{x^2 - 1}{x + 5} - \sqrt{x}$;

4) $f(x) = \log_{0,7} \frac{4 - x^2}{6 - x} + \log_6 x$.

14.8. $y = f(x)$ функциясының мәндер жиынын табыңдар:

1) $f(x) = -\log_5(x + 1)$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(1 + x) + 5$;

3) $f(x) = |\log_7(x + 1)|$; 4) $f(x) = |\lg x| + 6$.

14.9. $y = f(x)$ функциясының графигін салып, қасиеттерін атаңдар:

1) $f(x) = \log_4 (x + 3)$; 2) $f(x) = -\log_2 x + 2$;

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x - 1)$; 4) $f(x) = \log_{0,5} x - 3$.

14.10. $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары графиктерінің неше нүктеде қиылысатынын көрсетіңдер:

1) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ және $g(x) = x - 1$;

2) $f(x) = \lg x$ және $g(x) = x + 1$;

3) $f(x) = \log_5 x$ және $g(x) = 7 + x$;

4) $f(x) = \log_{0,5} x$ және $g(x) = 2 - x$.

14.11. $[a; b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясының ең кіші және ең үлкен мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \log_3 x$, $[1; 9]$; 2) $f(x) = \log_{0,5} x$, $[0,5; 4]$;

3) $f(x) = \log_7 x$, $[1; 7]$; 4) $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$, $[5; 25]$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция ұғымы, функцияның шегі, функцияның туындысы, күрделі функцияның туындысы, алғашқы функция, туынды мен алғашқы функцияны есептеу ережелері, туындының геометриялық және физикалық мағынасы, функцияның туындысы мен алғашқы функциясының кестесі, жанаманың теңдеуі, туынды мен интегралды қолдану.

§ 15. КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ. КӨРСЕТКІШТІК ФУНКЦИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯСЫ

Сендер көрсеткіштік функцияның туындысын табуды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Көрсеткіштік функция, логарифмдік функция, туынды, алғашқы функция, анықталған интеграл

Осы тараудың басында көрсеткіштік функцияның анықталу облысы, мәндер жиыны, оның анықталу облысында бірсарынды өспелі немесе бірсарынды кемімелі, үзіліссіз функция екені қарастырылды. Енді $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ көрсеткіштік функциясының анықталу облысының кез келген нүктесіндегі туындысын табу формуласын берейік.

Теорема. *Көрсеткіштік функция өзінің анықталу облысының әрбір нүктесінде туындыға ие болады және ол туынды*

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (1)$$

формуласымен табылады.

Дәлелдеу. $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) көрсеткіштік функциясының аргументі x нүктесінен $x + \Delta x$ нүктесіне дейін өзгергендегі орташа жылдамдығы $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ формуласымен анықталатыны белгілі. Функцияның туындысын табу үшін $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ қатынасының $\Delta x \to 0$ ұмтылғандығы шегін тауып, оны функцияның x нүктесіндегі мәніне көбейтеміз.

$\Delta x \to 0$ жағдайда $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to \ln a$ (бұл формула жоғары математика курсында қарастырылады). Демек, $\Delta x \to 0$, онда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to a^x \ln a$, яғни $y' = a^x \ln a$. ■

Енді (1)-формуладағы a санын e санына алмастырайық.

$a \to e$, онда $a^x \ln a \to e^x \ln e = e^x$, яғни

$$(e^x)' = e^x. \qquad (2)$$

МЫСАЛ **1.** 1) $5a^x$; 2) $x^3 \cdot 2^x$; 3) $(x^2 + 1) \cdot 3^x$; 4) e^{3x} функцияларының туындыларын табайық.

Шешуі. Берілген функциялардың туындыларын табу үшін (1) және (2) формулаларымен қатар туындыны есептеу формулаларын қолданамыз:

1) $(5a^x)' = 5a^x \ln a$;

2) $(x^3 \cdot 2^x)' = (x^3)' \cdot 2^x + x^3 \cdot (2^x)' = 3x^2 \cdot 2^x + x^3 \cdot 2^x \cdot \ln 2 = x^2 \cdot 2^x (3 + x \ln 2)$;

3) $((x^2 + 1) \cdot 3^x)' = (x^2 + 1)' \cdot 3^x + (x^2 + 1) \cdot (3^x)' = 2x \cdot 3^x + (x^2 + 1) \cdot 3^x \ln 3 = 3^x \cdot (2x + (x^2 + 1) \ln 3)$;

4) $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3 \cdot e^{3x}$.

Жауабы: 1) $5a^x \ln a$; 2) $x^2 \cdot 2^x (3 + x\ln 2)$; 3) $3^x(2x + (x^2 + 1)\ln 3)$; 4) $3 \cdot e^{3x}$.

! Сендер логарифмдік функцияның туындысын табуды үйренесіңдер.

Логарифмдік функцияның туындысын табу формуласын берейік.

Теорема. *$y = \log_a x$ функциясы анықталу облысының кез келген нүктесінде туындыға ие болады және ол*

$$y' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (3)$$

формуласымен табылады.

Дәлелдеу. Ол үшін аргумент x-ке Δx өсімше беріп, осы өсімшеге сәйкес функция өсімшесін табамыз:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын жазайық:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Енді соңғы қатынасты тепе-тең түрлендіреміз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$ немесе

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Енді логарифмдік функцияның үзіліссіздігін пайдаланып $\Delta x \to 0$ ұмтылғандағы шекке көшеміз:

$\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x\ln a}$, мұнда $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \to e$

болады.

Сонымен, $y = \log_a x$ функциясы үшін $y' = \frac{1}{x}\log_a e$ немесе $y' = \frac{1}{x\ln a}$.

(3)-формуладағы a санын e санымен алмастырсақ, $(\log_e x)' = \frac{1}{x\ln e}$ немесе

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (4)$$

МЫСАЛ 2. 1) $f(x) = \log_5 x$; 2) $g(x) = 3\ln x$; 3) $\varphi(x) = 6\ln(x^2 - 4)$ функцияларының туындысын табайық.

Шешуі. Берілген функциялардың туындысын табу үшін (3) және (4) формулалары мен туындыны табу кестесін қолданамыз:

1) $f'(x) = (\log_5 x)' = \frac{1}{x\ln 5}$; 2) $g'(x) = (3\ln x)' = \frac{3}{x}$;

3) $\varphi'(x) = (6\ln(x^2 - 4))' = 6 \cdot \frac{1}{x^2 - 4} \cdot (x^2 - 4)' = \frac{12x}{x^2 - 4}$.

Жауабы: 1) $\frac{1}{x\ln 5}$; 2) $\frac{3}{x}$; 3) $\frac{12x}{x^2 - 4}$.

Сендер көрсеткіштік функцияның алғашқы функциясын табуды үйренесіңдер.

Көрсеткіштік функцияның алғашқы функциясының формуласын берейік.

Теорема. $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$) *көрсеткіштік функциясы өзінің анықталу облысының кез келген нүктесінде алғашқы функцияға ие болады және ол*

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (5)$$

формуласымен табылады.

Дәлелдеу. Ол үшін алғашқы функцияның анықтамасын қолданып, $F(x)$ функциясынан туынды аламыз: $F'(x) = \left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$, $x \in R$. Ендеше $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. ■

МЫСАЛ **3.** Берілген функциялардың алғашқы функцияларын табайық: 1) $f(x) = 7^x$; 2) $g(x) = 5 \cdot 3^x$; 3) $h(x) = 5e^{2x} - 8 \cdot 2^{3x}$.

Шешуі. Берілген функциялардың алғашқы функциясын табу үшін (5)-формула мен алғашқы функцияларды табу кестесін қолданамыз: 1) $F(x) = \frac{7^x}{\ln 7} + C$; 2) $G(x) = 5 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$; 3) $H(x) = 5 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - 8 \cdot \frac{2^{3x}}{\ln 2} \cdot \frac{1}{3} + C = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{2^{3x+3}}{3\ln 2} + C$.

Жауабы: 1) $\frac{7^x}{\ln 7} + C$; 2) $5 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$; 3) $\frac{5}{2}e^{2x} - \frac{2^{3x+3}}{3\ln 2} + C$.

$y = \frac{1}{x}$ функциясы үшін алғашқы функция

$$F(x) = \ln|x| + C \qquad (6)$$

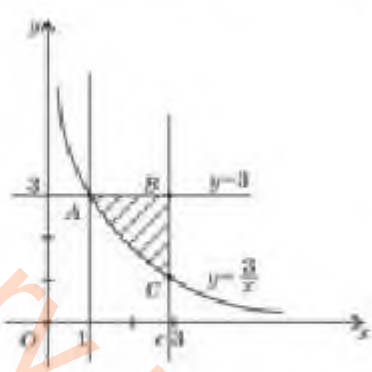
формуласымен табылады.

Олай болса анықталмаған интегралды табу формуласы мынадай болады: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$.

МЫСАЛ **4.** $y = \frac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 1$, $x = e$ қисықтарымен шектелген жазық фигураның ауданын табайық.

Шешуі. Берілген қисықтарды бір координаталық жазықтыққа салып, ABC жазық фигурасын аламыз (49-сурет).

Мұндағы $f(x) = 3$, $g(x) = \frac{3}{x}$, $a = 1$, $b = e$. Демек, $S_ф = \int_1^e \left(3 - \frac{3}{x}\right)dx = (3x - 3\ln|x|)\Big|_1^e = 3e - 3 - 3 = 3e - 6$.



49-сурет

Жауабы: $3e - 6$ кв. бірл.

1. Неге $y = a^x$ көрсеткіштік функциясының туындысы формуласының жеке түрі беріледі? Жауабын түсіндіріңдер.
2. Логарифмдік функция туындысының формуласын беру логарифмнің қандай қасиетіне негізделген?

Жаттығулар

A

$y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар (**15.1—15.3**):

15.1. 1) $f(x) = 3e^x + 3$; 2) $f(x) = 5x + 3e^x$;

3) $f(x) = 5 - \frac{1}{2}e^x$; 4) $f(x) = 5 \cdot e^{-x}$.

15.2. 1) $f(x) = e^x \cdot \sin x$; 2) $f(x) = e^{3x} + 2 \cdot 2^x$;

3) $f(x) = x^2 e^{2x}$; 4) $f(x) = 5 \cdot e^x \cdot \cos x$.

15.3. 1) $f(x) = \ln x \cdot \sin x$; 2) $f(x) = \ln x^3 + 4 \cdot 6^x$;

3) $f(x) = x^2 \ln(x^2 - 10)$; 4) $f(x) = 5 \cdot \ln(x - x^3) \cdot \cos x$.

15.4. $y = f(x)$ функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін жазыңдар:

1) $f(x) = 3e^x$; 2) $f(x) = 2 \cdot 5^x$;

3) $f(x) = 7 \cdot 4^x$; 4) $f(x) = 1 + 2^x$.

15.5. Интегралдарды есептеңдер:

1) $\int_0^1 2^x \, dx$; 2) $\int_0^1 e^x \, dx$; 3) $\int_1^3 2^x \, dx$; 4) $\int_{-2}^{-1} 3^x \, dx$.

15.6. Берілген қисықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; 2) $y = 5^x$, $x = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

B

$y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар (**15.7-15.8**):

15.7. 1) $f(x) = e^{x^3} \cos x$; 2) $f(x) = 5^{\frac{x}{2}} \cdot \mathrm{tg}\, x$;

3) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$; 4) $f(x) = 3^{x^2} \cdot \ln x$.

15.8. 1) $f(x) = (5^x + 4) \cdot x^3$; 2) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \log_2 x$;

3) $f(x) = x^2 \cdot e^{5x}$; 4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$.

15.9. $y = f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $f(x) = e^x - ex$; 2) $f(x) = 2xe^x$.

15.10. $y = f(x)$ функциясының экстремум нүктелерін табыңдар:

1) $f(x) = e^x - x$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

15.11. $f(x) = e^x$ функциясының графигіне $x_0 = -1$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар.

15.12. $y = x \ln x$ функциясын зерттеп, графигін салыңдар.

15.13. $y = g(x)$ функциясы үшін $B\ (a;\ b)$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функцияны табыңдар:

1) $g(x) = 4^x$, $B(\log_2 3;\ 0)$; 2) $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$, $B(4;\ -2)$.

15.14. Есептеңдер:

1) $\int\limits_0^{\ln 3} e^{3x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\log_3 2} 3^{0,5x}\,dx$.

15.15. Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

1) $y = -\dfrac{5}{x}$, $x = -1$, $x = -2$, $y = 2$; 2) $y = 4^x$, $x = 4$, $y = 4$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $y = \dfrac{x-3}{125 - 5^{3x}}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) R; B) Z;

C) $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; D) $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

2. $\log_{12}\left(\dfrac{49}{9} \cdot \left(\dfrac{3}{7}\right)^2\right)$ өрнегінің мәнін есептеңдер:

A) 12; B) 0;

C) 1; D) 144.

3. $y = \log_{5,3}(6 - 5x) + 10$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) $(-\infty;\ 1,2]$; B) $(-\infty;\ -1,2)$;

C) $(1,2;\ +\infty)$; D) $(-\infty;\ 1,2)$.

4. $\dfrac{1}{3}$; 27; 3^{-3}; 1; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ сандарын өсу ретімен орналастырыңдар:

A) $\dfrac{1}{3}$; 27; 3^{-3}; 1; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$; B) $\dfrac{1}{3}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$; 3^{-3}; 1; 27;

C) 3^{-3}; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$; $\dfrac{1}{3}$; 1; 27; D) 1; 3^{-3}; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$; $\dfrac{1}{3}$; 27.

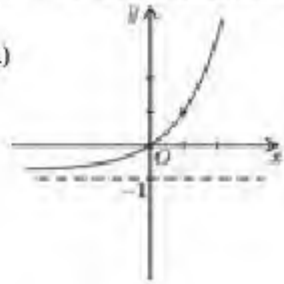
5. Егер $\log_7 5 = a$ және $\log_7 13 = b$ болса, онда $\log_{65} 25$ өрнегінің мәнін табыңдар:

A) $\dfrac{2b}{a+b}$; B) $\dfrac{a+b}{2b}$;

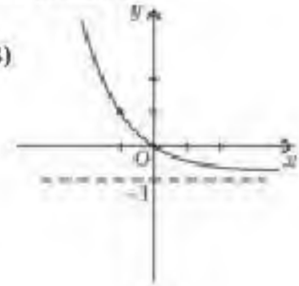
C) $\dfrac{2b}{a+b}$; D) $\dfrac{a+b}{b}$.

6. $y = -2^x + 1$ функциясының графигін анықтаңдар:

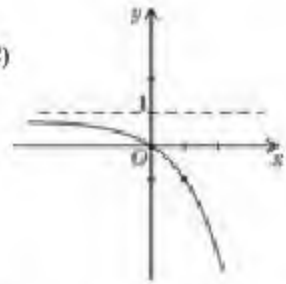
A)



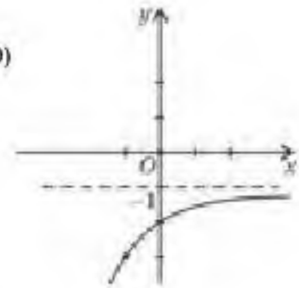
B)



C)



D)



7. $27^{\log_3 2} + 28$ өрнегінің мәнін есептеңдер:

A) 12; B) 18;

C) 36; D) 3.

8. $y = \lg\frac{x+4}{2x-1}$ функциясының анықталу облысын табыңдар:

A) $(-\infty; -4] \cup (0,5; +\infty)$; B) $(-4; 0,5)$;

C) $(-\infty; -4) \cup (0,5; +\infty)$; D) $[-4; 0,5]$.

9. $y = \log_3(\sin 3x)$ функциясының $x = \frac{\pi}{18}$ нүктесіндегі туындысының мәнін есептеңдер:

A) $\frac{3}{\ln 3}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{\ln 3}$; C) $\frac{1}{\sqrt{3}\ln 3}$; D) $\frac{3\sqrt{3}}{\ln 3}$.

10. $y = 6xe^x$ функциясының [1; 2] кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәнін табыңдар:

A) 6; 12; B) $6e^2$; $12e$;

C) $6e$; $12e$; D) $12e^2$; $6e$.

11. Абсциссасы $x = 1$ болатын нүкте арқылы өтетін $y = xe^{4x}$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар:

A) $5e^4x - 5e^4$; B) $5e^4x$;

C) $5e^4x - 4e^4$; D) $4e^4x - 5e^4$.

12. $\int_1^3 \left(\frac{2}{x} - 4^x\right)dx$ интегралының мәнін есептеңдер:

A) $2\ln 3 - \frac{68}{\ln 4}$; B) $2\ln 3 + \frac{64}{\ln 4}$;

C) $2\ln 3 - \frac{60}{\ln 4}$; D) $\ln 3 - \frac{64}{\ln 4}$.

13. $y = 2^x$, $y = 1$, $x = 2$ қисықтарымен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар:

A) $2\ln 2 - 2$; B) $\frac{3}{\ln 2} - 2$; C) $4\ln 2 - 2$; D) $\ln 2 - 2$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Көрсеткіштік функция және оның қасиеттері, тепе-тең түрлендірулер, теңдеу, теңдеудің түбірі, мәндес теңдеулер, теңдеулер және олардың жүйесін шешу тәсілдері, дәрежеге шығару, n-ші дәрежелі түбір және оның қасиеттері.

V ТАРАУ КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

§ 16. КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢДЕУЛЕР

Сендер көрсеткіштік теңдеу ұғымымен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңдеу, көрсеткіштік теңдеу, дәреженің негізі, дәреженің көрсеткіші, бөгде түбір, теңдеуді шешу

Сендер алдыңғы сыныптарда сызықтық, квадраттық, бөлшек-рационал және тригонометриялық теңдеулерді шешуді үйрендіңдер. Теңдеулердің кең таралған түрінің бірі — көрсеткіштік, яғни айнымалысы дәреженің көрсеткішінде берілген теңдеулер.

Анықтама.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1 \qquad (1)$$

түрінде берілген немесе осы түрге келетін теңдеуді ***көрсеткіштік теңдеу*** *деп атайды.*

Мысалы, $2^x = 32$; $7^x + 3 \cdot 7^{1-x} = 6$; $5^x - 13^x + 8^x = 0$ көрсеткіштік теңдеулер.

Кез келген көрсеткіштік теңдеуді тепе-тең түрлендіру арқылы

$$a^x = b \qquad (2)$$

теңдеуіне келтіреміз, мұндағы $a > 0$, $a \neq 1$, ал b — кез келген сан.

(2) түрінде берілген теңдеуді *қарапайым көрсеткіштік теңдеу* деп атайды.

Көрсеткіштік функцияның мәні әр уақытта оң сан болғандықтан, (2) теңдеуінің оң жақ бөлігіндегі b саны да оң болуы қажет. Демек, $b < 0$ немесе $b = 0$ болса, онда (1)-теңдеудің шешімі жоқ, яғни түбірлері болмайды.

Енді көрсеткіштік теңдеулерді шешу тәсілдерін қарастырайық.

Сендер көрсеткіштік теңдеуді бірдей негізге келтіру әдісімен шешуді үйренесіңдер.

I. Көрсеткіштік теңдеудің екі жақ бөлігін де бірдей негізге келтіру.

Ол үшін (1)-теңдеудегі b санын a-ның қандай да бір дәрежесі ретінде түрлендіреміз: $b = a^m$. Сонда

$$a^x = a^m. \qquad (3)$$

Негіздері бірдей болғандықтан олардың дәреже көрсеткіштерін теңестіріп $x = m$, (1) теңдеудің көмегімен шешу әдісі белгілі $f(x) = g(x)$ теңдеуіне келтіреміз.

МЫСАЛ

1. 1) $5^x = 125$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; 3) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ теңдеулерін шешейік.

Шешуі. 1) $5^x = 125$ теңдеуін шешу үшін $125 = 5^3$ екенін ескеріп, $5^x = 5^3$ теңдеуін аламыз және (3) теңдеу бойынша $x = 3$;

2) $81 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ екенін ескерсек, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ теңдеуі мәндес $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ теңдеуіне ауысады. Онда (3)-теңдеу бойынша $x = -4$;

3) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ теңдеуінің оң жақ бөлігіндегі $16\sqrt{2}$ санын рационал көрсеткішті дәреженің қасиетін қолданып негізі 2 болатын дәрежеге келтіреміз: $16\sqrt{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{4,5}$. Сонда берілген теңдеудің түрі (3)-теңдеуге келеді: $2^{x^2-6x-2,5} = 2^{4,5}$. Ендеше $x^2 - 6x - 2,5 = 4,5$ немесе $x^2 - 6x - 7 = 0$, бұдан $x_1 = -1$, $x_2 = 7$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ теңдеуінің екі жағын да бірдей негізге келтіру үшін, алдымен теңдеудің сол жақ бөлігіне көрсеткіштік функцияның $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ қасиетін қолданамыз: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ немесе $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3$. Шыққан көрсеткіштік теңдеудің негіздері бірдей болғандықтан, $x = 3$.

Жауабы: 1) 3; 2) -4; 3) -1; 7; 4) 3.

Сендер көрсеткіштік теңдеуді ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығару арқылы шешуді үйренесіңдер.

II. Ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығару. Аталған тәсілде көрсеткіштік функция ортақ көбейткіш ретінде жақшаның сыртына шығарылып, берілген теңдеу қарапайым көрсеткіштік теңдеуге келтіріледі.

МЫСАЛ

2. 1) $6^{x+2} - 6^x = 210$; 2) $3^{3\cos x - 1} + 3^{3\cos x - 2} + 3^{3\cos x - 3} = 13$;
3) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$ теңдеулерін шешейік.

Шешуі. 1) $6^{x+2} - 6^x = 210$ теңдеуіне түрлендіру жасайық: $6^x \cdot 6^2 - 6^x = 210$. Енді 6^x дәрежесін ортақ көбейткіш ретінде жақшаның сыртына шығарамыз:
$6^x \cdot (36 - 1) = 210$ немесе $6^x = 6$, бұдан $x = 1$.
2) $3^{3\cos x - 1} + 3^{3\cos x - 2} + 3^{3\cos x - 3} = 13$ теңдеуін шешу үшін теңдеудің сол жақ бөлігіндегі ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарамыз: $3^{3\cos x - 3}(3^2 + 3 + 1) = 13$ немесе $3^{3\cos x - 3} \cdot 13 = 13$. Соңғы теңдеудің екі жақ бөлігін де 13-ке қысқартамыз: $3^{3\cos x - 3} = 1$ немесе $3^{3\cos x - 3} = 3^0$. Сонда $3\cos x - 3 = 0$ немесе $\cos x = 1$ аламыз. Тригонометриялық теңдеуді шешудің дербес жағдайын қолданамыз: $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

3) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$ теңдеуіндегі $2^{\sqrt{x}-1}$ қосылғышын теңдеудің оң жақ бөлігіне көшіреміз: $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} - 2^{\sqrt{x}-1} = 12$. Енді $2^{\sqrt{x}-1}$ ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарамыз: $2^{\sqrt{x}-1}(2^3 - 2^2 - 1) = 12$ немесе $2^{\sqrt{x}-1} = 4$, $2^{\sqrt{x}-1} = 2^2$, онда $\sqrt{x} - 1 = 2$ немесе $\sqrt{x} = 3$. Шыққан иррационал теңдеуді шешіп, $x = 9$ аламыз.

