ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 11 класса общеобразовательной школы
естественно-математического направления

11

Рекомендовано Министерством образования и
науки Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2020

1-5174

УДК 373.167.1
ББК 22.151 я 72
Г 36

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой обновленного содержания по предмету «Геометрия» для 11 класса уровня общего среднего образования, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Авторы: А.Н. Шыныбеков, Д.А. Шыныбеков, Р.Н. Жумабаев, С.С. Маделханов

Под редакцией М. Отелбаева – доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- Вопросы по основным материалам темы
- Практические и творческие работы
- Материалы из истории
- A Задачи первого уровня сложности
- B Задачи второго уровня сложности
- C Задачи третьего уровня сложности
- ✻ Задачи повышенной сложности
- ▲ Начало решения задачи, доказательства теоремы
- ■ Конец решения задачи, доказательства теоремы

Г 36 **Геометрия.** Учебник для 11 класса общеобразоват. шк. ест.-мат. направления / А.Н. Шыныбеков, Д.А. Шыныбеков, Р.Н. Жумабаев, С.С. Маделханов –Алматы: Атамұра, 2020.– 192 стр.

ISBN 978-601-331-738-0

УДК 373.167.1
ББК 22.151 я 72

ISBN 978-601-331-738-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник предназначен для 11-х классов общеобразовательных школ естественно-математического направления и классов с углубленным изучением математики. В нем охвачены все учебные цели, указанные в обновленной учебной программе. Курс стереометрии, изучаемый в 10 и 11 классах, имеет ряд специфических особенностей. В отличие от планиметрии здесь рассматриваются пространственные фигуры и их свойства, поэтому от учащихся дополнительно потребуется способность пространственного воображения. Для ее развития предлагаем чаще обращаться к различным моделям пространственных тел и практиковаться в правильном изображении фигур в тетради.

Помните, в геометрии, особенно в стереометрии, правильно построенный рисунок – это залог успеха. В этой связи советуем широко использовать различные графические онлайн-ресурсы, на которые в учебнике имеются ссылки.

При изучении курса геометрии по данному учебнику, не зависимо от профиля класса, рекомендуется придерживаться следующих правил: при закреплении новой темы необходимо, чтобы каждый ученик выполнил все практические работы и в полном объеме усвоил упражнения группы **A**. Иначе будет невозможно в полной мере усвоить упражнения групп **B**, **C** и последующие новые темы. Также должно войти в привычку умение отвечать на теоретические вопросы, приведенные в конце каждой темы.

Отметим, что неустанный поиск, неутомимый труд и высокое стремление, несомненно, принесут свои плоды в усвоении данного предмета.

Раздел-повторение. ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ЗА 10 КЛАСС

В данном разделе вы:

- вспомните материалы, пройденные в 10 классе;
- подготовитесь к освоению новых материалов.

1. Все ли прямые, не пересекающиеся в пространстве, являются параллельными?

2. Какие прямые в пространстве называются: 1) параллельными; 2) скрещивающимися?

3. Сформулируйте определение параллельности прямой и плоскости. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости.

4. Какие две плоскости называются параллельными? Сформулируйте признаки параллельности двух плоскостей.

5. Сформулируйте определение угла между прямыми. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?

6. Сформулируйте определение перпендикулярности прямой и плоскости.

7. Сформулируйте признаки перпендикулярности прямой и плоскости.

8. Докажите параллельность прямых, перпендикулярных одной плоскости.

9. Дайте определение перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Как определяется расстояние от точки до плоскости?

10. Дайте определение наклонной к плоскости и ее проекции.

11. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах и докажите ее.

12. Какие плоскости называются перпендикулярными?

13. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей и докажите его.

14. Как определяется расстояние между скрещивающимися прямыми?

15. Какими свойствами обладает параллельное проектирование?

16. Сформулируйте основные правила изображения пространственных фигур.

17. Что такое ортогональное проектирование? По какой формуле определяется площадь ортогональной проекции многоугольника?

18. Дайте определение вектора в пространстве. Какие действия применяются к векторам? Сформулируйте *правило параллелепипеда* для трех некомпланарных векторов.

19. Как определить координаты точки и вектора в пространстве? Как найти координаты вектора по координатам его концов?

20. Как определить скалярное произведение векторов? Как определить угол между векторами?

21. Напишите формулу деления отрезка в данном отношении и поясните ее смысл.

Упражнения

A

0.1. Дана плоскость α и пересекающий ее отрезок AB. Прямые, проходящие через концы этого отрезка, перпендикулярны плоскости α и пересекают ее в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости α, если:

1) $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 7$ см; 2) $AA_1 = 12$ мм, $BB_1 = 8$ мм.

0.2. Точка O является серединой отрезка CD. Параллельные прямые, проходящие через точки C, O и D пересекают плоскость α в точках C_1, O_1 и D_1 соответственно. Точки C и D расположены по одну сторону плоскости α. Найдите: 1) OO_1, если $CC_1 = 3$ м, $DD_1 = 11$ м; 2) CC_1, если $OO_1 = 12$ см, $DD_1 = 4$ см.

0.3. Решите предыдущую задачу при условии, что точки C и D расположены по разные стороны плоскости α.

0.4. Известно, что точки P и Q принадлежат плоскости α, точки Q и R принадлежат плоскости β, а точки P, Q, R принадлежат плоскости γ. Постройте соответствующий рисунок.

0.5. Плоскости α, β, γ попарно пересекаются по прямым a, b, c и $a \parallel b$, $b \parallel c$. Постройте соответствующий рисунок.

0.6. Прямые OA, OB и OC таковы, что $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Найдите углы треугольника ABC, если $OA=OB=OC$.

0.7. Точки A_1 и B_1 являются серединами отрезков OA и OB соответственно. Плоскость α пересекает отрезки OA и OB в точках A_1 и B_1. Покажите, что $AB \parallel \alpha$ и найдите: 1) A_1B_1, если $AB = 8$ см; 2) AB, если $A_1B_1 = 3$ м.

0.8. Параллельные плоскости α и β пересекают сторону OA угла AOB в точках A_1, A_2, а сторону OB – в точках B_1, B_2 соответственно. Найдите A_1B_1, если $OB_1 = 12$ см, $OB_2 = 18$ см, $A_2B_2 = 54$ см.

0.9. Прямые OA, OB и OC взаимно перпендикулярны. Найдите BC, если: 1) $OA = 3$ см, $AB = 5$ см, $OC = 3$ см; 2) $OA = a$, $AB = b$, $AC = c$.

0.10. Точки A_1 и B_1 являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и B соответственно на плоскость α, а отрезок AB и плоскость α не пересекаются. Найдите: 1) A_1B_1, если $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 14$ см, $AB = 13$ см; 2) AB, если $AA_1 = 27$ мм, $BB_1 = 20$ мм, $A_1B_1 = 24$ мм.

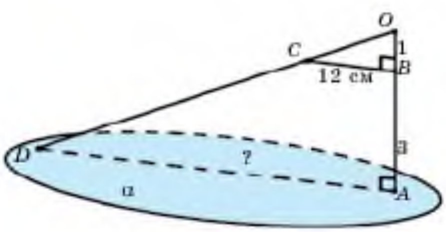
0.11. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AB и наклонная AC. Найдите: 1) длину проекции наклонной, если $AB=6$ м, $AC=10$ м; 2) длину наклонной, если $AB=24$ см, $BC=10$ см.

0.12. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите векторы, концы которых расположены на вершинах параллелепипеда и равны следующей сумме векторов: 1) $\overline{DA} + \overline{DC} + \overline{DD_1}$; 2) $\overline{A_1B_1} + \overline{C_1B_1} + \overline{D_1B_1}$.

0.13. Точки A, B, C расположены на одной прямой. Точка O не принадлежит этой прямой, векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ компланарны. Докажите это.

0.14. Используя условие предыдущей задачи, выразите вектор $\overline{OC}$ через векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, если: 1) $\overline{AC} = \overline{CB}$; 2) $\overline{AC} = 2\overline{CB}$.

B



0.15. Точка B делит отрезок OA в отношении $OB:BA=1:3$. Через точку A параллельно отрезку BC проведена плоскость α. Покажите, что прямая OC пересекает плоскость α в некоторой точке D. Найдите AD, если $BC=12$ см.

0.16. Точка O расположена вне плоскости квадрата $ABCD$. Плоскость α, параллельная плоскости квадрата, пересекает отрезки OA, OB, OC, OD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Найдите периметр четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если $OA_1 : OA = 1 : 3$ и $AB = 12$ см.

0.17. Параллельные прямые, проходящие через вершины параллелограмма $ABCD$, пересекают некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно, точки A, B, C, D расположены по одну сторону плоскости α. Найдите отрезок DD_1, если: 1) $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 5$ м, $CC_1 = 6$ м; 2) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

0.18. К плоскости прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр AK так, что расстояния от точки K до вершин B, C и D равны 6 см, 9 см и 7 см соответственно. Найдите перпендикуляр AK.

0.19. Из точки, расположенной на расстоянии 8 см от плоскости, проведены две наклонные, образующие с этой плоскостью углы, равные 45°. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если угол между их проекциями равен 120°.

0.20. В треугольнике ABC стороны $AC=BC=10$ см, $\angle B = 30°$. Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника ABC и $BD=5$ см. Найдите расстояние от точки D до прямой AC и от точки B до плоскости ADC.

0.21. Точка K – середина медианы AA_1 треугольника ABC, а O – произвольная точка пространства. Выразите $\overline{OK}$ через векторы $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$.

0.22. Ребро правильного тетраэдра $OABC$ равно $\sqrt{2}$, а K является серединой отрезка OA. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{BK}$ и $\overline{BC}$.

0.23. Векторы $\bar{m}$, $\bar{n}$ и $\bar{k}$ таковы, что $\bar{m} - \bar{n} - \bar{k} = \bar{0}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 4$, $|\bar{k}| = 7$. Найдите значение выражения $\bar{n}\cdot\bar{k} - \bar{m}\cdot\bar{n} - \bar{m}\cdot\bar{k}$.

0.24. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ попарно перпендикулярны и $|\bar{a}| = a$. Найдите значение скалярного произведения $(2\bar{a} - 3\bar{b})\cdot(3\bar{a} + \bar{c})$.

C

0.25*. Определите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от вершин треугольника ABC.

0.26. Точки A и B принадлежат разным граням двугранного угла, отрезки AC и BD являются перпендикулярами, опущенными на ребро этого двугранного угла и $AC = BD$. Докажите, что $\angle ABC = \angle BAD$.

0.27. Диагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $2\sqrt{3}$, а точки P, Q и R являются серединами ребер BB_1, B_1C_1 и C_1D_1 соответственно. Найдите периметр многоугольника, образованного пересечением куба с плоскостью PQR.

0.28*. Точка O расположена вне плоскости треугольника ABC. Плоскость, параллельная плоскости ABC, пересекает отрезки OA, OB и OC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, также проходит через точку O.

0.29. Докажите, что площадь треугольника ABC, заданного на координатной плоскости, определяется формулой

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2 \cdot \left|\overline{AC}\right|^2 - \left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right)^2}.$$

0.30*. С помощью скалярного произведения найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$. При каком значении x оно достигается?

Раздел 1. МНОГОГРАННИКИ

В этом разделе вы познакомитесь с одной из интересных тем геометрии – «Многогранники». В повседневной жизни мы часто встречаемся с примерами многогранников. Это, например, архитектурные сооружения. От степени усвоения учебного материала зависит ваше умение вычислять объемы этих зданий, а также площади и длины различных элементов этих зданий.

Темы, рассматриваемые в данном разделе

1.1. Многогранные углы, понятие геометрического тела. Понятие многогранника.

1.2. Призма и ее элементы, виды призм. Развертка призмы, площади боковой и полной поверхностей.

1.3. Пирамида и усеченная пирамида, их элементы.

1.4. Сечения многогранников плоскостями. Правильные многогранники.

Город Нур-Султан, Дворец мира и согласия – сооружение, которое не только поражает оригинальностью и величием, но и имеет огромное значение для казахстанского народа, символизируя дружбу, единство и мир. Основанием пирамиды является квадрат размером 62×62 м, ее высота также равна 62 м. Изучив материалы данного раздела, вы сможете найти площадь ее боковой поверхности.

1.1. Многогранные углы, понятие геометрического тела. Понятие многогранника

Изучив пункт, вы будете:

- *знать понятия многогранного угла и геометрического тела, изображать их на плоскости;*
- *знать определение многогранника и его элементы;*
- *решать задачи, связанные с нахождением элементов многогранника.*

1.1.1. Трехгранные и многогранные углы

Рассмотрим три луча OA, OB и OC, исходящие из точки O пространства, не лежащие в одной плоскости. Данными лучами в пространстве определяются плоские углы AOB, BOC и COA. Часть пространства, ограниченная этими углами, называется ***трехгранным углом*** (рис.1.1). Плоские углы AOB, BOC и COA называются ***гранями***, а стороны этих углов ***ребрами*** трехгранного угла, точка O называется ***вершиной*** этого трехгранного угла.

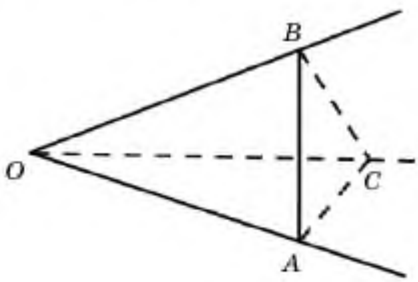


Рис. 1.1

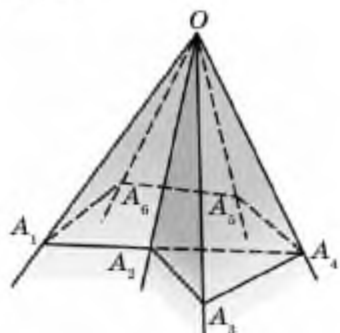


Рис. 1.2

Таким же образом определяется понятие многогранного угла.

Многогранный угол – это фигура, образованная из n ($n \geqslant 3$) плоских углов с общей вершиной O так, что углы берутся в определенном порядке и каждая пара соседних углов, включая первый и последний, имеет общую сторону (луч).

В зависимости от количества граней рассматриваются трехгранные, четырехгранные, пятигранные и другие n-гранные углы. Например, на рис. 1.2 изображен шестигранный угол.

Многогранный угол называется ***выпуклым***, если он расположен по одну сторону плоскости, проходящей через любую его грань. Например, любой трехгранный угол является выпуклым, а многогранные углы, количество граней которых более трёх, могут и не быть выпуклыми. Например, шестигранный угол, изображенный на рис. 1.2, не является выпуклым, т.к. плоскость, проходящая через грань A_1OA_2, делит этот многогранный угол на две части (т.е. проходит через внутреннюю точку многогранного угла).

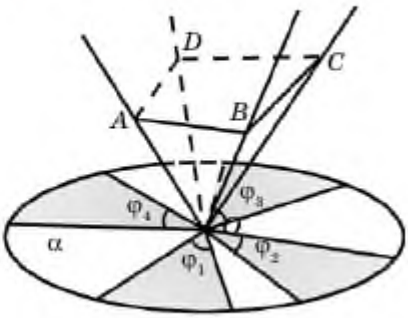


Рис. 1.3

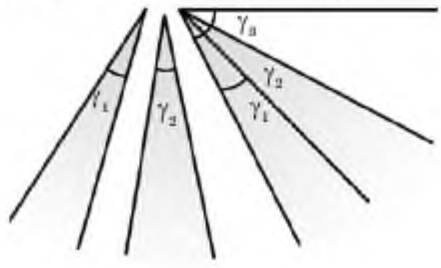


Рис. 1.4

Очевидно,что *сумма всех плоских углов при вершине многогранного угла меньше 360° и каждый плоский угол меньше суммы других плоских углов*. Например, это видно из рис. 1.3 и 1.4. На рис. 1.3 каждая грань четырехгранного угла $OABCD$ «разрезана» вдоль ребер и расположена на плоскости α, т.е. $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 < 360°$. На рис. 1.4 углы γ_1, γ_2 и γ_3 удовлетворяют условию $\gamma_1 + \gamma_2 < \gamma_3$. Совмещая стороны этих углов (склеивая вдоль сторон), невозможно образовать из них трехгранный угол. Следовательно, для того чтобы образовать трехгранный угол, должно выполняться неравенство $\gamma_3 < \gamma_1 + \gamma_2$.

1.1.2. Понятие геометрического тела

Сначала напомним некоторые сведения из теории множеств. Здесь в качестве множества рассматривается множество точек геометрических фигур. Пусть даны точка A и фигура Φ. Если все точки шара любого радиуса с центром в точке A принадлежат фигуре Φ, то точку A называют ***внутренней точкой*** фигуры Φ. Если же любой шар с центром в точке A имеет точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие фигуре Φ, то A называется ***граничной точкой*** фигуры Φ. Если все точки шара с центром в точке A не принадлежат фигуре Φ, то точку A называют ***внешней точкой*** фигуры Φ.

Если фигура Φ целиком помещается в некоторый шар радиусом R, то эту фигуру называют ***ограниченной***. Множество всех граничных точек ограниченной фигуры Φ называется ее ***поверхностью***, а множество всех внутренних точек фигуры Φ и множество всех точек ее поверхности – ***геометрическим телом***. Например, на рис. 1.5 точка A является внутренней точкой куба, точки B и C – граничными точками, а точка D – внешней точкой куба.

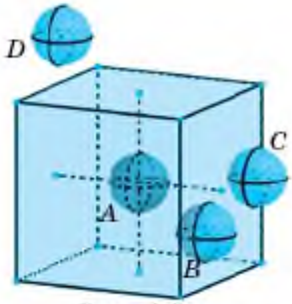


Рис. 1.5

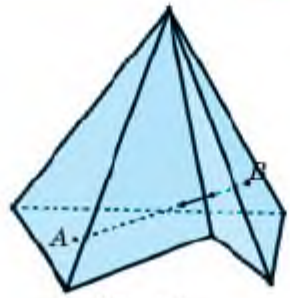


Рис. 1.6

Если любой отрезок, концы которого являются внутренними точками фигуры, целиком принадлежит этой фигуре, то ее называют ***выпуклой фигурой***. Например, такие известные нам фигуры, как призма, треугольная пирамида, цилиндр, куб, шар, конус и другие являются выпуклыми фигурами. Фигура, изображенная на рис.1.6, не является выпуклой, т.к. отрезок AB, концы которого являются внутренними точками фигуры, не целиком принадлежит этой фигуре.

1.1.3. Понятие многогранника

Большую часть геометрических тел, изучаемых в средней школе, составляют многогранники. Геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называется ***многогранником***. Каждый многоугольник, ограничивающий многогранник, называется его ***гранью***, а сторона этого многоугольника – ***ребром*** многогранника. Концы ребер многогранника называются его ***вершинами***, а отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, – ***диагональю*** этого многогранника. Например, на рис. 1.7 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Он имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин, отрезки A_1C и BD_1 являются его диагоналями.

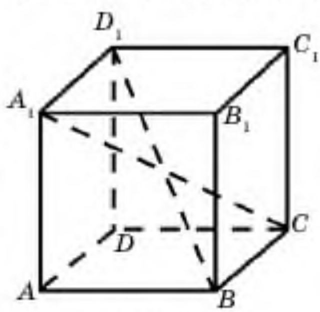


Рис. 1.7

Многогранники делятся на два вида: выпуклые и невыпуклые. Если отрезок, соединяющий любые две точки многогранника, целиком принадлежит ему, то этот многогранник называется ***выпуклым***. Другими словами, если многогранник расположен по одну сторону от плоскости любой его грани, то он является выпуклым.

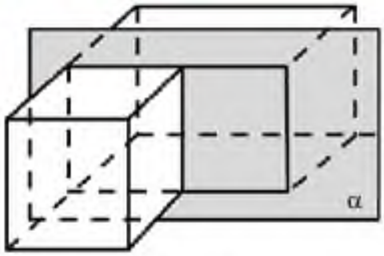


Рис. 1.8

А если плоскость какой-нибудь грани многогранника делит этот многогранник на две части, то он будет ***невыпуклым***. В курсе геометрии средней школы в основном рассматриваются выпуклые многогранники.

Например, изображенный на рис.1.8 многогранник не является выпуклым, т.к. плоскость α, проходящая через одну из его граней, делит этот многогранник на две части.

Если поверхность многогранника разрезать вдоль некоторых его ребер и развернуть так, что все его грани будут лежать в одной плоскости, то на плоскости получим фигуру, называемую ***разверткой*** этого многогранника. Для данного многогранника различными способами можно получить разные развертки. Например, на рис. 1.9 изображены две различные развертки правильной четырехугольной пирамиды.

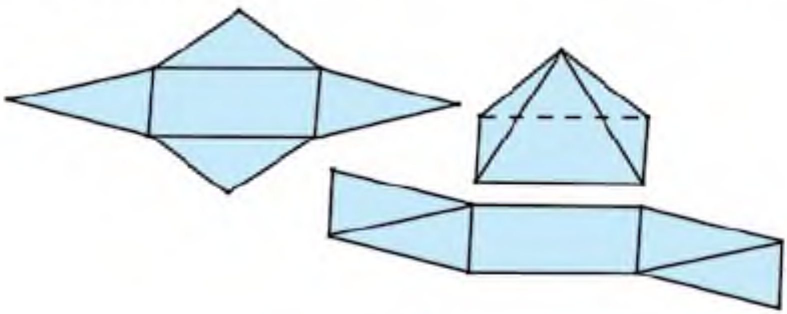


Рис. 1.9

Сумма площадей всех граней многогранника называется ***площадью полной поверхности*** этого многогранника, и обозначают её через $S_{полн}$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдем площадь полной поверхности куба с ребром 2 см.

▲ Площадь одной грани куба равна $(2 \cdot 2)$ см^2 = 4 см^2, а количество граней куба равно 6. Поэтому площадь полной поверхности этого куба такова: $S_{полн} = (6 \cdot 4)$ см^2 = 24 см^2. ■

В курсе высшей математики доказывается формула Эйлера $n-m+k=2$. Здесь n – количество вершин многогранника, m – количество ребер, а k – количество его граней.

Пример 2. Многогранник имеет 14 граней, из них 8 граней – треугольники, 6 граней – восьмиугольники (рис. 1.10). Определим количество вершин многогранника.

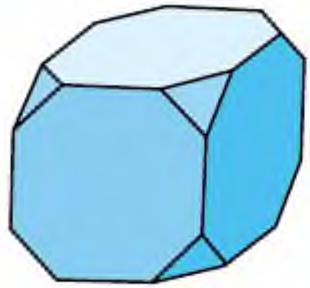


Рис. 1.10

▲ Количество ребер восьми треугольников и шести восьмиугольников находим так: $8 \cdot 3 + 6 \cdot 8 = 72$. Каждое ребро многогранника является общим для двух его граней и поэтому количество ребер многогранника равно половине числа 72, т.е. равно числу 36. Тогда по формуле Эйлера имеем:

$n-m+k = 2 \Rightarrow n-36+14=2 \Rightarrow n=24$, многогранник имеет 24 вершины. ■

Дополнительные электронные ресурсы

http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/9ec3aaf6-95cd-35b0-b94e-9138604828c7/00145619754673487.htm

1. Что такое трехгранный (многогранный) угол?
2. Какие элементы многогранного угла вы знаете?
3. Какому условию должна удовлетворять сумма плоских углов при вершине многогранного угла? Обоснуйте ответ.
4. Что такое внутренняя (внешняя, граничная) точка пространственной фигуры?
5. Что вы понимаете под понятием «геометрическое тело»?
6. Какие тела (многогранники) называются выпуклыми?
7. Какие тела называются многогранниками? Какие элементы многогранников вы знаете? Приведите пример.
8. Что такое развертка многогранника? Приведите пример.
9. Как определяется площадь полной поверхности многогранника?

Упражнения

А

Практическая работа

1.1. Изобразите многогранник, имеющий 4 грани. Сколько вершин и ребер имеет этот многогранник?

1.2. Из плотной бумаги изготовьте модель трехгранного (четырехгранного, пятигранного) угла и назовите все его элементы.

1.3. Изобразите какую-либо развертку куба с ребром 5 см и с ее помощью постройте куб. Сколько различных разверток имеет куб? Изобразите всевозможные развертки куба.

1.4. Футбольный мяч имеет форму многогранника, имеющего

Рис. 1.11

32 грани, из которых 20 – правильные шестиугольники, 12 – правильные пятиугольники (рис. 1.11). Сколько вершин имеет этот многогранник?

1.5. Существует ли трехгранный угол, плоские углы при вершине которого равны: 1) 140°,86° и 38°; 2) 110°, 80° и 42°; 3) 160°, 130° и 82°; 4) 160°, 130° и 80°?

1.6. Существует ли четырехгранный угол, плоские углы при вершине которого равны: 1) 30°,80°, 90° и 160°; 2) 150°, 90°, 90° и 20°; 3) 150°, 60°,50° и 30°; 4) 170°, 100°, 90° и 80°?

1.7. Сколько ребер имеет многогранник, у которого 6 вершин и 8 граней?

1.8. Через n, m и k обозначим количество вершин, ребер и граней многогранника соответственно. По следующим данным найдите неизвестный элемент: 1) $n=4$, $m=6$; 2) $n=8$, $k=6$; 3) $m=18$, $k=8$.

1.9. Найдите площадь полной поверхности куба, если его ребро равно: 1) 3 см; 2) 6 дм; 3) 12 м; 4) 20 см.

1.10. На сколько процентов увеличится площадь полной поверхности куба, если его ребро увеличили на 30%?

A. 30% B.69% C. 119.7% D. 169%

1.11. Найдите ребро куба, если площадь его полной поверхности равна: 1) 24 м²; 2) 54 см²; 3) 150 дм²; 4) 294 мм².

1.12. Найдите площадь полной поверхности тетраэдра (треугольная пирамида, все грани которой есть правильные треугольники), если его ребро равно: 1) 2 см; 2) 4 м; 3) 5 дм; 4) 12 мм.

1.13. Две грани трехгранного угла взаимно перпендикулярны, а плоские углы при вершине этих граней равны 45°. Найдите плоский угол третьей грани.

1.14. Все плоские углы при вершине O трехгранного угла $OABC$ равны 90°. Найдите угол: 1) OAB; 2) OBA; 3) OCA; 4) OCB, если $OA=1$, $OB=1$ и $OC=2$.

B

1.15. Из точки вне плоскости проведены две наклонные, образующие с данной плоскостью углы, равные 60° и 20°. В каких пределах может меняться угол между этими наклонными?

1.16. Основанием прямого параллелепипеда (все боковые ребра перпендикулярны плоскости основания) является ромб, диагонали которого равны 10 см, 24 см и высота равна 10 см. Найдите: 1) диагонали параллелепипеда; 2) площадь его полной поверхности.

1.17. В трехгранном угле $OABC$ дано: $\angle BOC=90^\circ$, $\angle AOB=\angle AOC=60^\circ$, $OA=a$. Найдите: 1) расстояние от точки A до плоскости BOC; 2) угол между ребром OA и плоскостью BOC.

1.18. В трехгранном угле $OABC$ дано: $\angle BOC=90^\circ$, $\angle AOB=\angle AOC=60^\circ$, $OA=OB=OC$. Докажите, что плоскости ABC и BOC перпендикулярны.

1.19. Внутри трехгранного угла (рис. 1.12), все плоские углы при вершине которого равны 90°, взята точка. Расстояния от этой точки до граней трехгранного угла равны 5 см, 7 см и 9 см. Найдите расстояние от этой точки до вершины трехгранного угла.

1.20. Все плоские углы трехгранного угла $OABC$ равны 90°, а точка D равноудалена от всех его граней. Найдите это расстояние, если $OD=4\sqrt{3}$ см (рис.1.12).

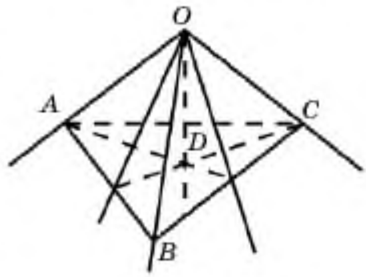


Рис. 1.12

1.21. Используя условие задачи 1.18 и условие $OA=OB=OC=a$, найдите площадь полной поверхности пирамиды $OABC$.

1.22. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, одна из граней которого является квадратом, равна $2a$. Сторона квадратной грани равна a. Найдите: 1) длину других ребер; 2) площадь полной поверхности (рис. 1.13).

▲ Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $ABCD$ – квадрат, $AB=a$, $A_1C=2a$.

Найти: 1) длину других ребер; 2) $S_{полн}$.

Решение. 1)Т.к. $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – квадраты, то ребра этих граней равны a. Достаточно найти $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$.

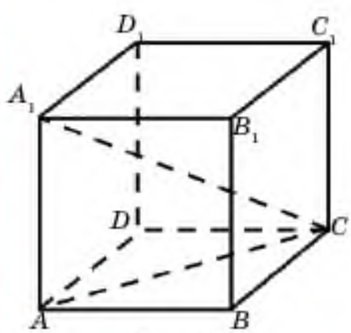


Рис. 1.13

AC – диагональ квадрата, т.е. $AC = \sqrt{2}a$, ΔACA_1 – прямоугольный треугольник, поэтому

$$AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = \sqrt{2}a.$$

2) $S_{полн} = 2 \cdot S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABB_1A_1} = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot \sqrt{2}a = 2(1 + 2\sqrt{2})a^2$. ■

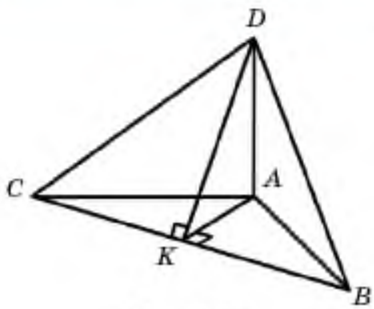


Рис. 1.14

1.23. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Покажите, что грани трехгранного угла попарно перпендикулярны.

1.24. Стороны треугольника равны 10 см, 17 см и 21 см. Через вершину большего угла A восстановлен перпендикуляр AD к плоскости данного треугольника. Найдите расстояние от точки D до большей стороны треугольника, если AD=15 см (рис. 1.14).

C

1.25. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите угол между гранями, плоские углы которых равны 45°.

1.26. Сколько острых двугранных углов (углы между смежными гранями) может иметь выпуклый многогранник?

1.27. Найдите площадь полной поверхности и диагональ прямоугольного параллелепипеда, если площади двух смежных граней равны S_1 и S_2, а общее ребро этих граней – a.

1.28. Одно ребро треугольной пирамиды равно a, а другие – b. Докажите, что верно неравенство $0 < a < b\sqrt{3}$.