Жауабы: 1) 1; 2) $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 3) 9.

Сендер көрсеткіштік теңдеуді жаңа айнымалыны енгізу әдісімен шешуді үйренесіңдер.

III. Жаңа айнымалы енгізу арқылы шешу тәсілі. Көрсеткіштік функцияны жаңа айнымалы арқылы белгілеп, теңдеуді шешу әдісі.

МЫСАЛ 3. $4^x + 2^{x+1} = 80$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. $4^x + 2^{x+1} = 80$ теңдеуіндегі $4^x = (2^x)^2$ екенін ескерсек, $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 80 = 0$ квадрат теңдеуін аламыз. $2^x = a$ жаңа айнымалысын енгізсек, $a^2 + 2a - 80 = 0$ теңдеуі шығады. Оның түбірлері $a_1 = 8$, $a_2 = -10$. Ендеше $2^x = 8$, $2^x = 2^3$, $x = 3$. Көрсеткіштік функцияның мәндер жиыны тек оң сандар болғандықтан, $2^x = -10$ теңдеуінің шешімі жоқ.

Жауабы: 3.

Сендер көрсеткіштік теңдеудің екі жақ бөлігін көрсеткіштік функцияға бөлу арқылы шешуді үйренесіңдер.

IV. Теңдеудің екі жақ бөлігін көрсеткіштік функцияға бөлу. Кейбір көрсеткіштік теңдеулерде екі немесе одан да көп көрсеткіштік функциялар берілуі мүмкін. Ондай жағдайда көрсеткіштік функцияның мәні нөлге тең болмайтынын ескеріп, теңдеудің екі жақ бөлігін де көрсеткіштік функцияға мүшелеп бөле отырып, оны шешу жолы белгілі теңдеуге келтіреміз.

МЫСАЛ 4. $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Көрсеткіштік функцияның қасиеттерін қолданып теңдеудегі 16^x; 36^x; 81^x өрнектерін түрлендіреміз: $16^x = 2^{4x}$, $36^x = 2^{2x} \cdot 3^{2x}$, $81 = 3^{4x}$. Сонда берілген теңдеу $3 \cdot 2^{4x} + 37 \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x} = 26 \cdot 3^{4x}$ түріне келеді. Енді көрсеткіштік функцияның мәні нөлге тең болмайтынын ескеріп, теңдеудің екі жақ бөлігін 3^{4x} дәрежесіне мүшелеп бөлейік: $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} + 37 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 26$. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = t$ айнымалысын енгізіп, $3t^2 + 37t - 26 = 0$ квадрат теңдеуін аламыз. Оның түбірлері $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = -13$. Көрсеткіштік функцияның мәндер жиыны тек оң сандар болғандықтан, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$ көрсеткіштік теңдеуін ғана шешеміз. Будан $2x = 1$ немесе $x = 0,5$.

Жауабы: 0,5.

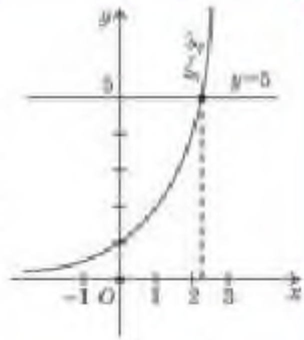
V. Графиктік тәсілді қолдану. Аталған тәсіл (2) түріндегі көрсеткіштік теңдеуді, $a^x = b$ теңдеуін (3) түріндегі теңдеумен алмастыруға болмайтын жағдайда қолданылады. Мұндай теңдеудің түбірін табу үшін $f(x) = a^x$ және $g(x) = b$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салып, қиылысу нүктелерін табамыз. Қиылысу нүктелерінің абсциссалары берілген көрсеткіштік теңдеудің түбірлері болады.

МЫСАЛ

5. $2^x = 5$ теңдеуі түбірлерінің санын анықтайық.

Шешуі. 5 санын 2 санының дәрежесі түрінде жазуға болмайды, яғни берілген теңдеу (3) теңдеуге келтірілмейді. Сондықтан $2^x = 5$ теңдеуін графиктік тәсілмен шешеміз. Ол үшін $y = 2^x$ және $y = 5$ функцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа саламыз (50-сурет). Жүргізілген сызықтар бір ғана нүктеде қиылысады. Демек, берілген теңдеудің бір ғана түбірі бар.

Жауабы: бір түбір.



50-сурет

Сендер көрсеткіштік теңдеулер жүйесі ұғымымен танысасыңдар, көрсеткіштік теңдеулер жүйесін шешуді үйренесіңдер.

Көрсеткіштік теңдеулер жүйесін шешуді қарастырайық.

Анықтама. *Құрамында көрсеткіштік теңдеуі бар теңдеулер жүйесін* ***көрсеткіштік теңдеулер жүйесі*** *деп атаймыз.*

Көрсеткіштік теңдеулер жүйесін шешу үшін көрсеткіштік функцияның қасиеттері, көрсеткіштік теңдеулер және теңдеулер жүйесін шешудің тәсілдері қолданылады.

Осыған мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ

6. $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеулер жүйесін шешу үшін алмастыру тәсілін қолданып, мынадай теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} y = 5 - x, \\ 4^x + 4^y = 80. \end{cases}$$

Осыдан $4^x + 4^{5-x} = 80$ немесе $4^x + \dfrac{1024}{4^x} - 80 = 0$ теңдеуі шығады, бұдан $(4^x)^2 - 80 \times$ $\times\, 4^x + 1024 = 0$. Енді $4^x = z$ деп алып, $z^2 - 80z + 1024 = 0$ квадрат теңдеуін шешеміз. Шыққан квадрат теңдеудің түбірлері $z_1 = 16$ және $z_2 = 64$. Сонда $4^x = 16$ және $4^x = 64$. Демек, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, онда сәйкесінше $y_1 = 3$, $y_2 = 2$.

Жауабы: (3; 2), (2; 3).

МЫСАЛ

7. $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2^x - 3^y = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі. Теңдеулер жүйесінде екі көрсеткіштік функция берілген. Алдымен жаңа айнымалылар енгізейік: $2^x = u$, $3^y = v$. Нәтижесінде екі белгісізі бар сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз: $\begin{cases} 3u + 2v = \dfrac{11}{4}, \\ 2u - 2v = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Шыққан теңдеулер жүйесіне алгебралық қосу тәсілін қолданайық. Онда $5u = \dfrac{5}{4}$ немесе $u = \dfrac{1}{4}$. u-дың мәнін жүйенің бірінші теңдеуіне қойсақ, $2v = \dfrac{11}{4} - \dfrac{3}{4} = 2$, $v = 1$.

Сонда $2^x = \dfrac{1}{4}$, $3^y = 1$ көрсеткіштік теңдеулері шығады. Оларды шешіп, $x = -2$, $y = 0$ аламыз.

Жауабы: $(-2; 0)$.

?

1. $5^{2x} = -7$, $2^{3x} = 9$ теңдеулерінің түбірлері бар ма? Түбірлері болған жағдайда теңдеуді қандай тәсілмен шығару керек?
2. Көрсеткіштік теңдеудің бөгде түбірінің болуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.
3. Көрсеткіштік теңдеулерді шешкенде жаңа айнымалы енгізу тәсілін қандай мақсатпен қолданамыз? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

Теңдеулерді шешіңдер (**16.1—16.6**):

16.1. 1) $5^x = 625$; 2) $2^x = 1024$;

3) $3^x = 729$; 4) $7^x = \dfrac{1}{343}$.

16.2. 1) $2^{x+3} = 64$; 2) $3^{\frac{x}{2}} = 27$;

3) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 216$; 4) $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343}$.

16.3. 1) $3^{x+2} - 3^x = 72$; 2) $2^x - 2^{x-4} = 15$;

3) $3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x-1} = 3159$;

4) $2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$.

16.4. 1) $3^{x^2+1} + 3^{x^2-1} = 270;$

2) $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280;$

3) $2^{x^2+x-6} - 2^{x^2+x-9} = 56;$

4) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950.$

16.5. 1) $\left(\frac{1}{0,125}\right)^x = 128;$ 2) $5^{x^2+x-5} = \frac{1}{125};$

3) $(0,5)^{x^2-9x+17,5} = \frac{8}{\sqrt{2}};$ 4) $(0,5)^{x^2-2x-2} = \frac{1}{64}.$

16.6. 1) $5^{2x^2-x} = 6^{2x^2-x};$ 2) $8 \cdot 7^{x^2-5x+7} = 7 \cdot 8^{x^2-5x+7};$

3) $0,6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3;$ 4) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{125}{27}\right)^3.$

16.7. Теңдеуді графиктік тәсілмен шешіңдер:

1) $2^x = 3;$ 2) $0,2^x = 5;$ 3) $6^x = -1;$

4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1} = 4;$ 5) $7^{-x} = -2;$ 6) $4^{x-1} = 4,4.$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (16.8-16.9):

16.8. 1) $\begin{cases} 5^{x+y} = 125, \\ 3^{(x-y)^2-1} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 6^{x+y} = 216; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^{2x-y} = \frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27. \end{cases}$

16.9. 1) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 4^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6^{2x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-3x} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5^{2x+y} = 125, \\ 7^{3x-2y} = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^{4x-3y} = 27\sqrt{3}, \\ 2^{4y+x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$

B

Теңдеулерді шешіңдер (16.10—16.14):

16.10. 1) $2^{x^2-6x+0,5} = \frac{1}{16\sqrt{2}};$ 2) $16\sqrt[4]{8^{x^2-3x-5}} = 128;$

3) $\left(\frac{9}{16}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2x^2+5x} = \left(\frac{64}{27}\right)^3;$ 4) $3^{x-1} \cdot 4^x = 0,25 \cdot 12^{3x-1}.$

16.11. 1) $\sqrt{3^{x-54}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-58}} = 162$;

2) $5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$;

3) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$;

4) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$.

16.12. 1) $5^{x-3} - 5^{x-4} = 16 \cdot 5^{x-5} + 4$;

2) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

4) $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$.

16.13. 1) $x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$;

2) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} = 16 \cdot 4^{\sqrt{6-x}}$;

3) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;

4) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

16.14. 1) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$;

2) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;

3) $2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$;

4) $8^x - 4^{x+0,5} - 2^x + 2 = 0$.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**16.15—16.17**):

16.15. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{3x} = 3^{7-y}, \\ \dfrac{1}{x} + 2 = \dfrac{12}{y}. \end{cases}$

16.16. 1) $\begin{cases} 2^x + 3^y - 31 = 0, \\ 2^x + 23 = 3^y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5^x - 2 \cdot 3^y + 13 = 0, \\ 2 \cdot 5^x - 19 = -3^y. \end{cases}$

16.17. 1) $\begin{cases} 7^x + 11^y = 18, \\ 4 \cdot 7^x - 11^y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 13^x + 2 \cdot 3^y = 67, \\ 13^x + 14 = 3^y. \end{cases}$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Логарифм және оның негізгі қасиеттері, логарифмдік функция, оның анықталу облысы, теңдеулер, мәндес теңдеулер, теңдеулер жүйесі, теңдеулер және олардың жүйесін шешу жолдары.

§ 17. ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР

Сендер логарифмдік теңдеу ұғымымен танысасыңдар, логарифмдік теңдеуді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңдеу, логарифмдік теңдеу, санның логарифмі, логарифмнің негізі, логарифм астындағы өрнек, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, теңдеуді шешу

Анықтама.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \ (a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0) \qquad (1)$$

*түрінде берілген немесе осы түрге келетін теңдеуді **логарифмдік теңдеу** деп атайды.*

Логарифмдік теңдеуді шешу үшін:

1) теңдеудің екі жақ бөлігін бірдей негізге келтіру;

2) жаңа айнымалы енгізу;

3) потенциалдау керек.

МЫСАЛ 1. $\log_5(2 - x) = 2$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Алдымен логарифмдік теңдеудің оң жақ бөлігіндегі 2 санын негізі 5 болатын логарифммен ауыстырамыз. Сонда $\log_5(2 - x) = \log_5 25$. Потенциалдау арқылы $2 - x = 25$ теңдеуіне келеміз. Теңдеудің түбірі $x = -23$. Енді шыққан түбірді берілген теңдеуге қойып, теңдеуді қанағаттандыратынына көз жеткіземіз.

Жауабы: -23.

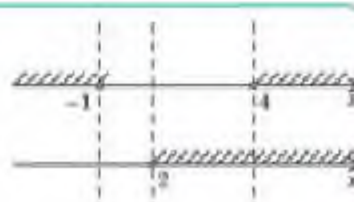
Жалпы, логарифмдік теңдеулерді шешкенде логарифмдік функцияның анықталу облысы оң сандар екенін ескеріп, x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиынын тауып алуға болады. Содан кейін теңдеуді шешіп, түбірлердің мүмкін болатын мәндер жиынына тиістілігін тексерсек жеткілікті.

МЫСАЛ 2. $\log_3(x^2 - 3x - 4) = \log_3(2x - 4)$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Алдымен x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиынын табамыз. Ол үшін логарифмдік функцияның анықталу облысы тек қана оң сандар екенін ескеріп

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0, \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} (x + 1)(x - 4) > 0, \\ x > 2 \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесін аламыз.



51-сурет

Теңсіздіктер жүйесінің әрбір теңсіздігінің шешімін координаталар түзуіне кескіндеп, оларға ортақ бөлікті табамыз (51-сурет).

Демек, шешімі мүмкін болатын жиын $(4; +\infty)$ интервалы.
Берілген теңдеуді потенциалдасақ, $x^2 - 3x - 4 = 2x - 4$ теңдеуі шығады, осыдан $x^2 - 5x = 0$ және $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. Шыққан түбірлердің $(4; +\infty)$ интервалына тиістілігін тексереміз. Сонда берілген логарифмдік теңдеудің түбірі $x = 5$, ал $x = 0$ бөгде түбір болады.

Жауабы: 5.

МЫСАЛ

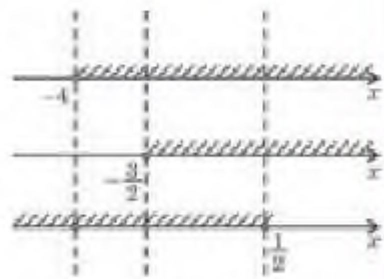
3. $\log_2(2x + 8) + \log_2(2x + 3) = \log_2(2 - 4x)$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиынын табайық: $\begin{cases} 2x + 8 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 2 - 4x > 0 \end{cases}$

немесе $\begin{cases} x > -4, \\ x > -\dfrac{3}{2}, \\ x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Теңсіздіктер жүйесінің әрбір теңсіздігінің мәндер жиынын координаталық түзуге түсірейік.

Сонда x айнымалысының мәні $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ теңсіздігін қанағаттандыру керек (52-сурет).



52-сурет

Берілген логарифмдік теңдеуді (1)-теңдеу түріне келтірейік. Ол үшін теңдеудің сол жақ бөлігіне логарифмнің қасиетін қолданамыз:

$$\log_2(2x + 8) + \log_2(2x + 3) = \log_2[(2x + 8)(2x + 3)],$$
$$\log_2[(2x + 8)(2x + 3)] = \log_2(2 - 4x).$$

Потенциалдау арқылы соңғы теңдеуге мәндес теңдеу аламыз:

$$(2x + 8)(2x + 3) = 2 - 4x, \text{ осыдан } 2x^2 + 13x + 11 = 0.$$

Бұл теңдеудің түбірлері $x_1 = -5{,}5$ және $x_2 = -1$. $x = -5{,}5$ бөгде түбір, себебі x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиынына тиісті емес. Сондықтан берілген теңдеудің түбірі $x = -1$ болады.

Жауабы: -1.

МЫСАЛ

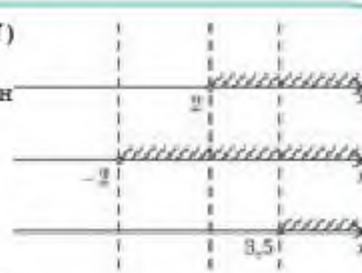
4. $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. Алдымен x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиынын табайық. Ол үшін

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ 2x - 7 > 0 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x > 2, \\ x > -2, \\ x > 3{,}5 \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесін шешеміз.

53-суретте көрсетілгендей x айнымалысының мәні $x > 3{,}5$ теңсіздігін қанағаттандыруы керек.



53-сурет

Логарифмнің қасиеттерін қолданып берілген теңдеуден мына теңдеуді аламыз:

$$\log_7 \frac{x-2}{x+2} = \log_7 \frac{7}{2x-7}.$$

Негіздері бірдей болғандықтан потенциалдау арқылы $\frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{2x-7}$ теңдеуін аламыз. Осыдан $(x-2)(2x-7) = 7(x+2)$ немесе $2x^2 - 18x = 0$, ал оның түбірлері $x_1 = 0$ және $x_2 = 9$.

$x_1 = 0$ бөгде түбір, ал $x_2 = 9$ түбірі x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиынына, яғни $(3{,}5; +\infty)$ аралығына тиісті. Сондықтан берілген теңдеудің шешімі $x = 9$.

Жауабы: 9.

МЫСАЛ 5. $\log_8 (x^2+8) = \log_8(x+1) + 3\log_8 2$ теңдеуін шешейік.

Шешуі. x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиынын табу үшін мына теңсіздіктер жүйесін қарастырамыз:

$$\begin{cases} x^2 + 8 > 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

$x^2 + 8 > 0$ теңсіздігі x-тің кез келген мәнінде орындалады. Демек, x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиыны $(-1; +\infty)$ интервалы. Логарифмнің қасиеттерін қолданып теңдеудің оң жақ бөлігін түрлендіреміз: $\log_8(x^2+8) = \log_8(x+1) + \log_8 8$ немесе $\log_8(x^2+8) = \log_8(8(x+1))$.

Осы теңдеуді потенциалдасақ, $x^2 + 8 = 8(x+1)$ немесе $x^2 - 8x = 0$ аламыз және оның түбірлері $x_1 = 0$, $x_2 = 8$. x-тің бұл екі мәні де $(-1; +\infty)$ интервалына тиісті.

Жауабы: 0; 8.

МЫСАЛ 6. $x^{\log_6 x - 1} = 36$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

Шешуі. Берілген теңдеуді тепе-тең түрлендіру арқылы (1) теңдеуіне келтіреміз. Ол үшін берілген теңдеудің екі жағын бір негізде логарифмдейміз: $\log_6 x^{\log_6 x - 1} = \log_6 36$ немесе $(\log_6 x - 1)\log_6 x = 2$ немесе $\log_6^2 x - \log_6 x - 2 = 0$. Енді $\log_6 x = u$ деп алсақ, $u^2 - u - 2 = 0$ теңдеуіне келеміз. Оның түбірлері $u_1 = -1$; $u_2 = 2$. Олай болса $\log_6 x = -1$; $\log_6 x = 2$ теңдеулері шығады. $\log_6 x = -1$, $x_1 = \frac{1}{6}$; $\log_6 x = 2$, $x_2 = 36$. x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиыны $(0; +\infty)$ аралығы екенін ескеріп, x-тің екі мәнін де берілген логарифмдік теңдеудің түбірі ретінде аламыз.

Жауабы: $\frac{1}{6}$; 36.

! Сендер логарифмдік теңдеулер жүйесін шешуді үйренесіңдер.

Логарифмдік теңдеулер жүйесін шешуді қарастырайық.

Анықтама. *Құрамында логарифмдік теңдеулері бар теңдеулер жүйесін* ***логарифмдік теңдеулер жүйесі*** *деп атайды.*

Логарифмдік теңдеулер жүйесін шешу үшін теңдеулер жүйесі және логарифмдік теңдеулерді шешу тәсілі қолданылады.

МЫСАЛ 7. $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6 \end{cases}$ жүйесін шешейік.

Шешуі. x және y айнымалыларының мүмкін болатын мәндер жиыны оң сандар. Логарифмнің қасиеттерін қолданып берілген жүйені түрлендіреміз. Сонда $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 (xy) = \log_2 64 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін аламыз, ал шыққан теңдеулер жүйесі мына жүйемен мәндес:

$$\begin{cases} x + y = 34, \\ xy = 64. \end{cases}$$

Соңғы теңдеулер жүйесінен $x^2 - 34x + 64 = 0$ квадрат теңдеуін аламыз. Оның түбірлері $x_1 = 2$ және $x_2 = 32$ және оған сәйкесінше $y_1 = 32$ және $y_2 = 2$. Табылған (2; 32) және (32; 2) сандар жұбы берілген теңдеулер жүйесін қанағаттандырады.

Жауабы: (2; 32) немесе (32; 2).

МЫСАЛ 8. $\begin{cases} \lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ 2\log_3 (x - y) = \log_3 (y + 2) \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешейік.

Шешуі. Жүйенің теңдеулерін тепе-тең түрлендіріп,
$\begin{cases} \lg(2x - y) + \lg 10 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ \log_3 (x - y)^2 = \log_3 (y + 2) \end{cases}$ немесе $\begin{cases} \lg[(2x - y) \cdot 10] = \lg[(y + 2x) \cdot 6], \\ \log_3 (x - y)^2 = \log_3 (y + 2) \end{cases}$
немесе $\begin{cases} x = 2y, \\ (x - y)^2 = y + 2 \end{cases}$ теңдеулер жүйесіне келтіреміз.

Алмастыру тәсілін қолданып, соңғы жүйенің екінші теңдеуінің орнына $y^2 - y - 2 = 0$ аламыз. Осыдан $y_1 = -1$, $y_2 = 2$ және осыған сәйкес $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ түбірлерін табамыз. Енді (−2; −1), (4; 2) мәндерін берілген теңдеулер жүйесіне қойып тексерсек, (−2; −1) түбірінің бөгде түбір болатынына көз жеткіземіз.

Жауабы: (4; 2).

?

1. Берілген теңдеудегі логарифмдік функциялардың анықталу облысын табу міндетті ме?
2. Көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулерді шешудің ортақ тәсілдерін атаңдар.
3. Қандай жағдайда x айнымалысының мәні логарифмдік теңдеудің шешімі болмайды? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

Теңдеулерді шешіңдер (17.1 — 17.5):

17.1. 1) $\log_7 x = 2$; 2) $\log_{\frac{2}{3}} x = 3$;

3) $\log_5 x = -3$; 4) $\log_{\frac{4}{7}} x = -2$.

17.2. 1) $\log_{\frac{1}{8}}(x-4) = -1$; 2) $\log_{2,5}(x+2) = 1$;

3) $\lg x = -2$; 4) $\ln x = 1$.

17.3. 1) $\log_2(x^2 - 2x) = 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(4x + x^2) = -1$;

3) $\log_{0,5}(x^3 + 1) = -1$; 4) $\lg(7x - x^2) = 1$.

17.4. 1) $\log_{3,2}(2 - x) = \log_{3,2}(3x + 6)$; 2) $\log_{0,8}(1 + 2x) = \log_{0,8}(4x - 10)$;

3) $\log_2(x - 6) + \log_2(x - 8) = 3$; 4) $\log_8(x - 2) - \log_8(x - 3) = \frac{1}{3}$.

17.5. 1) $\lg(5 - x) = \frac{1}{3}\lg(35 - x^3)$;

2) $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x + 5) = 0$;

3) $\log_{\sqrt{5}}(4x - 6) - 2 = \log_{\sqrt{5}}(2x - 5)$;

4) $\log_2(3x - 6) - 1 = \log_2(9x - 19)$.

17.6. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

1) $\begin{cases} x - y = 8, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 14, \\ \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 1, \\ x + y = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 0, \\ 2x - y = 10. \end{cases}$

B

Теңдеулерді шешіңдер (17.7 — 17.11):

17.7. 1) $\log_7(x - 2) + \log_7(x + 2) = \log_7(4x + 41)$;

2) $\log_4(x + 1) - \log_4(1 - x) = \log_4(2x + 3)$;

3) $\log_4(x + 3) - \log_4(x - 1) = 2 - \log_4 8$;

4) $\lg(x - 1) + \lg(x + 1) = 3\lg 2 + \lg(x - 2)$.

17.8. 1) $2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$; 2) $2\lg x - \lg 4 + \lg(5 - x^2) = 0$;

3) $\lg(x(x + 9)) + \lg\frac{x+9}{x} = 0$; 4) $\frac{\lg\sqrt{x+7} - \lg 2}{\lg 8 - \lg(x-5)} = -1$.

17.9. 1) $3\lg^2(x - 1) - 10\lg(x - 1) + 3 = 0$;

2) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$;

3) $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg\frac{1}{x}$;

4) $\lg^2 x - 2\lg x = \lg^2 100 - 1$.

17.10. 1) $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8;$ 2) $\log^2_2 x^5 - 5\log_2 x^3 = 10;$

3) $\lg(10x) \cdot \lg(0{,}1 \cdot x) = \lg x^3 - 3;$ 4) $\frac{1 - \lg^2(x^2)}{\lg x - 2\lg^2 x} = 4\lg x + 5.$

17.11. 1) $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3};$ 2) $\log^2_2 (2x) = 4\log_2 x;$

3) $\log_3 (3^{x-1} + 3^x) = \log_3 324;$ 4) $\lg(x^2) + \lg(-x) = 9.$

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (**17.12-17.13**):

17.12. 1) $\begin{cases} \lg x + \lg 2 = \lg y, \\ 3x - 2y = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_2 (x+y) + \log_2 (x^2 - xy + y) = 1, \\ x - y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} - \frac{4}{9} = 0, \\ \lg(3x - y) - 4\lg 2 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{15}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 5. \end{cases}$

17.13. 1) $\begin{cases} \lg(x - y) = 2, \\ \lg x = \lg 3 + \lg y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2y, \\ \log_3 (x - y) + \log_3 (x + y) = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 1 + \log_2 y = \log_2 (x + y), \\ \log_2 (x + y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Дәреже, дәреженің негізі мен көрсеткіші, көрсеткіштік функция және оның қасиеттері мен графигі, теңсіздік, теңсіздікті шешу тәсілдері, интервалдар әдісі.

§ 18. КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢСІЗДІКТЕР

Сендер көрсеткіштік теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңсіздік, көрсеткіштік теңсіздік, дәреженің негізі, дәреженің көрсеткіші, мәндестік, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, теңсіздікті шешу

Алдыңғы параграфтарда сендер көрсеткіштік функция ұғымымен танысып, көрсеткіштік теңдеулер және олардың жүйесін шешу дағдысын қалыптастырдыңдар. Енді көрсеткіштік теңсіздікті шешу тәсілдерін қарастырайық.

Анықтама.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \ (a^{f(x)} < a^{g(x)};\ a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)};\ a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)}),\ a > 0,\ a \neq 1 \qquad (1)$$

түрінде берілген немесе осы түрге келетін теңсіздік ***көрсеткіштік теңсіздік*** *деп аталады.*

Көрсеткіштік теңсіздікті шешу үшін мына теореманы қолданамыз.

Теорема. *Егер $a > 1$ болса, онда $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ теңсіздігі $f(x) > g(x)$ теңсіздігімен; егер $0 < a < 1$ болса, онда $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ теңсіздігі $f(x) < g(x)$ теңсіздігімен мәндес болады.*

Дәлелдеу. Теореманы дәлелдеу үшін (1)-теңсіздіктің екі жағын $a^{g(x)}$ өрнегіне бөліп, $\frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} > 1$ теңсіздігін аламыз.

Соңғы теңсіздікті $a^{f(x)-g(x)} > 1$ теңсіздігіне келтіреміз. Енді $f(x) - g(x) = t$ белгілеуін енгізсек, $a^t > 1$ теңсіздігі шығады. Осы теңсіздікті шешу үшін $a > 1$ және $0 < a < 1$ екі жағдайын қарастырсақ жеткілікті.

Егер $a > 1$ болса, онда $a^t > 1$ теңсіздігі орындалу үшін $t > 0$ болуы қажет, яғни $f(x) - g(x) > 0$. Бұдан $f(x) > g(x)$.

Егер $0 < a < 1$ болса, онда $a^t > 1$ теңсіздігі орындалу үшін $t < 0$ болуы керек, яғни $f(x) - g(x) < 0$. Демек, $f(x) < g(x)$.

Мысалдар қарастырайық.

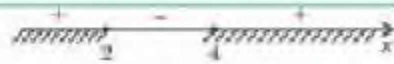
МЫСАЛ 1. 1) $3^{3x-5} > 81$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $0,98^{x^2+3} < 0,98^{6x-5}$; 4) $2^{x^2-7} > 2^{6x}$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. 1) $3^{3x-5} > 81$ теңсіздігінің екі жағын бірдей негізге келтіреміз: $3^{3x-5} > 3^4$. Соңғы теңсіздікте $3 > 1$ болғандықтан, теорема бойынша $3x - 5 > 4$ немесе $x > 3$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ теңсіздігінің оң жақ бөлігіндегі санды $\frac{1}{2}$ негізіне келтіріп, оған мәндес теңсіздік аламыз: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$ немесе $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Шыққан теңсіздіктің негізі $0 < \frac{1}{2} < 1$ болғандықтан, теорема бойынша $2x - 4 > \frac{1}{2}$.

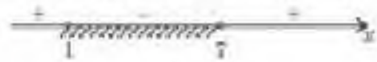
Осыдан $2x > 4,5$ немесе $x > 2,25$;

3) $0,98^{x^2+3} < 0,98^{6x-5}$ теңсіздігінің негіздері бірдей және $0 < 0,98 < 1$. Демек, теорема бойынша $x^2 + 3 > 6x - 5$ немесе $x^2 - 6x + 8 > 0$. Соңғы теңсіздікті интервалдар әдісімен шығарсақ, $x < 2$, $x > 4$ (54-сурет) немесе $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$ шешімдер жиынын аламыз:



54-сурет

4) $2^{x^2+7} < 2^{8x}$ теңсіздігінің негіздері бірдей және 1-ден артық, сондықтан берілген теңсіздік $x^2 + 7 < 8x$ теңсіздігімен мәндес немесе $x^2 - 8x + 7 < 0$. Соңғы теңсіздікке интервалдар әдісін қолданып $x \in (1;\ 7)$ аламыз (55-сурет).



55-сурет

Жауабы: 1) $(3;\ +\infty)$; 2) $(2{,}25;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 2] \cup [4;\ +\infty)$; 4) $(1;\ 7)$.

МЫСАЛ

2. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Теңсіздіктің сол жақ бөлігін түрлендіреміз: $2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52$. Теңсіздіктің сол жақ бөлігіндегі 2^{2x-4} өрнегін ортақ көбейткіш ретінде жақшаның сыртына шығарып, есептеу жүргізсек, $2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52$, $2^{2x-4}(16 - 4 + 1) > 52$ немесе $2^{2x-4} > 4$, $2^{2x-4} > 2^2$. Шыққан теңсіздіктің негіздері бірдей және $2 > 1$, сондықтан $2x - 4 > 2$ немесе $x > 3$.

Жауабы: $(3;\ +\infty)$.

МЫСАЛ

3. $3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1}$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Негіздері бірдей көрсеткіштік функцияларды теңсіздіктің бір жағына жинайық: $7^x - 4 \cdot 7^{x-1} < 34 \cdot 3^{x-1} - 3^{x+2}$. Теңсіздіктің әрбір бөлігіндегі ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарамыз: $7^{x-1}(7 - 4) < 3^{x-1}(34 - 3^3)$ немесе $7^{x-1} \cdot 3 < 3^{x-1} \cdot 7$. Теңсіздіктің екі жақ бөлігін $3 \cdot 3^{x-1} > 0$ көбейткішіне бөлеміз: $\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1} < \frac{7}{3}$. Соңғы теңсіздіктің негізі $\frac{7}{3} > 1$ болғандықтан, $x - 1 < 1$ немесе $x < 2$.

Жауабы: $(-\infty;\ 2)$.

?

1. Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу үшін көрсеткіштік теңдеулерді шешу әдістері қолданыла ма?
2. Негіздері бірдей көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу мен сызықтық теңсіздікті шешуде ұқсастық бар ма? Жауабын түсіндіріңдер.
3. Көрсеткіштік функцияның негізі тек оң сан болуы көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу кезінде ескеріле ме? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

Теңсіздіктерді шешіңдер (18.1—18.7):

18.1. 1) $2^x \geqslant 32$; 2) $\left(\frac{4}{7}\right)^x < \frac{16}{49}$;

3) $6^{x-4} < 36$; 4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} > \frac{27}{125}$.

18.2. 1) $5^{1-x} < 125$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x+1} > \frac{27}{64}$;

3) $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+4} > \left(\frac{4}{81}\right)^{3+x}$; 4) $\left(\frac{1}{32}\right)^{x} < 8^{2x-1}$.

18.3. 1) $3^x \cdot 9^x < 81$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x} > 32$;

3) $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-1} < \left(2\frac{14}{25}\right)^{3}$; 4) $(2,5)^{x+4} > (0,16)^{x\ \ 3}$.

18.4. 1) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} < 9$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} < 26$;

3) $3^{2x+1} + 3^{2x+2} - 3^{2x-4} < 315$; 4) $2^x - 2^{x\ \ 4} > 15$.

18.5. 1) $5^{2x+1} + 3 \cdot 5^{2x-1} > 3500$; 2) $3^{x+1} + 3^{x-1} > 270$;

3) $10^{x\ \ 5} + 10^{x-2} < 1001$; 4) $2^x - 2^{x\ \ 4} - 15 < 0$.

18.6. 1) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$; 2) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$;

3) $4^x + 2^{x+3} > 20$; 4) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$.

18.7. 1) $3^{x-1} > 11^{x-1}$; 2) $2^x < 5^x$;

3) $4^{x-2} < 7^{x\ \ 2}$; 4) $6^{x^2-4} > 13^{x^2-4}$.

B

Теңсіздіктерді шешіңдер (18.8—18.13):

18.8. 1) $2^{\frac{x+1}{x-3}} > 4$; 2) $0,125 < 16^x$;

3) $36^{0,5x^2-1} > \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; 4) $125\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$.

18.9. 1) $2^{x^2+3x-3} - 8 \cdot 2^x > 0$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} > 5^{-x}$;

3) $2^{x^2+12} < 64 \cdot 2^{5x}$; 4) $8 \cdot 2^{x^2-3x} < (0,5)^{-1}$.

18.10. 1) $6 \cdot 5^{x+1} - 5^{x+2} + 6 \cdot 5^x > 55$; 2) $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 2^{x+2} < 14$;

3) $x^3 \cdot 3^x - 3^x > 0$; 4) $x^2 \cdot 4^x - 4^x < 0$.

18.11. 1) $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15 > 0$; 2) $13^{2x} - 14 \cdot 13^x + 13 < 0$;

3) $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 > 0$; 4) $2 \cdot 4^{\cos x} - 3 \cdot 2^{\cos x} + 1 < 0$.

18.12. 1) $4^{x+2} + 8 < 9 \cdot 2^{x+2}$; 2) $3^{1+\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} < 12$;

3) $4^{1-x} + 2^{1-x} - 4 \leqslant 4 \cdot 2^{1-x} - 6$;
4) $4^{x-2} - 6 \cdot 2^{x+2} + 8 < 0$.

18.13. 1) $4^x - 9^x < 0$; 2) $5 \cdot 4^x \leqslant 4 \cdot 5^x$;
3) $3^{x-3} - 2^{x-3} < 0$; 4) $2^{2x-1} - 5^{2x-1} \geqslant 0$.

18.14. Берілген теңсіздіктердің ортақ шешімін табыңдар:

1) $3^x > 9$ және $x - 2 \leqslant 6$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^x > 25^{-1}$ және $1 - x \leqslant 0$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 8^{-1}$ және $4x - 3 > 1$; 4) $4^x \leqslant 64$ және $5 - 2x < 0$.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Функция және оның анықталу облысы, логарифм және оның қасиеттері, логарифмдік функция, оның қасиеттері мен графигі, теңсіздік, теңсіздіктерді шешу тәсілдері, интервалдар әдісі, көрсеткіштік теңсіздіктер.

§ 19. ЛОГАРИФМДІК ТЕҢСІЗДІКТЕР

Сендер логарифмдік теңсіздіктерді шешуді үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Теңсіздік, логарифмдік теңсіздік, логарифмнің негізі, дәреженің көрсеткіші, мәндестік, айнымалының мүмкін болатын мәндер жиыны, теңсіздікті шешу

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Сызықтық, квадраттық, бөлшек-рационал, тригонометриялық, көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу жолдары белгілі.

Мектеп курсында қарастырылатын теңсіздіктердің тағы бір түрі — логарифмдік теңсіздіктер. Алдымен осы теңсіздіктің анықтамасын берейік.

Анықтама.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$
$$(\log_a f(x) < \log_a g(x),\ \log_a f(x) \geqslant \log_a g(x),\ \log_a f(x) \leqslant \log_a g(x)),$$
$$a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0 \qquad (1)$$

түрінде берілген немесе осы түрге келетін теңсіздікті ***логарифмдік теңсіздік*** *деп атайды.*

Логарифмдік теңсіздіктерді шешу үшін төмендегі теореманы қолданамыз.

Теорема. *Егер $f(x) > 0$ және $g(x) > 0$ болса, онда $a > 1$ болғанда $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігі $f(x) > g(x)$ теңсіздігімен мәндес теңсіздік болады, ал $0 < a < 1$ аралығында $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігі $f(x) < g(x)$ теңсіздігімен мәндес теңсіздік болады.*

Дәлелдеу. Дәлелдеу үшін (1)-теңсіздікті тепе-тең түрлендіріп $\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$ теңсіздігін аламыз, осыдан

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

Соңғы теңсіздікті мынадай екі жағдай үшін қарастырайық:

1) $a > 1$ болғанда логарифмдік функция өспелі, сондықтан $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$, яғни $f(x) > g(x)$;

2) $0 < a < 1$ интервалында логарифмдік функция кемімелі, демек, $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$, яғни $f(x) < g(x)$.

Сонымен, (1) логарифмдік теңсіздікті шешу кезінде логарифмнің негізіне байланысты төмендегі екі жағдайдың бірін қарастырамыз:

1) $a > 1$ болғанда $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігіне мәндес

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad (2)$$

теңсіздіктер жүйесі шешіледі;

2) $0 < a < 1$ болғанда $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігіне мәндес

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \qquad (3)$$

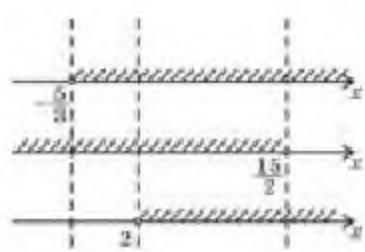
теңсіздіктер жүйесі шешіледі.

Логарифмдік теңсіздіктерді шешуге мысалдар қарастырайық.

МЫСАЛ 1. $\log_5(3x + 5) > \log_5(15 - 2x)$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Берілген логарифмдік теңсіздіктің негізі $a = 5 > 1$ болғандықтан, (2)-формулаға сәйкес берілген теңсіздікке мәндес мына теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} 3x + 5 > 0, \\ 15 - 2x > 0, \\ 3x + 5 > 15 - 2x \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x > -\frac{5}{3}, \\ x < \frac{15}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$



56-сурет

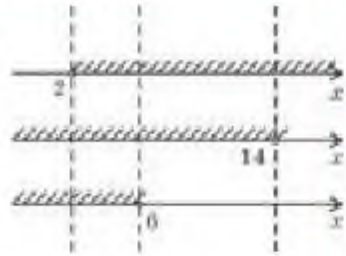
Соңғы теңсіздіктерді сан түзуіне салып, теңсіздіктер жүйесінің шешімін аламыз: $2 < x < \frac{15}{2}$ (56-сурет).

Жауабы: $\left(2; \frac{15}{2}\right)$.

МЫСАЛ 2. $\log_{0,8}(x-2) > \log_{0,8}(7-0,5x)$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Бұл теңсіздіктегі логарифмнің негізі $a = 0,8 < 1$, демек, логарифмдік теңсіздік (3)-формулаға сәйкес келесі теңсіздіктер жүйесіне көшеді:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ 7-0,5x>0, \\ x-2<7-0,5x \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x>2, \\ x<14, \\ x<6. \end{cases}$$



57-сурет

Теңсіздіктерді сан түзуінде кескіндеу арқылы $2 < x < 6$ интервалын аламыз (57-сурет). Демек, берілген логарифмдік теңсіздіктің шешімдер жиыны (2; 6) интервалы болады.

Жауабы: (2; 6).

МЫСАЛ 3. $\log_{0,25}(16+4x-x^2) > -2$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Теңсіздіктің оң жағындағы -2 санын негізі 0,25-ке тең логарифм түрінде жазамыз. Ол үшін 0,25 санын -2 дәрежесіне шығарамыз: $(0,25)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$.

58-сурет

Сонда $\log_{0,25}(16+4x-x^2) > \log_{0,25}16$ теңсіздігін аламыз. $a = 0,25$ екенін ескеріп, (3) жүйеге көшеміз:

$$\begin{cases} 16+4x-x^2>0, \\ 16+4x-x^2<16 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x^2-4x-16<0, \\ x^2-4x>0, \end{cases} \text{ немесе}$$

$$\begin{cases} (x-2+2\sqrt{5})(x-2-2\sqrt{5})<0, \\ x(x-4)>0. \end{cases}$$

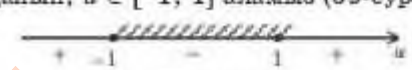
Интервалдар әдісін қолданып әрбір теңсіздіктің шешімдер жиынын координаталық түзуге түсіреміз (58-сурет).

Демек, берілген логарифмдік теңсіздіктің шешімі $(2-2\sqrt{5};\ 0] \cup [4;\ 2+2\sqrt{5})$ аралықтары болады.

Жауабы: $(2-2\sqrt{5};\ 0] \cup [4;\ 2+2\sqrt{5})$.

МЫСАЛ 4. $4\log_2^2 x - 4 < 0$ теңсіздігін шешейік.

Шешуі. Теңсіздікті шешу үшін $\log_2 x = u$ жаңа айнымалысын енгізсек, $4u^2 - 4 < 0$ квадрат теңсіздігіне келеміз. Соңғы теңсіздікті шешу үшін интервалдар әдісін қолданып, $u \in [-1;\ 1]$ аламыз (59-сурет).



59-сурет

Сонда $\log_2 x \in [-1;\ 1]$, яғни $-1 < \log_2 x < 1$ немесе $\log_2\frac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 2$ шығады.

Логарифмнің негізі $a = 2 > 1$ екенін ескеріп, қос теңсіздіктен $\frac{1}{2} < x < 2$ немесе

$0{,}5 < x < 2$ теңсіздігіне көшеміз. x айнымалысының мүмкін болатын мәндер жиыны барлық оң сандар жиыны. Сондықтан берілген логарифмдік теңсіздіктің шешімдер жиыны $[0{,}5;\ 2]$ кесіндісі болады.

Жауабы: $[0{,}5;\ 2]$.

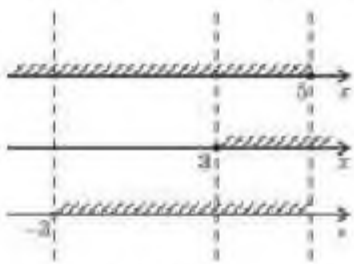
Сендер логарифмдік теңсіздіктер жүйесін шешуді үйренесіңдер.

МЫСАЛ

5. $\begin{cases} 5 - x > 0, \\ \log_6 (x + 3) > 1 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешейік.

Шешуі. Сызықтық теңсіздіктің шешу жолын қолданып және логарифмдік функцияның анықталу облысын ескеріп, екінші теңсіздіктегі 1 санын $\log_6 6$ санымен алмастырып, берілген теңсіздіктер жүйесінен мына теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} -x > -5, \\ \log_6 (x + 3) > \log_6 6, \\ x + 3 > 0 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x < 5, \\ x + 3 \geqslant 6, \\ x > -3 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 3, \\ x > -3. \end{cases}$$



60-сурет

Әрбір теңсіздіктің шешімдер жиынын жеке координаталық түзуге кескіндеп, ортақ аралықты табамыз (60-сурет). Сонда берілген теңсіздіктер жүйесінің шешімі $[3;\ 5]$ кесіндісі болады.

Жауабы: $[3;\ 5]$.

1. Логарифмдік теңсіздіктерді шығарғанда логарифмдердің қасиеттері қолданыла ма?
2. Логарифмдік теңсіздіктерді шығарғанда қандай әдістер қолданылады?
3. Логарифмдік теңсіздіктердің шешімі логарифмдік функцияның негізіне тәуелді ме? Жауабын түсіндіріңдер.

Жаттығулар

А

Теңсіздіктерді шешіңдер (**19.1—19.5**):

19.1. 1) $\log_4 x > 2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x < -3$;

3) $\lg x > -2$; 4) $\ln x \leqslant 1$.

19.2. 1) $\log_6(4x+1) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \geq -1$;

3) $\log_{0,4}(x+0,6) < 1$; 4) $\log_{0,2}(7-x) > -1$.

19.3. 1) $\log_5(3x+2) \geq \log_5(x-1)$; 2) $\log_{0,8}(6x-2) \geq \log_{0,8}(x+5)$;

3) $\lg(2x-1) < \lg(3x+2)$; 4) $\ln(4-2x) < \ln(x+3)$.

19.4. 1) $\log_{0,4}(2x-5) > \log_{0,4}(x+1)$; 2) $\log_4(3x-1) < \log_4(2x+3)$;

3) $\log_3 \dfrac{2-3x}{x} \geq -1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$.

19.5. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) > \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x-2)$;

2) $1+\log_2(x-2) > \log_2(x^2-3x+2)$;

3) $\lg(x-2)+\lg(27-x) < 2$;

4) $\lg(2x-3) > \lg(x+1)$.