1.29. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равны S_1, S_2 и S_3. Найдите ребра параллелепипеда.

1.30*. Определите геометрическое место точек, равноудаленных от всех ребер трехгранного угла.

1.31*. Определите геометрическое место точек, равноудаленных от всех граней трехгранного угла.

1.32. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от диагонали куба до ребра, не пересекающегося с данной диагональю (рис. 1.15).

▲ Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

Найти расстояние между A_1C и AB.

Решение. Плоскости (A_1B_1CD) и (ABC_1D_1) взаимно перпендикулярны, т.к. $BF \perp B_1C$, $B_1F \perp EF$ и $BF \perp EF$. Если $AK = KB$, то $OK \| AE \| \| BF$. Поэтому $OK \perp (A_1B_1CD)$, т.е. $OK \perp A_1C$. Тогда OK – искомое расстояние. $OK = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. ■

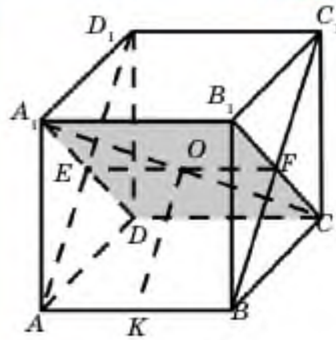


Рис. 1.15

Упражнение для повторения

1.33. 1) Из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC опущена высота BD. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=13$, $BD=12$.

2) AH – высота прямоугольного треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC, если $CH=3$, $AC=5$ и $\angle A = 90°$.

1.2. Призма и ее элементы, виды призм. Развертка призмы, площади боковой и полной поверхностей

Изучив пункт, вы будете:

- *знать определение призмы, ее элементы, виды призм и изображать их на плоскости;*
- *уметь решать задачи, связанные с нахождением элементов призмы;*
- *выводить формулы площадей боковой и полной поверхностей призмы и применять эти формулы при решении задач;*
- *рисовать развертку призмы.*

1.2.1. Призма и ее элементы, виды призм

Многогранник, две грани которого есть равные n-угольники, расположенные в параллельных плоскостях, а другие n граней являются параллелограммами, называется n-угольной ***призмой***.

Здесь равные n-угольники, расположенные в параллельных плоскостях, называются ***основаниями*** призмы, а другие грани, являющиеся параллелограммами, называются ***боковыми гранями***, стороны оснований и боковых граней называются ***ребрами призмы*** (рис. 1.17).

Расстояние между параллельными плоскостями α и β, в которых расположены основания призмы, называется ***высотой*** призмы. На рис. 1.16, 1.17 изображены четырехугольная и пятиугольная призмы соответственно.

Призма называется ***наклонной*** (рис. 1.16), если боковые ребра призмы не перпендикулярны плоскости основания, ***прямой*** (рис. 1.17) – если ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Все боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками. В зависимости от количества вершин оснований призму иногда называют ***n-угольной призмой***. Прямая призма называется ***правильной***, если ее основания – правильные многоугольники.

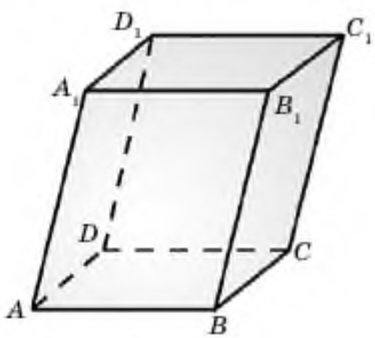


Рис. 1.16

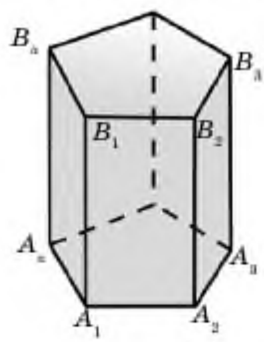


Рис. 1.17

Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется ***параллелепипедом***. Параллелепипед имеет 6 граней, и все эти грани являются параллелограммами. Поэтому противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

Теорема 1. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и в этой точке делятся пополам.*

▲ Задан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.1.18). Покажем, что его диагонали AC_1, BD_1, A_1C и B_1D пересекаются в одной точке.

Действительно, ребра параллелепипеда AB, A_1B_1, C_1D_1 и CD взаимно параллельны и равны между собой. Аналогично, ребра AD,

BC, B_1C_1 и A_1D_1 также взаимно параллельны и равны между собой. Поэтому четырехугольники A_1BCD_1 и ABC_1D_1 являются параллелограммами и их диагонали точкой пересечения делятся пополам. То есть диагонали A_1C и BD_1 параллелограмма A_1BCD_1 пересекаются в точке O и этой точкой делятся пополам. Также диагонали BD_1 и AC_1 параллелограмма ABC_1D_1 пересекаются в точке O (это середина диагонали BD_1) и этой точкой делятся пополам. Аналогично из того, что A_1B_1CD является параллелограммом следует, что диагональ B_1D также проходит через точку O и делится этой точкой пополам. ■

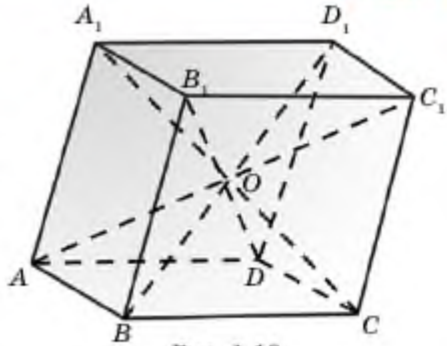


Рис. 1.18

Если боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания, то он называется ***прямым***. Боковые грани прямого параллелепипеда есть прямоугольники, а основания – произвольные параллелограммы. Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник, называется ***прямоугольным параллелепипедом***.

Например, если $ABCD$ – параллелограмм (рис. 1.19), то $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является прямым параллелепипедом, а если $ABCD$ – прямоугольник, то данная фигура является прямоугольным параллелепипедом. Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны между собой, называется ***кубом***. Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны между собой. Для прямоугольных параллелепипедов верна следующая обобщенная теорема Пифагора.

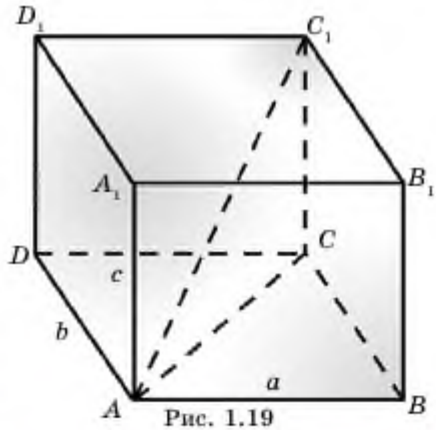


Рис. 1.19

Теорема 2. *Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его трех измерений (ширины, длины и высоты).*

▲ Пусть в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $AB = a$, $AD = b$ и $AA_1 = c$ (рис. 1.19). Покажем, что $AC_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Действительно, т.к. $ABCD$ является прямоугольником, то $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$. Поскольку, $AA_1 = CC_1 = c$ и ΔACC_1 – прямоугольный треугольник ($CC_1 \perp (ABCD)$), то $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ■

1.2.2. Развертка призмы, площади боковой и полной поверхностей

Сумма площадей боковых граней призмы называется ***площадью ее боковой поверхности***.

Теорема 3. *Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению ее высоты и периметра основания.*

▲ Пусть высота прямой призмы равна h, а периметр основания – p. Покажем справедливость формулы $S_{бок} = hp$.

Действительно, боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками. Поэтому сторона основания призмы является одной стороной соответствующего прямоугольника, а боковое ребро (т.е. высота призмы) – другой его стороной (рис. 1.17).

Следовательно,

$S_{бок} = A_1A_2 \cdot h + A_2A_3 \cdot h + \ldots + A_nA_1 \cdot h = (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) \cdot h = p \cdot h$. ■

Чтобы определить площадь полной поверхности призмы, достаточно прибавить к площади боковой поверхности удвоенную площадь основания: $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

1. Какой многогранник называется призмой? Какие элементы призмы вы знаете? Покажите их на рисунке.
2. Что вы понимаете под прямой, наклонной и правильной призмами?
3. Как определяется площадь боковой поверхности прямой призмы?
4. Какую призму называют параллелепипедом?
5. Каким свойством обладают диагонали параллелепипеда? Докажите.
6. Какой параллелепипед называется прямым, прямоугольным?
7. Сформулируйте обобщенную теорему Пифагора и докажите ее.

Развертка призмы – это перенос без искажения размеров всех ее граней в одну плоскость.

Дополнительные электронные ресурсы	QR-Code
Ссылка на 3D-анимацию «Развертка трех различных призм» – https://geogebra.org/classic/ttsjw3ug 	

Упражнения

А

Практическая работа

1.34. Из плотной бумаги изготовьте модель параллелепипеда: 1) прямого; 2) прямоугольного; 3) наклонного.

1.35. На плотной бумаге изобразите развертку правильной призмы: 1) треугольной; 2) шестиугольной. Из каждой развертки постройте соответствующую призму.

1.36. Ребро куба равно 12. Площадь полной поверхности куба равна площади полной поверхности прямой треугольной призмы. Гипотенуза прямоугольного треугольника, являющегося основанием прямой призмы, равна 10, а один из катетов равен 6. Найдите высоту призмы.

1.37. По данной развертке определите вид многогранника (рис. 1.20). Найдите площадь полной поверхности многогранника.

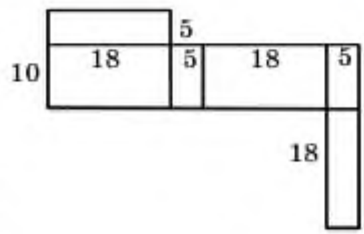
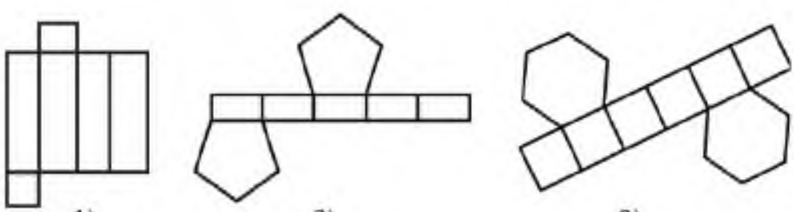


Рис. 1.20

1.38. По указанным описаниям определите вид многогранника и постройте его. 1) Многогранник имеет 12 ребер, грани многогранника являются квадратами и прямоугольниками; 2) многогранник имеет 5 граней, из них две грани являются равными треугольниками, а другие три – прямоугольниками; 3) многогранник состоит из 6 равных между собой квадратов.

1.39. По развертке (рис. 1.21.) определите вид многогранника. Сколько вершин имеют многогранники?



1) 2) 3)

Рис. 1.21

1.40. Назовите многогранник и укажите его развертку (рис. 1.22):

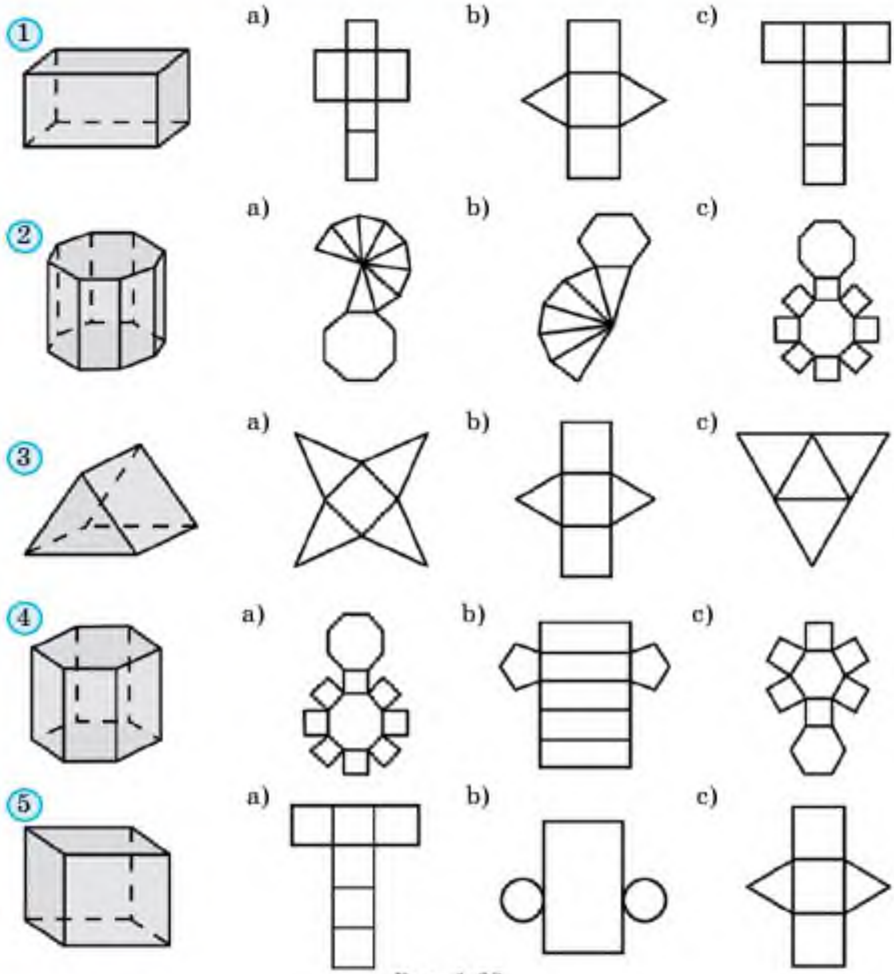


Рис. 1.22

1.41. Найдите площадь полной поверхности прямой треугольной призмы (рис. 1.23):

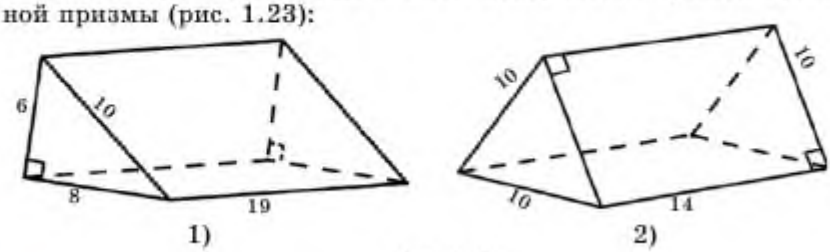
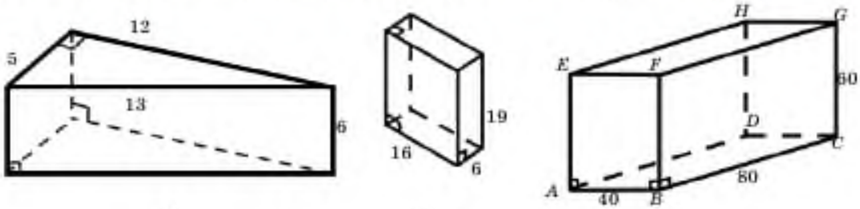


Рис. 1.23

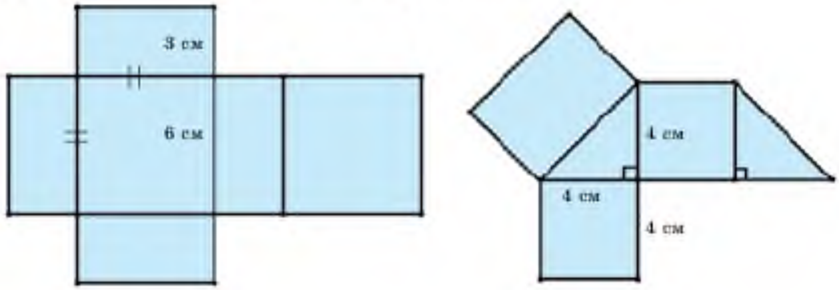
1.42. Определите вид многогранника (рис. 1.24) и найдите площади боковой и полной поверхностей данных прямых призм.



1) 2) 3)

Рис. 1.24

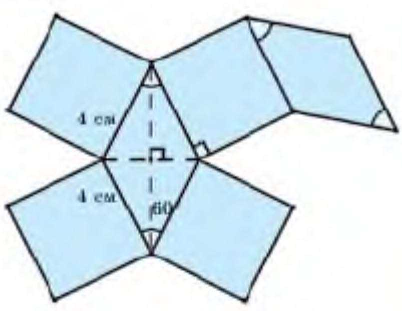
1.43. Определите вид многогранника (рис. 1.25) и найдите площади его боковой и полной поверхностей.



1) 2)

Рис. 1.25

1.44. Основанием призмы является ромб с острым углом 60° и со стороной, равной 4 см. Боковые грани призмы являются квадратами. Докажите, что площадь развертки призмы равна $16\left(4+\sqrt{3}\right)$ см^2 (рис. 1.26).



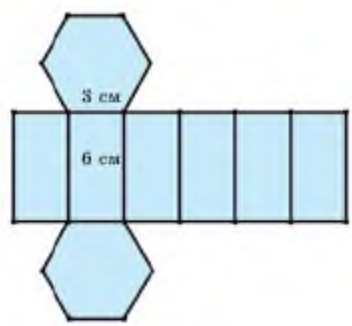


Рис. 1.26 Рис. 1.27

1.45. Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной 3 см. Высота призмы равна 6 см. Докажите, что площадь развертки призмы равна $27\left(4+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ см^2 (рис. 1.27).

1.46. Дан куб с ребром, равным 2 см. Найдите: 1) диагональ боковой грани; 2) диагональ куба; 3) площадь диагонального сечения; 4) площадь полной поверхности (рис. 1.28).

1.47. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, у которого катет равен 4 см, гипотенуза – 5 см, а высота призмы равна 3 см. Определите диагональ грани при большем катете и площадь полной поверхности призмы (рис. 1.29).

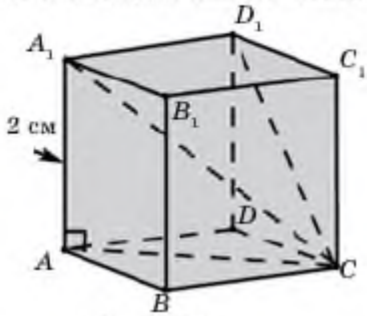


Рис. 1.28

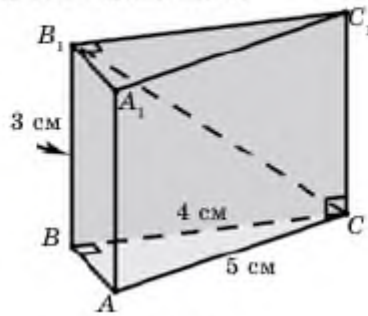


Рис. 1.29

1.48. Дан прямоугольный параллелепипед с тремя измерениями a, b и c. Найдите его диагональ, если: 1) a=1 м, b=2 м, c=2 м; 2) a=5 см, b=4 см, c=10 см; 3) a=6 дм, b=8 дм, c=24 дм; 4) a=7 мм, b=13 мм, $c=\sqrt{71}$ мм.

1.49. Используя условие предыдущей задачи, найдите площадь: 1) боковой поверхности; 2) полной поверхности; 3) диагонального сечения (т.е. сечения, образованного плоскостью, проходящей через диагональ и боковые ребра, имеющие с этой диагональю общую вершину) параллелепипеда.

1.50. По заданным площадям трех граней, имеющим общую вершину, найдите три измерения прямоугольного параллелепипеда: 1) 30 см^2, 40 см^2, 48 см^2; 2) 21 м^2, 33 м^2, 77 м^2.

1.51. Стороны основания прямого параллелепипеда равны a и b, угол между ними – φ, а боковое ребро – c. Найдите площади его боковой и полной поверхностей, если: 1) a=2 см, b=23 см, $\varphi=60^\circ$, c=5 см; 2) a=2 м, b=5 м, $\varphi=45^\circ$, c=6 м; 3) a=5 мм, b=8 мм, $\varphi=30^\circ$, c=10 мм.

1.52. По условию предыдущей задачи a и b – стороны основания прямой треугольной призмы, φ – угол между ними, а c – боковое ребро призмы. Найдите площади ее боковой и полной поверхностей (рис. 1.30).

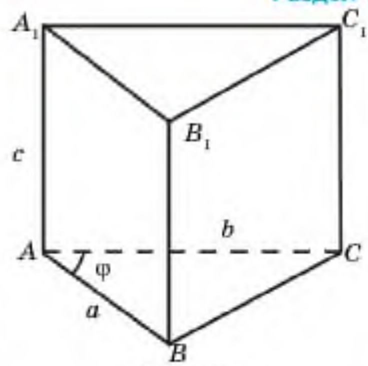


Рис. 1.30

1.53. Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна 169 см^2, а высота – 10 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы.

1.54. Ребро основания правильной треугольной призмы равно a, а ее высота – h. Найдите площадь полной поверхности призмы, если: 1) a=5 м, h=8 м; 2) $a = 2\sqrt{3}$ см, h=4 см.

1.55. Найдите двугранный угол при боковых ребрах правильной шестиугольной призмы.

1.56. Может ли количество вершин призмы быть равным: 1) 20; 2) 32; 3) 105? Если может, то определите количество ребер и граней этой призмы. Обоснуйте ответ.

1.57. Выразите диагональ d куба через его ребро a.

Практическая работа

1.58. Зимой для детей построили ледяную горку, модель которой изображена на рис. 1.31. Определите площадь, которую нужно покрыть льдом.

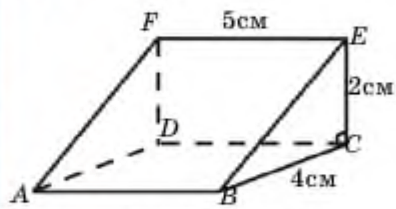


Рис. 1.31

Практическая работа

1.59. Крышу дома решили построить в виде модели, изображенной на рис. 1.32. Высота ската крыши равна 2,5 м, длина дома – 10 м, а ширина – 8 м. Сколько листов шифера потребуется, чтобы полностью покрыть двускатную крышу, если площадь одного листа шифера равна 2 м^2?

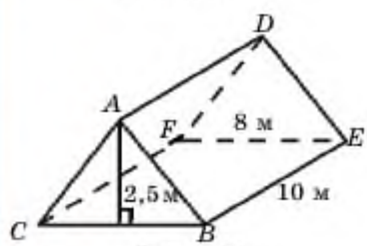


Рис. 1.32

B

1.60. Выразите диагональ d куба через диагональ его грани d_1.

1.61. Боковое ребро прямоугольного параллелепипеда равно 5 см, площадь основания – 360 см^2, а диагональ основания – 41 см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

1.62. Найдите длину наибольшего стержня, который можно поместить внутрь прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рис. 1.33.

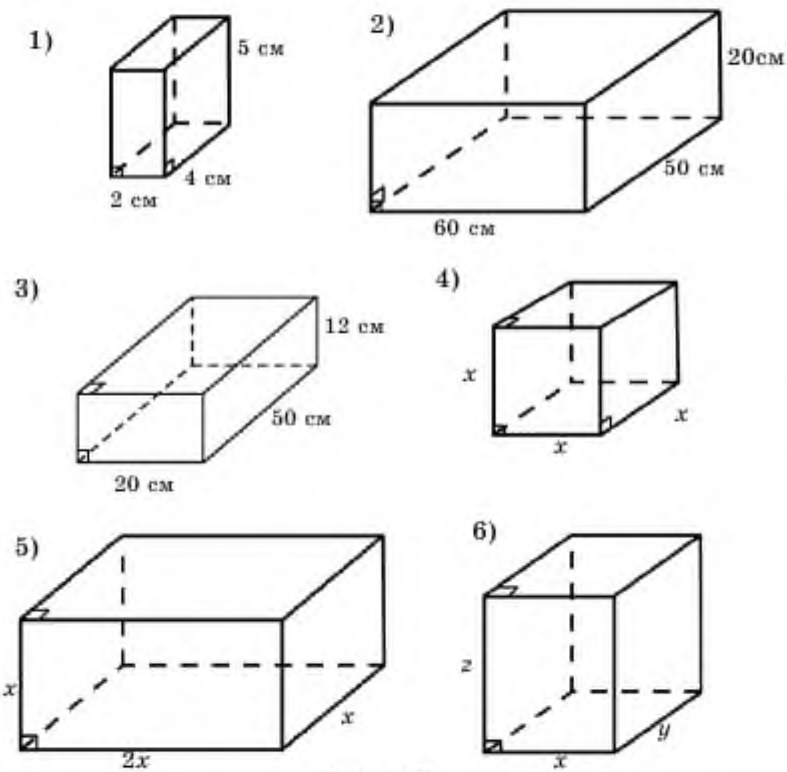


Рис. 1.33

1.63. Основанием прямой призмы служит ромб. Диагонали призмы равны 8 см и 5 см, а высота – 2 см. Найдите сторону ромба.

1.64. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как 7:24, высота параллелепипеда равна 5 см, а площадь боковой поверхности – 620 см^2. Найдите стороны основания.

1.65. Три измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 3:7:8, а площадь боковой поверхности равна 640 см^2. Найдите ребра параллелепипеда.

1.66. Диагонали прямого параллелепипеда равны 5 м и 8 м, высота – 2 м, а угол между диагоналями основания параллелепипеда – 60°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

1.67. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно a. Найдите площадь полной поверхности призмы.

▲ Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, в основании которой лежит равносторонний треугольник ABC. Все ребра призмы равны a.

Найти $S_{полн}$.

Решение: $\Delta ABC \Rightarrow AB = AC = BC = a \Rightarrow S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$P_{осн} = AB + AC + BC = 3a$, $h = AA_1 = a$,

$S_{полн} = 2S_{осн} + P_{осн} \cdot h = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a \cdot a = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)a^2 = \dfrac{6+\sqrt{3}}{2}a^2$. ■

1.68. Каждая грань наклонной призмы является ромбом с острым углом φ и стороной a. Найдите высоту призмы.

1.69. Куб диагональным сечением делится на две части. Изобразите развертку полученной части куба, если его ребро равно 4 см.

1.70. Все боковые грани правильной треугольной призмы – квадраты, а радиус окружности, вписанной в основание, равен r. Найдите площадь полной поверхности призмы.

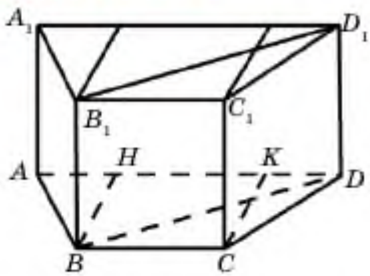
1.71. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция. Боковые стороны трапеции равны 13 см, а основания – 11 см и 21 см. Площадь диагонального сечения призмы равна 180 см². Найдите площадь полной поверхности призмы.

▲ Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – равнобедренная трапеция (рис. 1.34). $AD = 21$ см, $BC = 11$ см, $AB = 13$ см, $S_{BDD_1B_1} = 180$ см².

Найти $S_{полн}$.

Решение. $\Delta ABH \Rightarrow BH = 12$ см, $\Delta BHD \Rightarrow BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$ см, $S_{BDD_1B_1} = BD \cdot BB_1 \Rightarrow 20 \text{ см} \cdot BB_1 = 180 \text{ см}^2 \Rightarrow BB_1 = 9$ см.

$S_{полн} = 2 \cdot S_{ABCD} + (AB + BC + CD + AD) \cdot BB_1 = 2 \cdot \dfrac{11+21}{2} \cdot 12 + (13 + 11 + 13 + 21) \cdot 9 = 906 \text{ см}^2$. ■



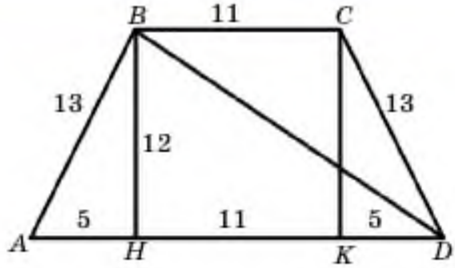


Рис. 1.34

C

1.72. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как 3:4, а площадь диагонального сечения равна 15 см^2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

1.73. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны 17 см, 10 см и 21 см. Найдите расстояние от большой грани до противоположного ребра.

1.74*. Найдите точку, равноудаленную от всех вершин прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник.

1.75. Если диагональ прямоугольного параллелепипеда с ребрами, имеющими с ней общую вершину, образует углы α, β и γ, то выполняется равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Докажите.

1.76. Если диагональ прямоугольного параллелепипеда с гранями, имеющими с ней общую вершину, образует углы α, β и γ, то выполняется равенство

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$$

Докажите.

Упражнение для повторения

1.77. 1) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 6. На стороне AB как на диаметре проведена окружность, которая пересекает сторону BC в точке D, причем $BD:DC=2:1$. Найдите длину стороны AC.

2) На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диа-

метре проведена окружность. Она пересекает гипотенузу в точке D так, что $AD:DB=1:3$. Высота, опущенная из вершины C на гипотенузу, равна 3. Найдите длину катета BC.

1.3. Пирамида и усеченная пирамида, их элементы

Изучив пункт, вы будете:

- *знать определение пирамиды и ее элементы, виды пирамид, сможете изображать их;*
- *находить проекцию вершины пирамиды на плоскость основания и применять это при решении задач;*
- *решать задачи на нахождение элементов пирамиды;*
- *знать определение усеченной пирамиды, изображать на плоскости;*
- *выводить формулы площадей боковой и полной поверхностей пирамиды (усеченной пирамиды) и применять их при решении задач;*
- *изображать развертку пирамиды.*

1.3.1. Пирамида и ее элементы. Правильная пирамида

Рассмотрим n-угольник $A_1A_2...A_n$ и точку S, расположенную вне плоскости этого n-угольника. Если соединить точку S с вершинами данного n-угольника, то получим треугольники SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1. Часть пространства, ограниченная этими треугольниками и многоугольником $A_1A_2..A_n$, называется ***пирамидой***. Точка S называется ***вершиной*** пирамиды, многоугольник $A_1A_2...A_n$ – ***основанием***, треугольники SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 – ***боковыми гранями***, а отрезки SA_1, SA_2, ..., SA_n – ***боковыми ребрами*** этой пирамиды, и ее записывают так: $SA_1A_2...A_n$ (рис. 1.35).

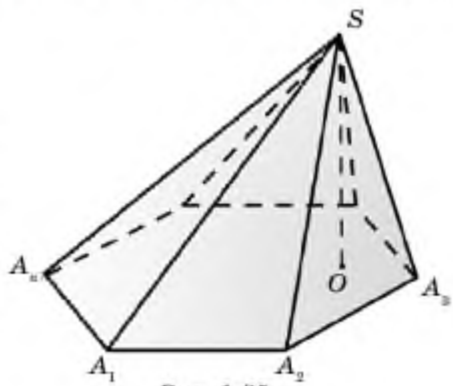


Рис. 1.35

В зависимости от количества вершин основания пирамиду иногда называют ***n-угольной пирамидой***. Например, на рис. 1.36 изображены треугольная, четырехугольная и пятиугольная пирамиды. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания, называется ***высотой*** этой пирамиды.