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер (19.6-19.7):

19.6. 1) $\begin{cases} x-18 < 0, \\ \log_5 x > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x < -2, \\ x+1 > 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \ln x \geq 0, \\ 5-x < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \lg x \leq 1, \\ x+7 > 0. \end{cases}$

19.7. 1) $\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x > -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8-x > 0, \\ \log_5 x < 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \log_{0,7} x < 1, \\ x-0,3 \geq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 9-x \leq 0, \\ \log_{\frac{1}{6}} x > -1. \end{cases}$

B

Теңсіздіктерді шешіңдер (19.8—19.11):

19.8. 1) $\log_2 x > \log_2(3-x)$; 2) $\lg x + \lg(x-1) < \lg 6$;

3) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$; 4) $\log_{0,5} x \geq -6 + \log^2_{0,5} x$.

19.9. 1) $\log_3(11+4^x) > 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(22+3^x) > -2$;

3) $\lg(x^2-1) \leq 0$; 4) $\lg(1-x^2) \geq 0$.

19.10. 1) $\log_5(x^2-3) > 0$; 2) $\log_8(-9+x^2) \geq 0$;

3) $\log_4 \dfrac{2x-1}{x+1} \geq \log_4 3$; 4) $\lg \dfrac{3-x}{x+2} < 1$.

19.11. 1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)} > 1$; 2) $2^{\log_3(x^2+x)} < 2$;

3) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_{\frac{1}{6}}(x-1)} > 7^{\log_7(3-x)}$; 4) $0,9^{\log_{0,9}(x^2+x)} \leq 6^{\log_6(x+3)}$.

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер (19.12-19.13):

19.12. 1) $\begin{cases} \log_{0,3}(x+1) \geq -1, \\ 2x-1 < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg(1-x) \leq 1, \\ 3-x \leq 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \ln(x+5) \leqslant 0, \\ x+15 > 6x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 11x+12 > 13x, \\ \log_7(31-2x) < 1. \end{cases}$

19.13. 1) $\begin{cases} x^2-4 \geqslant 0, \\ \log_{\frac{1}{7}}(x+2) \leqslant -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-9 \geqslant 0, \\ \log_2(x-3) \leqslant 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{81}(x+2) > \frac{1}{2}, \\ 36-x^2 > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_3(x-5) < 1, \\ x^2-16 > 0. \end{cases}$

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $\left(\frac{7}{11}\right)^{4x+5} = \left(\frac{11}{7}\right)^{5x+6}$ теңдеуін шешіңдер:

A) 1; B) 0; C) -1; D) түбірі жоқ.

2. $0,37^{x-9} > 0,37$ теңсіздігінің ең үлкен натурал шешімін табыңдар:

A) 10; B) 8; C) 9; D) ондай сан жоқ.

3. $10^{\cos x} - \sqrt{10} = 0$ теңдеуін шешіңдер:

A) $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$; B) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

C) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; D) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

4. $\log_5(x-7) + \log_5(x-2) = \log_5(x+5)$ теңдеуінің түбірлерін табыңдар:

A) 9; B) 1; C) 1; 9; D) 7.

5. x-тің қандай мәндерінде $y = \log_2(x-5)$ функциясы оң мәндерді қабылдамайды:

A) $(5; +\infty)$; B) $[5; +\infty)$; C) $(6; +\infty)$; D) $[6; +\infty)$?

6. $\begin{cases} x^2-4 > 0, \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} < 5 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешіңдер:

A) $[-2; 2]$; B) $(-\infty; -2]$; C) $[2; +\infty)$; D) $(0; +\infty)$.

7. $\begin{cases} \log_5(x+y) = 1, \\ 2x+y = 7 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер:

A) $(3; 2)$; B) $(2; 3)$; C) $(-2; -3)$; D) $(3; 1)$.

8. $5^{x^2} > 5^{10x-21}$ және $5-x > 0$ теңсіздіктерінің ортақ шешімін табыңдар:

A) $[3; 7]$; B) $(-\infty; 3]$; C) $(5; 7]$; D) $[3; 5) \cup (5; 7]$.

9. $\log_{\frac{1}{7}}(2x-1) \geqslant 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең кіші бүтін санды табыңдар:

A) 1; B) 0; C) 2; D) ондай сан жоқ.

10. $\begin{cases} \log_2 x \geqslant 0, \\ 0{,}19^{x^2} > 0{,}19^{x} \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесін шешіңдер.

A) (0; 1); B) (0; 1]; C) (0; +∞); D) шешімі болмайды.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Варианта, вариациялық қатар, таралу қатары, полигон, жиілік полигоны.

VI ТАРАУ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§ 20. БАС ЖИЫНТЫҚ ЖӘНЕ ТАҢДАМА

Математикалық статистиканың негізгі терминдерімен танысасыңдар.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Таңдама, бас жиынтық, статистикалық қатар, жиілік, гистограмма

Эксперименттер жүргізу кезінде үлкен көлемді ақпараттар алынады. Мысалы, нақты қаладағы немесе аудандағы ҰБТ тапсырған оқушылардың нәтижелері, Қазақстан банктеріндегі халықтың салым мөлшері, ҚР нақты облыстарынан әскери қызметке шақырылушылардың дене салмағы және саны, күн бойы супермаркетке келген тұтынушылар тізімі және т.б.

Статистикада ақпаратты жинау және сақтау, әртүрлі болжамдарды әзірлеу, олардың шынайылығын бағалау және т. б. есептеулер жүргізіледі. Бірақ математикалық статистиканың негізгі есептерінің бірі алынған ақпаратты тиісті түрде өңдеу, сонда қалған есептердің нәтижесіне қол жеткізуге болады.

Бастапқы алынған ақпаратты өңдеу тәртібі шамамен келесідей:

— өлшеу (тәжірибе) деректері ретке келтіріледі және топтастырылады;

— топтастырудан кейін деректерді өлшеу кестелері құрастырылады;

— бөлу кестесі бойынша деректерді бөлу графигі құрылады;

— алынған өлшемдердің негізгі сандық сипаттамаларының шағын саны жиналған осы өлшемнің төлқұжаты құрастырылады.

Анықтама. ***Бас жиынтық*** *деп зерттеуге жататын барлық нысандардың немесе бір нысанға бірдей жағдайларда жүргізілетін барлық бақылаулардың мүмкін болатын нәтижелерінің жиынтығын айтады.*

Анықтама. ***Таңдама жиынтық*** *немесе* ***таңдау*** *деп нысандар жиынтығын немесе бас жиынтықтан кездейсоқ түрде іріктелген нысанды бақылау нәтижелерін айтады.*

Анықтама. *Таңдамадағы нысандар немесе бақылаулар саны* ***таңдама көлемі*** *деп аталады.*

Таңдау мәндері деп кездейсоқ X шамасының бақыланатын мәндерін айтады.

Нақты, сенімді қорытындылар алу үшін таңдама көлемі бойынша жеткілікті болуы тиіс. Үлкен таңдама — реттелмеген сандар жиыны. Зерттеу үшін таңдаманы көрнекі реттелген түрге келтіреді.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Вариациялық қатар екі элементтен: жиілік пен вариантадан тұрады.

Таралу қатарында белгінің жекеленген мәнін *варианта* деп атайды.

Жекеленген вариантаның немесе вариациялық қатардың әр тобының саны *жиілік* деп аталады.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ қатары берілсін. Мұнда x_1 вариантасы n_1 рет, x_2 вариантасы n_2 рет, x_3 вариантасы n_3 рет кездеседі және т.с.с.

Сонда $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ теңдігі варианта көлемі болып табылады.

n_i мәні x_i вариантасының жиілігі, ал $\frac{n_i}{n}$ — салыстырмалы жиіліктің саны.

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Төмендегі кесте жиіліктің статистикалық қатарын береді:

6-*кесте*

Варианта	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Варианта жиілігі	n_1	n_2	n_3	...	$\frac{n_k}{n}$

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР:

Жиілік полигоны (көпбұрыш) координаталары топтастыру интервалдарының орташа мәндеріне және осы интервалдардың жиілігіне сәйкес келетін нүктелерді қосатын қисықты береді.

Полигон (polygon) сөзі грек тілінен аударғанда көпбұрышты білдіреді.

Салыстырмалы жиілігі берілген вариантаның кестесін құрастырайық:

7-*кесте*

x_i вариантасы	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$ салыстырмалы жиілігі	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Берілген кесте *салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары* деп аталады.

Координаталары топтастыру интервалдарының орташа мәндері мен осы интервалдардың салыстырмалы жиілігіне сәйкес нүктелерді қосатын сынық *салыстырмалы жиіліктің полигоны* деп аталады.

Яғни салыстырмалы жиіліктің полигонын координаталық жазықтықта салу үшін $(x_1; \frac{n_1}{n})$, $(x_2; \frac{n_2}{n})$, ... , $(x_k; \frac{n_k}{n})$ нүктелерін белгілеп, кесінділермен қосады.

МЫСАЛ 1. 2, 3, 4, 5, 2, 2, 5, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 2, 2, 2, 2 сандар қатары берілген. Таңдама көлемін, таңдама варианталарын табыңдар, жиіліктің және салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар, жиілік полигонын салыңдар.

Шешуі. Есептің шарты бойынша таңдама көлем 20-ға тең. Берілген қатарда 2, 3, 4, 5 сандары кездеседі. Олар таңдама варианталары болып табылады.

Жиіліктің вариациялық қатарын құрастырайық:

8-кесте

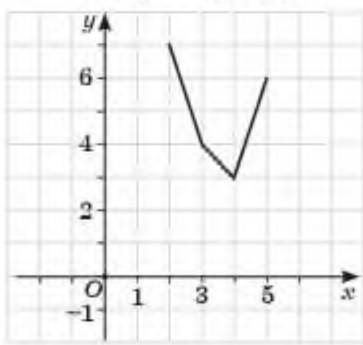
x_i вариантасы	2	3	4	5
n_i варианта жиілігі	7	4	3	6

Салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырайық:

9-кесте

x_i вариантасы	2	3	4	5
$\frac{n_i}{n}$	0,35	0,2	0,15	0,3

Жиілік полигонын саламыз (61-сурет).



61-сурет

1. Математикалық статистиканың негізгі терминдерін атаңдар.
2. Бас жиынның таңдамадан қандай айырмашылығы бар?
3. Жиілік полигоны, салыстырмалы жиілік полигоны нені көрсетеді?
4. Таңдама үшін абсолюттік және салыстырмалы жиілік кестелері қалай құрастырылады?

Жаттығулар

А

20.1. 6, 3, 2, 6, 3, 5, 3, 5, 6, 6, 2, 2, 3, 6, 3, 5, 3, 5, 2, 6 сандар қатары берілген. Таңдаманың көлемін, таңдаманың варианталарын табыңдар, жиіліктің вариациялық қатарын және салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар.

20.2. 10, 9, 4, 8, 8, 10, 9, 4, 4, 4, 9, 8, 8, 9, 4, 8, 10, 8, 10, 8 сандар қатары берілген. Таңдаманың көлемін, таңдаманың варианталарын табыңдар, жиіліктің вариациялық қатарын және салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар.

20.3. 10-сынып оқушыларының I тоқсандағы алгебра және анализ бастамаларынан жиынтық бағалаудың нәтижелері кестеде көрсетілген:

10-*кесте*

3	4	3	4	3	4	5	4	3	3
4	3	5	3	3	4	3	5	2	4
3	4	3	3	4	5	5	4	5	4

1) Нәтижелердің вариациялық қатарын құрастырыңдар және таңдама көлемін табыңдар;

2) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар.

20.4. Жиіліктің вариациялық қатары бойынша таңдама көлемін табыңдар және жиілік полигонын салыңдар:

1)

11-*кесте*

x_i	7	9	10	12
n_i	9	2	3	6

2)

12-*кесте*

x_i	11	13	17	19
n_i	6	8	6	5

3)

13-*кесте*

x_i	3	5	7	9	11
n_i	6	5	9	4	6

B

20.5. Кестеде бір топ оқушының бойын өлшеу нәтижелері көрсетілген.

14-кесте

157	159	156	158	158
156	158	159	159	157
155	155	154	156	159
158	156	154	160	156

Кестедегі деректер бойынша:

1) нәтижелердің вариациялық қатарын құрастырыңдар және таңдаманың көлемін табыңдар;
2) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар;
3) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын пайыз түрінде құрастырыңдар.

20.6. Кестеде бригада жұмысшыларының бір күнде әзірлеген тетіктер саны көрсетілген.

15-кесте

45	50	48	49	45
48	49	45	50	50
48	48	49	50	45

Кестедегі деректер бойынша:

1) нәтижелердің вариациялық қатарын құрастырыңдар және таңдама көлемін табыңдар;

2) салыстырмалы жиіліктің нұсқалық қатарын құрастырыңдар;

3) салыстырмалы жиіліктің нұсқалық қатарын пайыз түрінде құрастырыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Варианта, вариациялық қатар, таралу қатары, полигон, жиілік полигоны, таңдама бас жиын, статистикалық қатар, жиілік, гистограмма.

§ 21. ДИСКРЕТТІ ЖӘНЕ ИНТЕРВАЛДЫ ВАРИАЦИЯЛЫҚ ҚАТАРЛАР

Дискретті вариациялық қатар ұғымымен танысасыңдар, дискретті вариациялық қатарды құрастыру үшін деректерді талдауды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР

Қатар, топ, дискретті вариациялық қатар, интервалдық вариациялық қатар

СЕНДЕР БІЛЕСІҢДЕР: Әр белгісі, белгілер топтамасы немесе белгілер класы бойынша топтағы бірліктердің саны немесе жалпы қорытындыдағы осы санның орны белгілі болатын ерекше түрдегі топтамаларды *үлестірім қатары* деп атайды.

Үлестірім қатары сандық немесе төлсипаттық белгі бойынша құрастырылады.

Сандық белгісі бойынша құрастырылған үлестірім қатары *вариациялық қатар* деп аталады.

Вариациялық қатарлар дискретті және интервалдық болып келеді. Үлестірім қатары үздіксіз өзгеріп отыратын белгі бойынша (белгі қандай да бір интервал шеңберінде кез келген мәндерді қабылдай алатын кезде) және дискретті өзгеретін белгі бойынша (қатаң анықталған бүтін мәндерді қабылдайды) салынуы мүмкін.

Дискретті вариациялық қатардың *үлестірілуі* деп сәйкес келетін жиіліктер немесе бөлінділер бойынша варианталардың бөліну жиынтығын айтады. Дискретті қатардың варианталары — бұл белгінің дискретті өзгеретін мәндері, әдетте бұл есептеу нәтижесі.

Дискретті вариациялық қатарларды әдетте зерттелетін белгінің мәндері бір-бірінен кем дегенде қандай да бір шекті шамаға ерекшеленген жағдайда ғана құрады.

Дискретті қатарда белгінің нүктелік мәндері беріледі.

МЫСАЛ 1. 20 жұмысшының тарифтік разряды туралы деректер берілген. 2, 3, 2, 4, 4, 5, 5, 4, 6, 3, 1, 4, 4, 5, 5, 6, 4, 3, 2, 3 тарифтік разрядпен жұмысшыларды бөлудің дискретті вариациялық қатарын құрастырыңдар.

Шешуі:

Алдымен кестені құрастырамыз. Үлестірім қатары екі элементтен болғандықтан, кесте екі жолдан тұрады.

Бірінші жол — варианта, мысал бойынша — жұмысшылардың тарифтік разряды; екінші жол — жиілік, яғни варианталардың кездесу жиілігі, мысалда белгілі бір разряд бойынша жұмысшылар саны.

Тапсырманың шартын ескере отырып, кем дегенде бір рет кездесетін мәндерді анықтаймыз. Ол келесі сандар: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Содан кейін варианттың әрбір мәнінің қанша рет кездесетінін санаймыз және келесі кестені құрастырамыз:

16-*кесте*

Тарифтік разряд (x_i)	1	2	3	4	5	6
Жұмысшылар саны (n_i)	1	3	4	6	4	2

Осылайша, нәтижесінде тарифтік разряд бойынша жұмысшыларды бөлудің дискретті вариациялық қатары алынды.

$x_n - x_1$ айырмасын *өлшемнің құлашы* деп немесе ең үлкен және ең кіші варианттың *айырымы* деп атайды. Деректер қатарының *модасы* — бұл өлшемдер қатарында жиі кездесетін варианта. Мода еселігі ең үлкен болатын вариантаға тең.

Тақ деректер сан қатарының $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < x_{2k+1}$ *медианасы* деп $m = x_{k+1}$ санын, ал *жұп деректер* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k-1} < x_{2k}$ *сан қатарының медианасы* деп $m = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ санын айтады.

Өлшеу деректерінің жиі кездесетін сипаттамасы: олардың орташа арифметикалық мәні немесе орташа мәні M болып табылады.

Орташа мәнді табу үшін:
1) барлық өлшем деректері қосындысының мәнін табу;
2) алынған қосындының мәнін деректер санына бөлу (таңдау көлемі) қажет:
$M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Орташа мән, мода және медиана деректер қатарының сандық сипаттамаларының бір түріне жатады. Кейде олар *орталық үрдістің өлшемі* деп аталады: осы сандардың әрқайсысы деректер қатарының орта мәнін сипаттайды.

1-мысалдағы мәндердің модасын, медианасын және орташа мәнін табыңдар.

Интервалды вариациялық қатар ұғымымен танысасыңдар, интервалды вариациялық қатарды құрастыру үшін деректерді талдауды үйренесіңдер.

Анықтама. ***Интервалды вариациялық қатар*** *деп кездейсоқ шаманың мәндерін сәйкес жиіліктерімен немесе олардың әрқайсысына шама мәндерінің түсу жиіліктерімен түрлендірулердің реттелген интервалдарының жиынтығын айтады.*

Мәні өлшеу немесе өлшеу жолымен тіркелетін интервалдық қатарлар үздіксіз өзгеретін белгінің үлестірімін талдауға бағытталған. Мұндай қатардың вариантасы — топтастыру.

Егер дискретті вариациялық қатарда жиілік сипаттамасы қатардың вариантасына тікелей қатысты болса, онда интервалды вариация тобына жатады.

Интервалды құрудың бірнеше жолы бар:

1) деректерді логикалық талдау негізінде қосымша есептеулерсіз көзбен шолу тәсілі; егер шарт бойынша тең аралықтарды салу талап етілсе, онда формула бойынша есептеу;

2) қосымша есептеулер әдісі. Интервал шамасын есептеу үшін келесі формула қолданылады:

$$i = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}, \qquad (1)$$

мұндағы i — шама немесе интервал ұзындығы;

x_{max} — максимал шама;

x_{min} — минимал шама;

n — есептің шарты бойынша қажетті топтар саны.

Бірінші интервалды салуды ең кіші мәннен бастайды, оған интервалдың шамасы қосылады және бірінші интервалдың жоғарғы шегарасы алынады. Содан кейін бірінші интервалдың жоғарғы шегарасы екінші аралықтың төменгі шегіне айналады, оған аралықтың шамасы қосылып, екінші аралық алынады. Одан соң шарт бойынша қанша интервалдар салу керек болса, сонша рет интервалдар анықталады.

МЫСАЛ

2. Банкте 10 салымшының салым мөлшері туралы деректер берілген — 280, 240, 400, 340, 200, 310, 260, 360, 330, 230 (мың тг). Салым көлемін тең аралықты 3 топқа бөліп, үлестірімнің интервалды вариациялық қатарын құрыңдар. Әрбір топ бойынша салымдардың жалпы мөлшерін есептеңдер.

Шешуі: Алдымен кестені құрастырамыз. Үлестірім қатарында екі элемент болғандықтан, кесте екі жолдан тұрады.

Бірінші жол — варианта мысалда банктегі салымның мөлшері; екінші жол — жиілік осы жағдайда интервалға түсетін тиісті салымы бар салымшылар саны.

(1) формуласын пайдалана отырып, интервал шамасын табамыз. Есеп шарты бойынша ең үлкен мәні 400 мың тг., ең кіші мәні 200 мың тг., топтар саны — 4.

Сонда $i = \dfrac{400000 - 200000}{4} = 50000.$

17-*кесте*

Банк салымының мөлшері (x)	200 000 – 250 000	250 000 – 300 000	300 000 – 350 000	350 000 – 400 000
Салымшылар саны (n)	3	2	3	2

Енді әрбір интервал бойынша және жалпы алғандағы салымдардың барлық көлемінің есебін жүргіземіз. Бұл үшін әрбір интервал бойынша салым мөлшерін қосамыз және салымдардың жиынтық мәнін аламыз. Сонда

бірінші интервал бойынша: 230 000 + 240 000 + 200 000 = 670 000;

екінші интервал бойынша: 280 000 + 240 000 = 520 000;

үшінші интервал бойынша: 310 000 + 330 000 + 340 000 = 980 000;

төртінші интервал бойынша: 360 000 + 400 000 = 760 000.

18-*кесте*

Банк салымының мөлшері (x)	200 000 — 250 000	250 000 — 300 000	300 000 — 350 000	350 000 — 400 000	Барлығы
Салымшылар саны (n)	3	2	3	2	10
Салымның жалпы көлемі	670 000	520 000	980 000	760 000	2 930 000

! Берілген шартқа сәйкес вариациялық қатардың деректерін талдауды үйренесіңдер.

Үлестірім қатарларын олардың графикалық бейнесінің көмегімен талдау ыңғайлы.

Дискретті қатар графикте сынық сызық полигоны түрінде бейнеленеді. Оны тікбұрышты координата жүйесінде салу үшін абсцисса осі бойынша координаталары бірдей масштабта түрленетін белгінің сараланған (реттелген) мәндері қойылады, ал ординат осі бойынша жиіліктерді көрсетуге арналған шкала салынады.

1-мысалдағы мәндердің модасын, медианасын және орташа мәнін табыңдар.

Интервалды қатарлар гистограмма түрінде (яғни диаграмма бағандары) бейнеленеді. Гистограмманы абсцисса осіне салған кезде интервалдардың шамасы кескінделеді, ал жиіліктер тиісті аралықтарда салынған тікбұрыштармен бейнеленеді. Интервалдар тең болған жағдайда бағандардың биіктігі жиілікке пропорционал болуы керек.

2-мысалға интервалды вариациялық қатарды өздерің құрастырыңдар.

1. Дискретті вариациялық қатардан қандай деректер алуға болады?
2. Интервалды қатардан қандай деректер алуға болады?

Жаттығулар

А

21.1. Жұмысшылардың разрядтары туралы деректер берілген: 3, 4, 5, 6, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 5, 5, 5, 6. Жұмысшылардың разрядтары бойынша үлестірім дискретті вариациялық қатарын құрастырыңдар.

21.2. 40 оқушыға кез келген цифрды атау ұсынылды. Нәтижесінде келесі деректер алынды:

19-*кесте*

5	5	4	5	3	9	0	4	3	7
6	9	5	1	7	5	6	2	1	3
4	7	0	7	5	6	5	3	9	2
3	1	3	1	3	3	6	8	1	9

Берілген өлшемдердің қайталану үлестірім кестесін құрастырыңдар және таңдама көлемі мен модасын табыңдар.