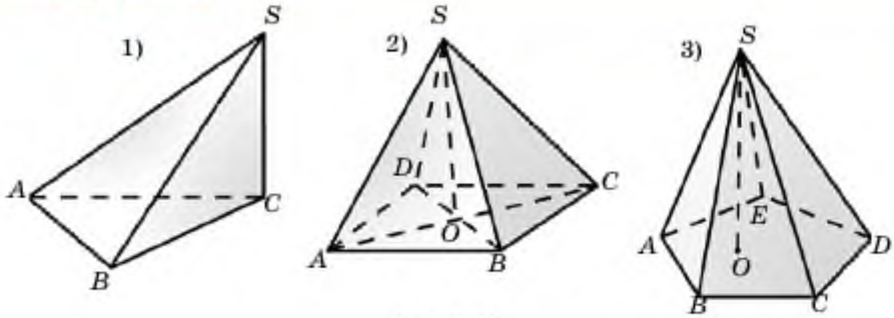


Рис. 1.36

Для правильного изображения пирамиды важно знать основание ее высоты. Например, на рис.1.36 (1) основанием высоты треугольной пирамиды является точка C, на рис.1.36 (2) основанием высоты четырехугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей четырехугольника. А на рис. 1.37 изображены две, на первый взгляд, одинаковые пирамиды. Основанием высоты первой пирамиды является точка пересечения медиан треугольника ABC, а основанием высоты второй пирамиды является середина стороны основания AC. Поэтому пирамиды разные.

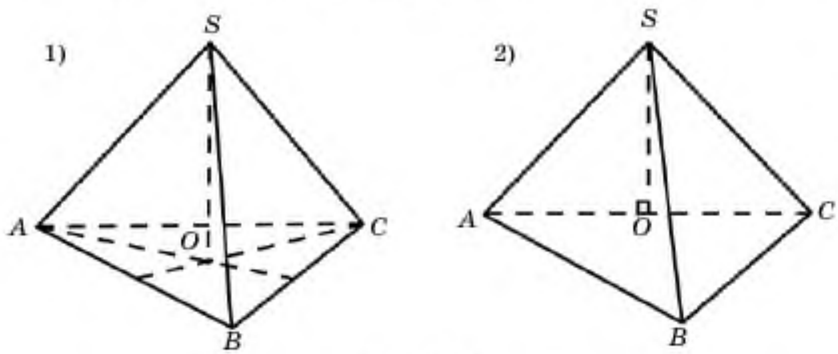


Рис. 1.37

Если основанием пирамиды является правильный многоугольник, а основание ее высоты совпадает с центром этого многоугольника, то эту пирамиду называют ***правильной пирамидой.*** Например, на рис. 1.37 (1) изображена правильная треугольная пирамида, на рис. 1.36 (2) – правильная четырехугольная пирамида, а на рис. 1.38 – правильная шестиугольная пирамида. Боковые ребра правильной пирамиды равны между собой, т.к. их проекции на плоскость основания равны, т.е. $AO=BO=CO=DO=EO=FO$ (рис. 1.38). Поэтому боковыми гранями правильной пирамиды являются равнобедренные треугольники, равные между собой.

Высота боковой грани правильной пирамиды называется ***апофемой***. На рис. 1.38 $SK \perp AF$, т.е. отрезок SK является апофемой боковой грани SAF.

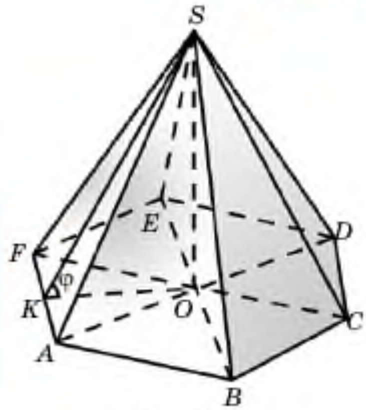


Рис. 1.38

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению ее апофемы и полупериметра основания, т.е. если l – апофема и p – полупериметр основания, то $S_{бок} = l \cdot p$.*

▲ Если апофема правильной пирамиды равна l, а сторона основания – a (рис. 1.38, $SK=l$, $AF=a$), то площадь грани SAF равна $\frac{1}{2}al$. А т.к. боковая поверхность состоит из n таких треугольников и полупериметр основания равен $\frac{na}{2}$, то $S_{бок} = n \cdot \frac{1}{2}al = l \cdot \frac{na}{2} = lp$. ■

В целом площадь боковой поверхности правильной пирамиды можно определить с помощью формулы ее ортогональной проекции.

Действительно, треугольник OAF является ортогональной проекцией боковой грани SAF (рис. 1.38). Если двугранный угол между этими треугольниками равен φ, то $S_{OAF} = S_{SAF} \cdot \cos\varphi$ или $S_{SAF} = \frac{S_{OAF}}{\cos\varphi}$. А т.к. $S_{бок} = n \cdot S_{SAF}$ и площадь основания пирамиды $S_{осн} = n \cdot S_{OAF}$, то $S_{бок} = n \cdot S_{SAF} = n \cdot \frac{S_{OAF}}{\cos\varphi} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$. Таким образом, получим формулу

$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}.$$

Творческая работа

Город Нур-Султан, Дворец мира и согласия – сооружение, которое не только поражает оригинальностью и величием, но и имеет огромное значение для казахстанского народа, символизируя дружбу, единство и мир. Основанием пирамиды является квадрат размером 62×62 м, ее высота также равна 62 м. Найдите площадь ее боковой поверхности (рис. 1.39).

▲ Сначала вычислим апофему боковой грани пирамиды: $BC = 62 \Rightarrow OK = \frac{62}{2}$. $\Delta HKO \Rightarrow \angle O = 90^\circ \Rightarrow$ по теореме Пифагора получим:

$$HK = \sqrt{HO^2 + OK^2} = \sqrt{62^2 + \left(\frac{62}{2}\right)^2} = \sqrt{4805}.$$

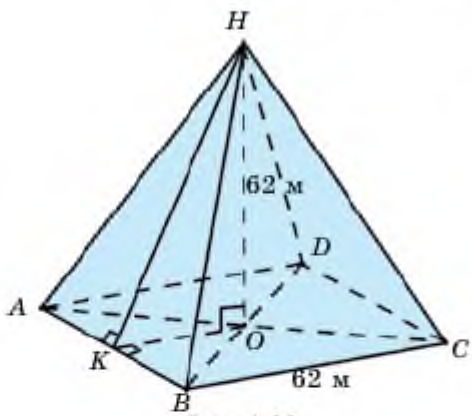


Рис. 1.39

Основанием пирамиды является квадрат, а его полупериметр таков:

$$P = \frac{62 \cdot 4}{2} = 124 \text{ м}.$$

По теореме 4 получим:

$$S_{бок} = l \cdot p = \sqrt{4805} \cdot 124 \approx 8595{,}4 \text{ м}^2.$$

Ответ: площадь боковой поверхности Дворца мира и согласия равна 8595,4 м². ■

1.3.2. Усеченная пирамида

Если n-угольную пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то получим многогранник, две грани (нижнее и верхнее основания) которого являются подобными n-угольниками, а боковые грани – трапециями. Полученный многогранник называется ***усеченной пирамидой.***

На рис. 1.40 (1) изображена пятиугольная усеченная пирамида $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Здесь плоскости α и β параллельны. Пятиугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ называются ***основаниями***, отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 – ***боковыми ребрами***, а трапеции ABB_1A_1, BCC_1B_1, ..., EAA_1E_1 – ***боковыми гранями*** усеченной пирамиды. Расстояние между плоскостями оснований называется ее ***высотой***.

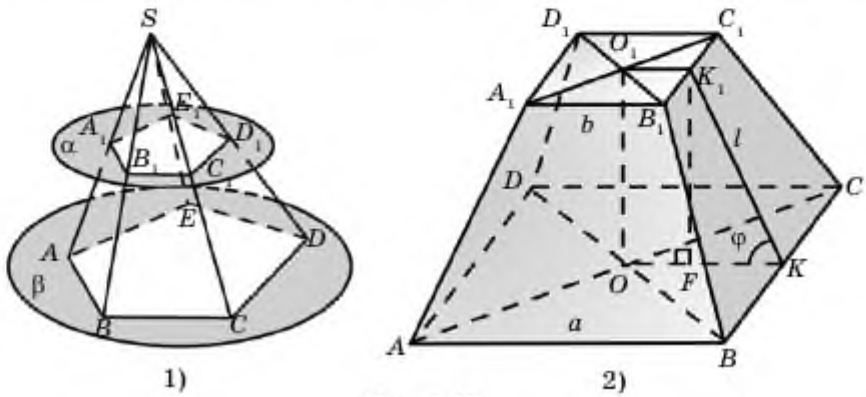


Рис. 1.40

Если усеченная пирамида является частью правильной пирамиды, то ее называют ***правильной усеченной пирамидой***. ***Апофемой правильной усеченной*** пирамиды называется часть апофемы полной пирамиды, ограниченная плоскостями оснований усеченной пирамиды. На рис. 1.40 (2) изображена правильная четырехугольная усеченная пирамида. Если полупериметры верхнего и нижнего оснований правильной усеченной пирамиды соответственно равны p_1 и p_2, то площадь ее боковой поверхности определяется по формуле

$$S_{бок} = (p_1 + p_2) \cdot l,$$

здесь l – апофема. А если двугранный угол при основании равен φ, то несложно доказать формулу

$$S_{бок} = \frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi},$$

здесь S_2 – площадь большего основания, а S_1 – площадь меньшего основания.

▲ Известно, что $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $KK_1 = l$. Тогда $O_1K_1 = OF = \frac{b}{2}$, $OK = \frac{a}{2}$ и $FK = \frac{a-b}{2}$. В прямоугольном треугольнике KFK_1 косинус угла φ таков:

$$\cos\varphi = \frac{FK}{KK_1} = \frac{a-b}{2l}.$$

Теперь покажем, чему равна площадь боковой поверхности усеченной пирамиды левой части доказываемой формулы:

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot S_{AA_1B_1B} = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot l = 2l \cdot (a+b).$$

Определим площади оснований усеченной пирамиды на рис. 1.40 (2):

$$S_2 = S_{ABCD} = a^2,\ S_1 = S_{A_1B_1C_1D_1} = b^2.$$

Подставив значение полученного косинуса угла φ в данное равенство, получим правую часть доказываемой формулы:

$$\frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi} = \frac{a^2 - b^2}{\dfrac{a-b}{2l}} = \frac{(a-b)(a+b)\cdot 2l}{(a-b)} = 2l\cdot(a+b) =$$

$$= (p_1 + p_2)\cdot l = S_{\text{бок}},$$

что и требовалось доказать, т.е.

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi}. \blacksquare$$

1. Какой многогранник называется пирамидой? Назовите ее элементы.
2. Какая пирамида называется правильной?
3. По каким формулам можно определить площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
4. Как определяется усеченная пирамида? Назовите ее элементы.
5. Какая усеченная пирамида называется правильной?
6. По каким формулам можно определить площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды? Докажите их.

Упражнения

А

Практическая работа

1.78. Из плотной бумаги изготовьте модель правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной.

1.79. На плотной бумаге изобразите развертку правильной шестиугольной: 1) пирамиды; 2) усеченной пирамиды. Из каждой развертки постройте соответствующий многогранник.

1.80. Назовите пирамиду и укажите ее развертку (рис. 1.41).

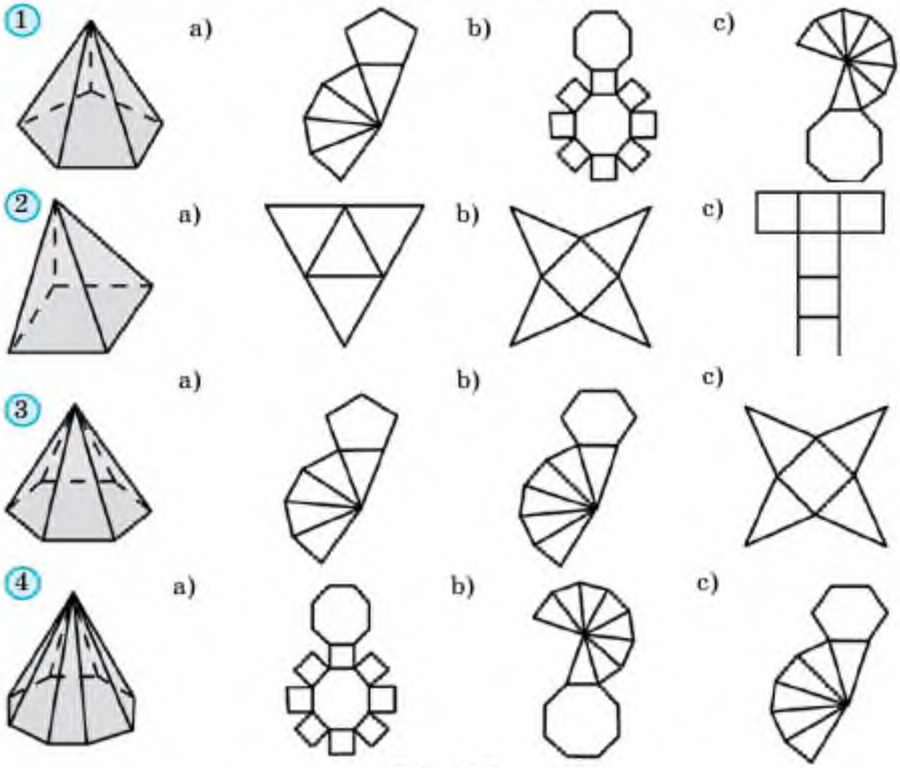


Рис. 1.41

1.81. Определите вид многогранника (рис. 1.42).

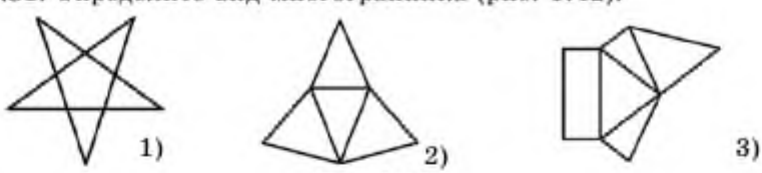


Рис. 1.42

1.82. Может ли плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды быть равным: 1) 20°; 2) 30°; 2) 60°; 3) 70°? Обоснуйте ответ.

1.83. Определите вид многогранника (рис. 1.43).

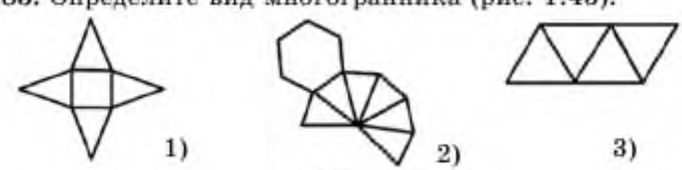


Рис. 1.43

1.84. Существует ли пирамида, количество ребер которой равно: 1) 8; 2) 13; 3) 98; 4) 127? Если существует, то найдите количество вершин основания. Обоснуйте ответ.

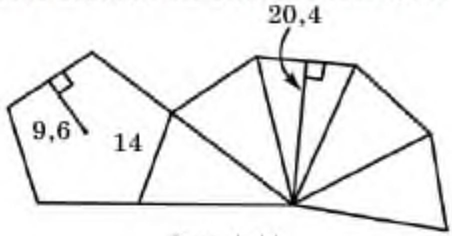


Рис. 1.44

1.85. Назовите многогранник (рис. 1.44), определите площади его боковой и полной поверхностей.

1.86. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а апофема – l. Найдите площадь боковой поверхности, если : 1) a=3 см, l=4 см; 2) a=8 м, l=7 м.

1.87. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен φ, а сторона основания – a. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если: 1) $\varphi = 45°$, $a = 3\sqrt{2}$ см; 2) $\varphi = 60°$, a=4 м.

1.88. Решите задачу **1.86**, вместо правильной треугольной пирамиды взяв правильную четырехугольную пирамиду.

▲ Дано: $PABCD$ – правильная четырехугольная пирамида, где основание пирамиды $ABCD$ – квадрат со стороной a и апофемой l.

Найти $S_{бок}$. 1) a=3 см, l=4 см; 2) a=8 м, l=7 м.

Решение. $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot l \Rightarrow P_{осн} = P_{ABCD} = 4a$.

1) $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (см²).

2) $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 = 112$ (м²) ■

Ответ: 1) $S_{бок}$ = 24 см²; 2) $S_{бок}$ = 112 м².

1.89. Решите задачу **1.87,** вместо правильной треугольной пирамиды взяв правильную четырехугольную пирамиду.

1.90. Постройте: 1) треугольную; 2) четырехугольную пирамиду, две боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания. Укажите основание ее высоты.

Рис. 1.45

1.91. Постройте пирамиду, основанием которой является равнобедренная трапеция, основанием высоты – точка пересечения диагоналей трапеции.

1.92. Стороны основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны a и b, а апофема – l. Найдите площадь боковой поверхности, если: 1) $a=3$ см, $b=5$ см, $l=4$ см; 2) $a=8$ м, $b=12$ м, $l=5$ м (рис. 1.45).

1.93. Решите предыдущую задачу, вместо правильной усеченной четырехугольной пирамиды взяв правильную усеченную треугольную пирамиду.

1.94. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 8 м, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 60°. Найдите: 1) боковое ребро; 2) площадь боковой поверхности.

1.95. Основанием пирамиды является квадрат со стороной, равной 5 см. Боковое ребро равно 7 см. Докажите, что площадь ее развертки равна $5\left(5+\sqrt{171}\right)$ см^2 (рис. 1.46).

1.96. Основанием пирамиды является ромб, диагонали которого равны 6 см и 8 см. Высота пирамиды равна 6 см. Докажите, что площадь ее развертки равна $3\left(8+\sqrt{26}\right)$ см^2 (рис. 1.47).

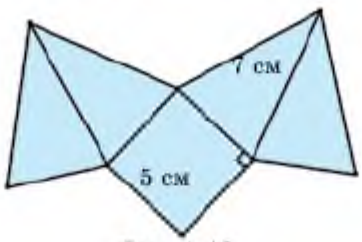


Рис. 1.46

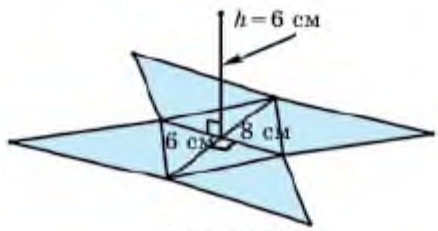


Рис. 1.47

1.97. Основанием пирамиды является правильный шестиугольник со стороной, равной 1 см. Высота пирамиды равна 3 см. Докажите, что площадь ее развертки равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{13})$ см^2 (рис. 1.48).

1.98. На рисунке 1.49 дан тетраэдр, у которого все ребра равны 3 см. Найдите: 1) высоту; 2) площадь полной поверхности тетраэдра (рис. 1.49).

1.99. Основанием пирамиды является квадрат и все ребра пирамиды равны 10 см. Докажите, что площадь ее полной поверхности такова: $S_{\text{полн}}=25\left(4+\sqrt{3}\right)$ см^2 (рис. 1.50).

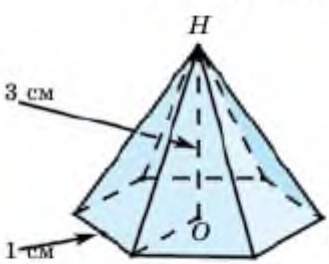


Рис. 1.48

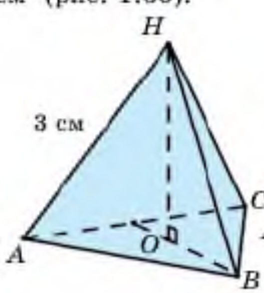


Рис. 1.49

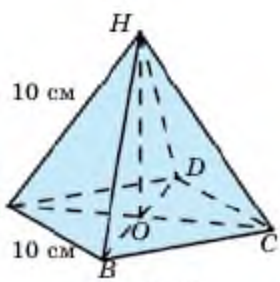


Рис. 1.50

1.100. На рис. 1.51 изображена композиция из пяти пирамид и одного параллелепипеда. Основанием параллелепипеда является квадрат со стороной 6 см. Высоты параллелепипеда и пирамиды равны 2 см. Докажите, что площадь полной поверхности многогранника равна $20\left(5+\sqrt{5}\right)$ см² (рис. 1.51).

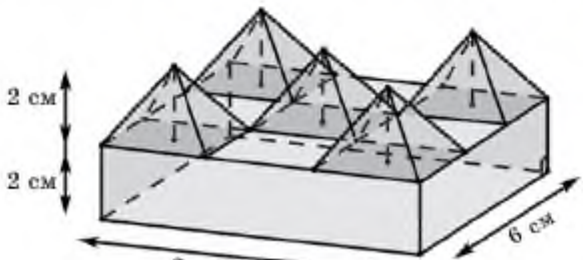


Рис. 1.51

В

1.101. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а ее высота – $\sqrt{22}$ см. Найдите: 1) апофему; 2) двугранный угол при основании; 3) угол между боковым ребром и плоскостью основания.

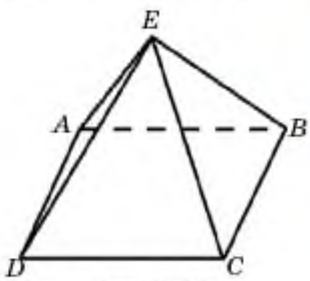


Рис. 1.52

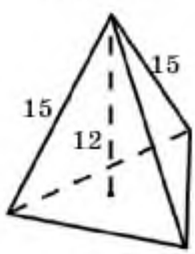


Рис. 1.53

Практическая работа

1.102. Крыша дома построена в виде правильной четырехугольной пирамиды (рис. 1.52). Боковое ребро крыши равно 4 м. Найдите высоту крыши, если длина дома равна 8 м.

1.103. Основанием треугольной пирамиды является правильный треугольник и все ее боковые ребра равны 15 см, а ее высота – 12 см. Найдите сторону основания (рис. 1.53).

1.104. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6 м, апофема – 5 м. Найдите: 1) высоту пирамиды; 2) двугранный угол при основании; 3) боковое ребро; 4) угол между боковым ребром и плоскостью основания; 5) плоский угол при вершине.

1.105. Основанием четырехугольной пирамиды является равнобокая трапеция, а центр описанной около нее окружности расположен на большом основании трапеции. Все боковые ребра пирамиды равны между собой. Постройте эту пирамиду. Определите основание высоты пирамиды.

1.106. Используйте условие предыдущей задачи, если меньшее основание трапеции и радиус описанной окружности равны 6 см, а высота пирамиды – 8 см. Найдите площадь полной поверхности и двугранный угол при большем основании трапеции.

1.107. Основание пирамиды есть параллелограмм со сторонами 3 см и 7 см, а одна из его диагоналей равна 6 см. Высота пирамиды, равная 4 см, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите: 1) боковые ребра; 2) площадь полной поверхности.

1.108. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды, равное b, образует с плоскостью основания угол φ. Найдите: 1) высоту; 2) диаметр окружности, описанной около основания; 3) сторону основания; 4) апофему; 5) площадь боковой поверхности пирамиды.

▲ Дано: $PABCDEF$ – правильная шестиугольная пирамида.

$AP = b$, $\angle PAO = \varphi$ (рис. 1.54).

Найти: 1) PO; 2) AD; 3) AB; 4) PK; 5) $S_{бок}$.

▲ Решение. 1) $\Delta APO \Rightarrow PO = AP \times \sin\varphi = b \cdot \sin\varphi$.

2) $AO = b \cdot \cos\varphi \Rightarrow AD = 2b \cdot \cos\varphi$.

3) ΔAOB – равносторонний, $AB = AO = b \cdot \cos\varphi$.

$$OK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} b \cdot \cos\varphi .$$

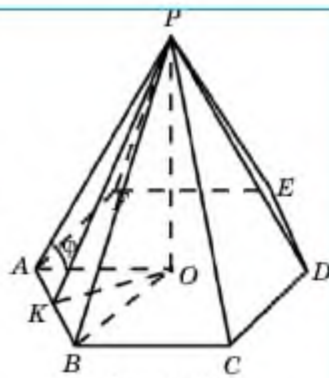


Рис. 1.54

$$\Delta POK \Rightarrow PK = \sqrt{KO^2 + PO^2} = \sqrt{\frac{3}{4} b^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi} = \frac{b}{2}\sqrt{4 - \cos^2\varphi}.$$

$$5)\ S_{бок} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot PK \cdot AB = 1{,}5 b^2 \cos\varphi \sqrt{4 - \cos^2\varphi}.$$ ■

1.109. Вершина пирамиды находится в центре верхней грани куба, а вершины основания – на серединах сторон нижней грани куба. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ребро куба равно a.

1.110. Стороны основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 см и 5 см, а высота – 2 см. Найдите диагональ усеченной пирамиды.

1.111. Стороны правильной треугольной усеченной пирамиды равны 2 см и 6 см, а двугранный угол между боковой гранью и большим основанием – 60°. Найдите его высоту.

1.112. Периметры оснований усеченной пирамиды относятся как 13:17, а периметр многоугольника, образованного сечением усеченной пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты параллельно основаниям, равен 45 см. Найдите периметры оснований усеченной пирамиды. Сколько сторон может иметь основание этой усеченной пирамиды?

1.113*. Основания треугольной усеченной пирамиды, боковые ребра которой равны между собой, являются прямоугольными треугольниками. Докажите, что грань, проходящая через гипотенузы оснований, перпендикулярна плоскости основания.

1.114. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция. Высота трапеции равна 5 см, а ее основания – 6 см и $4\sqrt{6}$ см. Боковые ребра пирамиды имеют длину 13 см и равны между собой. Найдите высоту пирамиды.

1.115. Основанием пирамиды является квадрат. Боковое ребро, равное стороне основания, перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Самое большое боковое ребро равно 12 см. Найдите высоту пирамиды.

1.116. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 и 2. Найдите высоту и апофему усеченной пирамиды, если ее боковое ребро равно 2.

C

1.117. В правильную четырехугольную усеченную пирамиду вписан куб так, что одна из граней куба совпадает с меньшим основанием усеченной пирамиды, а противоположная грань куба лежит на большем основании усеченной пирамиды. Ребро куба равно a, сторона меньшего основания усеченной пирамиды в два раза меньше стороны большего основания. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

1.118. Найдите сумму всех плоских углов n-угольной пирамиды.

1.119. Двугранный угол при основании правильной n-угольной пирамиды равен φ. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

1.120. Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2. Найдите площадь многоугольника, образованного сечением плоскости, проходящей через середину высоты параллельно основаниям усеченной пирамиды.

1.121. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

1.122. Основанием пирамиды является ромб с острым углом 60°. Сторона ромба и высота пирамиды равны a. Основание высоты пирамиды совпадает с вершиной острого угла ромба. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды (рис. 1.55).

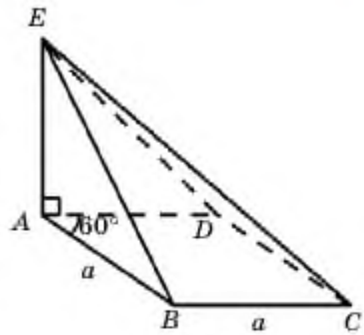


Рис. 1.55

1.123*. Если двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, то в многоугольник, являющийся основанием пирамиды, можно вписать окружность, и основание высоты пирамиды совпадет с центром этой окружности. Докажите.

Упражнение для повторения

1.124*. 1) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26 м и угол ABC равен 120°. Радиус окружности, вписанный в треугольник BCD, равен $\sqrt{3}$ м. Найдите длины сторон параллелограмма, если $AD > AB$.

2) Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$ м², $\angle BAC = 120°$ и $\angle ABC > \angle ACB$. Расстояние от вершины A до центра вписанной окружности равно 2 м. Найдите длину медианы, опущенной из вершины B.

1.4. Сечения многогранников плоскостями. Правильные многогранники

Изучив пункт, вы будете:

- *строить сечения многогранников плоскостью;*
- *знать определения правильных многогранников и различать виды правильных многогранников.*

1.4.1. Сечение многогранников

В пространстве фигура, образованная пересечением многогранника (тела) Φ и плоскости α, называется ***сечением*** данного многогранника, а плоскость α называется ***секущей плоскостью***. Любое сечение выпуклого многогранника является выпуклым многоугольником. Линия (точка) пересечения секущей плоскости α с плоскостью, проходящей через грань (ребро) многогранника, называется ***следом*** секущей плоскости. Например, на рис. 1.56 изображено сечение четырехугольной призмы плоскостью α. При пересечении призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с плоскостью α получено сечение $PQRT$. Точки P, Q, R и T являются следом плоскости α на отрезках DD_1, CC_1, BB_1 и AA_1 соответственно, а точка N – следом плоскости α на прямой BC. Аналогично прямая QR является следом плоскости α, проходящей через грань BB_1C_1C, а прямая KN – следом плоскости α на плоскости основания. Итак, чтобы найти след секущей плоскости на другой плоскости, достаточно знать положение двух точек, принадлежащих этому следу.

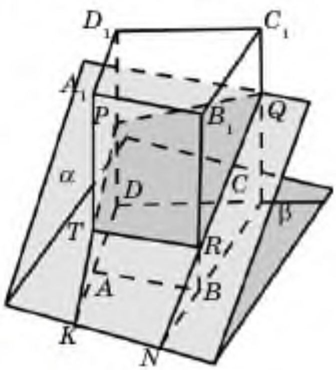


Рис. 1.56

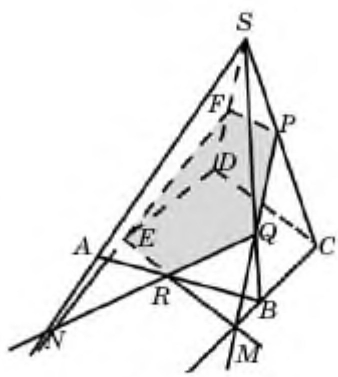


Рис. 1.57

Пример 1. Даны точки R, Q и P, принадлежащие ребрам AB, BS и CS пирамиды $SABCD$, соответственно. Нужно построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки P, Q, R (рис. 1.57).

▲ Чтобы построить искомое сечение, необходимо найти следы секущей плоскости α на гранях пирамиды. Для этого достаточно найти точки пересечения плоскости α с ребрами пирамиды.

По условию плоскость α пересекает ребра SC, SB и AB в точках P, Q и R соответственно, т.е. пересекает грань SBC вдоль прямой PQ, а грань SAB – вдоль прямой QR. Теперь определим прямую пересечения α с плоскостью основания. Известно положение только одной точки R, принадлежащей этой плоскости: $R \in \alpha \cap AB$. Вторая точка M этой прямой является точкой пересечения прямых PQ и BC.

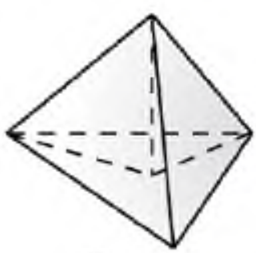
Действительно, т.к. $M = BC \cap PQ$, то $BC \subset SBC$, $PQ \subset SBC$. С другой стороны, т.к. $M = BC \cap (ABCD)$ и $M \in PQ \subset \alpha$, то M лежит на прямой пересечения плоскостей α и $ABCD$. Итак, прямая MR является следом плоскости α на плоскости основания. Тогда мы можем найти точку $E = MR \cap AD$. Аналогично определяется точка $F = \alpha \cap SD$ (рис. 1.57). Следовательно, $PQREF$ – искомое сечение. ■

1.4.2. Правильные многогранники

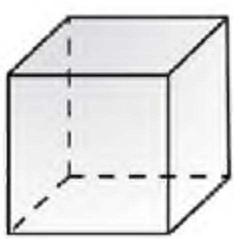
Если все грани выпуклого многогранника являются равными между собой правильными многоугольниками, и в каждой вершине многогранника сходится одинаковое количество ребер, то этот многогранник называется ***правильным многогранником***.

Доказано, что существует только пять выпуклых правильных многогранников, которые называются также телами Платона. На рис.1.58 (1, 2) изображены ***тетраэдр*** (правильный четырехгранник), ***гексаэдр*** (правильный шестигранник – ***куб***), ***октаэдр*** (правильный восьмигранник), ***додекаэдр*** (правильный двенадцатигранник) и ***икосаэдр*** (правильный двадцатигранник).

Все грани тетраэдра являются правильными треугольниками, в каждой вершине сходится по три ребра. Итак, тетраэдр – это треугольная пирамида, все ребра которой равны между собой. Нельзя путать понятие тетраэдра с понятием правильной треугольной пирамиды. В правильной треугольной пирамиде все боковые грани – равные между собой равнобедренные треугольники, а основанием этой пирамиды является равносторонний треугольник.



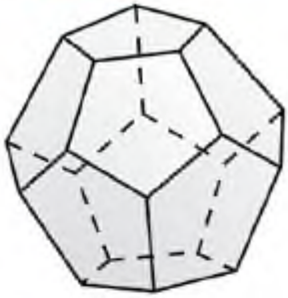
Тетраэдр



Гексаэдр (куб)

Октаэдр

Рис. 1.58 (1)



Додекаэдр

Икосаэдр

Рис. 1.58 (2)

Куб – правильный многогранник, известный нам с младших классов. Его грани – равные между собой квадраты, в каждой вершине сходится по три ребра. С помощью куба можно построить тетраэдр и октаэдр. На рис. 1.59 с помощью скрещивающихся диагоналей противоположных граней куба и центров его граней показаны способы построения тетраэдра и октаэдра соответственно.

Октаэдр имеет 8 граней, которые являются правильными треугольниками, 12 ребер, 6 вершин, в каждой из которых сходится по 4 ребра.

Додекаэдр имеет 12 граней, которые являются правильными пятиугольниками, 30 ребер и 20 вершин, в каждой из которых сходится по 3 ребра.

Икосаэдр имеет 20 граней, которые являются правильными треугольниками, 30 ребер и 12 вершин, в каждой из которых сходится по 5 ребер.

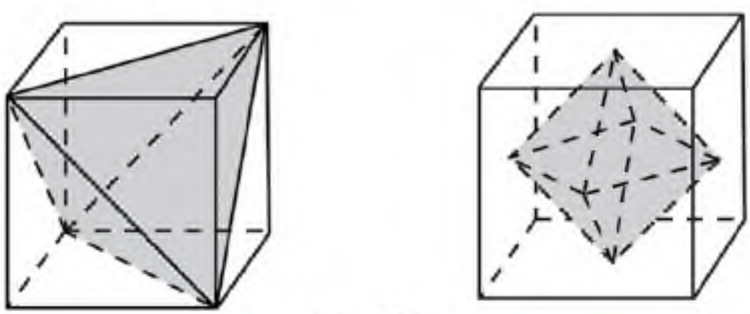


Рис. 1.59

Дополнительные электронные ресурсы

https://vuzlit.ru/930013/istoricheskie_svedeniya_pravilnyh_mnogogrannikah

1. Что называется сечением многогранника? Что такое секущая плоскость?
2. Что называется следом секущей на поверхности (на ребрах) многогранника?
3. Какие многогранники называются правильными? Сколько видов их существует?
4. Каково различие между тетраэдром и правильной треугольной пирамидой?

Упражнения

А

Практическая работа

1.125. Из плотной бумаги сделайте развертку: 1) тетраэдра; 2) гексаэдра; 3) октаэдра. Из каждой развертки постройте соответствующий многогранник.

1.126. С помощью деревянного бруска изготовьте модель прямоугольного параллелепипеда и вдоль некоторой плоскости распилите этот параллелепипед.

1.127. Из сделанных из плотной бумаги увеличенного масштаба разверток додекаэдра и икосаэдра (рис. 1.60) постройте соответствующий многогранник.

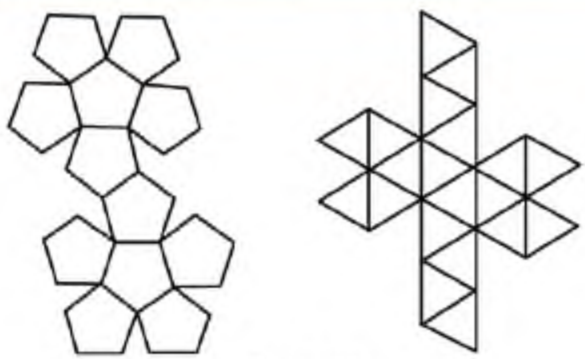


Рис. 1.60

1.128. Молекулы хлорида натрия, больше известные как поваренная соль, располагаются на вершинах фигуры, подобной октаэдру. В кристаллической конфигурации молекулы имеют общие ребра. Определите, сколько общих ребер может иметь одна молекула хлорида натрия с другими молекулами (рис.1.61).

▲ Чтобы определить, сколько общих ребер может иметь одна молекула хлорида натрия с другими молекулами, нужно знать, сколько ребер имеет эта молекула. Так как молекула имеет форму, подобную октаэдру, то она имеет 8 граней и 6 вершин. По формуле Эйлера

$$n - m + k = 2,$$

где n – количество вершин многогранника, m – количество ребер, а k – количество граней.

$$6 - m + 8 = 2 \Rightarrow m = 12$$

Итак, молекула хлорида натрия с другими молекулами имеет 12 общих ребер. ■

Рис. 1.61

1.129. Найдите площадь диагонального сечения куба, если его ребро равно: 1) 5 см; 2) 8 см; 3) $3\sqrt{2}$ м.

1.130. Найдите угол между диагоналями граней куба, сходящихся в одной точке.

1.131. Будет ли многогранник правильным, если его вершины расположены в центрах граней: 1) гексаэдра; 2) тетраэдра? Как называется этот многогранник?

1.132. Из скольких правильных четырехугольных пирамид состоит октаэдр? Каково отношение высоты этой пирамиды к длине основания?

1.133. Будет ли многогранник правильным, если его вершинами являются середины ребер: 1) тетраэдра; 2) октаэдра? Как называется этот многогранник?

1.134. Найдите площадь диагонального сечения октаэдра, если его ребро равно: 1) 5 см; 2) 12 см.

1.135. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребро AB и образующей с основанием $ABCD$ угол, равный: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

1.136. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через ребро AB и через: 1) вершину C_1; 2) середину ребра CC_1.

1.137. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, если секущая плоскость проходит через ребро AB и середину ребра SC. Найдите площадь этого сечения, если $AB=SA=4$ см.

1.138. Основанием пирамиды (рис. 1.62) является прямоугольник с ребрами, равными 5 см и 15 см. Боковые ребра образуют с плоскостью основания угол, равный 60^0. Докажите, что площадь сечения AHC равна $\frac{125\sqrt{3}}{2}$ см^2.

1.139. Основанием пирамиды является прямоугольник с ребрами, равными 6 см и 9 см. Высота пирамиды 8 см и ее основание совпадает с вершиной A. Докажите, что площадь сечения AHC равна $12\sqrt{13}$ см^2 (рис.1.63).

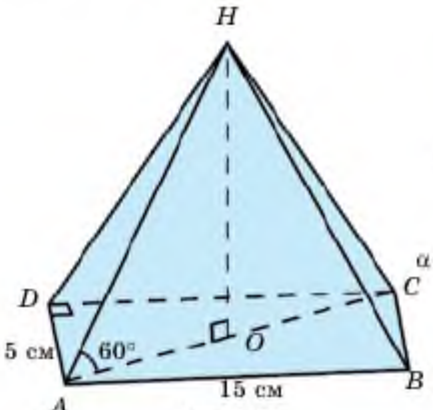


Рис. 1.62

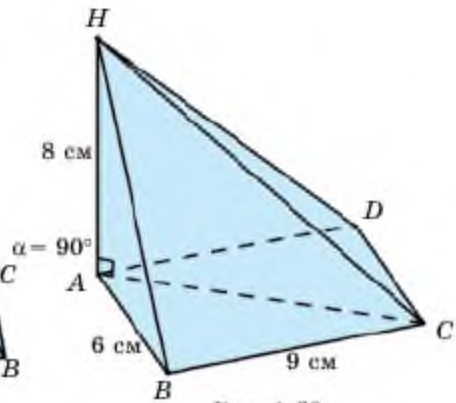


Рис. 1.63

1.140. Основаниями усеченной пирамиды являются квадраты с ребрами, равными 14 см и 9 см, а боковые ребра образуют с плоскостью основания угол, равный 60^0. Докажите, что площадь диагонального сечения равна $\frac{115\sqrt{3}}{2}$ см^2 (рис. 1.64).

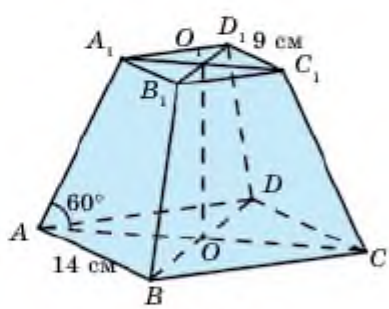


Рис. 1.64

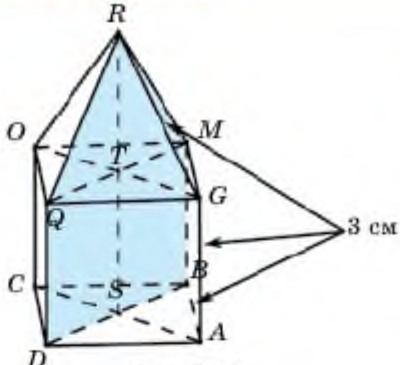


Рис. 1.65

1.141. Дан многогранник, составленный из куба и пирамиды (рис. 1.65). Все ребра многогранника равны 3 см. Докажите, что площадь диагонального сечения равна $9\left(0,5+\sqrt{2}\right)$ см^2.

B

1.142. Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм, стороны которого равны 2 см и 5 см, а острый угол равен 30°. Сечение параллелепипеда, проходящее через меньшее основание параллелограмма, образует с плоскостью основания угол, равный 60°, а две другие вершины сечения расположены на боковых ребрах параллелепипеда. Найдите площадь сечения.

1.143. Через середины смежных сторон основания перпендикулярно его плоскости проведено сечение правильной четырехугольной пирамиды. Найдите площадь этого сечения, если высота пирамиды равна h, а боковое ребро – b, ($b>h$).

1.144. В правильной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $AB=12$ см, $A_1B_1=4$ см, а ее высота равна 4 см. Найдите площадь сечения ABC_1D_1.

1.145. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Постройте сечение куба, проходящее через середины ребер AB, AD, B_1C_1 и C_1D_1. Найдите площадь этого сечения.

1.146. Будет ли многогранник правильным, если его вершинами являются середины ребер октаэдра? Найдите площадь полной поверхности полученного многогранника, если ребро октаэдра равно a.

1.147. Постройте сечение прямой четырехугольной призмы, проходящее через три точки P, Q и R, принадлежащие трем боковым ребрам призмы.

1.148. Найдите двугранный угол тетраэдра.

1.149. Найдите двугранный угол $\angle QKP = \varphi$ октаэдра (рис. 1.66).

▲ Дано: $ABCDPQ$ – октаэдр, $\angle QKP = \varphi$

Найти φ.

Решение. $PKQT$ – ромб,

$KT = a$, $KO = \dfrac{a}{2}$.

ΔAQB – равносторонний,

$QK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. $\Delta KOQ \Rightarrow QO =$

$= \sqrt{QK^2 - KO^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow PQ = \sqrt{2}a$.

По теореме косинусов

$PQ^2 = KQ^2 + KP^2 - 2 \cdot KQ \cdot KP \cdot \cos\varphi$,

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}a^2 - 2a^2}{2 \cdot \frac{3}{4}a^2} = -\frac{1}{3},\ \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

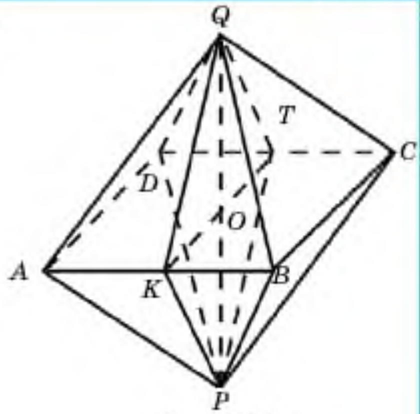


Рис. 1.66

Ответ: $\arccos\varphi\left(-\dfrac{1}{3}\right)$. ■

1.150. Площади оснований усеченной пирамиды равны 2 см^2 и 32 см^2, а ее высота разделена на три равные части. Найдите площади сечений, параллельных основаниям усеченной пирамиды и проходящих через точки деления высоты.

C

1.151. Покажите, что противоположные грани октаэдра параллельны, и найдите расстояние между ними, если ребро октаэдра равно a.

1.152. Сечение правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны a, проходит через середины смежных сторон основания и середину высоты пирамиды. Постройте это сечение и найдите его площадь (рис. 1.67).

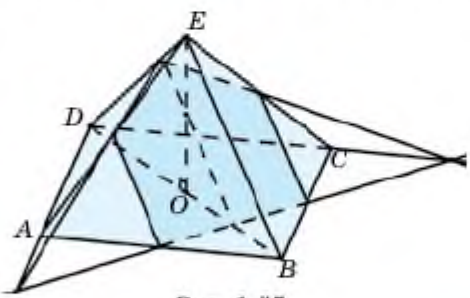


Рис. 1.67

1.153. Высота правильной четырехугольной пирамиды, равная h, образует с боковым ребром угол φ. Найдите площадь сечения, проходящего через диагональ основания и образующего с плоскостью основания угол γ.

1.154*. Если сумма плоских углов при каждой вершине треугольной пирамиды равна $180°$, то этот многогранник является тетраэдром. Докажите.

1.155. В правильной пирамиде $SABC$ дано: $AS = b$, $\angle ASB = 90°$, ΔABC – равносторонний, точка K делит ребро BC в отношении $1:2$, т.е $BK : KC = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника ASK (рис. 1.68).

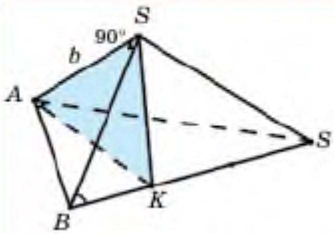


Рис. 1.68

▲ Дано: $SABC$ – правильная пирамида, $AS = b$, $\angle ASB = 90°$, $BK : KC = 1 : 2$.

Найти S_{ASK}.

Решение: 1) $\Delta ASB \Rightarrow AS = b, BS = b \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2}b$. $BC = \sqrt{2}b \Rightarrow BK = \dfrac{\sqrt{2}}{3}b$,

$\angle ABK = 60° \Rightarrow$ по теореме косинусов

$$AK^2 = AB^2 + BK^2 - 2AB \cdot BK \cdot \cos 60° = 2b^2 + \frac{2}{9}b^2 - \frac{4}{3}b^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{9}b^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AK = \frac{\sqrt{14}}{3}b.$$

2) $\Delta BSK \Rightarrow BK = \dfrac{\sqrt{2}}{3}b$, $\angle SBK = 45°$, $AK = \dfrac{\sqrt{14}}{3}b \Rightarrow$ по теореме косинусов

$$SK^2 = BS^2 + BK^2 - 2BS \cdot BK \cdot \cos 45° = b^2 + \frac{2}{9}b^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}b^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= \frac{5}{9}b^2 \Rightarrow SK = \frac{\sqrt{5}}{3}b.$$

3) $\Delta ASK \Rightarrow AS = b$, $AK = \dfrac{\sqrt{14}}{3}b$, $SK = \dfrac{\sqrt{5}}{3}b \Rightarrow$ полупериметр $\Delta ASK \Rightarrow$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2}\left(b + \frac{\sqrt{14}}{3}b + \frac{\sqrt{5}}{3}b\right) = \frac{b}{6}\left(3 + \sqrt{14} + \sqrt{5}\right) \Rightarrow$$ по формуле Герона

$$S_{ASK} = \sqrt{p(p - AS) \cdot (p - AK) \cdot (p - SK)} =$$

$$\sqrt{\frac{b}{6}\left(3+\sqrt{14}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{14}}{6}b+\frac{\sqrt{5}}{6}b-b\right)\times \times\left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{14}}{6}b+\frac{\sqrt{5}}{6}b-\frac{\sqrt{14}}{3}b\right)\cdot\left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{14}}{6}b+\frac{\sqrt{5}}{6}b-\frac{\sqrt{5}}{3}b\right)}=$$

$$=\left(\frac{b}{6}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}+3\right)\cdot\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}-3\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}-\sqrt{14}\right)\cdot\left(3+\sqrt{14}-\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\left(\frac{b}{6}\right)^2\sqrt{\left(\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}\right)^2-9\right)\left(9-\left(\sqrt{5}-\sqrt{14}\right)^2\right)}=$$

$$=\left(\frac{b}{6}\right)^2\sqrt{10+2\sqrt{70}\cdot\left(2\sqrt{70}-10\right)}=\frac{b^2\sqrt{180}}{36}=\frac{b^2\sqrt{5}}{6}.$$

$$S_{ASK}=\frac{b^2\sqrt{5}}{6}.$$ ■

1.156. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат со стороной a, а боковое ребро равно b. Отрезок AA_1 составляет равные углы φ с ребрами, имеющими с ним общую вершину. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда.

1.157. Докажите, что сечение A_1BD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ делит диагональ AC_1 в отношении 1:2.

1.158. Постройте сечение прямых призм, проходящее через три указанные точки (рис.1.69).

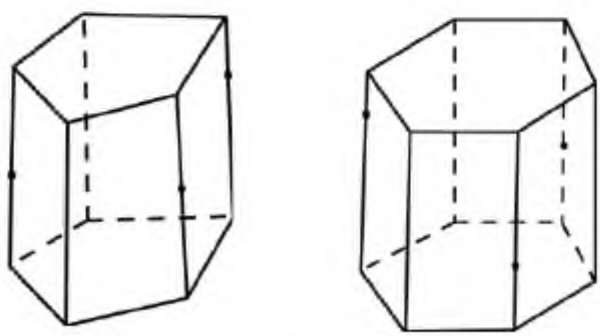


Рис. 1.69

Упражнение для повторения

1.159. 1) В равнобокую трапецию вписана окружность. Найдите большее основание трапеции, если радиус окружности равен 2, а площадь трапеции равна 20.

2) В равнобокую трапецию вписана окружность. Найдите меньшее основание трапеции, если радиус окружности равен 3, а большее основание трапеции равно 18.

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Многогранник	Көпжақ	Polyhedron
Призма	Призма	Prism
Параллелепипед	Параллелепипед	Parallelepiped
Пирамида	Пирамида	Pyramid
Усеченная пирамида	Қиық пирамида	Truncated pyramid
Правильный многогранник	Дұрыс көпжақ	Regular polyhedron
Площадь боковой поверхности	Бүйір бетінің ауданы	Surface area
Развертка многогранника	Көпжақтың жазбасы	Net of a polyhedron
Основание многогранника	Көпжақтың табаны	Base of a polyhedron
Вершины многогранника	Көпжақтың төбелері	Vertices of a polyhedron

Выводы раздела «МНОГОГРАННИКИ»

1) Сумма всех плоских углов при вершине многогранного угла меньше 360° и каждый плоский угол меньше суммы других плоских углов.

2) Множество всех граничных точек ограниченной фигуры $Ф$ называется ее ***поверхностью***, а множество всех внутренних точек фигуры $Ф$ и множество всех точек ее поверхности – ***геометрическим телом***.

3) Геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называется ***многогранником.*** Каждый многоугольник, ограничивающий многогранник, называется его *гранью*, а сторона этого многоугольника – ***ребром*** многогранника. Концы ребер многогранника называются его ***вершинами***, а отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, – ***диагональю*** этого многогранника.

4) Если поверхность многогранника разрезать вдоль некоторых его ребер и развернуть так, что все его грани будут лежать в одной плоскости, то на плоскости получим фигуру, называемую ***разверткой*** этого многогранника.

5) Сумма площадей всех граней многогранника называется ***площадью полной поверхности*** этого многогранника и обозначается через $S_{полн}$.

6) Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и в этой точке делятся пополам.

7) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его трех измерений (ширины, длины и высоты).

8) Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению ее высоты на периметр основания.

9) Чтобы определить площадь полной поверхности призмы, достаточно прибавить к площади боковой поверхности удвоенную площадь основания: $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

10) Если основанием пирамиды является правильный многоугольник, а основание ее высоты совпадает с центром этого многоугольника, то эту пирамиду называют ***правильной пирамидой***. Высота боковой грани правильной пирамиды называется ***апофемой***.

11) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению ее апофемы и полупериметра основания, т.е. если l – апофема и p – полупериметр основания, то $S_{бок} = l \cdot p$.

12) Если полупериметры верхнего и нижнего оснований правильной усеченной пирамиды соответственно равны p_1 и p_2, то площадь ее боковой поверхности определяется по формуле

$$S_{бок} = (p_1 + p_2) \cdot l, \text{ где } l \text{ – апофема.}$$

13) В пространстве фигура, образованная пересечением многогранника (тела) Φ и плоскости α, называется ***сечением*** данного многогранника, а плоскость называется ***секущей плоскостью.***

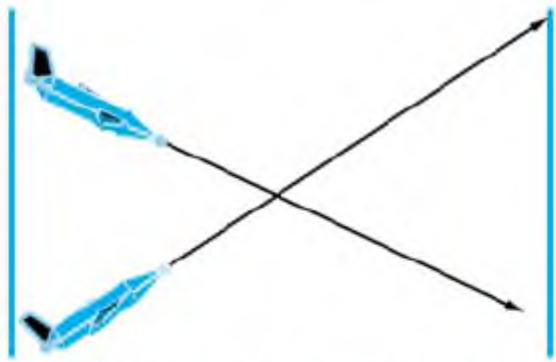
14) Линия (точка) пересечения секущей плоскости α с плоскостью, проходящей через грань (ребро) многогранника, называется ***следом*** секущей плоскости.

Раздел 2. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

В этом разделе вы познакомитесь с еще одним интереснейшим методом изучения геометрических фигур – методом аналитической геометрии и научитесь применять его.

Темы, рассматриваемые в разделе

2.1. Уравнения прямой и плоскости в пространстве.
2.2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.
2.3. Нахождение расстояний в пространстве.
2.4. Нахождение углов в пространстве.



В результате изучения материалов раздела вы узнаете, в каком случае данные самолеты не смогут столкнуться.

2.1. Уравнение прямой и плоскости

Изучив пункт, вы будете:

- *знать и применять уравнение прямой, заданной направляющим вектором, и уравнение плоскости, заданной вектором нормали;*
- *знать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, и научитесь применять его.*

2.1.1. Уравнение прямой и плоскости в пространстве

Работа в группе
Отвечая на заданные вопросы, выполните следующее задание.

I задание. 1) Можно ли провести прямую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{p}(m; n; k)$? Если да, то сколько прямых, проходящих через точку M_0 параллельно вектору $\vec{p}$, можно провести?

2) Пусть $M(x; y; z)$ произвольная точка прямой l. Объясните, как будут располагаться векторы $\overline{M_0M}$ и $\vec{p}$ в пространстве.

3) Как пишется условие коллинеарности векторов в пространстве? Напишите координаты вектора $\overline{M_0M}$ и условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $\vec{p}$.

4) Обозначьте коэффициент пропорциональности через t и покажите, что условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $\vec{p}$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases}$$

Как называется это уравнение? Напишите параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; -1; 0)$ параллельно вектору $\vec{p}(3; 2; -2)$.

Итак, параметрическое уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{p}(m; n; k)$, записывается следующим образом (рис. 2.1):

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases} \qquad (1)$$

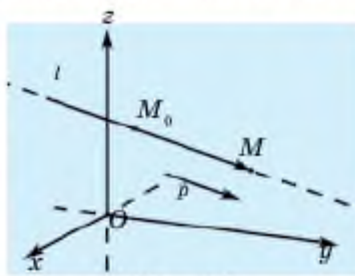


Рис. 2.1

Ссылка на 3D-иллюстрацию: https://www.geogebra.org/m/cgepxeaw

Если в каждом уравнении данной системы параметр t выразить через другие переменные, то получим следующее уравнение:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}. \qquad (2)$$

Это уравнение называется ***каноническим уравнением*** прямой.

Работа в группе

Отвечая на заданные вопросы, выполните следующее задание.

II задание. 1) Можно ли провести плоскость, проходящую через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}(a; b; c)$? Если да, то сколько плоскостей можно провести, проходящих через точку M_0, перпендикулярно вектору $\vec{n}$? Как называется вектор $\vec{n}$?

2) Пусть $M(x; y; z)$ произвольная точка этой плоскости α. Объясните, как будут располагаться векторы $\overline{M_0M}$ и $\vec{n}$ в пространстве. Чему равно значение скалярного произведения $\vec{n} \cdot \overline{M_0M}$?

3) Напишите координаты вектора $\overline{M_0M}$ и условие перпендикулярности векторов $\overline{M_0M}$ и $\vec{n}$. Можно ли записанное условие перпендикулярности принимать в качестве уравнения плоскости α? Если да, то как это уравнение называется?

4) Как из уравнения $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ получить общее уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$?

5) Напишите общее уравнение плоскости, если $M_0(1; 2; 3)$ и $\vec{n}(2; -3; 4)$.

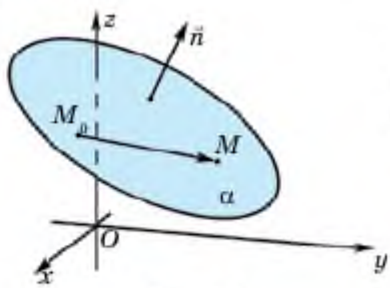


Рис. 2.2

https://www.geogebra.org/m/nd7ck4z3

Итак, уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (рис. 2.2), записывается так:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

Отсюда, предполагая $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, покажите, что ***общее уравнение*** плоскости записывается следующим образом:

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (4)$$

2.1.2. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Пусть нам даны неколлинеарные векторы $\vec{p}_1(m_1; n_1; k_1)$ и $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$.

Рассмотрим вектор $\vec{n}(n_1k_2 - n_2k_1;\ k_1m_2 - k_2m_1; m_1n_2 - m_2n_1)$. $\qquad$ (5)

Работа в группе

Выполните следующее задание.

1) С помощью векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ и формулы (1) найдите координаты вектора $\vec{n}$. 2) Найдите скалярные произведения $\vec{n}\cdot\vec{p}_1$ и $\vec{n}\cdot\vec{p}_2$. 3) Результаты обсудите вместе с классом и сделайте выводы. Всегда ли верны утверждения $\vec{n}\perp\vec{p}_1$ и $\vec{n}\perp\vec{p}_2$? 4) Существует ли плоскость α, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и параллельная векторам $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$? Если существует, то будет ли эта плоскость единственной? 4) Объясните, как можно написать уравнение этой плоскости α и напишите его. Здесь векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ называются ***направляющими векторами*** плоскости α.

Задание 1-й группы	Задание 2-й группы
$\vec{p}_1(1; 2; -1)$, $\vec{p}_2(3; -2; 1)$, $M_0(2; 0; 1)$	$\vec{p}_1(1; 2; 3)$, $\vec{p}_2(-1; 3; 2)$, $M_0(2; -4; 1)$
Задание 3-й группы	**Задание 4-й группы**
$\vec{p}_1(2; 4; 1)$, $\vec{p}_2(1; 2; -3)$, $M_0(3; 1; 4)$	$\vec{p}_1(2; 5; -3)$, $\vec{p}_2(4; 1; 1)$, $M_0(0; 3; 1)$

В общем случае векторы $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ и $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ перпендикулярны вектору $\vec{n}$, определяемого формулой (5) (рис. 2.3).

Итак, если плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно векторам $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ и $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$, то ее уравнение записывается так:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} a = n_1k_2 - n_2k_1, \\ b = k_1m_2 - k_2m_1, \\ c = m_1n_2 - m_2n_1. \end{cases} \quad (7)$$

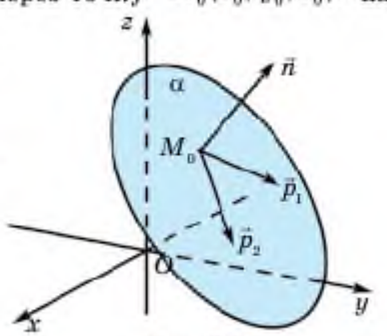


Рис. 2.3

https://www.geogebra.org/classic/np3tbc8p

Работа в группе

Выполните следующее задание.

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$. Сначала выясните, какую из заданных точек можно брать в качестве M_0, и какие векторы принимаются в качестве векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, затем приступайте к выполнению следующего задания.