21.3. 30 оқушыға 10-нан 20-ға дейінгі кез келген екітаңбалы санды атау ұсынылды. Нәтижесінде келесі деректер алынды:

20-*кесте*

14	17	10	17	16	15	15	13	19	12
16	19	15	11	17	15	16	12	13	13
13	11	13	11	13	14	16	18	19	19

Берілген өлшемдердің қайталану үлестірім кестесін құрастырыңдар және таңдама көлемі мен модасын табыңдар.

21.4. 21.2-жаттығудағы өлшемдер деректерінің орташа мәнін табыңдар.

21.5. 21.3-жаттығудағы өлшемдер деректерінің орташа мәнін табыңдар.

B

21.6. 21.2, 21.3-жаттығулардағы деректердің полигонын салыңдар.

21.7. Оқушылардың массасы (кг-мен) — 35, 44, 46, 37, 50, 36, 38, 48, 35, 44, 46, 39, 50, 40, 54, 36, 40, 42, 52, 39 белгілі. Массалары бойынша тең интервалдар арқылы 5 топқа бөліп, оқушылардың интервалды вариациялық бөлу қатарын салыңдар. Әр топ бойынша массалардың ортақ өлшемін табыңдар.

21.8. Дүкенде гүлдің 25 түрі сатылады. Олардың бағасына қарай үлестірімі кестеде берілген (21-кесте).

21-*кесте*

Баға (тг)	[500—800)	[800—1100)	[1100—1400)	[1400—1700]
Түрлерінің саны	7	4	(*)	8

1) Кестеден (*) табыңдар;
2) салыстырмалы жиіліктің пайызбен көрсетілген вариациялық қатарын құрастырыңдар.

ЖАҢА БІЛІМДІ МЕҢГЕРУГЕ АРНАЛҒАН ТІРЕК ҰҒЫМДАР

Варианта, вариациялық қатар, таралу қатары, полигон, жиілік полигоны, таңдама, бас жиын, статистикалық қатар, жиілік, гистограмма, дискреттік вариациялық қатар, интервалдық вариациялық қатар.

§ 22. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАНЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫН ТАҢДАМАЛАР БОЙЫНША БАҒАЛАУ

Таңдама бойынша кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларын бағалауды үйренесіңдер.

ТҮЙІНДІ ҰҒЫМДАР
Статистика, орташа мән, дисперсия, орташа ауытқу

Кейде кездейсоқ шаманы (бас жиынтық) зерттеу кезінде таңдамалы деректер негізінде үлестірудің кейбір сандық (нүктелік) сипаттамаларын бағалауды есептеу жеткілікті. Сандық сипаттамалар таңдалған деректер негізінде теориялық үлестіру параметрлерін анықтау кезінде де есептеледі.

Нүктелік баға деп бір санмен ұсынылған мүмкін бағаны айтады. Нүктелік бағалар бас жиынның сәйкес параметрінің шамасы туралы жуық түсінік береді.

Таңдау мәліметтері бойынша кездейсоқ шаманың сандық сипаттамаларын бағалауды қарастырайық.

Салыстырмалы жиіліктің нұсқалары көрсетілген кесте берілсін, мұндағы $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ (22-кесте).

22-*кесте*

x_i вариантасы	x_1	x_2	x_3	....	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

Таңдамалы орта мәнмен бағаланатын математикалық күтім келесі формуламен есептеледі:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\,(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k). \qquad (1)$$

$\overline{X}$ орташа мәнінің айналасындағы x_1, x_2, x_3, ..., x_k сандарының шашырауын сипаттайтын шама *дисперсия* деп аталады және $\overline{D}$ деп белгіленеді.

Таңдалым дисперсияны есептеу формуласы:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\,[(x_1 - \overline{X})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{X})^2 \cdot n_2 + \ldots + (x_k - \overline{X})^2 \cdot n_k]. \qquad (2)$$

Таңдаманың көлемі азайған сайын қателіктер пайда болады. Сондықтан $n \leqslant 30$ бойынша түзетілген таңдамалы дисперсия табылады:

$$\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} \qquad (3)$$

формуласымен есептеледі.

(2) және (3) формулаларын ескере отырып, таңдалымның квадраттық ауытқуы сәйкесінше

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} \qquad (4)$$

және

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} \qquad (5)$$

формулаларымен есептеледі.

Әдетте, таңдалым дисперсиясы

$$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \qquad (6)$$

формуласымен есептеледі, мұндағы $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\,(x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_k^2 n_k)$.

Дисперсияны және орташа квадраттық ауытқуды есептеу — өте күрделі болғандықтан, оны есептеу үшін қандай да бір компьютер бағдарламасын (мысалы, Microsoft Office Excel) қолданған дұрыс. Егер есептеулер тікелей жүргізілсе, онда қателерді бақылау үшін нәтижелерді кесте түрінде көрсету керек.

Үздіксіз кездейсоқ шамалар үшін интервалдық салыстырмалы вариантаның кестесі берілсін (23-кесте):

23-кесте

Интервалдар	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	....	$[x_{k-1}; x_k]$
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

Онда $x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2}$, $x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2}$, ..., $x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ ескерсек таңдаманың салыстырмалы жиілігінің кестесін қарастырамыз (24-кесте):

24-кесте

x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

МЫСАЛ Интервалды салыстырмалы жиіліктің кестесін қолдану арқылы таңдама дисперсиясын және квадраттық ауытқудың орташа таңдалымын табайық.

25-кесте

Интервалдар	[1; 3)	[3; 6)	[6;9]
$\frac{n_i}{n}$	0,6	0,2	0,2

Шешуі. Таңдаманың салыстырмалы жиілігінің кестесін құрастырайық. Ол үшін интервалдар ортасын табамыз: $x_1^* = (1 + 3) : 2 = 2$; $x_2^* = (3 + 6) : 2 = 4,5$; $x_3^* = (6 + 9) : 2 = 7,5$.

Сонда келесі кестені аламыз:

26-кесте

x_i^*	2	4,5	7,5
$\frac{n_i}{n}$	0,6	0,2	0,2

Енді төмендегі шамаларды есептейміз:

$$\overline{X} = 2 \cdot 0,6 + 4,5 \cdot 0,2 + 7,5 \cdot 0,2 = 3,6;$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{10}(2^2 \cdot 6 + 4{,}5^2 \cdot 2 + 7{,}5^2 \cdot 2) = 17{,}7;$$

$$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 17{,}7 - 3{,}6^2 = 17{,}7 - 12{,}96 = 4{,}74.$$

$n = 10$ және ол 30-дан кем, сондықтан түзетілген таңдалым дисперсиясын табайық:

$$\overline{\overline{D}} = \frac{10}{9} \cdot 4{,}74 \approx 5{,}27.$$

Сәйкесінше таңдаманың орташа квадраттық ауытқуын есептейміз:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} \approx \sqrt{5{,}27} \approx 2{,}29.$$

Жауабы: $\approx 5{,}27$; $\approx 2{,}29$.

1. Таңдалым дисперсиясы мен түзетілген таңдалым дисперсиясының ұқсастығы мен айырмашылығы қандай?
2. Орташа квадраттық ауытқудың формуласы неге байланысты таңдалады?
3. Таңдалым дисперсиясы мен орташа квадраттық ауытқудың формуласын жазыңдар.

Жаттығулар

А

22.1—22.3-жаттығуларда бірдей өлшемдердің нәтижелері қарастырылады. Бас жиынды зерттегенде тәуелсіз байқаулардың мәндері алынды (27-кесте):

27-кесте

111	112	111	108	113	111	114	113
112	111	110	110	109	109	110	112
109	113	114	111	111	112	111	111

22.1. 1) Байқаулардың вариациялық қатарын құрастырыңдар және таңдаманың көлемін табыңдар;
2) салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар;
3) салыстырмалы жиіліктің пайыздық вариациялық қатарын құрастырыңдар.

22.2. 1) Моданы, медиананы, математикалық күтімді табыңдар;
2) салыстырмалы жиіліктің полигонын пайызбен көрсетіңдер.

22.3. Дисперсияны және орташа квадраттық ауытқуды табыңдар.

В

22.4. Үлестірім кестесі және "орташа мән 9-ға тең" деген тұжырымды қолданып, келесі есептеулерді орындаңдар (28-кесте):

28-*кесте*

Варианта	4	8	12
Қайталануы	x	2	9

1) x санын табыңдар;
2) түзетілген таңдалым дисперсиясын табыңдар.

22.5. Үлестірім кестесі және "орташа мән 5-ге тең" деген тұжырымды қолданып, келесі есептеулерді жасаңдар (29-кесте):

29-*кесте*

Варианта	3	x	7	9
Қайталануы	13	6	9	2

1) x санын табыңдар;
2) түзетілген таңдалым дисперсиясын табыңдар.

22.6. Варианталардың интервалды салыстырмалы кестесін қолданып, таңдама дисперсиясын және таңдаманың квадраттық ауытқуын табыңдар:

30-*кесте*

Интервалдар	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15]
n_i	7	5	8
$\frac{n_i}{n}$	0,4	0,2	0,4

ҒАЛЫМ-МАТЕМАТИК ЖАЙЛЫ ХАБАРЛАМА ДАЙЫНДАҢДАР

22.7. Қазіргі математикалық статистиканың негізін қалаушылардың бірі ағылшын математигі Карл Пирсон. Әртүрлі статистикалық деректер арасындағы корреляцияның (тәуелділіктің) сандық бағалауының дамуы осы ғалыммен есімімен байланысты.

Карл Пирсон
(1857—1936)

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. X кездейсоқ шаманың үлестірім қатары берілген.

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	?	0,2	?	0,1	?

Белгісіз салыстырмалы жиілік 3 : 3 : 1 сандарына пропорционал. Онда салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарының толық кестесі:

A)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

B)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,25	0,15	0,2

C)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,15	0,15	0,25	0,15	0,25

D)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

E)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,2	0,15	0,3

2. Салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары бойынша орташа мәнін табыңдар:

X	2	3	4	5	6
$\frac{n_i}{n}$	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1

A) 5,2; B) 4,95; C) 5,1; D) 5,3; E) 5,15.

3. Салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары бойынша дисперсияны табыңдар:

X	2	4	6	8
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,2	0,4	0,2

A) 15,84; B) 14,9; C) 15,16; D) 14,6; E) 14,8.

4. 3-тапсырмадағы салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары бойынша орташа квадраттық ауытқуын табыңдар:

A) 3,98; B) 3,99; C) 3,96; D) 3,95; E) 3,88.

5. Кестеде фирмалық дүкендегі сыртқы киімнің бағасы (мың тг) туралы деректер келтірілген:

32,3	40,0	34,9	28,8	48,9
28,4	25,2	24,6	30,0	25,3
20,0	35,8	37,4	23,2	35,2

Деректерді құны бойынша тең 4 интервалдық топқа бөліп, әйелдер сыртқы киімдерінің үлестірімінің интервалды вариациялық қатарын құрастырыңдар:

A)

Интервалдар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$

B)

Интервалдар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{2}{15}$

C)

Интервалдар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{15}$

D)

Интервалдар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{15}$

E)

Интервалдар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$

6. Салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары бойынша орташа мәні мен дисперсиясын табыңдар:

A) $\overline{X} = 14{,}68$; $\overline{D} = 405{,}99$;
B) $\overline{X} = 15{,}68$; $\overline{D} = 406{,}99$;
C) $\overline{X} = 15$; $\overline{D} = 405{,}99$;
D) $\overline{X} = 14{,}4$; $\overline{D} = 406{,}99$;
E) $\overline{X} = 14{,}4$; $\overline{D} = 406{,}99$.

Интервалдар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)
x_i^*	15	25	35
n_i	5	9	8
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,36	0,32

7. 6-тапсырмадағы салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарының орташа квадраттық ауытқуын табыңдар:

A) $\overline{\sigma} \approx 20{,}15$;
B) $\overline{\sigma} \approx 21{,}15$;
C) $\overline{\sigma} \approx 21{,}16$;
D) $\overline{\sigma} \approx 20{,}25$;
E) $\overline{\sigma} \approx 20{,}15$.

11-СЫНЫП АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

I. Есептеулер

Интегралды есептеңдер (1—5):

1. 1) $\int_{-1}^{0}(1-3x^2)dx$; 2) $\int_{0}^{1}(x^3-2x^2+x+1)dx$;

3) $\int_{0}^{1}(2+x)^3\,dx$; 4) $\int_{2}^{3}(4-x)^4\,dx$.

2. 1) $\int_{\frac{\pi}{120}}^{\frac{\pi}{90}}\frac{5\,dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+5x\right)}$; 2) $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{36}}\left(\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}}\frac{3\,dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{12}+3x\right)}$; 4) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{24}}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right)dx$.

3. 1) $\int_{1}^{2}(x^3+x^{-3})dx$; 2) $\int_{4}^{9}\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int_{-2}^{1}(5-3x^{-2}-3x^2)dx$; 4) $\int_{8}^{27}\left(x^{\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$.

4. 1) $\int_{1}^{e}(2x^{-1}+1)dx$; 2) $\int_{0}^{2}3^{0,5x}dx$;

3) $\int_{1}^{e}(3x^{-1}-4)dx$; 4) $\int_{0}^{1}\left(e^{\frac{x}{3}}-3x^2\right)dx$.

5. 1) $\int_{0}^{2}(e^{3x}+1)dx$; 2) $\int_{1}^{e}\frac{x^2+1}{2x^3}dx$;

3) $\int_{-1}^{0}\frac{3}{(5x-1)^3}dx$; 4) $\int_{0}^{1}\frac{4}{(2x+1)^3}dx$.

Өрнектің мәнін табыңдар (6—10):

6. 1) $\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}+\sqrt[4]{81}$; 2) $\sqrt{0,49}-\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}+\sqrt[5]{32}$;

3) $\sqrt{\frac{16}{25}}+\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}+\sqrt[6]{64}$; 4) $\sqrt{1,21}+\sqrt[3]{-4\frac{12}{125}}+\sqrt[4]{625}$.

7. 1) $\sqrt[6]{2^7\cdot 3^5}\cdot\sqrt[6]{2^5\cdot 3}$; 2) $\sqrt[3]{5^3\cdot 6^3}\cdot\sqrt[3]{5^{12}\cdot 6^3}$;

3) $\sqrt[8]{4^5\cdot 7^7}\cdot\sqrt[8]{4^7\cdot 7}$; 4) $\sqrt[4]{2^5\cdot 5^3}\cdot\sqrt[4]{2^3\cdot 5}$.

8. 1) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$; 2) $\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}$;

3) $\sqrt[6]{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[6]{9-\sqrt{17}}$; 4) $\sqrt[7]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[7]{7+4\sqrt{3}}$.

9. 1) $25^{2,5}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1,5}+\left(\frac{5}{3}\right)^{2,7}\cdot(0,6)^{2,7}$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5}+8^{\frac{4}{3}}-\left(\frac{2}{7}\right)^{6}\cdot\left(3\frac{1}{2}\right)^{6}$;

3) $16^{1,5}-\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{0,19}\cdot(1,5)^{0,19}$;

4) $81^{0,25}+\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}-(0,15)^{-0,35}\cdot\left(6\frac{2}{3}\right)^{-0,35}$;

5) $\dfrac{16^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{6}}{4^{-\frac{1}{3}}\cdot 64^{-\frac{2}{3}}}\cdot 4\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{4}$;

6) $\dfrac{25^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2}}{125^{-\frac{2}{3}}\cdot 5^{-2}}\cdot\left(25^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

10. 1) $\log_{27}3-\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{5}+\log_{2,5}0,4$;

2) $\log_{\sqrt{6}}\frac{1}{36}-\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}-\log_{0,2}5$;

3) $9^{\frac{3}{2}}-\log_{\frac{1}{5}}25$;

4) $\log_{\sqrt{3}}27-\log_{1,5}\frac{2}{3}-\log_{3}4$;

5) $\log_{3}\frac{1}{27}-\log_{4}32$;

6) $625^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}\log_{2}4\cdot 36^{\log_6 2}$.

11. Егер:

1) $\log_3 a=\frac{1}{2}$ болса, онда a-ның;

2) $\log_b\frac{1}{81}=-4$ болса, онда b-ның;

3) $\log_6 c=3$ болса, онда c-ның;

4) $\log_m 0,25=-4$ болса, онда m-нің мәнін есептеңдер.

12. Егер $\log_7 3=a$ және $\log_7 5=b$ болса, онда:

1) $\log_7 25-\log_7 243$;

2) $\log_{125}81+2\log_7 15$;

3) $\frac{1}{2}\log_7 441-\log_5 9$;

4) $\log_{15}21+3\log_{15}245$ өрнегінің мәнін табыңдар.

II. Тепе-тең түрлендірулер

Берілген аралықта $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болатынын дәлелдеңдер (13—15):

13. 1) $F(x)=4\sqrt{x-3}+2$, $\quad f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-3}}$, $x\in(3;+\infty)$;

2) $F(x)=\frac{1}{12}x^6-16\sqrt{x}$, $\quad f(x)=\frac{x^5}{2}-\frac{8}{\sqrt{x}}$, $x\in(0;+\infty)$;

3) $F(x)=x^3-3\sin x$, $\quad f(x)=3x^2-3\cos x$, $x\in R$;

4) $F(x)=2\cos(4x-1)+7x^7$, $\quad f(x)=-8\sin(4x-1)+49x^6$, $x\in R$.

14. 1) $F(x)=x+\frac{1}{x}$, $\quad f(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$, $x\in(0;+\infty)$;

2) $F(x)=\cos x^4$, $\quad f(x)=-4x^3\sin x^4$, $x\in R$;

3) $F(x)=-1{,}5\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$, $\quad f(x)=-\frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, $x\in R$;

4) $F(x)=-\mathrm{ctg}\,5x+5x$; $\quad f(x)=5\left(\frac{1}{\sin^2 5x}+1\right)$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{5}\right)$.

15. 1) $F(x)=\frac{3^x}{\ln 3}+3x$, $\quad f(x)=3^x+3$, $x\in R$;

2) $F(x)=\ln x-(0{,}5)^x$, $\quad f(x)=\frac{1}{x}-0{,}5^x\ln\frac{1}{2}$, $x\in R$;

3) $F(x)=x-\ln x^3$, $\quad f(x)=\frac{x-3}{x}$, $x\in(0;+\infty)$;

4) $F(x)=\ln x^2$, $\quad f(x)=\frac{2}{x}$, $x\in(0;+\infty)$.

Өрнекті ықшамдаңдар (16—19):

16. 1) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-b}\right)$; $\quad$ 2) $\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4\sqrt{ab}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}-2a^{\frac{1}{3}}}$; $\quad$ 4) $\dfrac{a^{\frac{23}{3}}-25a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{13}{6}}-5a^{\frac{1}{2}}}$.

17. 1) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+4}{x^{1,5}-4x}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x^{1,5}+4x}\right)\cdot\dfrac{x-16}{x^{\frac{1}{2}}}$; $\quad$ 2) $\left(\dfrac{5}{y-5y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{y^{1,5}}{y^2-25y}\right):\dfrac{5y^{\frac{1}{2}}+25-y}{y^{\frac{1}{2}}+5}$.

18. 1) $\left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}}+6}{b^{\frac{3}{2}}-6b}-\dfrac{b^{0,5}-6}{b^{1,5}+6b}\right):\dfrac{2b^{0,5}}{b-36}$; $\quad$ 2) $\left(\dfrac{7}{b-7b^{0,5}}-\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2-49b}\right)\cdot\dfrac{b^{0,5}+7}{49+7b^{\frac{1}{2}}-b}$.

19. 1) $\left(\dfrac{25x-16x^{-1}}{5x^{0,5}-4x^{-0,5}}+\dfrac{x-4x^{-1}}{x^{0,5}-2x^{-0,5}}\right)^2$; $\quad$ 2) $\dfrac{1-y^{-2}}{y^{0,5}-y^{-0,5}}-\dfrac{2}{y^{0,5}}-\dfrac{y^{-2}-1}{y^{0,5}+y^{-0,5}}$.

20. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

1) $\sqrt{97-56\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$; $\quad$ 2) $\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}=1-\sqrt{5}$;

3) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{21+12\sqrt{3}}}$; $\quad$ 4) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$.

21. Егер:

1) $B=\sqrt{37+20\sqrt{3}}+\sqrt{37-20\sqrt{3}}$;

2) $B = \sqrt{55 + 14\sqrt{6}} + \sqrt{55 - 14\sqrt{6}}$;

3) $B = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$;

4) $B = \sqrt[3]{29\sqrt{2} - 45} + \sqrt[3]{29\sqrt{2} + 45}$ болса, онда B-ның бүтін сан болатынын дәлелдеңдер.

Тепе-теңдікті дәлелдеңдер (**22—24**):

22. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b - ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - ab = 0$;

2) $\dfrac{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}} - \sqrt{mn} = m + n$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}{a + 1} + \dfrac{a^{-\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1} - (a - 7)^0 = \dfrac{2}{\sqrt{a}} - 1$, мұндағы $a > 7$;

4) $\dfrac{a - 1}{\sqrt[3]{a} - 1} - \dfrac{a + 1}{\sqrt[3]{a} + 1} + (a + 10)^0 = 2\sqrt[3]{a} + 1$.

23. 1) $\dfrac{\log_5 3 + \log_5 9}{3\log_5 2 - \log_5 24} = -3$;

2) $\dfrac{\log_6 75 - \log_3 3}{2\log_6 \frac{1}{3} + \log_6 45} = 2$;

3) $\dfrac{2\log_{11} 5 + 2\log_{11} 2}{2\log_{11} 4 + \log_{11} 5 - 3\log_{11} 2} = 2$;

4) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 30 - \lg 15} = 5$.

24. 1) $9^{\log_3 5} \cdot 13^{2\log_{13} 2} = 100$;

2) $49^{\log_7 3 + \frac{1}{2}\log_7 3} = 27$;

3) $5^{\log_{\sqrt{5}} 2} \cdot 121^{\log_{11} 3} = 36$;

4) $\left(8^{\log_2 3} : 27^{\log_3 2}\right) \cdot 25^{\log_5 4} = 54$.

III. Теңдеулер және олардың жүйелері

Иррационал теңдеулерді шешіңдер (**25—29**):

25. 1) $\sqrt{2x - 7} = 3$;

2) $\sqrt[3]{x^2 + 7x + 8} = 2$;

3) $\sqrt{11 + 3x} = 4$;

4) $\sqrt[3]{27 + 2x - x^2} = 3$.

26. 1) $x = 7 - \sqrt{3x + 7}$;

2) $\sqrt{15 - 3x} - x = 1$;

3) $\sqrt{21x + 25} - 3x = 5$;

4) $\sqrt{121 - 12x} = 11 - 3x$.

27. 1) $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x + 2}$;

2) $\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = x$;

3) $\dfrac{\sqrt{3x - 5}}{x - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$;

4) $x + 2 = \sqrt{(3x + 4)(x + 1)}$.