Задание 1-й группы	Задание 2-й группы
$M_1(0; 7; 2)$, $M_2(0; 1; 6)$, $M_3(-1; 5; 0)$	$M_1(4; -4; 10)$, $M_2(4; 10; -2)$, $M_3(2; 8; 4)$
Задание 3-й группы	**Задание 4-й группы**
$M_1(6; 6; -5)$, $M_2(4; -9; 5)$, $M_3(4; 6; -1)$	$M_1(7; 2; 2)$, $M_2(4; -2; 4)$, $M_3(2; 3; 7)$

2.1.3. Определение направляющего вектора прямой, заданной общим уравнением

В пространстве прямую можно задавать в виде пересечения двух плоскостей. Если уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ заданы две плоскости, то следующей системой уравнений определяется некоторая прямая в пространстве:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Систему уравнений (8) называют ***общим уравнением*** прямой.

Работа в группе

Найдите способы решения следующей проблемы.

Как можно найти направляющий вектор прямой и координаты точки, лежащей на этой прямой, заданной общим уравнением? Выполните следующее задание.

Задание 1-й группы	Задание 2-й группы
$\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0, \\ 3x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0, \\ 3x - 2y - 5z - 6 = 0 \end{cases}$
Задание 3-й группы	**Задание 4-й группы**
$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 4x + y - 3z - 3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 4y - 2z + 3 = 0, \\ 3x + y + z - 5 = 0 \end{cases}$

Итак, направляющий вектор прямой, заданной общим уравнением (4), определяется так (рис. 2.4): $\vec{p}(b_1c_2 - b_2c_1;\ c_1a_2 - c_2a_1;\ a_1b_2 - - a_2b_1)$ (9)

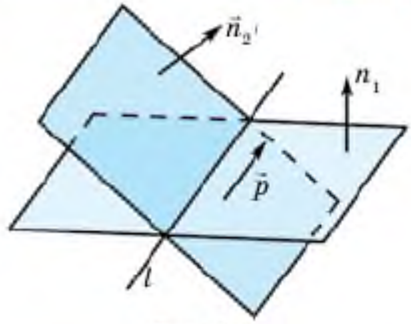


Рис. 2.4

https://www.geogebra.org/classic/pzrzrhtb

Пример 1. Написать каноническое уравнение прямой l, заданной общим уравнением:

$$\begin{cases} 2x - 5y - 7 = 0, \\ x + 3y + 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

▲ Для этого нужно найти, во-первых, координаты какой-либо точки M_0, принадлежащей прямой l, во-вторых, применяя формулу (9), нужно найти вектор $\vec{p}$ (направляющий вектор), перпендикулярный векторам $\vec{n}_1(m_1; n_1; k_1)$ и $\vec{n}_2(m_2; n_2; k_2)$.

1) В данной системе имеются 2 уравнения и 3 переменных. Поэтому значение одной из переменных выбирается произвольно. Пусть $z = 0$. Тогда исходная система записывается так:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ x + 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 1,\ y = -1,$$

т.е. точка $M_0(1; -1; 0)$ лежит на прямой l.

2) Так как $\vec{n}_1(2; -5; 0)$ и $\vec{n}_2(1; 3; 4)$, то по формуле (5) $\vec{p}(-5 \cdot 4 - 0 \cdot 3;\ 0 \cdot 1 - 4 \cdot 2;\ 2 \cdot 3 - (-5) \cdot 1) = \vec{p}(-20; -8; 11)$,

т.е. вектор $\vec{p}(-20; -8; 11)$ является направляющим вектором прямой l. Тогда каноническое уравнение прямой l записывается так:

$$\frac{x-1}{-20} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z}{11}.$$ ■

1. Запишите каноническое уравнение прямой, найдите ее направляющий вектор и координаты точки, лежащей на этой прямой.
2. Запишите уравнение плоскости, заданной вектором нормали.
3. Запишите общее уравнение плоскости, найдите ее вектор нормали.
4. Как определить координаты вектора, перпендикулярного двум заданным неколлинеарным векторам? Приведите пример.
5. Опишите и объясните способ нахождения уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки. Приведите пример.
6. Объясните способ нахождения направляющего вектора прямой, заданной общим уравнением. Приведите пример.

Упражнения

А

2.1. Найдите координату точки, принадлежащей и не принадлежащей данной прямой:

1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{5}$; 2) $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{7}$;

3) $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-1+t, \\ z=1-t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=-1+t, \\ y=3+2t. \\ z=2-2t. \end{cases}$

2.2. Найдите направляющий вектор прямой, заданной системой уравнений из предыдущей задачи.

2.3. Найдите координату точки, принадлежащей и не принадлежащей данной плоскости:

1) $x+2y-z-2=0$; 2) $5x-y+4z+3=0$;
3) $2x-y+z-3=0$; 4) $2y+z+3=0$.

2.4. Найдите вектор нормали плоскости, заданной уравнениями из предыдущей задачи.

2.5. Покажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и найдите координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этим векторам:

1) $\vec{a}(1;2;-2)$, $\vec{b}(3;0;4)$; 2) $\vec{a}(0;3\ -4)$; $\vec{b}(2;5;4)$;

3) $\vec{a}(1;3;-2)$, $\vec{b}(2;1;1)$; 4) $\vec{a}(-2;1;4)$, $\vec{b}(1;-2;3)$.

2.6. Найдите координату точки, принадлежащей и не принадлежащей данной прямой:

1) $\begin{cases} x+y-z-5=0, \\ 2x-y-3z-13=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y+9z-3=0, \\ 2x+y-5z+8=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y-z-5=0, \\ 2y-3z+9=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+z-4=0, \\ y-z-1=0. \end{cases}$

В

2.7. Используя условие задачи **2.5,** напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;3;0)$ параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.8. Используя условие задачи **2.6,** с помощью формулы (1) найдите координаты направляющего вектора и напишите каноническое уравнение этой прямой.

2.9. С помощью формул (3) и (4) напишите уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

1) $M_1(1;\ 2;\ 3)$, $M_2(2;\ 1;\ 4)$, $M_3(-2;\ 0;\ 2)$;

2) $M_1(-3;\ 1;\ -2)$, $M_2(-2;\ 0;\ 3)$, $M_3(1;\ 1;\ -1)$;

3) $M_1(2;\ -1;\ 3)$, $M_2(0;\ 1;\ 4)$, $M_3(2;\ -2;\ 0)$;

4) $M_1(1;\ 2;\ -2)$, $M_2(3;\ 0;\ 4)$, $M_3(0;\ 3;\ -4)$.

2.10. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$: $A\ (1;\ -2;\ 5)$, $B\ (-3;\ 0;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ 1)$ и $D\ (-2;\ 1;\ 4)$. 1) Напишите уравнение граней ABC и ABD; 2) напишите общее уравнение прямой AB и найдите направляющии вектор этой прямой; 3) покажите, что найденный вектор коллинеарен вектору $\overline{AB}$. Сделайте вывод.

2.11. Используя условие предыдущей задачи, напишите уравнение прямой AB по формуле прямой, проходящей через две заданные точки. По полученному каноническому уравнению прямой AB напишите ее общее уравнение. Объясните причину несовпадения двух общих уравнений одной прямой AB, полученных в этой и предыдущей задачах.

2.12. Используя условие задачи **2.10**, напишите уравнения прямых, проходящих через каждую вершину пирамиды и перпендикулярных ее противоположной грани.

2.13. Напишите уравнение плоскости в отрезках и найдите точки пересечения этой плоскости с осями координат:

1) $2x-3y+z-6=0$; 2) $x+y-2z-4=0$;

3) $x-5y+2z+10=0$; 4) $3x-y+z-6=0$.

1) ▲ В 10 классе мы показали, что уравнение плоскости $ax+by+cz+$ $+d=0$ всегда можно привести к виду $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$. Его называют *уравнением плоскости в отрезках*. Для этого достаточно разделить общее уравнение плоскости на число $d \neq 0$.

$2x-3y+z-6=0 \Rightarrow 2x-3y+z=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2x}{6}-\frac{3y}{6}+\frac{z}{6}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1.$

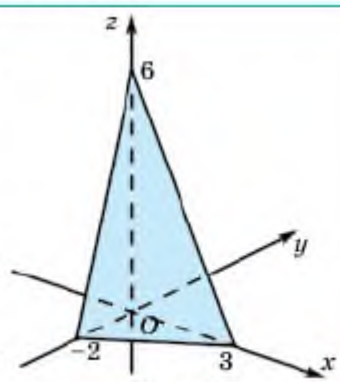


Рис. 2.5
https://www.geogebra.org/classic/bwcy9d4n

Отсюда имеем, что данная плоскость пересекает оси координат в точках $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -2;\ 0)$ и $C(0;\ 0;\ 6)$ (рис. 2.5). ■

2.14. Напишите каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(5;\ -4;\ 7)$ параллельно прямой, заданной в задаче **2.6**.

C

2.15. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x-2y+3z-2=0, \\ 3x+y-z-3=0 \end{cases}$ параллельно прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z}{4}$.

2.16. Покажите, что прямые $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$ и $x=-1-t$, $y=8-2t$, $z=2+t$ пересекаются и напишите уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

2.17*. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\ 1;\ 3)$ и отсекающей от координатных осей равные отрезки.

Упражнения для повторения

2.18. Выясните взаимное расположение прямых, заданных в плоскости Oxy уравнениями:

1) $x-2y+8=0$ и $5x-y=0$;
2) $x-2y+8=0$ и $x=2y$;
3) $2x-4y=16$ и $x=2y+8$.

2.19. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;\ 2)$ и $M_2(3;\ 4)$.

2.20. Даны точки $M_1(1;\ 2)$ и $M_2(3;\ 4)$. Напишите уравнение срединного перпендикуляра отрезка M_1M_2.

2.2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Изучив пункт, вы будете:

- *знать особенности взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве;*

- *знать особенности взаимного расположения двух плоскостей в пространстве;*
- *знать особенности взаимного расположения двух прямых в пространстве.*

2.2.1. Взаимное расположение прямой и плоскости

Работа в группе

Ответьте на следующие вопросы и обсудите их вместе с классом.

1) Как могут располагаться прямая l и плоскость α в пространстве? Перечислите все варианты и покажите их с помощью каких-либо моделей.

2) Прямая l задана каноническим уравнением

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k},$$

и плоскость α задана общим уравнением $ax+by+cz+d=0$. Что можно сказать о точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$, векторах $\vec{p}(m;n;k)$ и $\vec{n}(a;b;c)$?

Итак, пусть в пространстве прямая l и плоскость α заданы, соответственно, следующими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}$$

и

$$ax+by+cz+d=0.$$

Тогда, как вы уже сами определили, прямая l и плоскость α в пространстве могут располагаться следующим образом: 1) прямая и плоскость пересекаются; 2) прямая и плоскость не пересекаются, т.е. они параллельны; 3) прямая целиком лежит в плоскости. Теперь опишите эти три случая на математическом языке, выразив через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и векторы $\vec{p}(m;n;k)$, $\vec{n}(a;b;c)$. Результат обсудите вместе с классом. Как располагаются прямая l и плоскость α в пространстве, если: **I.** $\vec{p}\not\perp\vec{n}$; **II.** $\vec{p}\perp\vec{n}$, $M_0\in\alpha$; **III.** $\vec{p}\perp\vec{n}$, $M_0\notin\alpha$? Обоснуйте ответ.

I. Если $\vec{p}\not\perp\vec{n}$, то прямая l и плоскость α пересекаются (рис. 2.6). В этом случае необходимо, чтобы $\vec{p}\cdot\vec{n}\neq 0$,

$$\text{т.е. } ma+nb+kc\neq 0.$$

Это условие того, что прямая l и плоскость α пересекаются.

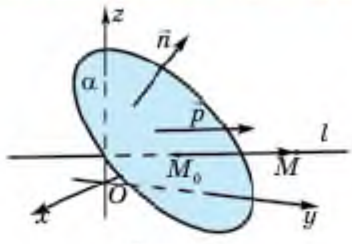


Рис. 2.6

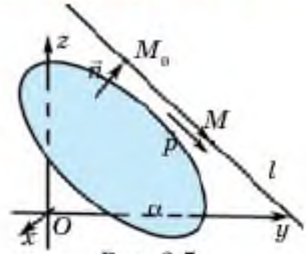


Рис. 2.7

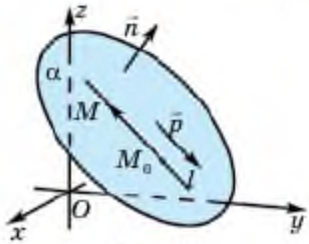


Рис. 2.8

II. Если $\vec{p} \perp \vec{n}$, $M_0 \notin \alpha$, то прямая l и плоскость α параллельны, т.е. $l \parallel \alpha$ (рис.2.7). Здесь выполняется условие

$$\begin{cases} ma + nb + kc = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0. \end{cases}$$

Это условие параллельности прямой l и плоскости α.

III. Если $\vec{p} \perp \vec{n}$, $M_0 \in \alpha$, то прямая l лежит на плоскости α: $l \subset \alpha$ (рис.2.8), т.е. выполняется условие

$$\begin{cases} ma + nb + kc = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \end{cases}$$

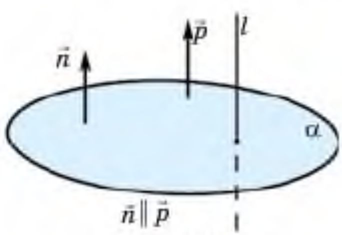


Рис. 2.9

Это условие того, что прямая l лежит на плоскости α.

Если $\vec{p} \parallel \vec{n}$, то прямая l перпендикулярна плоскости $l \perp \alpha$ (рис. 2.9), и это условие в координатах записывается так:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}.$$

Пример 1. Пусть дана прямая l каноническим уравнением $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$, а плоскость α общим уравнением $x-y+3z+2=0$.

Определим взаимное расположение прямой l и плоскости α.

▲ Точка $M_0(1;\ -1;\ 0)$ принадлежит прямой l и $\vec{p}(2;3;1)$ – направляющий вектор этой прямой, а вектор $\vec{n}(1;-1;3)$ является вектором нормали плоскости α. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{p}$ и $\vec{n}$.

$\vec{p}\cdot\vec{n}=2\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot3\neq0$, следовательно $\vec{p}\not\perp\vec{n}$, т.е. прямая l и плоскость α пересекаются, но они не перпендикулярны, т.к. $\vec{p}\nparallel\vec{n}$. ■

Пример 2. Найдем точку пересечения прямой l и плоскости α из предыдущего примера.

▲Для этого удобнее пользоваться параметрическим уравнением прямой l: $x=2t+1$, $y=3t-1$, $z=t$. Для того чтобы найти точку пересечения прямой l и плоскости α, нужно записать это параметрическое уравнение с уравнением плоскости в одну систему и найти значения переменных x, y, z:

$$\begin{cases} x=2t+1,\\ y=3t-1,\\ z=t,\\ x-y+3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow (2t+1)-(3t-1)+3t+2=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2t+4=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow x=2(-2)+1=-3,\ y=3(-2)-1=-7,\ z=-2$. Итак, прямая l и плоскость α пересекаются в точке $M(-3;\ -7;\ -2)$. ■

2.2.2. Взаимное расположение двух плоскостей

Работа в группе

Выполните следующее задание.

Задание 1	Задание 2
1) $\begin{cases} x-2y+z-3=0,\\ 3x+y-z+1=0; \end{cases}$	1) $\begin{cases} x-y+3z-6=0,\\ y+z-3=0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x-2y+z-3=0,\\ 2x-4y+2z+7=0; \end{cases}$	2) $\begin{cases} x-y+3z-6=0,\\ 2x-2y+6z+6=0; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x-2y+z-3=0,\\ -2x+4y-2z+6=0. \end{cases}$	3) $\begin{cases} x-y+3z-6=0,\\ -2x+2y-6z+12=0. \end{cases}$

5-5174

1) Какая фигура определяется каждым уравнением данных систем в пространстве?

2) Всегда ли можно определять прямую системой, указанной в заданиях? Укажите систему, определяющую и не определяющую прямую в пространстве. Обоснуйте ответ.

3) Если системой определена прямая, то как располагаются между собой плоскости, заданные каждым уравнением данной системы? Что можно сказать о векторах нормали этих плоскостей?

4) Если системой не определяется прямая, то как располагаются между собой плоскости, заданные каждым уравнением данной системы? Что можно сказать о векторах нормали этих плоскостей?

5) Если все коэффициенты и свободные члены уравнений системы пропорциональны между собой, то что можно сказать о соответствующих плоскостях?

Отвечая на данные вопросы, сделайте выводы о взаимном расположении двух плоскостей в пространстве.

Итак, пусть плоскости α_1 и α_2 заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ соответствено. Тогда векторы $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ являются их векторами нормали.

1) Если $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, то плоскости α_1 и α_2 пересекаются по прямой (рис. 2.10), т.е. векторы $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_2$ не коллинеарны.

В частности, если $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, т.е. $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, то плоскости α_1 и α_2 перпендикулярны.

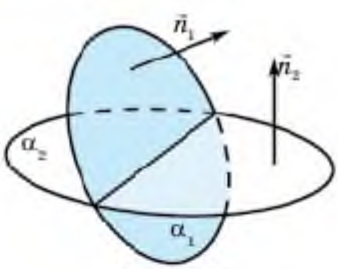


Рис. 2.10

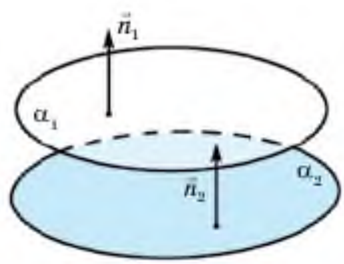


Рис. 2.11

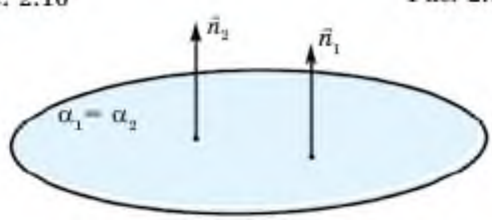


Рис. 2.12

https://www.geogebra.org/classic/fvxsztuh

2) Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$, то $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ (рис. 2.11).

3) Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$, то уравнениями системы определяется одна и та же плоскость, т.е. в этом случае плоскости α_1 и α_2 совпадают (рис. 2.12).

2.2.3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Работа в группе

Выполните следующее задание.

Прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями, указанными в таблице.

1) Найдите направляющий вектор $\vec{p}_1$ прямой l_1 и координаты точки M_1, принадлежащей этой прямой.

2) Найдите направляющий вектор $\vec{p}_2$ прямой l_2 и координаты точки M_2, принадлежащей этой прямой.

3) Сравните координаты векторов $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ и $\overline{M_1M_2}$.

4) В случае, когда $\vec{p}_1 \not\parallel \vec{p}_2$, по формуле (5) (п.2.1.2) найдите координаты вектора $\vec{n}$, удовлетворяющего условиям $\vec{n}\perp\vec{p}_1$ и $\vec{n}\perp\vec{p}_2$.

5) Напишите уравнение плоскости α, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\vec{n}$:

Уравнение прямой l_1	Уравнение прямой l_2
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{3}$
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$x=5-t$, $y=5+2t$, $z=2+3t$
$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{-2}$
$x=6+t$, $y=3-2t$, $z=-1-3t$	$x=5-t$, $y=5+2t$, $z=2+3t$

Итак, если: 1) векторы $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ не компланарны, то прямые l_1 и l_2 – скрещивающиеся прямые (рис. 2.13);

2) векторы $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ – компланарны и $\vec{p}_1 \not\parallel \vec{p}_2$, то прямые l_1 и l_2 пересекаются (рис. 2.14).

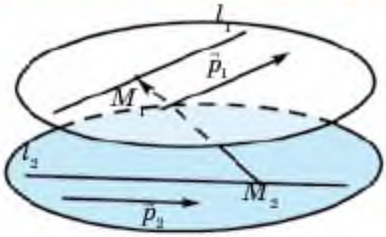


Рис. 2.13

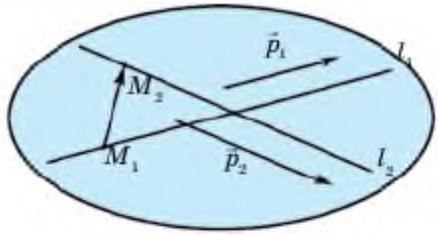


Рис. 2.14

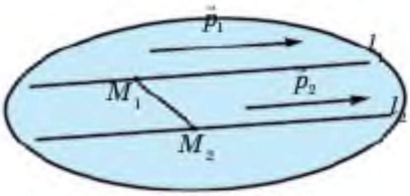


Рис. 2.15

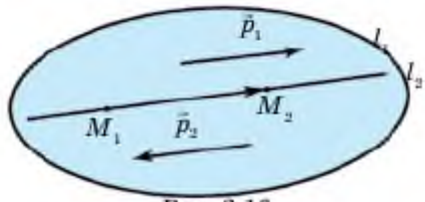


Рис. 2.16

3) $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ и $\vec{p}_1 \nparallel \overline{M_1M_2}$, то $l_1 \parallel l_2$ (рис. 2.15).

4) $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \parallel \overline{M_1M_2} \Rightarrow l_1 \equiv l_2$, т.е. в этом случае двумя данными уравнениями определяется одна и та же прямая (рис. 2.16).

1) Как могут располагаться прямая и плоскость? Рассмотрите все случаи, запишите соответствующие условия и, проанализировав, объясните их смысл.
2) Опишите и объясните процесс нахождения точки пересечения прямой и плоскости.
3) Как могут располагаться две плоскости в пространстве? Рассмотрите все случаи, запишите соответствующие условия и, проанализировав, объясните их смысл.
4) Как могут располагаться две прямые в пространстве? Рассмотрите все случаи и объясните их смысл. Опишите и объясните способ определения взаимного расположения двух прямых по их уравнениям.

Практическая работа

Объясните, почему самолеты, изображенные на странице 69, не могут столкнуться.

Ответ: самолеты в воздухе при полете не сталкиваются, потому что они летят вдоль скрещивающихся прямых.

Упражнения

А

Работа в паре (2.21, 2.22)

2.21. Какое условие должно выполняться, чтобы точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежала плоскости $ax + by + cz + d = 0$? Определите, какая из точек $A(-1; -1; 1)$, $B(0; 2; 3)$, $C(6; 1; 0)$, $D(3; -2; -4)$, $E(1; 3; 2)$ принадлежит и не принадлежит плоскости $x - 2y + 3z - 4=0$.

2.22. Какое условие должно выполняться, чтобы точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежала прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$? Определите, какая из точек $A(-1; 1; 1)$, $B(4; 1; 1)$, $C(0; -3; -1)$, $D(3; 4; 2)$, $E(-1; -5; -1)$ принадлежит и не принадлежит прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$.

2.23. Определите взаимное расположение прямой и плоскости:

1) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}$ и $2x - y - 3z + 5 = 0$;

2) $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -1 + 2t$ и $2x + 3y + z - 9 = 0$;

3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ и $2x - 4y - 5z - 9 = 0$.

2.24. Определите взаимное расположение двух плоскостей в пространстве:

1) $x + 2y - z - 1 = 0$ и $4x - 2y + 4z - 3 = 0$;

2) $2x - y + z - 4 = 0$ и $-6x + 3y - 3z + 8 = 0$;

3) $x + 2y - z - 1 = 0$ и $-2x - 4y + 2z - 2 = 0$.

2.25. Определите взаимное расположение двух плоскостей в пространстве:

1) $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -1 + 2t$ и $\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{-2}$;

2) $x = 3t$, $y = 1 - 2t$, $z = -2 + 3t$ и $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{3}$.

2.26. Найдите точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$ и $3x-2y+z-3=0$;

2) $x=2t$, $y=1+t$, $z=2t-1$ и $x+2y+3z-5=0$.

2.27. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости $3x-2y+z-3=0$. 1) $M(1;\ 2;\ 3)$; 2) $M(2;\ 0;\ -2)$; 3) $M(4;\ -3;\ 1)$; 4) $M(3;\ 1;\ 1)$.

2.28. Напишите уравнение координатной плоскости: 1) Oxy; 2) Oxz; 3) Oyz.

2.29. Напишите уравнение оси координат: 1) Ox; 2) Oy; 3) Oz.

2.30. Найдите точки пересечения плоскости с осями координат. Для этого напишите данное уравнение плоскости в отрезках:

1) $3x+2y+z-6=0$; 2) $x-y-z+3=0$;

3) $x+3y-z-6=0$; 4) $2x+y-2z-4=0$.

2.31. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;\ 1;\ 1)$ параллельно данной прямой:

1) $\frac{x-3}{8}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{3}$; 2) $x=2-t$, $y=15+2t$, $z=3t-5$;

3) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$; 4) $x=7+5t$, $y=4+t$, $z=5+4t$.

2.32. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;\ 0;\ 1)$ параллельно данной плоскости:

1) $x+2y+z-6=0$; 2) $x-y-2z+3=0$;

3) $x+3y-2z-6=0$; 4) $2x+3y-2z-4=0$.

2.33. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;\ 0;\ 1)$ перпендикулярно плоскости, заданной в предыдущей задаче.

B

2.34. Определите взаимное расположение двух прямых в пространстве:

1) $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-2}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$;

2) $x=3t$, $y=1-2t$, $z=-2+3t$ и $x=1+2t$, $y=1-2t$, $z=-1+2t$?

▲ 2) Найдем точки, принадлежащие прямым, и их направляющие векторы. Для прямой l_1: $M_1(0;\ 1;\ -2)$, $\vec{p}_1(3;-2;3)$; для прямой l_2: $M_2(1;\ 1;\ -1)$, $\vec{p}_2(2;-2;2)$. Координаты векторов $\vec{p}_1$

и $\vec{p}_2$ не пропорциональны, т.е. $l_1 \nparallel l_2$. Тогда эти прямые – скрещивающиеся либо они пересекаются. Для выяснения этого определим координаты векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\vec{n}$, удовлетворяющие условиям $\vec{n} \perp \vec{p}_1$ и $\vec{n} \perp \vec{p}_2$:

$\overline{M_1M_2}(1;\ 0;\ 1)$, $\vec{n}(-2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2);\ 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2;\ 3 \cdot (-2) - (-2) \times$ $\times\ 2) = \vec{n}(2;\ 0;\ -2)$.

$\vec{n} \cdot \overline{M_1M_2} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overline{M_1M_2}$, $\vec{n} \perp \vec{p}_1$, $\vec{n} \perp \vec{p}_2$. Отсюда видно, что три неколлинеарных вектора перпендикулярны одному и тому же вектору, поэтому они компланарны. Тогда непараллельные прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, т.е. они пересекаются. ■

2.35. Найдите свободный член d так, чтобы точка: 1) $A(-1;\ -1;\ 1)$; 2) $B(0;\ 2;\ 3)$; 3) $C(6;\ 1;\ 0)$; 4) $D(3;\ -2;\ -4)$ принадлежала плоскости $x - 2y + z + d = 0$. Для всех ли точек эта задача имеет решение? Определите взаимное расположение плоскостей, заданных уравнениями, отличающимися только свободными членами? Обоснуйте ответ.

2.36. Определите взаимное расположение прямой и плоскости. В случае их пересечения найдите точку пересечения.

1) $x = -1 + 2t$, $y = 3 + 4t$, $z = 3t$ и $2x - 2y + z - 5 = 0$;

2) $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ и $2x - y - 3z + 5 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 5y - 13, \\ 4y - z - 11 = 0 \end{cases}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$;

4) $\dfrac{x-3}{8} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{3}$ и $2x + 3y - z + 1 = 0$.

2.37. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = -1 + 2t$, $y = 3 + 4t$, $z = 3t$ перпендикулярно плоскости $2x + 3y - z + 1 = 0$.

2.38. Найдите проекцию точки $M_0(1;\ 0;\ 1)$ на прямой:

1) $\dfrac{x-3}{8} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{3}$;

2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$;

3) $x = 2 - t$, $y = 15 + 2t$, $z = 3t - 5$;

4) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ 3y + z - 2 = 0. \end{cases}$

▲ 4) Чтобы решить задачу, сначала нужно найти направляющий вектор прямой. Его можно определить двумя способами.

I способ. Каждым уравнением системы $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y+z-2=0 \end{cases}$ определяется плоскость. Их векторы нормали соответственно таковы: $\vec{n}_1(1;-2;0)$ и $\vec{n}_2(0;3;1)$. Тогда по формуле (5) (п.2.1.3) $\vec{p}(2;1;-3)$. Теперь напишем уравнение плоскости α проходящей через точку $M_0(1;\ 0;\ 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{p}$:

$2(x-1)+1(y-0)-3(z-1)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x+y-3z+1=0$. Проекцией точки M_0 на данной прямой (точка N, рис. 2.17) является точка пересечения этой плоскости с данной прямой. Чтобы найти эту точку, нужно решить следующую систему:

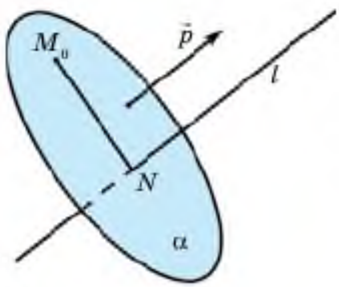


Рис. 2.17

https://www.geogebra.org/classic/yeztxbkf

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-2=0, \\ 2x+y-3z+1=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2y-3, \\ z=-3y+2, \\ 2(2y-3)+y-3(-3y+2)+1=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow 14y-11=0 \Rightarrow y=\frac{11}{14},\ x=-\frac{10}{7},\ z=-\frac{5}{14}.$$

Ответ: $N\left(-\frac{10}{7};\frac{11}{14};-\frac{5}{14}\right)$.

II способ. На данной прямой можно взять любые точки A и B, в качестве вектора нормали плоскости α можно взять вектор $\overline{AB}$. Система $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-2=0 \end{cases}$ имеет три переменные и два уравнения. Поэтому значение одной из переменных можно выбрать произвольно. Пусть $y_1=0$, тогда $x_1=-3$, $z_1=2$, т.е. $A(-3;\ 0;\ 2)$. Пусть $y_2=1$, тогда $x_2=-1$, $z_2=-1$, т.е. $B(-1;\ 1;\ -1)$. Отсюда $\vec{n}=\overline{AB}(2;1;-3)$ – вектор нормали плоскости α, ее уравнение имеет вид $2x+y-3z+1=0$. Далее задача решается также, как и в предыдущем случае. Ответ: $N\left(-\frac{10}{7};\frac{11}{14};-\frac{5}{14}\right)$. ■

2.39. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 0;\ 1)$.