28. 1) $\dfrac{x + 1}{9 - x} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3}$;

2) $\dfrac{4 - x}{2 + \sqrt{x}} = 8 - x$;

3) $\sqrt{x - 9} + 2 = \sqrt{x - 1}$;

4) $\sqrt{x + 5} = 5 - \sqrt{x - 10}$.

29. 1) $\sqrt{1-\sin x}=\cos x$; 2) $\sqrt{1-\cos x}=\sin x$;

3) $\sqrt{\frac{x}{x+1}}+2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3$; 4) $\sqrt{\frac{x-1}{x}}-3\sqrt{\frac{x}{x-1}}=2$.

Көрсеткіштік теңдеулерді шешіңдер (30—35):

30. 1) $\sqrt{3^x}=27^{-\frac{2}{3}}$; 2) $\sqrt{5^x}=25^{-\frac{3}{2}}$;

3) $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2^{3x-1}}=16^{\frac{3}{4}}$; 4) $27^{-1}\cdot\sqrt{9^{x+1}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5}$.

31. 1) $9\cdot 3^{\cos x}=\sqrt{27}$; 2) $4\cdot 2^{\sin x}=\sqrt{8}$;

3) $25^{-1}\cdot\sqrt{125^x}=5^x$; 4) $216^{-1}\cdot\sqrt{36^x}=6^{0,5x}$.

32. 1) $2^x-5\cdot 2^{x-4}=11$; 2) $5^x-4\cdot 5^{x-2}=21$;

3) $3\cdot 2^{x-1}+2^{x+4}=35$; 4) $6^{x-1}+5\cdot 6^{x-2}=11$.

33. 1) $7^{x+1}-2\cdot 7^{x-2}=341$; 2) $3\cdot 11^{x+1}-2\cdot 11^{x-1}=361$;

3) $2^{x-1}+3\cdot 2^{x-2}+5\cdot 2^{x-3}=15$; 4) $7\cdot 3^{x-2}-3^{x-1}+5\cdot 3^x=49$.

34. 1) $4^x+16=10\cdot 2^x$; 2) $9^x-36\cdot 3^x+243=0$;

3) $25^x-\frac{26}{5}\cdot 5^x+1=0$; 4) $36^x-\frac{7}{36}\cdot 6^x+\frac{1}{216}=0$.

35. 1) $4^{x+1}+4^{1-x}-10=0$; 2) $3^{1+x}-2\cdot 3^{1-x}=7$;

3) $4^{\sqrt{x+2}}-32=4\cdot 2^{\sqrt{x+2}}$; 4) $25^{\sqrt{x+2}}-10=3\cdot 5^{\sqrt{x+2}}$.

Логарифмдік теңдеулерді шешіңдер (36—41):

36. 1) $\log_4(x^2-5)=1$; 2) $\log_6(x^2-2)=1$;

3) $\log_3(4+\sqrt{x})=2$; 4) $\log_5(\sqrt{x}+1)=2$.

37. 1) $\log_5(2x+3)+\log_5(4-x)=1$; 2) $\log_7(3x-17)-\log_7(x+1)=0$;

3) $\log_2(2x-1)+\log_2(x+3)=2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(4x+5)=\log_{\frac{1}{4}}(5x+2)$.

38. 1) $\log_3(x+1)-\log_3(x-1)=1$; 2) $\log_7(x^2+6x)=1$;

3) $\log_2(x^2-x)=1$; 4) $\log_4(7x+4)-\log_4(2x-1)=1$.

39. 1) $\log^2_{\frac{1}{2}}x+2\log_{\frac{1}{2}}x-3=0$;

2) $2\log_3(x-1)=\log_3(1,5x+1)$;

3) $\log_2(x^2+4x+1)=\log_2(6x+2)-1$;

4) $\log_3(3-x)-2\log_3 2=1-\log_3(4-x)$.

40. 1) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+2\right)}{\log_{\frac{1}{2}}(6-5x)}=1$; 2) $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}\left(3x+2x^2\right)}{\log_{\frac{1}{3}}(6x+2)}=1$.

41. 1) $\log_3(2^x - 1) = 1 - \log_3(2^x - 3)$;

2) $\log_2(3^x - 1) = 1 - \log_2(3^x - 2)$.

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (42—44):

42. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

43. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ \lg x + \lg y = \lg 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_{0,5} x + \log_{0,5} y = -1, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$

44. 1) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x+2y)} = 6x, \\ 3^{x^2-2y} = 9^{0,5x}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = \frac{1}{27}, \\ 0,1^x \cdot 10^y = 10^{-3}. \end{cases}$

IV. Теңсіздіктер

Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешіңдер (45—54):

45. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3x} < 8^2$; 2) $9^{-4x} > \left(\frac{1}{81}\right)^3$;

3) $5^{\frac{2x}{x+1}} > 5$; 4) $6^{\frac{3x-1}{x}} < 36$.

46. 1) $4^{x^2-1} > 64$; 2) $5^{6-3x^2} < \frac{1}{625}$;

3) $27 \cdot 3^{x^2-3x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; 4) $8 \cdot 2^{x^2-4x} > \frac{1}{2}$.

47. 1) $49^{0,5x^2-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; 2) $(0,16)^{0,5x^2-3} > (2,5)^{-3}$;

3) $(0,04)^{3-0,5x^2} > 125$; 4) $9^{0,5x^2-2,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

48. 1) $7^{x^2-2x} > 343$; 2) $6^{3x-x^2} < 36$;

3) $\frac{3^x - 9}{3x^2 + 2} < 0$; 4) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4}}{7 + 2x^2} > 0$.

49. 1) $27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2} < \left(\frac{1}{9}\right)^{-4x}$; 2) $25 \cdot (5)^{-5x^2} > 125^{3x}$;

3) $\sqrt{243} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4x^2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{-3x}$; 4) $\sqrt{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6x^2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$.

50. 1) $36 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^{2x} < 6^{x(x-3)}$; 2) $25 \cdot 0,2^{x(3+x)} > 0,04^{2x}$;

3) $9^x - 10 \cdot 3^x < -9$; 4) $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x > 1$.

51. 1) $11^{\frac{x+3}{x^2-4}} > 1$; 2) $7^{\frac{x^2-25}{x+6}} < 1$;

3) $0{,}08^{\frac{1}{x^2-4}} > 1$; 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x^2-36}{x^2-16}} < 1$.

52. 1) $3 - 8 \cdot 3^{-x} - 3^{1-2x} > 0$; 2) $5 \cdot 4^x + 3 \cdot 10^x - 2 \cdot 25^x < 0$;

3) $3^{2x+1} > 4 - 3^x$; 4) $8^x + 3 \cdot 4^x - 2^{x+2} - 12 > 0$.

53. 1) $5^{\sin x} > \frac{1}{5}$; 2) $7^{\cos x} < \frac{1}{7}$;

3) $4^{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} < \frac{1}{4}$; 4) $6^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} > \left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{2}}$.

54. 1) $7^x - 5^{x+2} > 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$; 2) $5^x - 3^{x+1} > 2 \cdot (5^{x-1} - 3^{x-2})$;

3) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$; 4) $2^{x+1} - 3^x > 3^{x-1} - 2^x$.

Логарифмдік теңсіздіктерді шешіңдер (55—63):

55. 1) $\log_4(5 - 3x) > 1$; 2) $\log_2(6 - 5x) < 1$;

3) $\log_{0,5}(1 + 2x) < -1$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(4x - 3) > -1$.

56. 1) $\log_{\frac{1}{7}}\frac{x-5}{x+4} > 0$; 2) $\log_{0,15}\frac{5-x}{4+x} < 0$;

3) $\log_4\frac{x-3}{x} < 0$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{x}{x+2} < -1$.

57. 1) $\log_{\frac{2}{3}}(3x - 8) < \log_{\frac{2}{3}}(2x - 9)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(7x + 1) > \log_{\frac{1}{3}}(x - 9)$;

3) $\log_5(x^2 - 1) > \log_5 3$; 4) $\log_{11}(x^2 + 7) < \log_{11}(6x - 1)$.

58. 1) $\log_{2,7}(x - 2) + \log_{2,7} x > \log_{2,7}(x + 4)$;

2) $\log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{4}}(x - 6) < \log_{\frac{1}{4}}(3x - 8)$;

3) $\log_2(x - 1) + \log_2 x < 1$;

4) $\log_3 x + \log_3(x - 8) > 2$.

59. 1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(8 - \frac{4}{5}x\right) > -2$; 2) $\log_3(4x - x^2) > 1$;

3) $\log_3\left(3 - \frac{x}{2}\right) > \log_3(2x - 1)$; 4) $\log_{0,8}(x^2 - 8) > \log_{0,8} 8$.

60. 1) $\frac{\lg x}{x-3} > 0$; 2) $\frac{3-2x}{\log_5 x} > 0$;

3) $\frac{\log_4 x}{x-4} < 0$; 4) $\frac{x+1}{\log_2(x-4)} > 0$.

61. 1) $\frac{x^2+3x}{\log_2(x+1)} < 0$; 2) $\log_{12}\frac{x^2+x}{x+4} > 0$;

3) $\frac{2x^2-8}{\log_5 x} > 0$; 4) $\frac{\log_6(x+2)}{x^3} < 0$.

62. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2+3}{x+3} < -1$;

2) $\log_2\frac{x^2-4}{x+10} > 1$;

3) $\log_3 x + \log_3(x - 1) > \log_3 x + 1$;

4) $\log_{0,1}(x-2)+1 \leqslant \log_{0,1}0{,}3-\log_{0,1}x$.

63. 1) $\log_{\frac{1}{4}}\sin 2x \leqslant \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$; 2) $\log_{13}\sin x+\log_{13}\cos x > \log_{13}\frac{1}{4}$;

3) $\log_{0,9}(2\cos 4x) > \log_{0,9}\sqrt{3}$; 4) $\log_{\frac{4}{5}}\operatorname{tg}x \leqslant 0$.

V. Функция

$y=f(x)$ функциясының анықталу облысын табыңдар **(64-65)**:

64. 1) $f(x)=5-\sqrt{x+4}$; 2) $f(x)=8-\sqrt{4-x}$;

3) $f(x)=\sqrt{x}-\log_2(x+1)$; 4) $f(x)=6x+\log_7(x^2-1)$.

65. 1) $f(x)=\log_{0,7}(x^2-5x-6)$; 2) $f(x)=\log_5(x-4)+\log_5 x$;

3) $f(x)=\log_{\frac{1}{6}}(4-x^2)$; 4) $f(x)=\log_7\frac{x+8}{x}+\lg x$.

$y=f(x)$ функциясының мәндер жиынын табыңдар **(66-67)**:

66. 1) $f(x)=2+\sqrt{x}$; 2) $f(x)=-3+\sqrt{x}$;

3) $f(x)=2^x+2$; 4) $f(x)=3+\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

67. 1) $f(x)=5^{x+1}-4$; 2) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3-x)$;

3) $f(x)=\log_2(x-5)$; 4) $f(x)=\log_5(7-x)$.

"Жанды геометрия" бағдарламасын қолданып, $y=f(x)$ функциясының графигін салып, қасиеттерін атаңдар **(68-69)**:

68. 1) $f(x)=\sqrt{x}+1$; 2) $f(x)=3^x+3$;

3) $f(x)=4^{x-1}-1$; 4) $f(x)=|2^{x+2}-5|$.

69. 1) $f(x)=\log_5(x+1)$; 2) $f(x)=3+\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$;

3) $f(x)=\log_6 x-2$; 4) $f(x)=3+\log_2(x+2)$.

$y=f(x)$ функциясының таңбатұрақтылық аралықтарын табыңдар **(70-71)**:

70. 1) $f(x)=\sqrt{x}-1$; 2) $f(x)=3\sqrt{x}$;

3) $f(x)=3^x-3$; 4) $f(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^x+1$.

71. 1) $f(x)=\log_5(x-1)$; 2) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(2+x)$;

3) $f(x)=|\log_4 x|$; 4) $f(x)=|5^x-5|$.

72. $y=f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар:

1) $f(x)=xe^{3x}$; 2) $f(x)=3x\cdot e^x$;

3) $f(x)=x^2e^x$; 4) $f(x)=x\cdot e^{2x}$.

73. $y = f(x)$ функциясының графигін салыңдар:

1) $f(x) = 5\log_5(x^2 - 1)$; 2) $f(x) = \frac{1}{4}^{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}$;

3) $f(x) = 0{,}5^{\log_2(x-5)}$; 4) $f(x) = 9^{\log_3 \frac{1}{x}}$.

74. $y = f(x)$ функциясын зерттеп, графигін салыңдар:

1) $f(x) = 4xe^{0,5x}$; 2) $f(x) = x\ln x$;

3) $f(x) = \ln x - x$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

75. $y = f(x)$ функциясының $[a; b]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $[-1; 0]$; 2) $f(x) = 2^x - 4$, $[-2; 2]$;

3) $f(x) = 3 + \log_5 x$, $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$; 4) $f(x) = \log_4 x - 1$, $\left[\frac{1}{16}; 4\right]$.

$y = f(x)$ функциясы үшін: 1) барлық алғашқы функцияларының жиынын; 2) графигі $K(a; b)$ нүктесі арқылы өтетін алғашқы функциясын табыңдар **(76-77)**:

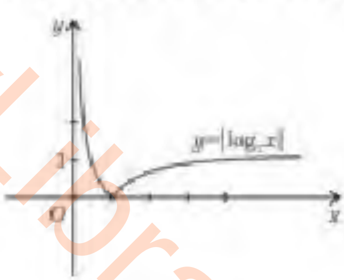
76. 1) $f(x) = \frac{9}{(5-3x)}$, $K(1; 1)$; 2) $f(x) = \frac{6}{\cos^2 3x} + 1$, $K\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $f(x) = 5e^x$, $K\left(-1; \frac{1}{e}\right)$; 4) $f(x) = e^{2x} - 10x$, $K(0; 1)$.

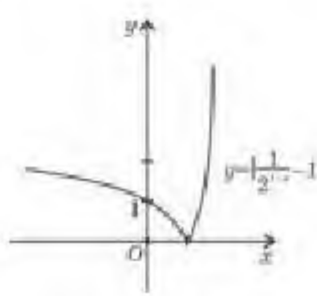
77. 1) $f(x) = 16x^3 + 3x^2$, $K(1; 2)$; 2) $f(x) = \frac{2}{5x^4} + 7x^6$, $K(-1; 1)$;

3) $f(x) = \frac{5}{3\sin^2 x}$, $K\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 4) $f(x) = -\frac{6}{\sqrt{1+3x}}$, $K(5; 0)$.

78. Берілген графиктері бойынша $y = f(x)$ функциясына сипаттама беріңдер (62, 63-суреттер).



62-сурет



63-сурет

Берілген қисықтармен шектелген жазық фигураның ауданын табыңдар **(79—81)**:

79. 1) $y = x^2 - 4x + 7$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

2) $y = x^2 + 6x - 8$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

3) $y = x^2 + 3x, \quad y = 0;$

4) $y = 6x - x^2, \quad y = 0.$

80. 1) $y = x^2 + 3x + 6, \quad y = 6;$ 2) $y = 5x + x^2 + 2, \ y = 2;$

3) $y = 5 + 4x - x^2, \quad y = x + 1;$ 4) $y = 4 - x^2, \ y = x^2 - 2x.$

81. 1) $y = \frac{3}{x}, \ \ y = 1, \ \ x = 1;$ 2) $y = \frac{5}{x}, \ \ x + y = 6;$

3) $y = \frac{2}{x}, \ \ x + y = 3;$ 4) $y = \frac{7}{x}, \ \ y = -1, \ x = -1.$

Теңдеуді графиктік тәсілмен шешіңдер (82-83):

82. 1) $3^x = x - 2;$ 2) $\log_4 x = 2 - x;$

3) $(0,2)^x - x^2 = 0;$ 4) $\log_{\frac{1}{5}} x = x^2 - 1.$

83. 1) $5^x = x^2 + 1;$ 2) $\log_2 x = 2^x;$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{x} + 1;$ 4) $\log_{\frac{1}{6}} x = \sqrt{x} - 1.$

Математикалық сауаттылық бойынша тапсырмалар

84. $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{18}$; $0,4\pi$; $\frac{7\pi}{9}$; $0,75\pi$ шамаларының арасынан ең кішісін көрсетіңдер:

A) $\frac{7\pi}{9}$; B) $\frac{5\pi}{6}$; C) $0,75\pi$; D) $\frac{11\pi}{18}$; E) $0,4\pi$.

85. Толық бұрыштың $\frac{7}{4}$ бөлігі қанша градусқа тең:

A) 540°; B) 720°; C) 560°; D) 630°; E) 580°?

86. Егер $a \# c = a^2 - 2c$ болса, онда $(3 \# 5) \# (3 \# 4)$ өрнегінің мәнін табыңдар:

A) 1; B) -1; C) 2; D) -2; E) -12.

87. 450° қанша радианға тең:

A) $2,5\pi$; B) $5,2\pi$; C) $3,5\pi$; D) 5π; E) 4π?

88. Километрдің $\frac{1}{5}$ бөлігі қанша метрді құрайды:

A) 200 м; B) 500 м; C) 150 м; D) 250 м; E) 750 м?

89. $3,5\pi$ қанша градусты құрайды:

A) 540°; B) 720°; C) 560°; D) 630°; E) 450°?

90. Біртаңбалы сандар үштаңбалы сандарға қарағанда қанша есе кем:

A) 901 есе; B) 100 есе; C) 10 есе; D) 900 есе; E) 899 есе?

91. -9-дан 3-ке дейінгі сандар арасында қанша бүтін сан бар:

A) 13; B) 14; C) 12; D) 15; E) 16?

92. -5-тен 5-ке дейінгі аралыққа тиісті натурал сандар саны осы аралыққа тиісті бүтін сандар санынан қанша кем:

A) 4-ке; B) 6-ға; C) 5-ке; D) 7-ге;
E) натурал және бүтін сандардың саны бірдей?

93.

a	n
c	m

-8	$-0,8$
0,5	6

кестелерін қолданып, $6a + \frac{2}{c} - 5n + 7m - 2$ өрнегінің мәнін табыңдар:

A) 2; B) -2; C) 50; D) -50; E) 0.

94. A, B — әртүрлі цифрлар және $\overline{AB} \cdot \overline{BA} = 2668$ екені белгілі. $A^2 + B^2 + 15$ өрнегінің мәнін табыңдар:

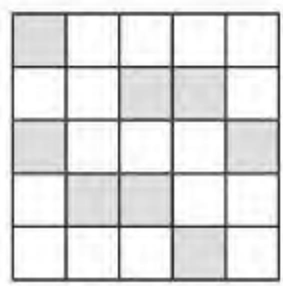
A) 90; B) 95; C) 100; D) 110; E) 121.

95. a саны 28 000 санының 20%-ына тең. c саны 6000 санының 60%-ына тең. Ақиқат тұжырымды көрсетіңдер:

A) $a + c = 2400$; D) $2a + c = 2400$;
B) $a - c = 2000$; E) $c - a = 2400$.
C) $a - c = 0$;

96. Фигураның боялған бөлігі фигураның қанша пайызын құрайды (64-сурет):

A) 35%; B) 40%; C) 32%;
D) 36%; E) 45%?



64-сурет

97. Тік параллелепипед пішінді ыдыста 60 дм^3 су бар. Ыдыстан 6 дм^3 су құйып алынғанда, қалған судың көлемі судың алғашқы көлемінің қанша пайызын құрайды:

A) 80%; B) 85%; C) 5%; D) 10%; E) 90%?

98. Кестеде оқушылардың 200 м-ге жүгіру нәтижелері берілген.

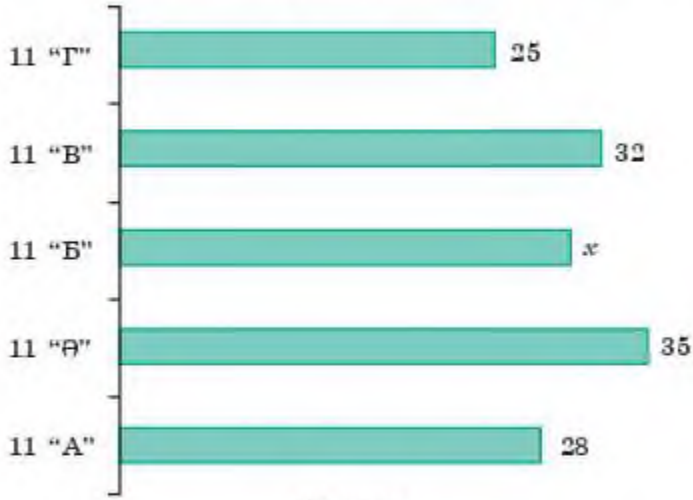
31-*кесте*

Жүгіру нәтижелерінің интервалы (секундпен)	30—32	33-34	35-36
Нәтижелерді көрсеткен оқушылар саны	9	12	15

33-тен 36-ға дейінгі нәтижелерді көрсеткен оқушылар саны жалпы оқушылар санының қанша пайызын құрайды:

A) 65%; B) 75%; C) 80%; D) 70%; E) 60%?

99. 11-сынып оқушыларының саны 65-суретте көрсетілген.



65-сурет

1) Егер 11 "Б" сыныбы оқушыларының саны 11 "Ә" және 11 "Г" сыныптарының оқушылары сандарының қосындысының 50%-ына тең болса, онда барлық оқушылардың санын табыңдар (3-сурет):

A) 155; B) 160; C) 150; D) 165; E) 170.

2) Егер 11 "Б" сынып оқушыларының саны барлық оқушылар санының бестен бір бөлігіне тең болса, онда барлық оқушылар санын табыңдар:

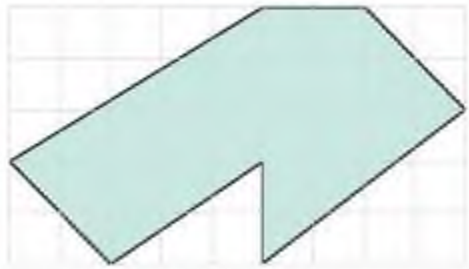
A) 170; B) 150; C) 160; D) 165; E) 155.

100. 66-суретте бір апта бойы дүкенге келген сатып алушылар саны келтірілген. Бір күндегі сатып алушылардың орташа санын табыңдар:

66-сурет

A) 130; B) 110; C) 125; D) 120; E) 115.

101. Фигура тең шаршыларға бөлінген (67-сурет).



67-сурет

1) Боялған бөліктің ауданы фигураның ауданынан қанша кем:

A) 22; B) 24; C) 26; D) 28; E) 25?

2)Боялмаған бөлігінің ауданы фигураның боялған бөлігінің ауданынан қанша кем:

A) 2 кв. бірл.; B) 4 кв. бірл.; C) 6 кв. бірл.;

D) 8 кв. бірл.; E) 5 кв. бірл.?

102. Тауардың бағасы 15 600 тг. Баға алдымен 20%-ға төмендеді, сосын 10%-ға көтерілді. Нәтижесінде тауардың бағасы қалай өзгерді:

A) 2018 тг-ге арзандады; B) 2018 тг-ге қымбаттады;
C) 1872 тг-ге арзандады; D) 1872 тг-ге қымбаттады;
E) бағалар өзгерген жоқ?