C

2.40. Покажите, что прямые скрещивающиеся и напишите уравнение плоскости, проходящей через каждую из этих прямых параллельно другой прямой:

1) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+3}{3}$ и $\begin{cases} x+2y+3=0, \\ 3y+z=0; \end{cases}$

2) $x=-1+t,\ y=t,\ z=1+2t$ и $\begin{cases} y=3x-1, \\ z=4x+2. \end{cases}$

2.41. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;\ 2;\ 4)$ и линию пересечения плоскостей $2x-y+3z-6=0$, $x+2y-z+3=0$.

2.42*. В пространстве прямая $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$ проходит через сторону AB ромба $ABCD$, а прямая $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$ – через диагональ AC. Является ли точка $C(3;\ -2;\ 1)$ вершиной ромба? Если является вершиной, то найдите: 1) координаты других вершин ромба; 2) точку пересечения диагоналей ромба; 3) канонические уравнения прямых, проходящих через другие стороны ромба.

2.43. Даны уравнения трех граней пирамиды, имеющие общую вершину: $x-2y+3=0$, $3y+z-1=0$, $2x+y-z-1=0$. Найдите координаты этой вершины пирамиды.

▲ Составим систему из уравнений трех боковых граней пирамиды, которые имеют общую вершину, т.е. пересекаются в одной точке:

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-1=0, \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases}$$

Обозначим ее точкой $A\ (x;\ y;\ z)$ и найдем координаты данной вершины.

Решение.

1) Первое уравнение в системе умножим на (–2), сложим с третьим уравнением, и получим:

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \ \big|\cdot(-2), \\ 3y+z-1=0, \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases} -2x+4y-6=0 \ \big|(1)+(3), \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y-z-7=0, \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases}$$

2) Теперь подставим в первое уравнение $z = 1 - 3y$ и находим все координаты вершины A (x; y; z):

$$\begin{cases} 5y - (1 - 3y) - 7 = 0, \\ z = 1 - 3y, \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y = 8, \\ z = 1 - 3y, \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1, \\ z = -2, \\ x = -1. \end{cases}$$

3) Координаты вершины $A(-1;1;-2)$.

4) Ссылка на 3D-иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/udfrmfhd ■

Упражнения для повторения

2.44. Дано: 1) $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(3;2;1)$; 2) $\vec{a}(-2;3;4)$, $\vec{b}(5;0;2)$. Найдите $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

2.45. Если $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, то определите вид треугольника ABC: 1) $a=8$, $b=6$, $c=10$; 2) $a=4$, $b=5$, $c=6$; 3) $a=5$, $b=6$, $c=9$. Обоснуйте ответ.

2.3. Нахождение расстояния в пространстве

Изучив пункт, вы будете:

- *знать способ нахождения расстояния от точки до прямой и применять при решении задач;*
- *знать и выводить формулу нахождения расстояния от точки до плоскости и применять при решении задач.*

2.3.1. Расстояние от точки до прямой

Работа в группе

Подумайте, как можно определить расстояние от точки до прямой, сформулируйте алгоритм нахождения расстояния от точки до прямой. Опираясь на выработанные вами предложения, выполните следующее задание: найдите расстояние от точки $A(1;\ 2;\ 3)$ до прямой, заданной нижеследующим уравнением.

Задание 1	Задание 2
$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$	$x = 5 - t,\ \ y = 5 + 2t,$ $z = 2 + 3t$

Задание 3	Задание 4
$\begin{cases} x+2y+3=0, \\ 3y+z=0; \end{cases}$	$\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{-2}$
Задание 5	**Задание 6**
$x=6+t,\ y=3-2t,$ $z=-1-3t$	$\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ 2x-4y+2z+7=0 \end{cases}$

Итак, ***расстоянием** от точки А, расположенной вне прямой l, до этой прямой называется расстояние от точки А до основания перпендикуляра, опущенного из точки А на прямую l.*

Чтобы определить это расстояние, необходимо: 1) написать уравнение плоскости α, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l; 2) определить точку пересечения B прямой l с плоскостью α; 3) найти расстояние от точки A до точки B. Это – искомое расстояние.

Пример 1. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$: $A(1;\ -2;\ 5)$, $B\ (-3;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 1)$ и $D(-2;\ 1;\ 4)$. Определим расстояние от середины ребра AB до прямой CD.

▲ Сначала найдем координаты точки P, являющейся серединой ребра AB и вектора $\overline{CD}$: $x_p=\frac{1-3}{2}=-1,\ \ y_p=\frac{-2+0}{2}=-1,$

$z_p=\frac{5+0}{2}=2,5$. Следовательно, $P(-1;-1;2,5)$, $\overline{CD}(-3-0;1-0;4-1)=$ $=\overline{CD}(-3;\ 1;\ 3)$. Теперь напишем уравнение плоскости, проходящей через точку P и перпендикулярной вектору $\overline{CD}$: $-3(x+1)+$ $+(y+1)+3(z-2,5)=0 \Rightarrow 3x-y-3z+9,5=0$.

Затем напишем параметрическое уравнение прямой CD: $x=-3t,\ y=t,$ $z=3t+1$ и будем решать систему уравнений:

$$\begin{cases} x=-3t, \\ y=t, \\ z=3t+1, \\ 3x-y-3z+9,5=0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\cdot(-3t)-t-$$

$$-3\cdot(3t+1)+9,5=0 \Rightarrow t=\frac{65}{190}.$$

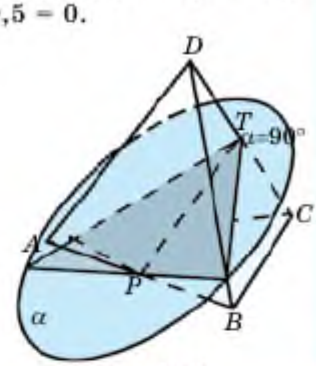


Рис. 2.18
https://www.geogebra.org/classic/bjwn5asb

$\Rightarrow x = -1\frac{5}{190}$, $y = \frac{65}{190}$, $z = 2\frac{5}{190}$, т.е. (рис. 2.18) $T\left(-1\frac{5}{190}; \frac{65}{190}; 2\frac{5}{190}\right)$.

Теперь найдем PT:

$$PT = \sqrt{\left(-1\frac{5}{190}+1\right)^2+\left(\frac{65}{190}+1\right)^2+\left(2\frac{5}{190}-2,5\right)^2} = \sqrt{\frac{(-5)^2}{190^2}+\frac{255^2}{190^2}+\frac{(-90)^2}{190^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25+8100+225^2}{190^2}} = \sqrt{\frac{73150}{190\cdot190}} = \sqrt{\frac{77}{38}} \approx 1,42.$$ ■

2.3.2. Расстояние от точки до плоскости

Работа в группе

Подумайте, что вы понимаете под расстоянием от точки до плоскости. Для ответа на вопрос вспомните понятие основания перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость и сформулируйте определение расстояния от точки до плоскости, составьте алгоритм нахождения этого расстояния.

Итак, ***расстоянием*** *от точки A, расположенной вне плоскости α, до этой плоскости называется расстояние от точки A до основания перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость α.*

Чтобы определить это расстояние, необходимо: 1) написать уравнение прямой l, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости α; 2) определить точку пересечения B прямой l с плоскостью α; 3) найти расстояние от точки A до точки B. Это – искомое расстояние.

Теперь в общем случае выведем формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости.

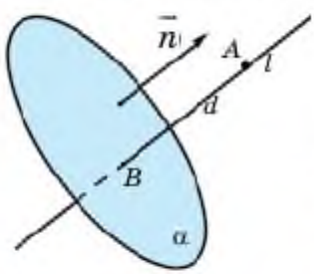


Рис. 2.19

Ссылка на 3D-иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/yeztxbkf

Пусть плоскость α задана общим уравнением $ax + by + cz + d = 0$ и точка $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ расположена вне этой плоскости. Тогда вектор $\vec{n}(a; b; c)$ является направляющим вектором прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости α (рис. 2.19). Поэтому параметрическое уравнение прямой l записывается так: $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$. Чтобы определить координаты точки B, являющейся точкой пересечения плоскости α с прямой l, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct, \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d +$

$+t(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \Rightarrow \ t = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$. Введем обозначение

$P = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$. Тогда координаты точки B определяются

так: $x = x_0 + aP$, $y = y_0 + bP$, $z = z_0 + cP$, т.е. $B(x_0 + aP;\ y_0 + bP;$

$z_0 + cP)$. Отсюда

$$AB = \sqrt{(x_0 + aP - x_0)^2 + (y_0 + bP - y_0)^2 + (z_0 + cP - z_0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(aP)^2 + (bP)^2 + (cP)^2} = |P|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \left|-\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Итак, если расстояние от точки A до плоскости α обозначить через h, то мы доказали следующую формулу:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (1)$$

Пример 2. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$: $A(1;\ 3;\ 0)$, $B\ (4;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 0;\ 1)$ и $D(4;\ 3;\ 5)$. Определим высоту пирамиды, опущенную из вершины D.

▲ Сначала напишем уравнение плоскости ABC. Для этого найдем координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Т.к. $\overline{AB}(3;\ -4;\ 2)$ и $\overline{AC}(2;\ -3;\ 1)$, то по формуле (1) (п.2.1.2) имеем: $\vec{n}\,(-4+6;\ 4-3;\ -9+8) = \vec{n}\,(2;\ 1;\ -1)$. Этот вектор является вектором нормали плоскости ABC. Тогда уравнение этой плоскости записывается так: $2(x - 1) + (y - 3) - (z - 0) = 0 \Rightarrow 2x + y - z - 5 = 0$. Если DH – высота пирамиды, то по формуле (1) получим:

$$DH = \frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ■

1. Что вы понимаете под расстоянием от точки до прямой? Запишите и объясните алгоритм нахождения этого расстояния.
2. Что вы понимаете под расстоянием от точки до плоскости? Запишите и объясните формулу нахождения этого расстояния. Вывести эту формулу.

Упражнения

A

2.46. Найдите расстояние от точки $A(1;\ 2;\ 3)$ до плоскости: 1) $3x - y - 3z - 3 = 0$; 2) $2x + y + 3z - 7 = 0$; 3) $2x - y + 3z + 9 = 0$; 4) $3x - 4y + 8 = 0$.

2.47. Найдите расстояние от точки: 1) $A(2;\ 0;\ -3)$; 2) $B(0;\ 3;\ 1)$; 3) $C(-1;\ 1;\ 3)$; 4) $D(-2;\ 1;\ 4)$ до плоскости $2x + y + 3z - 7 = 0$.

2.48. Найдите расстояние от точки $A(1;\ 2;\ 3)$ до прямой:
1) $\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{-2}$; 2) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$; 3) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{2}$;
4) $x = 6 + t,\ y = 5 + 2t,\ z = 2 + 3t$.

2.49. Найдите расстояние от точки: 1) $A(2;\ 0;\ -3)$; 2) $B(0;\ 3;\ 1)$; 3) $C(-1;\ 1;\ 3)$; 4) $D(-2;\ 1;\ 4)$ до прямой $x = 6 + t,\ y = 5 + 2t,\ z = 2 + 3t$.

B

2.50. Докажите, что прямые $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ и
$\begin{cases} x - 2y + 2z - 8 = 0, \\ x + 6z - 6 = 0 \end{cases}$ параллельны и найдите расстояние между ними.

2.51. При каких значениях m прямая $\frac{x-1}{m} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ параллельна плоскости $3x + 4y + 2z - 5 = 0$? Найдите расстояние между ними.

Работа в паре (2.52, 2.53)

2.52. Как можно найти расстояние между параллельными прямыми? В паре обсудите и напишите алгоритм нахождения этого расстояния, результаты обсудите вместе с классом. Найдите расстояние между следующими параллельными прямыми:

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-2}$ и $x = 6 + 2t,\ y = 5 + 3t,\ z = 2 - 2t$;

2) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-5}{1}$.

2.53. Как можно найти расстояние между параллельными плоскостями? В паре обсудите и напишите алгоритм нахождения этого расстояния, результаты обсудите вместе с классом. Найдите расстояние между следующими параллельными плоскостями:

1) $2x - y + 3z - 5 = 0$ и $2x - y + 3z + 7 = 0$;

2) $x + y - 3z + 4 = 0$ и $2x + 2y - 6z - 9 = 0$.

2.54. Параллельные плоскости α_1 и α_2 заданы уравнениями $ax + by + cz + d_1 = 0$ и $ax + by + cz + d_2 = 0$ соответственно. Докажем, что расстояние между данными плоскостями определяется формулой

$$d = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

▲ Пусть $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \in \alpha_1$. Тогда необходимое нам расстояние d находится так:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Т.к. $ax_0 + by_0 + cz_0 + d_1 = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 = -d_1$, то имеем формулу

$$d = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \ ■$$

C

2.55. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(2;\ 0;\ -3)$, $B(0;\ 3;\ 1)$, $C(-1;\ 1;\ 3)$, $D(-2;\ 1;\ 4)$. Найдите высоты, опущенные из каждой ее вершины.

2.56. Пусть точки $A(2;\ 0;\ -3)$, $B(0;\ 3;\ 1)$, $C(-1;\ 1;\ 3)$ являются вершинами нижнего основания, а точка $A_1(5;\ 2;\ 4)$ – вершина верхнего основания параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите: 1) координаты других вершин параллелепипеда; 2) уравнения плоскостей, проходящих через его основания; 3) высоту параллелепипеда (расстояние между его основаниями).

2.57*. Прямые l_1 и l_2 – скрещивающиеся. Что нужно понимать под расстоянием между этими прямыми? Можно ли принимать в качестве этого расстояния кратчайшее из расстояний между точками этих прямых? Если да, то как его найти? Составьте алгоритм нахождения этого расстояния и обсудите его вместе с классом. Докажите, что прямые $\begin{cases} x+2y=0, \\ 2y+z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2, \\ y=2 \end{cases}$ – скрещивающиеся, и найдите расстояние между ними.

Упражнения для повторения

2.58. Даны вершины треугольника ABC: $A(2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(-1; 1)$. Найдите косинусы углов треугольника.

2.59. Сторона ромба с диагоналями образует углы, которые относятся как 4:5. Найдите углы ромба.

2.60. Дан равнобедренный треугольник, угол при вершине которого равен 120°. Диаметр окружности, описанной около данного треугольника равен 18 см. Найдите боковые стороны треугольника.

2.4. Нахождение угла в пространстве

Изучив пункт, вы сможете:

- *находить углы между прямыми (с помощью их уравнений) и применять соответствующую формулу при решении задач;*
- *применять условия параллельности и перпендикулярности в координатах при решении задач;*
- *находить углы между прямой и плоскостью;*
- *находить углы между двумя плоскостями.*

2.4.1. Угол между прямыми

Пусть нам даны канонические уравнения прямых l_1 и l_2:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{k_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{k_2}.$$

Работа в группе

Обсудите вопрос о нахождении угла между прямыми l_1 и l_2. Как можно применить векторы $\bar{p}_1(m_1; n_1; k_1)$ и $\bar{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ для определения данного угла? Как правило, если заранее не оговорено, то в качестве угла между прямыми принимается острый угол из двух образованных углов между ними. При обсуждении учтите это обстоятельство и ответы предложите всему классу. Найдите углы между следующими прямыми l_1 и l_2:

Уравнение прямой l_1	Уравнение прямой l_2
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{3}$
$\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{3}$	$x=5-t,\ y=5+2t,$ $z=2+3t$
$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-2}{1}$
$x=6+2t,\ y=3-2t,\ z=-1-3t$	$x=5+t,\ y=5+2t,\ z=2+2t$

Итак, угол между векторами $\bar{p}_1(m_1;\ n_1;\ k_1)$ и $\bar{p}_2(m_2;\ n_2;\ k_2)$ определяется по формуле

$$\cos\left(\widehat{\bar{p}_1, \bar{p}_2}\right)=\frac{m_1m_2+n_1n_2+k_1k_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+k_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+k_2^2}}.$$

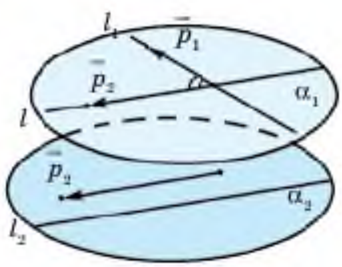


Рис. 2.20

Здесь угол между векторами $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ может быть, в зависимости от их направления, как острым, так и тупым, т.е. значение $\cos\left(\widehat{\bar{p}_1, \bar{p}_2}\right)$ может быть как положительным, так и отрицательным. А угол между прямыми l_1 и l_2 должен быть не тупым. Поэтому этот угол (рис. 2.20) нужно определять по формуле

$$\cos\left(\widehat{l_1, l_2}\right)=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+k_1k_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+k_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+k_2^2}}. \quad (1)$$

Если $l_1 \perp l_2$ (условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2), то верно равенство

$$m_1m_2+n_1n_2+k_1k_2=0. \quad (2)$$

Если $l_1 \parallel l_2$, то координаты направляющих векторов этих прямых будут пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{k_1}{k_2}. \qquad (3)$$

2.4.2. Угол между прямой и плоскостью

Пусть прямая l задана каноническим уравнением $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$, а плоскость α – общим уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

Работа в группе

- Что вы понимаете под углом между прямой и плоскостью? Что называется проекцией прямой на плоскость?
- Как можно применить векторы $\vec{p}(m; n; k)$ и $\vec{n}(a; b; c)$ для определения угла между прямой и плоскостью? Обоснуйте ответ.

Применяя эти результаты обсуждения, найдите углы между следующими прямыми и плоскостями.

Уравнение прямой l	Уравнение плоскости α
$\frac{x-3}{8} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{3}$	$x + 2y + z - 6 = 0$
$x = 2 - t,\ y = 15 + 2t,\ z = 3t - 5$	$x - y - 2z + 3 = 0$
$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$	$x + 3y - 2z - 6 = 0$
$x = 7 + 5t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 4t$	$2x + 3y - 2z - 4 = 0$

Итак, если $\vec{p}(m; n; k)$ – направляющий вектор прямой l, а $\vec{n}(a; b; c)$ – вектор нормали плоскости α, то косинус угла между ними определяется так:

$$\cos\left(\widehat{\vec{p}, \vec{n}}\right) = \frac{ma + nb + kc}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Здесь угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{n}$ может быть, в зависимости от их направления, как острым, так и тупым, т.е. значение $\cos\left(\widehat{\vec{p}, \vec{n}}\right)$ может быть как положительным, так и отрицательным.

Тогда острый угол (не тупой) между векторами $\vec{p}$ и $\vec{n}$ определяется так:

$$\left|\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right| = \frac{|ma+nb+kc|}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

А если угол между прямой l и плоскостью α обозначить через φ, то верно равенство $\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)$ (рис. 2.21). Отсюда, учитывая, что угол φ – острый, получим равенство $\sin\varphi =$

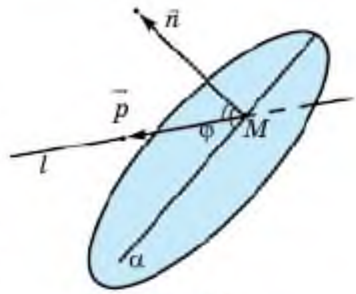


Рис. 2.21

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right) = \left|\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right|$. Тогда угол между прямой l и плоскостью α определяется формулой

$$\sin\varphi = \frac{|ma+nb+kc|}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (4)$$

Если $l \parallel \alpha$, то выполняется равенство

$$ma + nb + kc = 0. \qquad (5)$$

Если $l \perp \alpha$, то $\vec{p} \parallel \vec{n}$ и их координаты пропорциональны:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}. \qquad (6)$$

2.4.3. Угол между двумя плоскостями

Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Работа в группе

Обсудите вопрос нахождения угла между этими плоскостями. Как можно использовать их векторы нормали $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ в данном случае? Обоснуйте ответ и обсудите его вместе с классом. Используя результаты обсуждения, найдите углы между плоскостями α_1 и α_2.

Уравнение плоскости α_1	Уравнение плоскости α_2
$x + 2y + z - 6 = 0$	$4x - y - 2z + 3 = 0$
$5x + 3y - 2z - 6 = 0$	$2x + 3y - 2z - 4 = 0$
$x - 2y + z - 3 = 0$	$3x + y - z + 1 = 0$
$x - 2y + z - 3 = 0$	$2x - 4y + 2z + 7 = 0$

Итак, если $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ – векторы нормали плоскостей α_1 и α_2 соответственно, то косинус угла между этими векторами определяется формулой

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

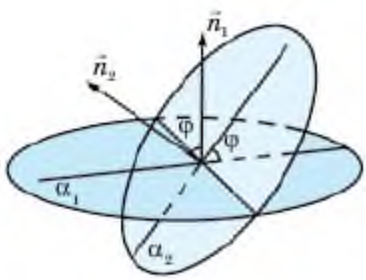


Рис. 2.22

Здесь угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ может быть, в зависимости от их направления, как острым, так и тупым, т.е. значение $\cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right)$ может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 2.22). Поэтому величина двугранного угла между плоскостями α_1 и α_2 определяется формулой

$$\cos\left(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}\right) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{7}$$

Если $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то коэффициенты соответствующих уравнений пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \tag{8}$$

Если $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то выполняется равенство

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \tag{9}$$

Пример 1. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$: $A(2;\ 0;\ -3)$, $B(0;\ 3;\ 1)$, $C(-1;\ 1;\ 3)$, $D(-2;\ 1;\ 4)$. Найдем: 1) $\angle ABC$; 2) угол между прямой AD и гранью ABC; 3) двугранный угол между гранями ABC и ABD.

▲ 1) Углы треугольника ABC могут быть и тупыми. $\angle ABC$ нужно определять как угол между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Так как $\overline{BA}(2; -3; -4)$ и $\overline{BC}(-1; -2; 2)$, $|\overline{BA}| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$ и $|\overline{BC}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, то по формуле нахождения углов между векторами имеем:

$$\cos(\angle ABC) = \frac{2\cdot(-1)+(-3)\cdot(-2)+(-4)\cdot 2}{\sqrt{29}\cdot 3} = -\frac{4}{3\sqrt{29}} = -\frac{4\sqrt{29}}{87}.$$

Здесь и далее задача нахождения угла сводится к нахождению косинуса или синуса, или тангенса этого угла. Далее, если необходимо, то по таблице находят приближенное значение этого угла.

2) Чтобы найти угол между прямой AD и гранью ABC, нужно знать их уравнения. Т.к. $\overline{AD}(-4; 1; 7)$, то уравнение прямой AD записывается так: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{7}$. Поскольку $\overline{BA}(2; -3; -4)$ и $\overline{BC}(-1; -2; 2)$, то вектор нормали грани ABC находится следующим образом: $\vec{n}(-6-8; 4-4; -4-3) = \vec{n}(-14; 0; -7)$. Умножив последний вектор на $(-7)^{-1}$, получим вектор $\vec{n}_1$ (2; 0; 1), который также является вектором нормали грани ABC. Итак, уравнение грани ABC записывается так: $2(x-2) + 0(y-0) + (z+3) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x + z - 1 = 0$. Тогда необходимый нам угол φ определяется следующим образом:

$$\sin\varphi = \frac{|-4\cdot 2+1\cdot 0+7\cdot 1|}{\sqrt{4^2+1^2+7^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{330}}{330}.$$

3) Мы уже знаем уравнение грани ABC: $2x + z - 1 = 0$. Теперь нужно написать уравнение грани ABD. Поскольку $\overline{AD}(-4; 1; 7)$ и $\overline{AB}(-2; 3; 4)$, то вектор нормали грани ABD имеет вид $\vec{n}(4-21; -14+16; -12+2) = \vec{n}(-17; 2; -10)$. Тогда уравнение грани ABD записывается в следующем виде: $-17(x-2) + 2y - 10(z+3) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 17x - 2y + 10z - 4 = 0$. Итак, если γ – искомый двугранный угол, то

$$\cos\gamma = \frac{|2\cdot 17+0\cdot(-2)+1\cdot 10|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17^2+2^2+10^2}} = \frac{44}{\sqrt{1965}} = \frac{44\sqrt{1965}}{1965}.$$

Ответ: 1) $\cos\angle ABC = -\frac{4\sqrt{29}}{87}$; 2) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{330}}{330}$.

3) $\cos\gamma = \frac{44\sqrt{1965}}{1965}$. ■

1. Как определить угол между прямыми (по заданным уравнениям прямых)? Какой угол принять в качестве угла между скрещивающимися прямыми?
2. Как определить угол между прямой и плоскостью? Напишите формулу и поясните ее смысл.
3. Как определить угол между двумя плоскостями (по заданным уравнениям плоскостей)? Напишите формулу и поясните ее смысл.
4. Почему нельзя определять углы треугольника с помощью уравнений прямых, проходящих через соответствующие стороны треугольника? Обоснуйте ответ. Какие векторы используются для определения угла $\angle ABC$?

Упражнения

A

2.61. Найдите угол между прямыми:

1) $\dfrac{x-3}{8}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-5}{3}$ и $x = 2 - t$, $y = 15 + 2t$, $z = 3t - 5$;

2) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ и $x = 7 + 5t$, $y = 4 + t$, $z = 5 + 4t$.

2.62. Найдите угол между плоскостями:

1) $x + 2y + z - 6 = 0$ и $x - y - 2z + 3 = 0$;
2) $x + 3y - 2z - 6 = 0$ и $2x + 3y - 2z - 4 = 0$.

2.63. Найдите угол между прямыми:

1) $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-5}{3}$ и $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-5}{3}$;

2) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-5}{1}$ и $x = 2 - 2t$, $y = 1 + 3t$, $z = 3t - 2$;

3) $x = 7 + 5t$, $y = 4 + t$, $z = 5 + 4t$ и $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$;

4) $x = 5t$, $y = 4 + 2t$, $z = 1 - 4t$ и $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = 3t-1$.

2.64. Найдите угол между прямой и плоскостью:

1) $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+5}{5}$ и $x + 2y + 3z + 6 = 0$;

2) $x = 2 - t$, $y = 15 + 2t$, $z = 3t - 5$ и $2x + y - 2z - 6 = 0$;

3) $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-2}{1}$ и $x-5y-2z+4=0$;

4) $x=2-3t$, $y=4-t$, $z=-1+4t$ и $x+y-2z-1=0$.

2.65. Найдите угол между двумя плоскостями:

1) $2x-5y-2z+4=0$ и $x+2y+z-6=0$;
2) $x+2y-2z-1=0$ и $4x-y-2z+3=0$;
3) $2x+y-2z-6=0$ и $x+3y-2z-6=0$;
4) $3x+2y-z+6=0$ и $2x+3y-2z-4=0$.

B

2.66. Напишите уравнение плоскости, параллельной данной плоскости $x-2y+2z-5=0$ и отстоящей от нее на расстоянии, равном: 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 8.

▲ 3) $x-2y+2z-5=0$ – данная плоскость. Тогда уравнение искомой плоскости имеет вид: $x-2y+2z+d=0$ (обоснуйте это). Тогда расстояние между этими плоскостями определяется так (см. задачу **2.54**):

$$5=\frac{|d+5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|d+5|}{3}\Rightarrow|d+5|=15\Rightarrow d_1=10,\ d_2=-20.$$

Поэтому уравнения необходимых нам плоскостей записываются так:

$x-2y+2z+10=0$ или $x-2y+2z-20=0$. ■

2.67. Найдите угол между прямой $\begin{cases}2x+y-4z+1=0,\\ x-y+z-1=0\end{cases}$ и прямой, проходящей через точку $M_0(2;\ 3;\ -1)$ и начало координат.

2.68. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;\ 0;\ -2)$ и: 1) параллельной оси Oy; 2) перпендикулярной оси Oy.

2.69. Найдите угол между прямой $\begin{cases}x+3y-4z+1=0,\\ 2x-y+z-3=0\end{cases}$ и ее проекцией на плоскость $2x+2y-3z-1=0$.

2.70. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\ 0;\ -2)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x - 4z + 1 = 0, \\ x - y - 3 = 0. \end{cases}$

2.71. Даны плоскость $x = 4z + 10$ и прямая $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$ Найдите: 1) точку их пересечения; 2) угол между ними.

2.72. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$: $A(1;\ 8;\ -3)$, $B(3;\ 4;\ 1)$, $C(-1;\ 2;\ 3)$, $D(-3;\ -2;\ 5)$. Найдите: 1) $\cos\angle ABC$; 2) угол между прямой AD и гранью ABC; 3) угол между гранями ABC и ABD.

C

2.73. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и образующей с плоскостью $x - y = 0$ угол, равный $60°$.

2.74*. Напишите уравнение плоскости, делящей пополам двугранный угол, образованный плоскостями $2x + 2y - z = 0$ и Oxy.

2.75. Точки $A(1;\ 8;\ -3)$, $B(3;\ 4;\ 1)$, $C(-1;\ 2;\ 3)$, $A_1(-3;\ -2;\ 5)$ являются вершинами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите: 1) координаты других вершин; 2) уравнение ребер AB, AC и AA_1; 3) $\angle ABC$; 4) угол между ребром AA_1 и плоскостью основания; 5) величину двугранных углов, смыкающихся вдоль ребер AB, AC и AA_1.

2.76. Найдите косинусы углов между прямой $x = 2 + t$, $y = 15 + 2t$, $z = 2t - 5$ и осями координат. Эти косинусы называются направляющими косинусами данной прямой. Итак, если α, β и γ – указанные углы, то $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$. Здесь $\vec{p}(1;\ 2;\ 2)$ – направляющий вектор данной прямой и $|\vec{p}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Следовательно, $|\vec{p}|\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ – единичный направляющий вектор данной прямой. В общем случае найдите направляющие косинусы прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$. Используя полученные результаты, найдите направляющие косинусы прямых, заданных в задаче **2.61.**

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Уравнение прямой	Түзудің теңдеуі	Line equation
Направляющий вектор прямой	Түзудің бағыт-таушы векторы	Leading vector of a line
Уравнение плоскости	Жазықтықтың теңдеуі	Plane equation
Вектор нормали плоскости	Жазықтықтың нормаль векторы	Normal vector of a plane
Каноническое уравнение прямой	Түзудің канондық теңдеуі	Canonical equation of a line
Параметрическое уравнение прямой	Түзудің параметрлік теңдеуі	Parametric equation of a line
Общее уравнение прямой	Түзудің жалпы теңдеуі	General equation of a line
Общее уравнение плоскости	Жазықтықтың жалпы теңдеуі	General equation of a plane

Выводы раздела «ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ»

1) Параметрическое уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{p}(m;n;k)$ записывается следующим образом:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases}$$

2) Если в каждом уравнении данной системы параметр t выразить через другие уравнения, то получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}.$$

3) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(a;b;c)$, записывается так:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

4) ***Общее уравнение*** плоскости записывается следующим образом:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

5) Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно векторам $\vec{p}_1(m_1;n_1;k_1)$ и $\vec{p}_2(m_2;n_2;k_2)$, то ее уравнение записывается так:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

где

$$\begin{cases} a = n_1k_2 - n_2k_1, \\ b = k_1m_2 - k_2m_1, \\ c = m_1n_2 - m_2n_1. \end{cases}$$

6) Если уравнениями $a_1x+b_1y+c_1z+d_1= 0$ и $a_2x+b_2y+c_2z+d_2= 0$ заданы две плоскости, то следующей системой определяется некоторая прямая в пространстве:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Данную систему уравнений называют ***общим уравнением*** прямой.

7) Угол между векторами $\vec{p}_1(m_1; n_1; k_1)$ и $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ определяется по формуле

$$\cos\left(\widehat{\vec{p}_1, \vec{p}_2}\right) = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + k_1 k_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}.$$

8) Если $\vec{p}(m; n; k)$ направляющий вектор прямой l, а $\vec{n}(a; b; c)$ – вектор нормали плоскости α, то угол между прямой l и плоскостью α определяется формулой.

$$\sin\varphi = \frac{|ma + nb + kc|}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

9) Величина двугранного угла между плоскостями a_1 и a_2 определяется формулой

$$\cos\left(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}\right) = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Раздел 3. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

В этом разделе вы познакомитесь с одним из интереснейших понятий геометрии – телами вращения. В настоящее время тела вращения широко применяются в архитектуре, и мы часто встречаем здания на подобие цилиндра, конуса, усеченного конуса и т.п. Для того чтобы применять и исследовать особенности этих фигур, вы должны освоить этот раздел.

Темы, рассматриваемые в разделе

3.1. Цилиндр.
3.2. Конус. Усеченный конус.
3.3. Сфера и шар.

Экспо–2017, г. Нур-Султан. «Нур Әлем» – архитектурный символ. Это самое большое здание в мире в форме сферы, его диаметр равен 80 м. Здание состоит из восьми этажей. Изучив материалы данного раздела, вы сможете найти площадь сечения 7-го этажа.

3.1. Цилиндр

Изучив пункт, вы будете:

- *знать определение цилиндра, его элементы, изображать цилиндр на плоскости;*
- *выводить формулы площадей боковой и полной поверхностей и применять их при решении задач;*
- *решать задачи на нахождение элементов цилиндра;*
- *изображать развертку цилиндра;*
- *строить сечения цилиндра плоскостью и решать задачи.*

3.1.1. Понятие тел и поверхностей вращения

Нужно уметь отличать тело вращения от поверхности вращения. Сначала рассмотрим понятие *тело вращения.*

Пусть дан плоский пятиугольник $ABCDE$. Будем вращать его вокруг прямой, проходящей через сторону AE. Тогда несложно представить, что получится тело, изображенное на рис. 3.1. Это тело называется ***телом вращения***, а прямая AE – ***осью вращения***.

Сечение тела вращения, образованное плоскостью, проходящей через ось вращения, называется ***осевым сечением***. Всякое осевое сечение тела вращения является фигурой, симметричной относительно оси вращения, и это сечение осью вращения делится на две части, каждая из которых является исходной фигурой вращения. Сечение тела вращения, перпендикулярное оси вращения, является кругом либо состоит из концентрических колец (рис. 3.2).

Множество граничных точек тела вращения называется его поверхностью, т.е. *поверхностью вращения.*

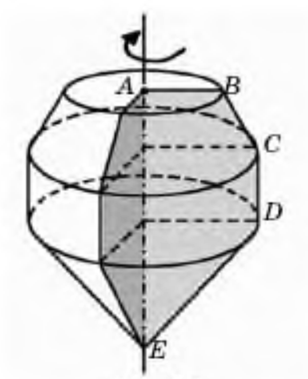


Рис. 3.1

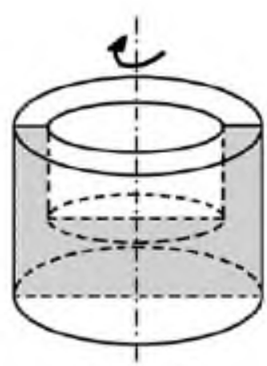


Рис. 3.2

В целом поверхность вращения можно получить вращением фигуры, состоящей из плоских кривых, вокруг заданной на этой плоскости оси. Например, на рис. 3.3 изображена поверхность вращения фигуры, составленной из дуг AB и BC, вокруг оси OO_2. Линия, составленная из дуг AB и BC, называется ***образующей*** поверхности вращения.

Итак, чтобы однозначно определить тело (поверхность) вращения, достаточно указать ось вращения и фигуру, которую вращаем вокруг данной оси.

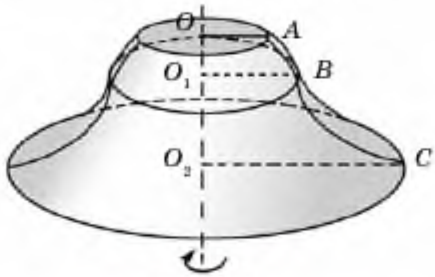


Рис. 3.3

3.1.2. Цилиндр

Тело, образованное вращением прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон, называется ***цилиндром.***

На рис. 3.4 изображен цилиндр, образованный вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой, проходящей через сторону AB. Подобные цилиндры называются ***круговыми цилиндрами,*** а их поверхность – ***цилиндрической поверхностью.*** Здесь отрезок CD и параллельные ему отрезки, расположенные на цилиндрической поверхности, являются ***образующими*** этой поверхности. Например, CD и C_1D_1 – образующие. Итак, поверхность, полученная вращением образующей вокруг оси цилиндра, называется ***боковой поверхностью*** цилиндра. Два равных круга, полученных вращением отрезков AD и BC, называются ***основаниями*** цилиндра, а отрезки AD и BC – ***радиусами оснований*** цилиндра. Длина образующей цилиндра является его ***высотой***, т.к. она определяет расстояние между основаниями цилиндра.

Если цилиндрическую поверхность разрезать по образующей и окружностям оснований и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность вместе с основаниями лежали в одной плоскости, то получим фигуру, называемую ***разверткой цилиндра*** (рис. 3.5). Если радиус основания цилиндра равен r, а высота – h, то развертка его боковой поверхности есть прямоугольник с измерениями h и $2\pi r$ (длина окружности основания цилиндра). Тогда площадь боковой поверхности определяется по следующей формуле

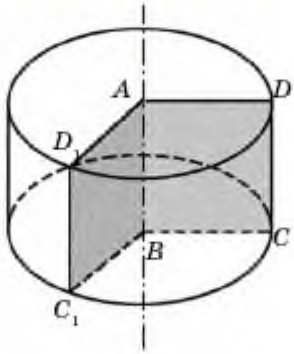


Рис. 3.4

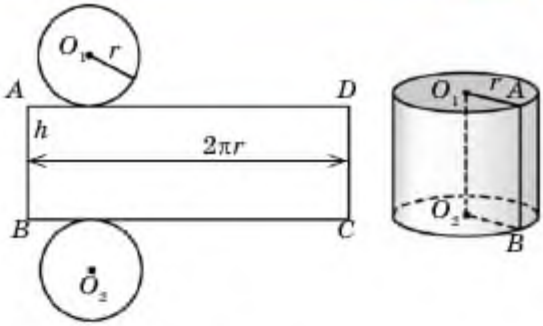


Рис. 3.5

$$S_{бок} = 2\pi rh,$$

а площадь полной поверхности – по формуле

$$S_{полн} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h).$$

3.1.3. Призмы, вписанные в цилиндр и описанные около цилиндра

Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и не имеющая с ним других общих точек, называется ***касательной плоскостью.*** На рис. 3.6 плоскость α является касательной плоскостью к данному цилиндру. Осевое сечение, проходящее через данную образующую, перпендикулярно плоскости α: $(ABCD) \perp \alpha$.

Призмой, ***описанной*** около цилиндра, называется призма, основания которой лежат в плоскостях оснований цилиндра и каждая грань которой касается его. На рис. 3.7 изображена треугольная призма, описанная около цилиндра. Ее основаниями являются треугольники, описанные около оснований цилиндра.

Призмой, ***вписанной*** в цилиндр, называется призма, основаниями которой являются многоугольники, вписанные в основания цилиндра. На рис. 3.8 изображена прямая шестиугольная призма, вписанная в цилиндр. Ее основания вписаны в основания цилиндра.

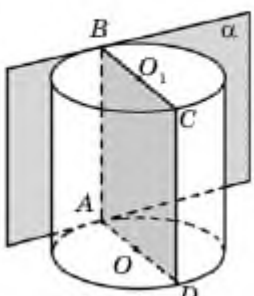


Рис. 3.6

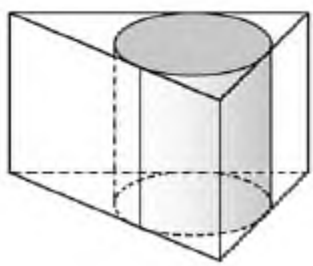


Рис. 3.7

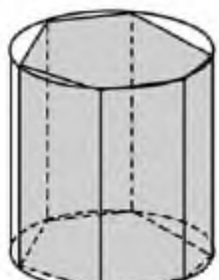
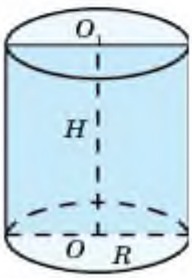


Рис. 3.8

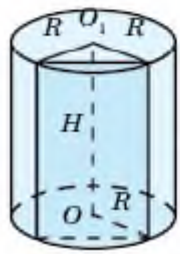
3.1.4. Сечения цилиндра

Фигура, образованная пересечением тела вращения Φ с плоскостью α, называется ***сечением*** данного тела, а плоскость α – ***секущей плоскостью***.

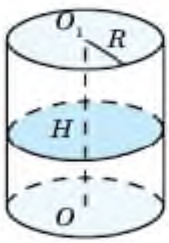
Сечения цилиндра



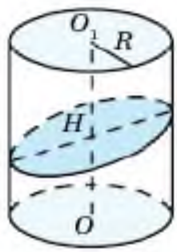
Сечение, образованное плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется ***осевым сечением цилиндра*** и является ***прямоугольником***.



Сечение, образованное плоскостью, параллельной оси цилиндра, является ***прямоугольником***.



Сечение, образованное плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, является ***кругом***.



Сечение, образованное плоскостью, пересекающей ось цилиндра под углом, не перпендикулярным его оси, является ***эллипсом***.

Дополнительные электронные ресурсы
https://scienceforum.ru/2019/article/2018011262

1. Что называется телом вращения? Что называется осевым сечением образующей тела вращения?
2. Что называется поверхностью вращения? Чем она отличается от тела вращения?
3. Что такое круговой цилиндр? Укажите его основание, высоту и боковую поверхность.
4. Как нарисовать развертку цилиндра? Из каких фигур она состоит и как найти ее площадь?
5. Что такое призма, вписанная в цилиндр (описанная около цилиндра)?
6. Какую плоскость называют касательной к цилиндру?

Упражнения

A

Практическая работа

3.1. Приведите пример цилиндрических поверхностей (тел), встречающихся в окружающей нас среде.

3.2. Можно ли построить цилиндрическую поверхность (произвольную) с помощью листа бумаги? Считая, что прямоугольный лист является боковой поверхностью прямого кругового цилиндра, найдите радиус основания этого цилиндра. Сколько ответов имеет эта задача?

3.3. Изобразите тело вращения, образованное вращением квадрата вокруг одной из его сторон.

3.4. По развертке определите вид цилиндра (рис. 3.9). Определите площадь полной поверхности.

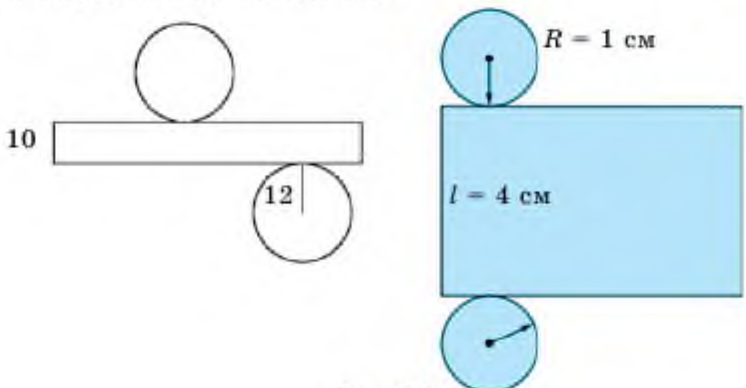


Рис. 3.9

3.5. Постройте тело вращения, полученное вращением прямоугольника вокруг его меньшей стороны.

3.6. Назовите фигуру и определите ее развертку (рис. 3.10).

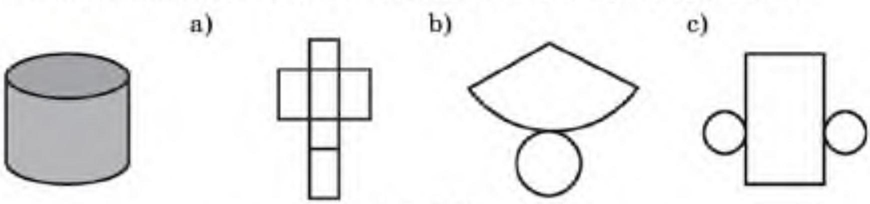


Рис. 3.10

3.7. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, радиус основания которого равен r, а высота – h: а) $r=2$ см, $h=3$ см; б) $r=10$ мм, $h=7$ мм; в) $r=5$ м, $h=12$ м.

3.8. Осевое сечение цилиндра есть квадрат площадью S. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если: а) $S=16$ см^2; б) $S=121$ м^2; в) $S=441$ мм^2.

3.9. Высота цилиндра равна 11 см, а радиус – 3 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра (рис. 3.11).

3.10. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, полученного вращением квадрата площадью, равной 169 см^2, около одной из его сторон (рис.3.12).

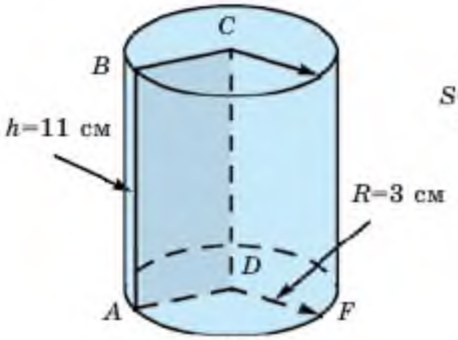


Рис. 3.11

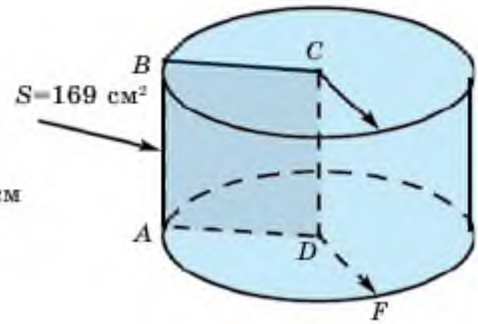


Рис. 3.12

3.11. Изобразите цилиндры, полученные вращением прямоугольника со сторонами 2 см и 4 см вокруг каждой из его сторон. Найдите площади осевого сечения и боковой поверхности.

3.12. Радиус основания цилиндра равен 6 см, а высота – 5 см. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра.

3.13. Диагональ осевого сечения цилиндра, равная 12 см, образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите: 1) радиус основания; 2) высоту; 3) площадь основания цилиндра.

3.14. В цилиндр вписан куб с ребром 4 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

3.15. Развертка боковой поверхности цилиндра является квадратом со стороной, равной 10 см. Найдите радиус основания цилиндра.

3.16. Сколько: а) центров симметрии; б) осей симметрии; в) плоскостей симметрии имеет цилиндр? Необходимо ли, чтобы все плоскости симметрии проходили через ось цилиндра? Обоснуйте ответ.

3.17. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см, и она наклонена под углом 60° к плоскости основания. Найти: 1) радиус основания; 2) высоту; 3) площадь основания цилиндра.

3.18. Высота цилиндра равна 12 см, а радиус – 10 см. Сечение цилиндра, параллельное оси цилиндра, является квадратом. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

Практическая работа

3.19. Из листа стали нужно сделать трубу длиной 4 м и диаметром 20 см. При сварке листа стали 2,5% ее площади совмещаются. Сколько квадратных метров стальных листов расходуется для изготовления четырех труб?

В

3.20. Два различных цилиндра получены вращением прямоугольника вокруг каждой из его сторон. Докажите, что площади поверхностей этих цилиндров равны. Будут ли равны площади их полных поверхностей?

3.21. Изобразите тело вращения, образованное вращением вокруг одной из сторон: 1) равностороннего треугольника; 2) правильного шестиугольника.

3.22. Используя условие предыдущей задачи, найдите площадь осевого сечения, если сторона многоугольника равна a.

3.23. Высота цилиндра равна 6 см, а радиус – 5 см. Найдите площадь сечения, параллельного оси цилиндра и удаленной от нее на 3 см.

▲ Дано: высота (ось) цилиндра $OO_1 = 6$ см, радиус $OA = 5$ см, AA_1B_1B – сечение цилиндра, параллельное оси OO_1, $OF = 3$ см – расстояние от оси цилиндра до его сечения.

Найти $S_{\text{сеч. } AA_1B_1B}$.

Решение: $S_{\text{сеч. } AA_1B_1B} = OO_1 \cdot AB$.

1) При построении цилиндра с заданными параметрами выше мы видим, что в основании цилиндра у нас лежит равнобедренный треугольник AOB, боковые стороны которого являются радиусами: $R=OA=OB=5$ см, а $OF=3$ см – высота, опущенная из точки O на сторону AB (основание сечения цилиндра).

2) Вычислим длину AB, применяя теорему Пифагора:

$AF = \sqrt{OA^2 - OF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ см,

$AB = 2AF = 2 \cdot 4 = 8$ см.

3) Зная, что высота (ось) цилиндра $OO_1 = 6$ см, вычислим площадь сечения:

$S_{сеч.AA_1B_1B} = OO_1 \cdot AB = 6 \cdot 8 = 48$ (см^2)

4) Ссылка на 3D-иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/fku24dcx ■

3.24. Правильная шестиугольная призма: 1) вписана в цилиндр; 2) описана около него. Найдите отношение площадей боковых поверхностей цилиндра и призмы.

3.25. Высота цилиндра на 6 см больше радиуса основания, а площадь его полной поверхности равна 112 см^2. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

3.26. В цилиндр вписан октаэдр так, что две его вершины совпадают с центрами оснований цилиндра, а другие его вершины расположены на боковой поверхности. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если ребро октаэдра равно a (рис. 3.13).

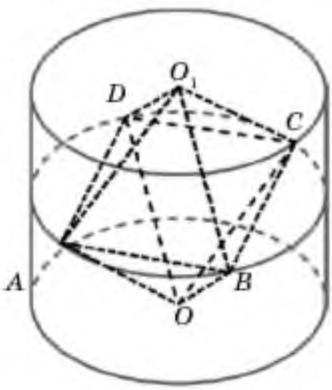


Рис. 3.13

3.27. Площадь боковой поверхности цилиндра радиусом R равна сумме площадей его оснований. Найдите высоту цилиндра.

3.28. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в правильную треугольную призму высотой h и стороной основания a.

3.29. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, описанного около правильной треугольной призмы, из предыдущей задачи.

Практическая работа

3.30. Газопроводную трубу диаметром 1420 мм двукратно заворачивают изоляционной пленкой. Найдите площадь пленки, необходимой для изоляции 1 км газопроводной трубы (толщиной пленки и припусками на швы пренебречь).

▲ Дано: цилиндр, $R = 710$ мм $= 0,71$ м, $s = 1$ км $= 1000$ м.

Найти $2S_{бок}$.

Решение: $2S_{бок} = 2 \cdot 2\pi rh = 2 \cdot 2\pi \cdot 0,71 \cdot 1000 = 2 \cdot 1420\pi$ м$^2 \approx$
≈ 8918 м^2. ■

3.31. Можно ли определить площадь боковой поверхности цилиндра по заданной площади его осевого сечения? Обоснуйте ответ.

3.32. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 см и 8 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы, если ее высота равна 10 см.

Практическая работа

3.33. Две трубы длиной 5 см и диаметром 3 см соединены друг с другом так, как показано на рис. 3.14, под прямым углом. Найдите площадь боковой поверхности полученной фигуры.

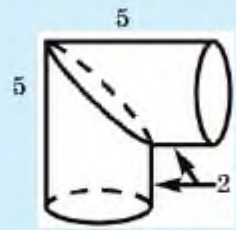
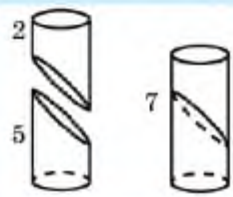


Рис. 3.14

Если эту фигуру разрезать по линии сварки и приварить заново так, как показано на рисунке, то получим трубу длиной 7 см и задача решается просто.



▲ Дано: цилиндр, $R = 1{,}5$ см, $h = 7$ см.
Найти $S_{бок}$.
Решение: $S_{бок} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 7 =$
$= 21\pi$ см^2. ■

C

3.34. Одна из сторон прямоугольника равна 6 см, а диагональ – 10 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, образованного вращением прямоугольника около большей стороны.

3.35. Одно из двух сечений цилиндра, проходящих через одну образующую, проходит через ось цилиндра, а двугранный угол между данными сечениями равен φ. Найдите отношение площадей этих сечений.

3.36. Как построить касательную плоскость цилиндра, проходящую через данную точку вне цилиндра? (Для того чтобы построить плоскость, достаточно указать две пересекающиеся прямые, лежащие в этой плоскости).

3.37. Докажите, что суммы площадей противоположных граней четырехугольной призмы, описанной около цилиндра, равны.

3.38*. Докажите, что сумма двугранных углов при противоположных ребрах четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр, равна 180°.

3.39*. На боковой поверхности цилиндра отмечены три точки, каждая пара из которых не лежит на одной образующей. Как найти точку пересечения его произвольной образующей с плоскостью, проходящей через данные три точки? (Рис. 3.15).

3.40. Какой должна быть зависимость между радиусом и высотой цилиндра, чтобы площадь его боковой поверхности была равна площади круга, описанного около его осевого сечения (рис. 3.16)?

▲ Дано: цилиндр, R – радиус, h – высота, S – площадь круга, описанного около осевого сечения цилиндра, $S_{бок} = S$.

Найти зависимость между R и h.

Решение: $S_{бок} = 2\pi Rh$. С другой стороны в ΔAOO_1 $AO_1 = R$,

$$OO_1 = \frac{h}{2} \Rightarrow AO = \sqrt{AO_1^2 + OO_1^2} = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + h^2}.$$

Отсюда $S = \pi \cdot AO^2 = \frac{\pi}{4}(4R^2 + h^2) \Rightarrow 8Rh = 4R^2 + h^2$. Если предположить $\frac{h}{R} = x$, то $x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{12}$, т.е. $h = 2(2 \pm \sqrt{3})R$. ■

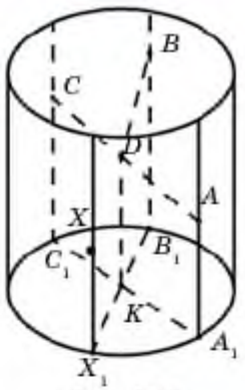


Рис. 3.15

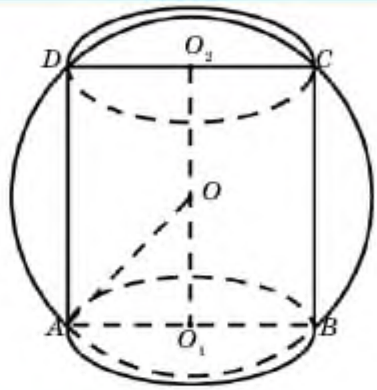


Рис. 3.16

Упражнения для повторения

3.41. В равнобедренный треугольник вписана окружность радиусом 7,5, которая делит высоту треугольника в отношении 17:15. Найдите периметр и площадь треугольника.

3.42. В трапецию вписана окружность радиусом 6. Точка касания окружности делит нижнее основание на отрезки, равные 9 и 12. Найдите стороны трапеции и ее площадь.

3.2. Конус. Усеченный конус

Изучив пункт, вы будете:

- *знать определения конуса, усеченного конуса, их элементы, изображать конус на плоскости;*
- *решать задачи на нахождение элементов конуса;*
- *выводить формулы площадей боковой и полной поверхностей конуса и применять их при решении задач;*
- *решать задачи на нахождение элементов усеченного конуса;*
- *выводить формулы площадей боковой и полной поверхностей усеченного конуса и применять их при решении задач;*
- *изображать сечение конуса и усеченного конуса плоскостью, применять их при решении задач.*

3.2.1. Конус

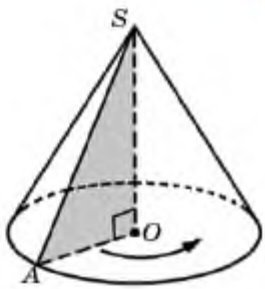


Рис. 3.17

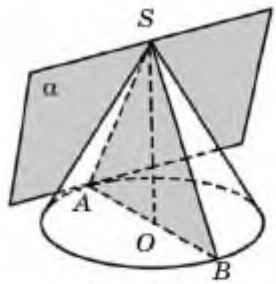


Рис. 3.18

Тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов, называется ***конусом***.

На рис. 3.17 изображен конус, образованный вращением прямоугольного треугольника AOS вокруг SO. Поверхность, образованная вращением гипотенузы AS, называется ***боковой поверхностью*** конуса, а круг, полученный вращением катета AO, – ***основанием***. Радиус основания конуса называется его ***радиусом***, точка S – ***вершиной***, отрезок SO – ***высотой***, а прямая SO – ***осью конуса***.

Всякая плоскость, проходящая через ось конуса, является его плоскостью симметрии, а SO – ***осью симметрии***. Конус не имеет центра симметрии. Все осевые сечения конуса есть равные между собой равнобедренные треугольники. Отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой окружности основания, называется его ***образующей***.

Плоскость, проходящая через образующую конуса и не имеющая с ним других общих точек, называется ***касательной плоскостью*** этого конуса. На рис. 3.18 изображена касательная плоскость α, проходящая через образующую SA. Здесь плоскость α перпендикулярна плоскости, проходящей через образующую SA и ось SO.

Если поверхность конуса разрезать по образующей и окружности основания и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность с основанием лежала в одной плоскости, то на плоскости получим фигуру, называемую ***разверткой конуса***. На рис. 3.19 изображена развертка конуса, состоящая из сектора SAA_1, радиус которой равен образующей l конуса, а длина дуги равна длине окружности $2\pi r$ основания конуса, и круга основания.

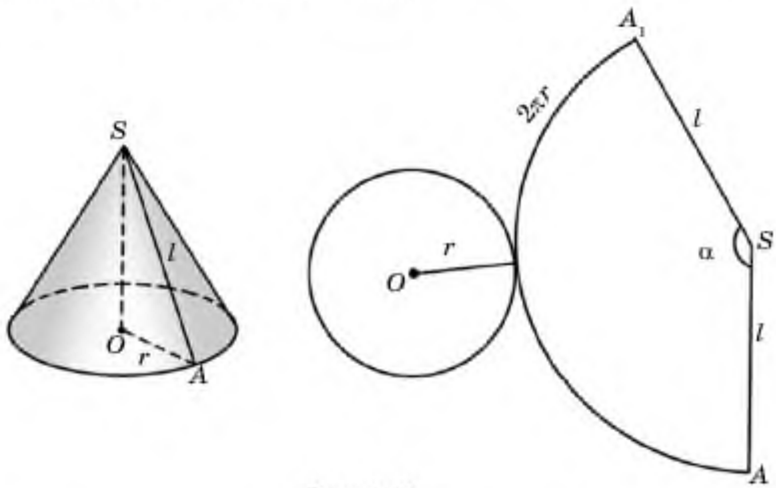


Рис. 3.19

Определим площадь боковой поверхности конуса. Из рис. 3.19 видим, что площадь боковой поверхности конуса равна площади сектора SAA_1 радиусом l и с центральным углом α: $S_{\text{бок}}=S_{\text{сек}}$. Из курса планиметрии знаем, что длина дуги AA_1 определяется равенством $l_{AA_1} = \alpha \cdot l$, ($\alpha$ – радианная мера угла), с другой стороны, длина этой дуги равна длине окружности основания конуса, т.е. $2\pi r$. Тогда из равенства $\alpha l = 2\pi r$ имеем: $\alpha = \dfrac{2\pi r}{l}$. Площадь сектора с центральным углом α и радиусом l определяется по формуле

$$S_{\text{сек}} = \frac{\alpha}{2} l^2.$$

Отсюда

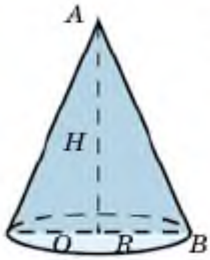
$$S_{\text{бок}} = S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{l} \cdot l^2 = \pi r l,$$

т.е. получим формулу $S_{\text{бок}} = \pi r l$.

А площадь полной поверхности конуса определяется формулой

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

Сечения конуса



Сечение, образованное плоскостью, проходящей через ось конуса, называется ***осевым сечением*** и является ***равнобедренным треугольником***.

Сечение, образованное плоскостью, проходящей через вершину и не параллельной оси конуса, является ***равнобедренным треугольником***.

Сечение, образованное плоскостью, перпендикулярной оси конуса, является ***кругом***.

Сечение, образованное плоскостью, пересекающей ось конуса под углом, не перпендикулярным его оси, является ***эллипсом***.

3.2.2. Усеченный конус

Пересечем произвольный конус плоскостью, параллельной основанию. Полученное сечение является кругом, оно делит конус на две части. Одна из этих частей называется малым конусом, подобным данному конусу, а вторая часть – ***усеченным конусом*** (рис. 3.20). Полученное сечение и основание исходного конуса называются ***основаниями*** усеченного конуса. Расстояние между основаниями усеченного конуса называется его ***высотой***. Отрезок OO_1– высота усеченного конуса. Усеченный конус можно получить вращением прямоугольной трапеции ABO_1O вокруг боковой стороны OO_1, перпендикулярной основанию. Сторона OO_1 называется ***осью*** усеченного конуса, а вторая боковая сторона трапеции AB – его образующей. Поверхность, полученная вращением отрезка AB, называется ***боковой поверхностью*** усеченного конуса.