ГЛОССАРИЙ

Анықталған интеграл	$\int_a^b f(x)dx$ өрнегі a-дан b-ға дейінгі $f(x)$ функциясының *анықталған интегралы* деп аталады
Анықталмаған интеграл	$f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жалпы түрін, яғни $F(x) + C$ өрнегін осы функцияның *анықталмаған интегралы* деп аталады
Алғашқы функция	Кез келген X жиынында өзгеретін x үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда берілген жиында $f(x)$ функциясы үшін $F(x)$ функциясы *алғашқы функция* деп аталады
Бас жиынтық	*Бас жиынтық* деп зерттеуге жататын барлық объектілердің немесе бір объектіге бірдей жағдайларда жүргізілетін барлық бақылаулардың мүмкін болатын нәтижелерінің жиынтығын айтады
Дәрежелік функция	$y = x^r$ түрінде берілген функция *дәрежелік функция* деп аталады. Мұндағы x — тәуелсіз айнымалы, r — кез келген рационал сан
Дененің көлемін табу формуласы	$V = \pi\int_a^b y^2\,dx$ — дененің көлемін табу формуласы
Дискретті вариациялық қатар	*Дискретті вариациялық қатар* деп сәйкес келетін жиіліктері немесе бөлінділері бойынша варианталардың бөліну жиынтығын айтады
e саны	$e = 2{,}7182818289...$
Интегралдау	Функцияның белгілі туындысы бойынша алғашқы функциясын табу *интегралдау* деп аталады
Иррационал теңдеу	Айнымалысы түбір таңбасының ішінде немесе бөлшек көрсеткішті дәреженің негізінде берілген теңдеулер *иррационал теңдеулер* деп аталады
Интервалды вариациялық қатар	*Интервалды вариациялық қатар* деп жиіліктерімен немесе олардың әрқайсысына шама мәндерінің түсу жиіліктерімен түрленудің реттелген интервалдарының жиынтығын айтады
Қисықсызықты трапеция	Жоғарыдан үзіліссіз, теріс емес $y = f(x)$ функциясының графигімен, ал төменгі жағынан Ox осімен, бүйір жақтарынан $x = a$, $x = b$ кесінділерімен шектелген жазық фигураны *қисықсызықты трапеция* деп атайды
Көрсеткіштік теңдеу	$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a \neq 1,\ a > 0)$ түрінде берілген немесе осы түрге келетін теңдеуді *көрсеткіштік теңдеу* деп атайды
Көрсеткіштік теңсіздік	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $(a^{f(x)} > a^{g(x)},\ a^{f(x)} < a^{g(x)},\ a^{f(x)} < a^{g(x)})$, $a \neq 1$, $a > 0$, түрінде берілген немесе осы түрге келетін теңдеуді *көрсеткіштік теңсіздік* деп атайды
Көрсеткіштік функция	$y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$ формуласы арқылы берілген функцияны *көрсеткіштік функция* деп атайды
Санның логарифмі	Негізі a болатын оң b *санының логарифмі* деп b санына тең болатын негіздің дәреже көрсеткішін айтады

Логарифмдік теңдеу	$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a \neq 1,\ a > 0,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0)$ түрінде берілген немесе осы түрге келетін теңдеуді *көрсеткіштік теңдеу* деп атайды
Логарифмдік теңсіздік	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $(\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x))$ $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ түрінде берілген немесе осы түрге келетін теңсіздікті *логарифмдік теңсіздік* деп атайды
Логарифмдік функция	$y = \log_a x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$ формуласы арқылы берілген функцияны *логарифмдік функция* деп атайды
Натурал логарифм	Негізі e болатын санның логарифмі натурал логарифм деп аталады
Ньютон-Лейбниц формуласы	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
n-ші дәрежелі арифметикалық түбір	Теріс емес a санының n-ші дәрежелі арифметикалық түбірі деп n-ші дәрежесі a-ға тең болатын теріс емес b санын айтады
n-ші дәрежелі түбір	a санының n-ші *дәрежелі түбірі* деп n-ші дәрежесі a санына тең болатын b санын айтады
Ондық логарифм	Негізі 10 саны болатын логарифмді *ондық логарифм* деп атайды
Рационал көрсеткішті дәреже	$a > 0$ санының $\frac{m}{n}$ (мұндағы $\frac{m}{n}$ — қысқартылмайтын бөлшек) *рационал көрсеткішті дәрежесі* деп a^m санынан алынған n-ші дәрежелі түбірдің мәнін айтады
Таңдама	*Таңдама жиынтық* немесе *таңдау* деп объектілер жиынтығын немесе бас жиыннан кездейсоқ түрде іріктелген объектіні бақылау нәтижелерін айтады
Таңдама көлемі	Таңдамадағы объектілер немесе бақылаулар саны *таңдама көлемі* деп аталады

ЖАУАПТАРЫ

10-сыныптағы алгебра және анализ бастамалары курсын қайталауға арналған жаттығулар

3. 1) $0,25\pi$; 2) 14π; 3) 8π; 4) 2π. **4.** 1) $\pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $\pm(\pi - \arccos 0,1) + 2\pi k,\ k \in Z$. **5.** 5) $\operatorname{arctg}3 + \pi k,\ k \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. 6) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. **6.** 4) $[\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n],\ n \in Z$; 5) $\left[\frac{5\pi}{36} + \frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right],\ n \in Z$. **7.** 1) $[-4;\ 0) \cup (0;\ 1]$. **8.** 1) $f(g(x)) = \sin^3 x - 1$; 6) $g(q(f(x))) = \sin\sqrt{x^3}$. **9.** 5) $27\cos(4 - 3x)\sin(8 - 6x)$. 8) $-\frac{5}{\cos 10x} + \frac{(20 - 50x)\operatorname{tg}10x}{\cos 10x}$. **10.** 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **11.** 1) $y = 13x - 16$. **12.** 1) -9; 4; 2) $(-6;\ 2)$. **14.** 2) $(-\infty;\ 0)$ және $(0;\ +\infty)$ — кемиді; $[\frac{1}{20};\ +\infty)$ — өседі; $x_{min} = \frac{1}{20}$. **15.** 1) $(-\infty;\ -\frac{3}{10}]$ — кемиді; $[-\frac{3}{10};\ +\infty)$ — өседі; $y_{min} = -\frac{3}{10} = -2,45$.

I тарау

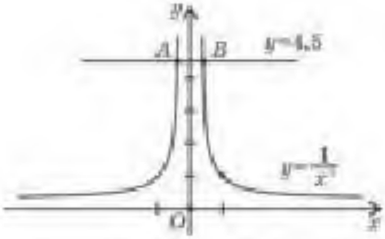
1.5. 3) $x^3 + x^2 - x + C$; 4) $2x - 2x^2 - x^3 + C$. **1.6.** 3) $\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{12} + C$; 4) $-\frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{15}}{14} + C$. **1.7.** 2) $-5\cos x + 6\sin x + C$; 4) $-3\operatorname{ctg}x - x^9 + C$. **1.10.** 2) $2x + 2x^2 + 1$; 3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$. **1.11.** 2) $-\frac{2}{3}\sqrt{1 - 3x} + \frac{4}{3}$; 4) $-2\operatorname{ctg}x + 5$. **1.19.** 1) $\frac{1}{8}(2x + 3)^4 + C$; 3) $-\frac{1}{3}\cos(3x - 4) + C$. **1.20.** 3) $x + 25\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6}\right) + C$; 4) $x + 36\operatorname{tg}\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{5}\right) + C$. **1.21.** 2) $\sqrt{x - 5} + 3\sin\left(2 + \frac{x}{3}\right) + C$; 4) $\frac{8}{15}\sqrt{2 + 3x} - \frac{1}{3(2 - x)^3} + C$. **1.22.** 1) $\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3} + C$; 3) $x + \frac{1}{3}x^3 + C$. **1.23.** 2) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{9} - \frac{x}{4}\right) + C$; 4) $-5\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + C$. **1.24.** 1) $-\frac{1}{2x + 5} + \frac{3}{2}$; 2) $-\frac{1}{\left(\frac{x}{2} + 3\right)^2} + 4$. **1.25.** 1) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$. **2.1.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$. **2.2.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{3}{2}$. **2.3.** 1) $\frac{27}{4}$; 2) $\frac{27}{4}$. **2.4.** 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{16}{3}$; 4) $\frac{3(2 + \sqrt{2})}{2}$. **2.5.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$. **2.6.** 1) 13; 2) $\frac{13}{6}$. **2.7.** 1) $2\sqrt{2}$; 2) 1. **2.8.** 1) $2\sqrt{2} - 1$; 2) 2. **2.9.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$. **2.10.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$. **3.1.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 1; 3) $\frac{7}{24}$; 4) $\frac{1}{2}$. **3.2.** 1) 2; 2) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$; 3) 1; 4) 6. **3.3.** 1) -15; 2) 2; 3) $\frac{26}{15}$; 4) $-\frac{15}{8}$. **3.4.** 1) 4; 2) $\frac{7}{2}$; 3) $\frac{57}{4}$; 4) 58. **3.5.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{20}{3}$; 3) $\frac{6}{5}$; 4) $\frac{7}{6}$. **3.6.** 1) $1 + \frac{\pi}{2}$; 2) $1 + \frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi - 10\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{4} - 2\sqrt{2} + 4$. **3.7.** 1) 3; 2) 2; 3) -8; 4) 136. **3.8.** 1) $\frac{5\sqrt{2} - 6}{2}$; 2) $\frac{3(1 - \sqrt{3})}{2}$; 3) $2\sqrt{2} + 2$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 - \sqrt{2}$. **3.9.** 1) $\frac{-2 + \sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3} - 2}{2}$; 3) -4; 4) 6. **3.10.** 1) 21; 2) 20; 3) 33; 4) 36. **3.13.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) -1. **3.14.** 1) 30; 2) $\frac{74}{3}$; 3) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{244}{3}$. **3.15.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{75}{64}$. **3.16.** 1) $\frac{2 + \pi}{4}$; 2) $\frac{\pi - 2}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{64}$. **3.17.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{131}{12}$; 3) $\frac{40}{3}$; 4) $\frac{32}{3}$. **3.18.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **3.19.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 4; 4) $\frac{3}{2}$. **3.20.** 1) 1; 4; 2) 2; 6. **3.21.** 1) 1; 4; 2) 2; 3. **3.22.** 1) $\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; 2) $(0;\ 1)$. **3.23.** 1) $(-\infty;\ -0,8)$; 2) $(-1;\ 2)$. **4.1.** 1) $\frac{1}{6}$ кв. бірл; 2) $\frac{3}{4}$ кв. бірл. **4.2.** 1) $\frac{4}{3}$ кв. бірл; 2) $\frac{1}{4}$ кв. бірл.; 3) $\frac{32}{3}$ кв. бірл; 4) $\frac{4}{3}$ кв. бірл.

4.3. 1) $\frac{4}{3}$ кв. бірл; 2) 2 кв. бірл; 3) $\frac{9}{2}$ кв. бірл; 4) $\frac{1}{3}$ кв. бірл. **4.4.** 1) 4 кв. бірл; 2) 4 кв. бірл. **4.8.** 1) $\sqrt{2}-1$ кв. бірл; 2) $2(\sqrt{2}-1)$ кв. бірл.; 3) 1 кв. бірл; 4) $\frac{5}{4}$ кв. бірл. **4.9.** 1) 8 кв. бірл; 2) $\frac{7}{96}$ кв. бірл. **4.10.** 1) $\frac{9}{2}$ кв. бірл; 2) 4,5 кв. бірл.

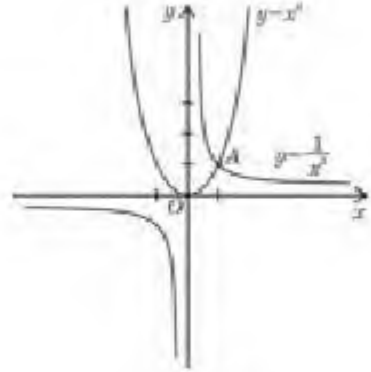
II тарау

5.3. 1) -2; 2) 3; 3) -4; 4) -6. **5.4.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) $\frac{4}{3}$. **5.5.** 1) -2; 2) $\pm\sqrt[6]{7}$; 3) $\sqrt[3]{4}$; 4) ± 2. **5.6.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) -10; 3) -2; 4) ± 2. **5.7.** 1) 13; 2) -729; 3) 7; 4) 2. **5.8.** 1) 15; 2) 6; 3) 6; 4) 0,3. **5.9.** 1) 10; 2) 6; 3) 6; 4) 15. **5.10.** 1) 2; 2) -2; 3) 3; 4) -5. **5.11.** 1) 2; 2) 2; 3) -3; 4) 2. **5.12.** 1) $2xy^2\sqrt[6]{x^5y}$; 2) $4x^2y^2\sqrt[4]{y}$; 3) $3x^4y^4\sqrt[3]{2y}$; 4) $2xy\sqrt[4]{xy^3}$. **5.13.** 1) $\sqrt[3]{4x^6y^3}$; 2) $\sqrt[5]{3xy^{13}}$; 3) $\sqrt[4]{8x^8y^{12}}$; 4) $\sqrt[3]{-5x^3y^6}$. **5.14.** 1) x және $-x$; 2) x; 3) x; 4) x. **5.15.** 1) $2a$; 2) 0; 3) $3b$; 4) 0. **5.16.** 1) -27; 2) 20; 3) 6; 4) 12. **6.1.** $\sqrt[5]{3^9}$; 2) $\sqrt[5]{2^8}$; 3) $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3}$; 4) $\sqrt[5]{7^6}$. **6.2.** 1) $x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $(3y)^{\frac{1}{7}}$; 3) $x^{-\frac{2}{3}}$; 4) $5^{\frac{3}{8}}$. **6.3.** 1) 9; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 128; 4) $\frac{9}{625}$. **6.4.** 1) $\frac{27}{2}$; 2) 20; 3) $\frac{27}{128}$; 4) $\frac{18}{25}$. **6.5.** 1) $b^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{2}}-1\right)$; 3) $3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}}+1\right)$; 4) $x^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)$. **6.6.** 1) $\left(a^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(b^{\frac{1}{3}}-1\right)$; 4) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$. **6.7.** 4) $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$.

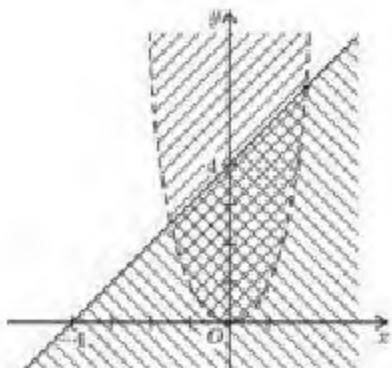
6.8. 1) $\frac{a^{\frac{1}{4}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$; 2) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{4}}$. **6.9.** 1) $4\sqrt[3]{5}$; 2) 4; 3) -21; 4) $\frac{1}{6}$. **6.10.** 1) $\left(\frac{ax^5}{64}\right)^{\frac{1}{7}}$; 2) $a^{\frac{29}{12}}$; 3) $b^{\frac{11}{9}}$; 4) $x^{\frac{1}{9}}$. **6.11.** 2) $\sqrt[12]{\frac{a^9}{b^8}}$; 3) $3\sqrt[5]{\frac{1}{b^4}}$. **6.12.** 1) $[-1; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $[3; +\infty)$. **6.13.** 1) $a^{\frac{1}{2}}$; 3) $ab+b^2-1$; 4) $(a-b)^2$. **6.14.** 1) -1; 2) 1; 3) 3; 4) $\frac{1}{5}$. **6.15.** 1) $-6{,}5$; 2) $-\frac{6}{115}$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) 3. **6.16.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$; 2) $1-a$. **7.1.** 1) 7; 2) 3; 3) 2; 4) 4. **7.2.** 1) $51\sqrt{2}$; 2) $8\sqrt{15}-30$; 3) $17\sqrt{2}-24$; 4) 2. **7.3.** 1) 3; 2) 2; 3) 3; 4) 4. **7.4.** 1) 7; 2) -2; 3) -1; 4) $-\frac{11}{3}$. **7.5.** 1) $1+\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\frac{2\left(x-\sqrt{a}\right)}{x^2-a}$; 4) $\frac{3\left(x+\sqrt{a}\right)}{x^2-a}$; 5) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$; 7) $\sqrt{8}+\sqrt{5}$; 8) $\frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$. **7.6.** 2) $2x^{\frac{1}{2}}-1$; 4) $x-1$. **7.7.** 1) $p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{8}}$; 2) $p+q$; 3) 0; 4) $a^{\frac{1}{3}}$. **7.8.** 1) $-\frac{\sqrt{6}-4}{10}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}+3}{10}$; 3) $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 5) $4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$; 6) $9-3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}$; 7) $\left(1+\sqrt{b}\right)\sqrt{1-\sqrt{b}}$; 8) $\left(1-\sqrt{a}\right)\sqrt{1+\sqrt{a}}$. **7.9.** 1) $\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; 2) $2b$. **8.5.** 1) $[-5; +\infty)$; 2) $(3{,}5; +\infty)$; 3) $[-2; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{7}; +\infty\right)$. **8.8.** 1) 68-сурет; 3) 69-сурет. **8.9.** 1) 70-сурет; 4) 71-сурет. **9.3.** $y=-27x+4$; 2) $y=0{,}5x+1{,}5$; 3) $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$; 4) $y=-x+5$. **9.4.** 3) $f(-8)=4$; $f(-1)=1$; 4) $f(1)=1$; $f(16)=2$. **9.6.** 1) $\frac{9}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{304}{3}$; 4) 315. **9.7.** 1) 2 кв. бірл; 2) $\frac{31}{160}$ кв. бірл; 3) $\frac{9}{2}$ кв. бірл; 4) $\frac{7}{24}$ кв. бірл. **9.9.** 1) $y=-\frac{16}{3}x+\frac{8}{3}$; 2) $y=\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$; 3) $y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$; 4) $y=5x+1$. **9.10.** 3) $f(8)=\frac{1}{4}$; $f(27)=\frac{1}{9}$; 4) $f(1)=1$; $f(16)=\frac{1}{2}$. **9.12.** 1) 3; 2) 4,5. **9.13.** 1) $\frac{20}{3}$; 2) 15. **9.14.** 1) $\frac{5}{6}$ кв. бірл; 2) $\frac{10}{3}$ кв. бірл; 3) $\frac{81}{32}$ кв. бірл; 4) $\frac{57}{4}$ кв. бірл.



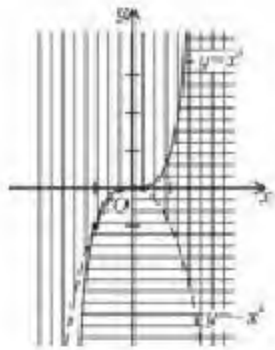
68-сурет



69-сурет



70-сурет



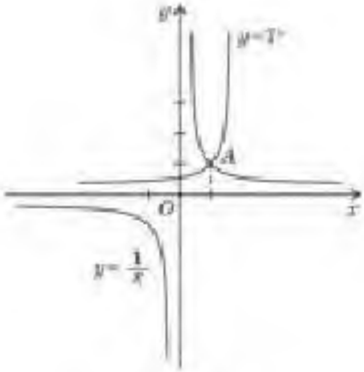
71-сурет

III тарау

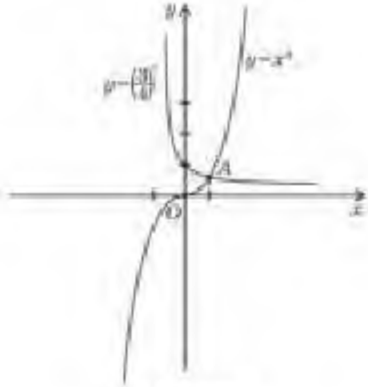
11.1. 1) 14; 2) ±8; 3) ±2; 4) 3. **11.2.** 1) 2; 2) 1; 3; 3) 1; 0; 4) 1. **11.3.** 1) 1; 2) −1; 3) 0; 2; 4) 0; −1; 4. **11.4.** 1) 0; 2) 2; 3) −3; 4) 0. **11.5.** 1) 1; 5; 2) 3; 4) 4. **11.6.** 1) $-\frac{5}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 7; 8; 4) 1. **11.7.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **11.8.** 2) 0; 1; 3) 1; 4) $-\frac{4}{3}$. **11.9.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) 0; −8; 4) 0.

IV тарау

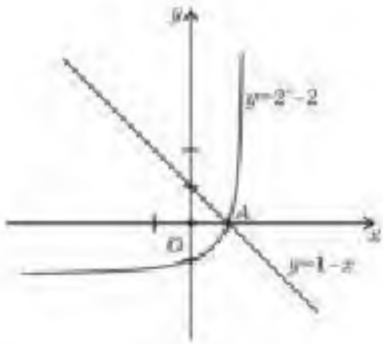
12.4. 1) $(3; +\infty)$; 2) $(-2; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $(-4; +\infty)$. **12.7.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) 5; 3) 1; 4) 6. **12.8.** 1) 1; 2) a^7; 3) b; 4) $b^{1,4}$. **12.9.** 3) 72-сурет; 4) 73-сурет. **12.11.** 4) $(-\infty; 1)$. **12.12.** 4) $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{3,3} > \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{-3,1}$, өйткені $5 + 2\sqrt{6} > 1$. **12.13.** 1) 3; $\frac{1}{3}$; 2) 2; $\frac{1}{2}$; 3) 64; $\frac{1}{64}$. **12.14.** 1) 5; 2) 243; 3) 16; 4) 64. **12.15.** 3) 74-сурет; 4) 75-сурет. **13.1.** 3) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$. **13.2.** 2) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$. **13.3.** 4) $\log_{125} \frac{1}{25} = -\frac{2}{3}$. **13.8.** 3) $\log_7 7 = 1$; $\log_7 \frac{1}{7} = -1$; $\log_7 49 = 2$. **13.9.** 2) $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$; $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$; $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625} = 4$. **13.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 2. **13.11.** 1) 11; 2) 13; 3) −3; 4) 50. **13.12.** 1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) −2. **13.13.** 1) 8; 2) $\frac{1}{2}$; 3) −32; 4) 16.



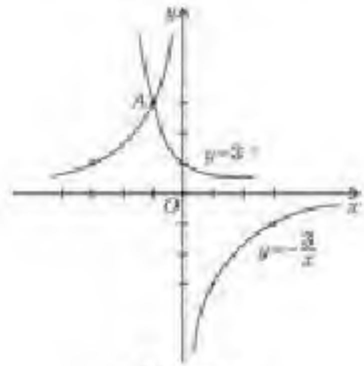
72-сурет



73-сурет



74-сурет



75-сурет

13.14. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{32}$; 3) 9; 4) 64; 5) $\frac{1}{64}$; 6) 1; 7) $\frac{1}{7}$; 8) 8. **13.15.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 1. **13.16.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) -21; 4) 1. **13.17.** 1) $-\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $36\frac{1}{4}$. **13.18.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 3; 4) 6. **13.19.** 2) $3 = \log_3 27$; $-1 = \log_3 \frac{1}{3}$; $-3 = \log_3 \frac{1}{27}$; $1 = \log_3 3$. **13.20.** 4) $-3 + \frac{2}{3}\lg a - \frac{1}{2}\lg c - 3\lg b$; 8) $\frac{4}{7}\lg c - 7 - \frac{3}{2}\lg a - 9\lg b$. **14.1.** 2) $(-\infty;\ 3{,}5)$; 3) $(-\infty;\ 1{,}6)$; 4) $(-\infty;\ -7) \cup (7;\ +\infty)$. **14.2.** 1) $(-1;\ 7)$; 2) $(-\infty;\ -8) \cup (3{,}5;\ +\infty)$; 3) $(-5;\ 4)$; 4) $(-\infty;\ -4) \cup (3;\ +\infty)$. **14.7.** 1) $(-3;\ -2) \cup (2;\ 3)$; 2) $(1;\ +\infty)$; 3) $(1;\ +\infty)$; 4) $(0;\ 2) \cup (6;\ +\infty)$. **14.8.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $[0;\ +\infty)$; 4) $[6;\ +\infty)$. **14.11.** 1) 0; 2; 2) -2; 1; 3) 0; 1; 4) 2; 4. **15.1.** 4) $-5e^{-x}$. **15.2.** 4) $5e^x(\cos x - \sin x)$. **15.3.** 1) $\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x$. **15.4.** 3) $\frac{7 \cdot 4^x}{\ln 4} + C$. **15.5.** 4) $\frac{2}{9\ln 3}$. **15.6.** 2) $\frac{124}{\ln 5}$ кв. бірл. **15.7.** 4) $2x \cdot 3^{x^2}\ln 3 \cdot \ln x + \frac{3^{x^2}}{x}$. **15.8.** 2) $\frac{1}{\sqrt{x}\ln 2} \cdot \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right)$. **15.9.** 2) $(-\infty;\ 1]$ — кемиді; $[1;\ +\infty)$ — өседі. **15.11.** $y = \frac{x}{e} + \frac{2}{e}$. **15.15.** 2) $\frac{252}{\ln 4} - 12$ кв. бірл.

V тарау

16.1. 1) 4; 2) 10; 3) 6; 4) -3. **16.2.** 1) 3; 2) 6; 3) 6; 4) 2,4. **16.3.** 1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) 3. **16.4.** 1) ± 2; 2) 1; 3) -4; 3; 4) 3. **16.5.** 1) $2\frac{1}{3}$; 2) -2; 1; 3) 4; 5; 4) -2; 4. **16.6.** 1) 0; $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3; 3) $-2{,}5$; 3; 4) $-3{,}5$; 2. **16.8.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (1; 2), (2; 1); 3) (2; 1,5);

4) (−5; −6). **16.9.** 1) (3; −1); 2) (0; −0,5). **16.10.** 1) 1; 5; 2) −2; 5; 3) −3,5; 2; 4) 1; 2,5. **16.11.** 1) 66; 2) 1; 3) 0; 4) 1,5. **16.12.** 1) 5; 2) 1,5; 3) $\pm\sqrt{3}$; 4) 0. **16.13.** 1) 3; $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 2) ±4; 3) 0; 4) ±1. **16.14.** 1) 1;2; 2) 10; 3) 4; 4) 1; 0. **16.15.** 1) (1; 2); 2) (1; 4), $\left(-\frac{7}{6}; \frac{21}{2}\right)$. **16.16.** 1) (2; 3); 2) (1; 2). **17.1.** 1) 49; 2) $\frac{8}{27}$; 3) $\frac{1}{125}$; 4) $\frac{49}{16}$. **17.2.** 1) 12; 2) 0,5; 3) 0,01; 4) *e*. **17.3.** 1) −2; 4; 2) −5; 1; 3) 1; 4) 2; 5. **17.4.** 1) −1; 2) 5,5; 3) 10; 4) 4. **17.5.** 1) 2; 3; 2) 6; 3) $\frac{19}{6}$; 4) $\frac{32}{15}$. **17.6.** 1) (9; 1); 4) (10; 10). **17.7.** 1) 9; 2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 3) 5; 4) 3; 5. **17.8.** 1) 3; $3+\sqrt{2}$; 2) 1; 2; 3) −10; 4) 29. **17.9.** 1) 1001; $\sqrt[3]{10}+1$; 2) 100; 1000; 3) 10; $\frac{1}{10000\sqrt{10}}$; 4) 1000; 0,1. **17.10.** 1) 2; $\frac{1}{128}$; 2) 2; $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 3) 10; 100; 4) 0,1; $\sqrt[4]{10}$. **17.11.** 1) 2; 2) 2; 3) 4; 4) −1000. **17.12.** 1) (2; 4); 2) (1; 1); 3) (14; 26); 4) (3; 5). **17.13.** 1) (150; 50); 2) (2; 1); 3) (1; 1); 4) (1; 1). **18.1.** 1) [5; +∞); 2) (2; +∞); 3) (−∞; 6]; 4) (−∞; 0). **18.2.** 1) (−2; +∞); 2) (−∞; 1); 3) $\left[-\frac{10}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left[\frac{3}{11}; +\infty\right)$. **18.3.** 1) $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$; 2) (−∞; −1]; 3) (−1; +∞); 4) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **18.4.** 1) (−∞; 2]; 2)[−1; +∞); 3) (−∞; 3]; 4) (4; +∞). **18.5.** 1) (2; +∞); 2) [4; +∞); 3) (−∞; 5); 4) (−∞; 4]. **18.6.** 1) (0; 1); 2) (0; 2); 3) (1; +∞); 4) (−∞; 0)∪(1; +∞). **18.7.** 1) (−∞; −1); 2) (0; +∞); 3) [2; +∞); 4) [−2; 2]. **18.8.** (2; 5]; 2) (−0,75; +∞); 3) (−∞; −2] ∪ [2; +∞); 4) (−∞; −3] ∪ $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **18.9.** 1) (−∞; −3) ∪ (2; +∞); 2) (0; 1); 3) [2; 3]; 4) (1; 2). **18.10.** 1) [1; +∞); 2) (−∞; 1]; 3) (1; +∞); 4) (−1; 1). **18.11.** 1) [1; +∞); 2) [0; 1]; 3) (2; +∞); 4) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$. **18.12.** 1) (−2; 1); 2) (−∞; 0)∪[1; +∞); 3) [0; 1]; 4) (−1; 0). **18.13.** 1) (0; +∞); 2) [1; +∞); 3) (−∞; 3); 4) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. **18.14.** 1) (2; 8]; 2) [1; 2); 3) [3; +∞); 4) (2,5; 3]. **19.1.** 1) (16; +∞); 2) (8; +∞); 3) (0; 0,01); 4) (0; *e*]. **19.2.** 1) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$; 2) [0; 1,5); 3) (−0,2; +∞); 4) (2; 7). **19.3.** 1) (1; +∞); 2) $\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{5}\right]$; 3) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 4) $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$. **19.4.** 1) (2,5; 6); 2) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; 3) (0; 0,6]; 4) (2; +∞). **19.5.** 1) (−4; −3) ∪ (2; +∞); 2) (2; 3); 3) (2; 7) ∪ (22; 27). 4) (4; +∞). **19.6.** 1) (5; 18); 2) (9; +∞). **19.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$; 2) (1; 3); 3) (0; 0,001) ∪ (10; +∞); 4) $\left[\frac{1}{8}; 4\right]$. **19.9.** 1) (2; +∞); 3) $\left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$; 4) 0. **19.10.** 1) (−∞; −2)∪(2; +∞); 2) $(-\infty; -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; +\infty)$; 3) [−4; −1); 4) $\left(-\frac{17}{11}; 3\right)$. **19.11.** 1) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$; 2) (−2; −1) ∪ (0; 1); 3) [1,5; 2). **19.13.** 1) [5; +∞); 2) (3; 7].

VI тарау

20.1. Таңдама көлемі — 20; варианталар — 2; 3; 5; 6.

32-кесте

Вариантасы	2	3	5	6
Абсолют жиілік	4	6	4	6
Салыстырмалы жиілік	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

20.2. Таңдама көлемі — 20; варианталар — 4; 8; 9; 10.

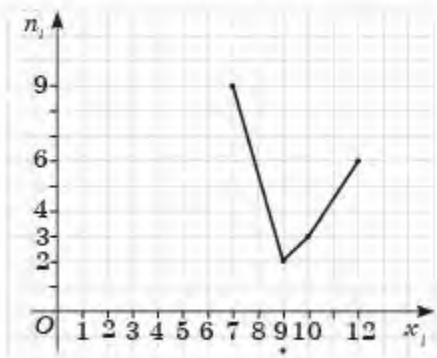
Вариантасы	4	8	9	10
Абсолют жиілік	5	7	4	4
Салыстырмалы жиілік	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
Салыстырмалы жиілік (%-бен)	25%	35%	20%	20%

20.3. Таңдама көлемі — 30.

34-*кесте*

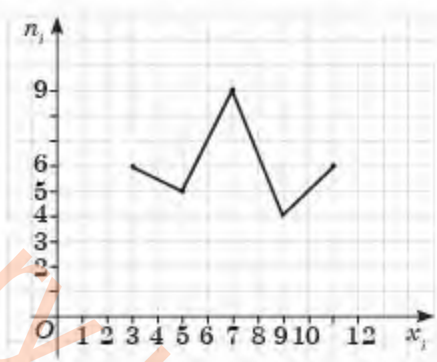
Вариантасы	2	3	4	5
Жиілігі	1	12	11	6
Салыстырмалы жиілік	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{5}$

20.4. 1) Таңдама көлемі — 20. Жиіліктер полигоны — 76-сурет.



76-сурет

3) Таңдама көлемі — 30. Жиіліктер полигоны — 77-сурет.



77-сурет

20.5. 1) Таңдама көлемі — 20.

35-*кесте*

Вариантасы	154	155	156	157	158	159	160
Жиілігі	2	2	5	2	4	4	1
Салыстырмалы жиілік	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$
Салыстырмалы жиілік (%-бен)	10%	10%	25%	10%	20%	20%	5%

20.6. 1) Таңдама көлемі — 15.

36-*кесте*

Вариантасы	45	48	49	50
Жиілік	4	4	3	4
Салыстырмалы жиілік	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$
Салыстырмалы жиілік (%-бен)	≈0,27%	≈0,27%	20%	≈0,27%

21.1.

37-*кесте*

Жұмысшылар разряды	3	4	5	6
Жұмысшылар саны	4	6	5	5

21.2. Таңдама көлемі — 40; мода — 3.

38-*кесте*

Саны	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Оқушы саны	2	5	2	8	3	7	4	4	1	4

21.3. Таңдама көлемі — 30; мода — 13.

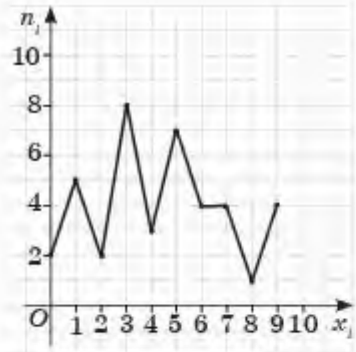
39-*кесте*

Екі орынды сан	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Қысқасы	1	2	2	6	2	5	4	3	1	4

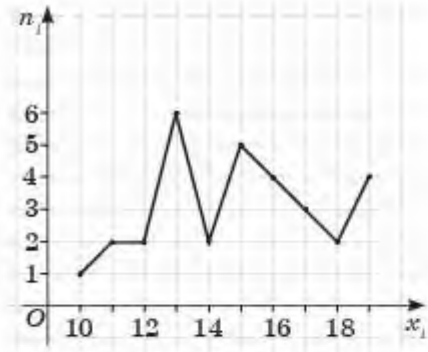
21.4. Орташа мәні — 4,4.

21.5. Орташа мәні — ≈14,7.

21.6. 1) Жиіліктер полигоны — 78-сурет.



78-сурет



79-сурет

2) Жиіліктер полигоны — 79-сурет.

21.7.

40-*кесте*

Массасы	35—38	39—42	43—46	47—50	51—54
Оқушы саны	6	5	4	3	2

I интервал: 35 + 37 + 36 + 38 + 35 + 36 = 217;

II интервал: 39 + 40 + 40 + 42 + 39 = 200;

III интервал: 44 + 44 + 46 + 46 = 180;

IV интервал: 50 + 48 + 50 = 148;

V интервал: 54 + 52 = 106.

21.8. 25 – (7 + 4 + 8) = 6. Мәні (*) – 6.

41-*кесте*

Бағасы	[500–800)	[800–1100)	[1100–1400)	[1400–1700]
Түрлер саны	7	4	6	8
Салыстырмалы жиілік	$\frac{7}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{8}{25}$
Салыстырмалы жиілік (% -бен)	28%	16%	24%	32%

22.1. Таңдама көлемі — 27.

42-*кесте*

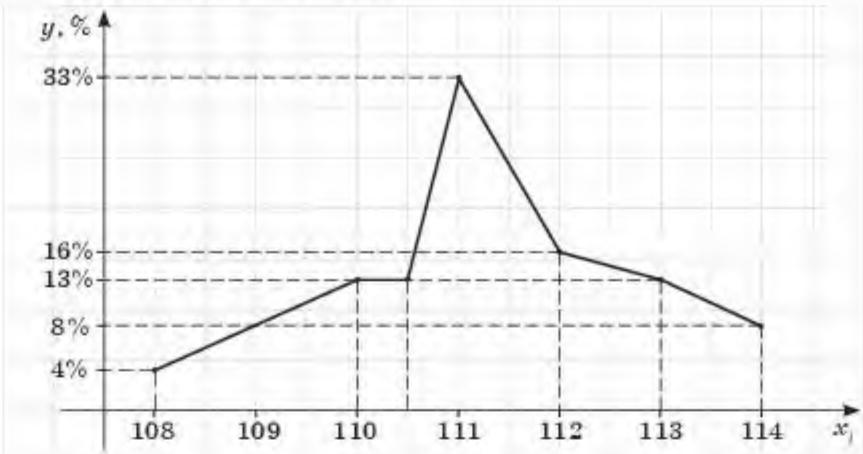
Вариантасы	108	109	110	111	112	113	114
Жиілік	1	3	3	8	4	3	2
Салыстырмалы жиілігі	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Салыстырмалы жиілік (% -бен)	≈4%	≈13%	≈13%	≈33%	≈16%	≈6%	8%

22.2. 1) Модасы — 111. Медианасы — 8.

Математикалық күтім:

$$\overline{X} = \frac{1}{24}(108 + 3 \cdot 109 + 3 \cdot 110 + 8 \cdot 111 + 4 \cdot 112 + 3 \cdot 113 + 2 \cdot 114) \approx 111{,}17.$$

2) Жиіліктер полигоны — 80-сурет.



80-сурет

22.3. $\overline{D} = \frac{1}{24}((108 - 111{,}17)^2 + (109 - 111{,}17)^2 \cdot 3 + (110 - 111{,}17)^2 \cdot 3 + (111 - 111{,}17)^2 \cdot 8 + (112 - 111{,}17)^2 \cdot 4 + (113 - 111{,}17)^2 \cdot 3 + (114 - 111{,}17)^2 \cdot 2) \approx 2{,}41.$

$\overline{\sigma} = \sqrt{2{,}41} \approx 1{,}55.$

11-сынып алгебра және анализ басатамалары курсын қайталауға арналған жаттығулар

1. 1) 0; 2) $\frac{13}{12}$; 3) $\frac{65}{4}$; 4) $\frac{31}{5}$. **2.** 1) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{1}{12}\left(1 - \sqrt{3}\right)$; 3) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{8}\left(1 - \sqrt{3}\right)$. **3.** 1) $\frac{33}{8}$; 2) $\frac{50}{3}$; 3) 6,5; 4) 23,6. **4.** 1) $1 + e$; 2) $\frac{4}{\ln 3}$; 3) $7 - 4e$; 4) $3e^{\frac{1}{3}} - 4$. **5.** 1) $\frac{1}{3}e^6 + \frac{5}{3}$; 2) $-\frac{1}{4e^2} + \frac{3}{4}$; 3) $-\frac{7}{24}$; 4) $\frac{80}{81}$. **6.** 1) $\frac{29}{12}$; 2) 5,2; 3) $\frac{31}{20}$; 4) $\frac{9}{2}$. **7.** 1) 12; 2) 750; 3) 56; 4) 20. **8.** 1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 1. **9.** 1) 3118; 2) 42; 3) −16; 4) 6; 5) 1; 6) 625. **10.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) −1; 3) 29; 4) $\frac{19}{3}$; 5) $-\frac{11}{2}$; 6) 3. **11.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 3; 3) 216; 4) $\sqrt{2}$. **12.** 1) $2b - 5a$; 3) $a + 1 - \frac{2a}{b}$; 4) $\frac{a + 3b + 7}{a + b}$. **16.** 1) b; 2) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}|$; 3) $\sqrt{a} + 2$; 4) $a^{\frac{5}{3}} + 5$. **17.** 1) $\frac{16}{x}$; 2) $\frac{1}{y - 5y^{0,5}}$. **18.** 1) $\frac{12}{b}$; 2) $\frac{1}{b - 7b^{0,5}}$. **19.** 1) $36\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)$; 2) 0. **25.** 1) 8; 2) 0; −7; 3) $\frac{5}{3}$; 4) 0; 2. **26.** 1) 3; 2) 2; 3) 0; 1; 4) 0. **27.** 1) 4; 2) −1; 3) 3; 4) −1,5; 0. **28.** 1) 1; 2) 9; 3) 10; 4) 11. **29.** 1) $2\pi n,\ n \in Z$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. **30.** 1) −4; 2) −6; 3) $-\frac{1}{3}$. **31.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; **32.** 1) 4; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **33.** 1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 2. **34.** 1) 1; 3; 2) 3; 2; 3) 1; −1; 4) −1; −2. **35.** 1) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 6; 4) −1. **36.** 1) 3; −3; 2) $\pm 2\sqrt{2}$; 3) 25; 4) 576. **37.** 1) 3,5; −1; 2) 9; 3) 1; 4) 3. **38.** 1) 2; 2) 1; −7; 3) −1; 2; 4) 8. **39.** 1) 8; $\frac{1}{2}$; 2) 3,5; 3) 0; 4) 0. **40.** 1) −2. **41.** 1) 2; 2) 1. **42.** 1) (1; 2),

$(2; 1)$, 2) $(4; 2)$. **43.** 1) $(3; 4)$, $(4; 3)$, 2) $\left(4; \frac{1}{2}\right)$. **44.** 1) $(2; 1)$; 2) $(2,5; -5,5)$. **45.** 1) $(-\infty; 1]$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$. **46.** 1) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$; 3) $(1; 2)$; 4) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **47.** 1) $[-2; 2]$; 2) $[-3; 3]$; 3) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-3; 3)$. **48.** 1) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2]$; 4) $[2; +\infty)$. **49.** 1) $(-\infty; 3] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left[-2; \frac{1}{5}\right]$; 3) $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right]$; 4) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **50.** 1) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $[0; 2]$. **51.** 1) $(-3; -2) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -6) \cup [-5; 5]$; 3) $(-\infty; -1) \cup [0; 1)$; 4) $(-\infty; -6) \cup (-4; 4) \cup (6; +\infty)$; **52.** 4) $[1; +\infty)$. **54.** 1) $(2; +\infty)$; 3) $(-1; 1)$. **55.** 2) $\left(\frac{4}{5}; \frac{6}{5}\right]$; 4) $\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right)$. **56.** 1) $(5; +\infty)$; 4) $(-2,5; -2)$. **57.** 3) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 4) $(2; 4)$. **58.** 1) $(4; +\infty)$; 2) $(8; +\infty)$; 3) $(1; 2]$; 4) $(9; +\infty)$. **59.** 1) $(-35; 10)$; 2) $[1; 3]$; 3) $(0,5; 1,6)$; 4) $[-4; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 4)$. **60.** 4) $(2; +\infty)$. **62.** 3) $(4; +\infty)$; 4) $[3; +\infty)$. **63.** 2) $\left(\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n\right)$, $n \in Z$; 4) $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **64.** 3) $[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **65.** 4) $(0; +\infty)$. **66.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[-3; +\infty)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(3; +\infty)$. **72.** 3) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$ — өседі; $[-2; 0]$ — кемиді. **75.** 1) $\frac{3}{2}$; 1; 3) 4; 2. **76.** 4) $F(x) = 0,5e^{2x} - 5x^2 + 0,5$. **77.** 4) $F(x) = -4\sqrt{1 + 3x} + 16$. **80.** 1) 4,5 кв. бірл; 4) 9 кв. бірл. **81.** 2) $12 - 5\ln 5$ кв. бірл. **82.** 1) $\varnothing$; 2) 1; 4) 1. **83.** 1) 0; 2) $\varnothing$; 3) 0; 4) 1.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз 3
10-сыныптағы алгебра және анализ бастамалары курсын қайталауға арналған жаттығулар 4

I тарау. АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл 9
§ 2. Қисықсызықты трапецияның ауданы 18
§ 3. Анықталған интеграл. Ньютон—Лейбниц формуласы 23
§ 4. Жазық фигураның ауданын және айналу денесінің көлемін анықталған интегралдың көмегімен есептеу 29

II тарау. Дәреже және түбір. Дәрежелік функция

§ 5. n-ші дәрежелі түбір және оның қасиеттері 38
§ 6. Рационал көрсеткішті дәреже. Рационал көрсеткішті дәрежесі бар өрнектерді түрлендіру 42
§ 7. Иррационал өрнектерді түрлендіру 49
§ 8. Дәрежелік функция, оның қасиеттері және графигі 52
§ 9. Дәрежелік функцияны дифференциалдау және интегралдау 57
Өзіңді тексер! 63

III тарау. Иррационал теңдеулер

§ 10. Иррационал теңдеу 65
§ 11. Иррационал теңдеулерді шешу әдістері 68
Өзіңді тексер! 73

IV тарау. Көрсеткіштік және логарифмдік функциялар

§ 12. Көрсеткіштік функция, оның қасиеттері және графигі 74
§ 13. Санның логарифмі және оның қасиеттері 80
§ 14. Логарифмдік функция, оның қасиеттері және графигі 87
§ 15. Көрсеткіштік және логарифмдік функцияларды дифференциалдау. Көрсеткіштік функцияның алғашқы функциясы 92
Өзіңді тексер! 97

V тарау. Көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктер

§ 16. Көрсеткіштік теңдеулер 100
§ 17. Логарифмдік теңдеулер 107
§ 18. Көрсеткіштік теңсіздіктер 112
§ 19. Логарифмдік теңсіздіктер 116
Өзіңді тексер! 121

VI тарау. Математикалық статистика элементтері

§ 20. Бас жиынтық және таңдама 123
§ 21. Дискретті және интервалды вариациялық қатарлар 127

§ 22. Кездейсоқ шаманың сандық сипаттамаларын таңдамалар бойынша бағалау 132
Өзіңді тексер! 137
11-сынып алгебра және анализ бастамалары курсын қайталауға арналған жаттығулар........ 140
Глоссарий 153
Жауаптары 155