Усеченный конус часто используется в архитектуре. Ярким примером этому является здание бизнес-центра «Алтын Орда» в

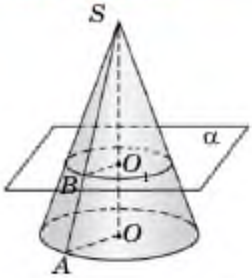


Рис. 3.20

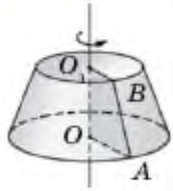


Рис. 3.21

городе Нур-Султан (рис. 3.21).

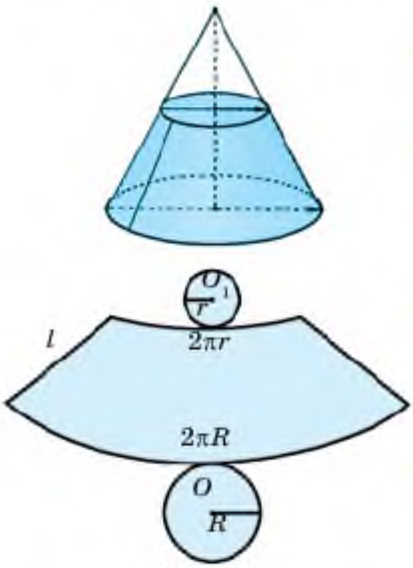


Рис. 3.22

Свойства усеченного конуса

- Все образующие усеченного конуса равны между собой.
- Боковая поверхность усеченного конуса является частью боковой поверхности соответствующего конуса.
- Полная поверхность усеченного конуса состоит из его боковой поверхности и двух кругов, расположенных в основаниях.
- Развертка усеченного конуса состоит из части конической поверхности и двух кругов, расположенных в основаниях (рис. 3.22).

Чтобы определить площадь боковой поверхности усеченного конуса, достаточно от площади боковой поверхности большего конуса отнять площадь боковой поверхности меньшего конуса. Пусть радиусы оснований усеченного конуса равны r и R, а образующая равна $AB = l$. Тогда площадь боковой поверхности меньшего конуса равна $S_1 = \pi r \cdot SB$, а большего конуса – $S_2 = \pi R \cdot SA$. Тогда

$$S_{бок} = S_2 - S_1 = \pi R \cdot SA - \pi r \cdot SB = \pi R(SB + AB) - \pi r \cdot SB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{бок} = \pi Rl + \pi \cdot SB(R - r).$$

Теперь SB выразим через l, r и R. Треугольники SBO_1 и SAO подобны, поэтому $\frac{SB}{SA} = \frac{r}{R}$, или $\frac{SB}{SB + l} = \frac{r}{R}$.

Отсюда $SB = \dfrac{lr}{R - r}$. Тогда из равенства $S_{бок} = \pi Rl + \pi \cdot SB(R - r)$ получим $S_{бок} = \pi rl + \pi Rl$. Таким образом, $S_{бок} = \pi l(R + r)$.

В общем случае рассмотренный нами конус называется ***прямым круговым конусом***. Так как его основание есть круг, то высота, перпендикулярная плоскости основания, проходит через центр основания. На практике рассматриваются и другие виды конических поверхностей, а именно: пусть кривая L расположена в плоскости α, а точка O – вне ее. Соединим точку O с каждой точкой M кривой L. Фигура, составленная из всевозможных отрезков OM, ($M \in L$), называется ***конической поверхностью***. Здесь кривая L называется *направляющей* конической поверхности, точка O – *вершиной*, а отрезок OM – *образующей* (рис. 3.23). Примером конической поверхности может служить торгово-развлекательный комплекс «Хан Шатыр» в городе Нур-Султан (рис. 3.24).

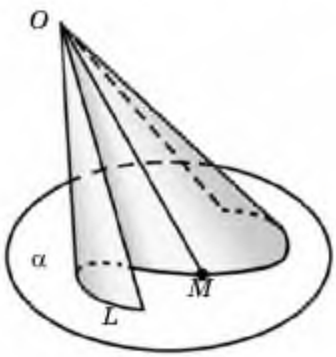


Рис. 3.23

Рис. 3.24

Так как в курсе средней школы рассматриваются только прямые круговые конусы, то в дальнейшем мы их будем называть просто ***конусами***.

Если основанием пирамиды является многоугольник, вписанный в основание конуса, и вершины пирамиды и конуса совпадают, то эту пирамиду называют ***вписанной*** в данный конус (рис. 3.25). А если основанием пирамиды является многоугольник, описанный около основания конуса, а вершины пирамиды и конуса совпадают, то пирамиду называют ***описанной*** около данного конуса (рис. 3.26). Аналогично можно рассматривать усеченную пирамиду, описанную около данного усеченного конуса, и усеченную пирамиду, вписанную в него. На рис. 3.27 изображена усеченная четырехугольная пирамида, вписанная в усеченный конус.

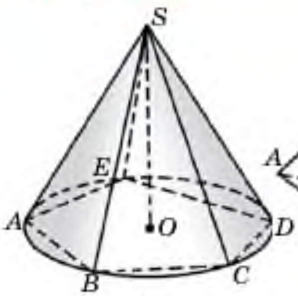


Рис. 3.25

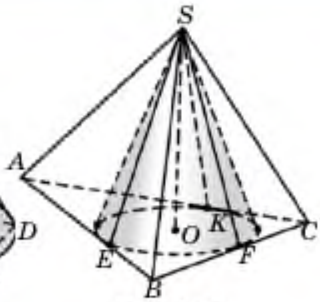


Рис. 3.26

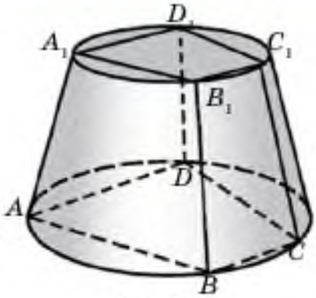
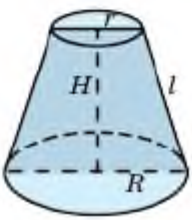


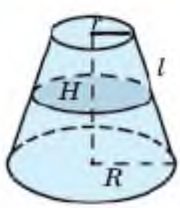
Рис. 3.27

Сечения усеченного конуса

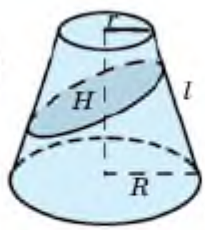


Сечение, образованное плоскостью, проходящей через ось усеченного конуса, называется ***осевым сечением*** и является ***равнобедренной трапецией***.

Сечение, образованное плоскостью, параллельной оси усеченного конуса, является ***равнобедренной трапецией***.



Сечение, образованное плоскостью, перпендикулярной оси усеченного конуса, является ***кругом***.



Сечение, образованное плоскостью, пересекающей ось усеченного конуса под углом, не перпендикулярным его оси, является ***эллипсом***.

1. Что такое конус? Назовите все элементы конуса. Приведите пример конуса из повседневной жизни. Назовите размеры его элементов (радиус, образующая, высота).
2. Запишите формулу площади боковой поверхности конуса. Докажите ее.
3. Что такое усеченный конус? Назовите все элементы усеченного конуса.
4. Запишите формулу площади боковой поверхности усеченного конуса. Докажите ее.

Упражнения

А

Практическая работа

3.43. Из плотной бумаги вырежьте круг. Полученный круг разрежьте по каким-либо двум радиусам и разделите круг на два круговых сектора. Из каждого сектора постройте (сконструируйте) коническую поверхность.

3.44. По развертке конуса (рис. 3.28) найдите его высоту, радиус и площадь полной поверхности.

3.45. Изобразите развертки конусов, данных на рис. 3.29, 3.30, и найдите площади боковых поверхностей.

3.46. На рис. 3.31 дана развертка боковой поверхности конуса. Найдите высоту и радиус основания конуса.

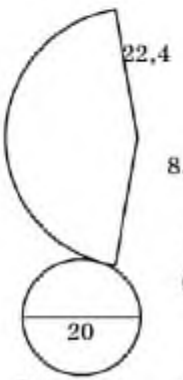


Рис. 3.28

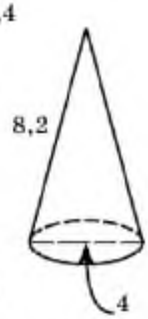


Рис. 3.29

Рис. 3.30

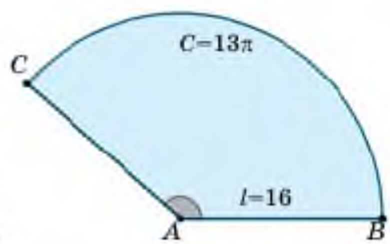


Рис. 3.31

3.47. По рис. 3.32 найдите радиус основания, образующую и площадь развертки усеченного конуса.

3.48. Высота конуса равна 4 см, а радиус основания – 3 см. Развертка его боковой поверхности является сектором. Найдите периметр этого сектора.

3.49. Найдите площадь боковой поверхности конуса, образованного вращением прямоугольного треугольника вокруг его меньшего катета, если катеты этого треугольника равны 6 см и 8 см.

3.50. Радиусы основания усеченного конуса, образованного вращением трапеции $ABCD$ вокруг стороны AB, равны R и $\frac{1}{3}R$. Най-

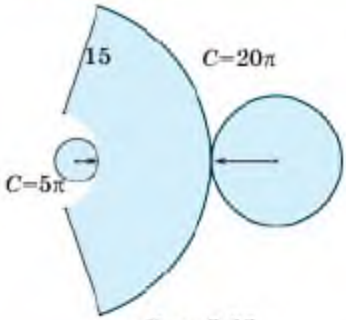


Рис. 3.32

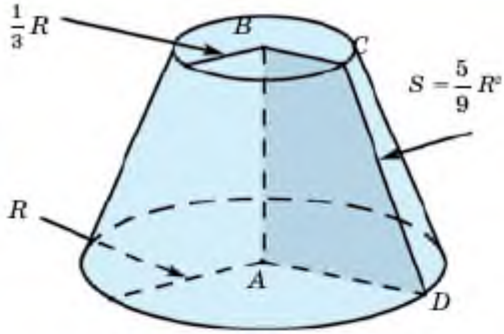


Рис. 3.33

дите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если площадь трапеции равна $\frac{5}{9}R^2$ (рис. 3.33).

3.51. Высота конуса равна h, а радиус основания – R. Найдите площадь осевого сечения конуса, если: 1) $h=5$ см, $R=3$ см; 2) $h=8$ м, $R=2$ м; 3) $h=12$ мм, $R=4$ мм.

3.52. Образующая конуса равна l, а радиус – R. Найдите площадь его боковой поверхности, если: 1) $l=3$ м, $R=1$ м; 2) $l=12$ см, $R=7$ см; 3) $l=20$ мм, $R=8$ мм.

3.53. Образующая конуса равна l, а высота – h. Найдите площадь полной поверхности, если: 1) $l=13$ см, $h=12$ см; 2) $l=10$ м, $h=6$ м; 3) $l=5$ м, $h=4$ м.

3.54. Радиус конуса равен R, а площадь осевого сечения – Q. Найдите его образующую, если: 1) $R=5$ см, $Q=60$ см^2; 2) $R=6$ м, $Q=48$ м^2; 3) $R=3$ м, $Q=12$ м^2.

3.55. Радиусы оснований усеченного конуса равны r и R, а образующая – l. Найдите площадь осевого сечения, если: 1) $r=3$ см, $R=6$ см, $l=5$ см; 2) $r=4$ см, $R=10$ см, $l=10$ см; 3) $r=10$ мм, $R=15$ мм, $l=13$ мм.

3.56. Используя условие предыдущей задачи, найдите площадь полной поверхности усеченного конуса.

3.57. Осевого сечения усеченного конуса – равнобокая трапеция с основаниями, равными a и b. Высота трапеции равна h. Найдите площадь его боковой поверхности, если: 1) $a=2$ м, $b=10$ м, $h=3$ м; 2) $a=10$ см, $b=22$ см, $h=8$ см; 3) $a=5$ см, $b=19$ см, $h=24$ см.

3.58. Образующая конуса равна l, а высота – h. Какой угол составляет образующая с плоскостью основания конуса, если: 1) $l=24$ см, $h=12$ см; 2) $l=12$ см, $h=6\sqrt{3}$ см; 3) $h=15$ см, $l=5\sqrt{2}$ см?

3.59. Каков угол между образующей и плоскостью основания конуса, если осевое сечение конуса является прямоугольным треугольником?

3.60. В конус вписана правильная четырехугольная пирамида, сторона основания которой равна $\sqrt{2}$ см, а высота – 5 см. Найдите площадь осевого сечения (рис. 3.34).

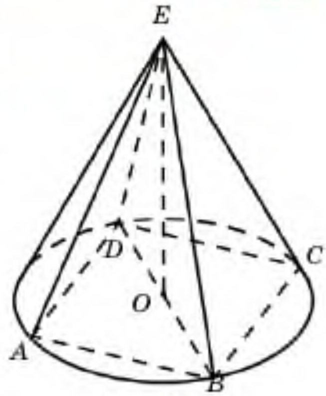


Рис. 3.34

B

3.61. Основанием пирамиды является квадрат, сторона основания которого равна 6 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в эту пирамиду, если ее высота равна 5 см.

3.62. Тело, изображенное на рис. 3.35, образовано вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг большего основания CD. $ABFD$ является квадратом, сторона которого равна r. Покажите, что площадь полной поверхности данного тела определяется формулой $S_{полн} = \pi r\left(3r + \sqrt{h^2 + r^2}\right)$, если $CF = h$.

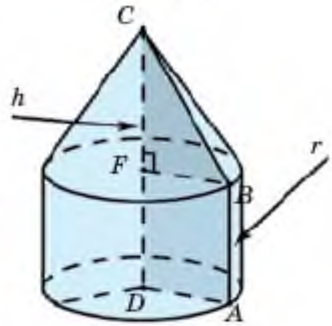


Рис. 3.35

3.63. Образующая конуса равна l и она образует с плоскостью основания угол φ. Найдите: 1) радиус основания; 2) высоту; 3) площадь осевого сечения; 4) площадь боковой поверхности конуса.

3.64. Высота конуса равна h. Площадь сечения, параллельная плоскости основания, в 2 раза меньше площади основания. Найдите расстояние между плоскостями сечения и основания.

3.65. Радиус основания конуса равен R. Найдите площадь сечения, параллельного основанию и делящего высоту в отношении 1:2, начиная с вершины конуса.

3.66. Высота равностороннего треугольника ABC равна h. Найдите площадь полной поверхности тела, образованного вращением этого треугольника вокруг стороны AB (рис. 3.36).

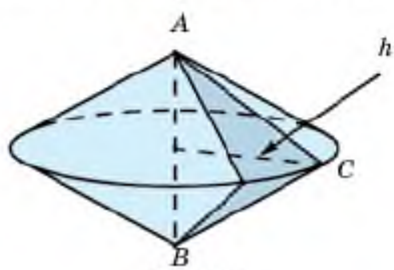


Рис. 3.36

3.67. Образующая конуса равна l, а радиус – r. Найдите площадь сечения конуса, проходящего через его вершину и хорду основания, опирающуюся на дугу, равную: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°.

3.68. Осевое сечение конуса есть равносторонний треугольник, а радиус основания равен R. Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие конуса, угол между которыми равен 30°.

3.69. Периметр равнобедренного треугольника равен 30 см, а площадь полной поверхности конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг его высоты, равна 64 см². Найдите стороны треугольника.

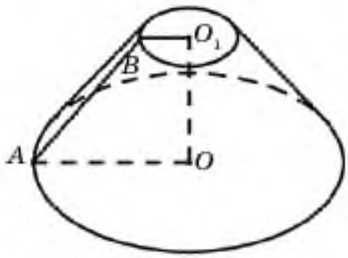


Рис. 3.37

3.70. Площади оснований усеченного конуса равны 4 см² и 25 см², а его высота разделена на три равные части. Найдите площади сечений усеченного конуса, проходящих через точки деления высоты параллельно основаниям.

3.71. Радиусы оснований усеченного конуса равны r и R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь его полной поверхности (рис. 3.37).

3.72. Образующая усеченного конуса наклонена к плоскости основания под углом 30°, а площадь осевого сечения равна Q. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

3.73. Одна из граней куба вписана в малое основание усеченного конуса, а противоположное основание лежит внутри большего основания. Найдите ребро куба, если радиусы оснований усеченного конуса равны r и R (рис. 3.38).

Рис. 3.38

▲ Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан в усеченный конус. $A_1O_1 = r$, $NO = R$.

Найти AB.

Решение. В этой задаче ребро куба не зависит от радиуса большего основания R. А радиус r равен половине диагонали грани куба (диагонали квадрата), поэтому $AB = \sqrt{2}\,r$. ■

3.74. Радиусы оснований и образующая усеченного конуса относятся как 1:4:5, а высота равна h. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

3.75. Угол между образующей l и высотой h конуса равен $30°$. Найдите площадь боковой поверхности правильной: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной пирамиды, вписанной в данный конус.

3.76. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна m и образует с основанием угол φ. Найдите площадь полной поверхности тела, образованного вращением данного треугольника вокруг основания.

3.77. Найдите площадь полной поверхности тела, образованного вращением треугольника со сторонами 10, 17 и 21 вокруг его большего основания.

3.78. Две стороны треугольника равны 8 и 15, а угол между ними – $60°$. Найдите площадь полной поверхности тела, образованного вращением данного треугольника вокруг большего основания.

C

3.79. Площадь полной поверхности цилиндра, вписанного в конус, равна площади боковой поверхности этого конуса, а осевое сечение конуса есть прямоугольный треугольник. Докажите, что расстояние от вершины конуса до верхнего основания цилиндра равно половине образующей конуса.

3.80. Какой должна быть зависимость между образующей и радиусом основания конуса, чтобы площадь полной поверхности конуса была равна площади круга, радиус которого равен высоте конуса?

3.81. Развертка боковой поверхности конуса составляет четверть круга. Площадь осевого сечения равна Q. Найдите площадь полной поверхности конуса.

3.82. Площадь основания конуса равна m, а боковой поверхности – $3m$. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

Практическая работа

3.83. Жестяное ведро имеет форму усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 15 см и 10 см, а образующая – 30 см. Каждое ведро закрашивается с двух сторон. Для закрашивания 1 $м^2$ необходимо 200 г краски. Сколько килограммов краски нужно для покраски 1000 ведер?

Упражнения для повторения

3.84. а) Основание AB трапеции $ABCD$ в два раза больше основания CD и боковой стороны AD. Диагональ AC равна a, а боковая сторона BC равна b. Найдите площадь трапеции.

б) В трапеции $ABCD$ основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD равны p, а боковая сторона BC – q. Найдите диагональ AC.

3.3. Сфера и шар

Изучив пункт, вы будете:

- *знать определение сферы, шара, изображать их на плоскости;*
- *решать задачи на нахождение площади сферы;*
- *знать взаимное расположение сферы и плоскости;*
- *решать задачи на взаимное расположение сферы и плоскости на координатной плоскости;*
- *знать определение и свойства касательной плоскости к сфере;*
- *решать задачи, связанные с сечениями шара и сферы.*

3.3.1. Понятия шара и сферы

Множество точек пространства, равноудаленных на расстояние R от заданной точки O, называется ***сферой***, а часть пространства, ограниченная сферой, – ***шаром***.

Точка O называется ***центром*** сферы (шара), а R – ***радиусом*** сферы (шара). Шар можно получить вращением полукруга радиуса R вокруг его диаметра (рис. 3.39), а сферу – вращением полуокружности вокруг ее диаметра. В дальнейшем сферу с центром в точке O радиусом R будем обозначать через $\omega(O; R)$, а соответствующий шар – $\Omega(O; R)$.

Любая плоскость (прямая), проходящая через центр сферы (шара), является плоскостью (осью) ее симметрии, а центр сферы – центром симметрии этой сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется ***диаметром*** сферы.

Всякое сечение сферы плоскостью является окружностью, а центр этой окружности – основанием перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость.

▲ Действительно, пусть сфера $\omega(O;\ R)$ и плоскость α пересекаются: $\alpha \cap \omega(O;\ R) \neq \varnothing$. На плоскости сечения выберем произвольную точку M: $M \in \alpha$, $M \in \omega(O;\ R)$ и обозначим через O_1 основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость α (рис. 3.40). Так как $OM = R$, $OO_1 = h$, $OO_1 \perp \alpha$, $O_1 \in \alpha$, то OO_1M – прямоугольный треугольник. Следовательно, $O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - h^2}$, т.е. длина отрезка O_1M не зависящая от выбора точки M, равна постоянному числу $\sqrt{R^2 - h^2}$. Поэтому множество $\alpha \cap \omega(O;\ R)$ является окружностью, а точка O_1 – ее центром. ■

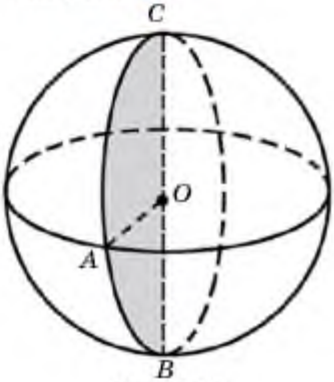


Рис. 3.39

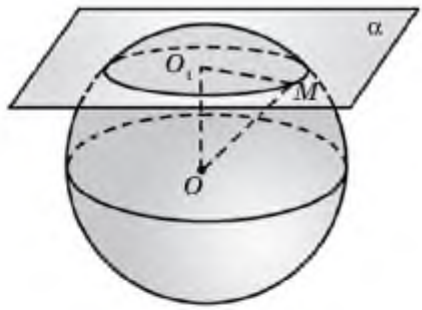


Рис. 3.40

Сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр, называется ***диаметральным сечением***, а иногда *диаметральной окружностью* или *большей окружностью*. Сечение шара плоскостью, являющееся кругом, делит шар на две части, каждая из которых называется ***шаровым сегментом*** (рис. 3.41).

Рис. 3.41

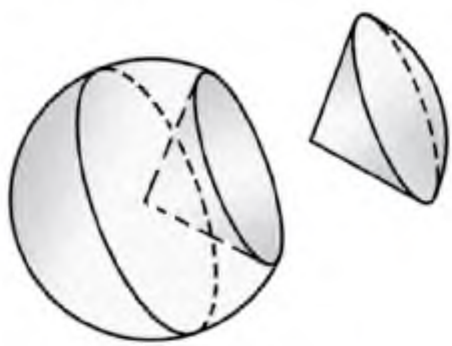


Рис 3.42

Соединим каждую точку окружности, образованной сечением сферы плоскостью, с центром этой сферы. Эти отрезки образуют боковую поверхность конуса и делят на две части соответствующий шар. Каждую из этих частей называют ***шаровым сектором*** (рис. 3.42).

3.3.2. Уравнение сферы

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ напишем уравнение сферы с центром в точке $C(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R.

▲ Если $M(x; y; z)$ – произвольная точка сферы, то по определению сферы необходимо, чтобы имело место равенство $CM=R$ (рис. 3.43). А по формуле расстояния между точками имеем, что $CM = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Тогда координаты точки M удовлетворяют уравнению $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$ или $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ (1), т.е. координаты любой точки сферы удовлетворяют уравнению (1). ■

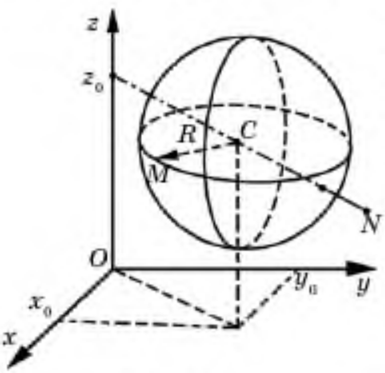


Рис. 3.43

Покажем, что координаты любой точки $N(x_1; y_1; z_1)$, которая не лежит на сфере $\omega(C; R)$, не удовлетворяют уравнению (1). Действительно, так как $N \notin \omega(C; R)$, то $CN \neq R$, т.е. $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2} \neq R$, или $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2 \neq R^2$. Таким образом, координаты точки, которая не лежит на сфере не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, уравнение (1) является уравнением сферы.

Если центр сферы C совпадает с началом координат, то $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$, т.е. $C(0; 0; 0)$ и уравнение сферы (1) имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \qquad (2)$$

3.3.3. Касательная плоскость к сфере

Если сфера $\omega(O; R)$ и плоскость α имеют только одну общую точку, то α называется ***касательной плоскостью*** к сфере, а их общая точка называется ***точкой касания*** плоскости и сферы (рис. 3.44).

Теорема. *Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен плоскости касания, и, обратно, плоскость, перпендикулярная радиусу и проходящая через конец этого радиуса, является касательной плоскостью.*

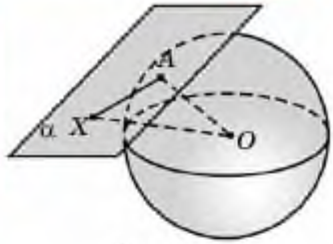


Рис. 3.44

▲ Пусть плоскость α касается сферы $\omega(O;\ R)$ в точке A. Нужно показать, что $OA \perp \alpha$ (рис. 3.44).

Действительно, пусть OA и α не перпендикулярны, т.е. OA является наклонной к плоскости α и пусть A_1 является основанием перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость α. Т.к. $OA_1<OA=R$, то плоскость α и сфера пересекаются по некоторой окружности (п.3.3.1). Но этого быть не может, т.к. плоскость α (эта плоскость – касательная) и сфера имеют только одну общую точку. Поэтому необходимо, чтобы $OA \perp \alpha$.

Пусть теперь плоскость α проходит через точку А перпендикулярно радиусу OA. Покажем, что плоскость α – касательная плоскость.

Действительно, пусть X — произвольная точка плоскости α, отличная от A. Так как OA — перпендикуляр и OX — наклонная, то $OX>OA=R$. Следовательно, точка X расположена вне сферы $\omega(O;\ R)$, т.е. плоскость α и сфера $\omega(O;\ R)$ имеют единственную общую точку A, т.е. плоскость α — касательная плоскость. ■

Пример 1. Напишем уравнение касательной плоскости к сфере, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=R^2$ в точке $A(a;b;c)$ этой сферы.

▲ Так как точка A лежит на сфере, то ее координаты должны удовлетворять уравнению сферы, т.е.

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2.$$

С другой стороны, касательная плоскость проходит через точку $A(a;b;c)$ перпендикулярно вектору $\overline{OA}\,(a;b;c)$ (рис. 3.45). Тогда для произвольной точки $X(x;\ y;\ z)$ касательной плоскости имеем:

$$\overline{OA} \perp \overline{AX},\ \text{т.е.}\ \overline{OA} \cdot \overline{AX} = 0.$$

Так как $\overline{AX}\ (x - a;\ y - b;\ z - c)$, то

$$a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0,$$

или $ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$.

Если учесть, что $a^2 + b^2 + c^2 = R^2$, то уравнение касательной записывается так:

$$ax + by + cz = R^2. \ ■$$

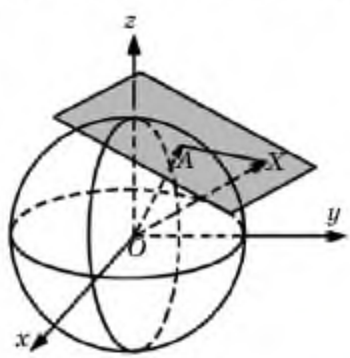


Рис. 3.45

Если все вершины многогранника расположены на сфере, то его называют *многогранником, вписанным в сферу* (рис. 3.46). А если все грани многогранника касаются сферы, то его называют *многогранником, описанным около сферы*. На рис. 3.47 изображен куб, описанный около сферы.

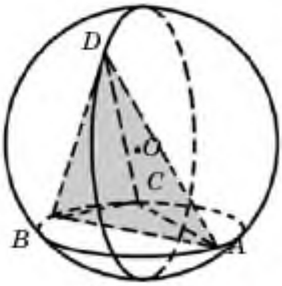


Рис. 3.46

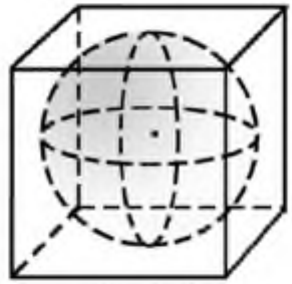


Рис. 3.47

3.3.4. Площадь сферы

Пусть дана поверхность тела Φ, которую нужно равномерно покрыть краской. Нанесенный слой краски, каким бы ни был тонким, все же имеет определенную толщину ε (высоту). Слой краски на поверхности тела Φ толщиной ε состоит из множества всех отрезков длиной ε, один конец которых принадлежит поверхности тела Φ и которые перпендикулярны касательной плоскости в этой точке (рис. 3.48).

Покажем, что площадь сферы определяется формулой $S = 4\pi R^2$, здесь R – радиус сферы. Для этого воспользуемся формулой объема шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Эта формула была выведена нами в курсе «Алгебра и начала анализа» с помощью определенных интегралов.

Если площадь поверхности тела Φ равна S, то объем слоя краски толщиной ε, нанесенной на данную поверхность определяется равенством $V_\varepsilon \approx S \cdot \varepsilon$. Чем меньше ε, тем точнее приближенное значение равенства. Следовательно, есть основание считать, что выполняется равенство $S \approx \frac{V_\varepsilon}{\varepsilon}$. По этому понятию площади поверхности можно дать следующее определение: пусть V_ε является объемом слоя краски толщиной ε, тогда *площадь этой поверхности S равна пределу отношения* $\frac{V_\varepsilon}{\varepsilon}$ *при* $\varepsilon \to 0$. Например, если площадь плоской фигуры Φ (многоугольник, круг и т.д.) равна S, то $V_\varepsilon \approx S \cdot \varepsilon$. Таким образом, получим равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S \cdot \varepsilon}{\varepsilon} = S .$$

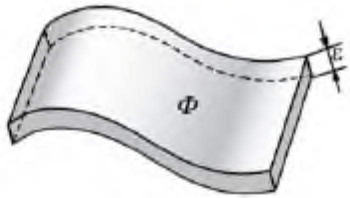


Рис. 3.48

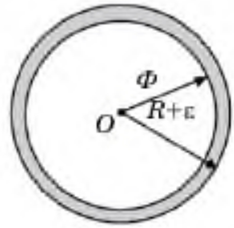


Рис. 3.49

С помощью этой формулы определим площадь сферы. Пусть дана сфера радиусом R. Тогда слой этой сферы толщиной ε есть тело, ограниченное концентрическими сферами радиусами $R+\varepsilon$ и R (рис. 3.49). Объем этого тела таков:

$$V_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\varepsilon(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Следовательно, площадь сферы определяется по формуле

$$S = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\pi R^2,$$

т.е. $S = 4\pi R^2$.

В следующем электронном ресурсе можно познакомиться с доказательством формулы площади сферы.

Дополнительные электронные ресурсы
https://www.youtube.com/watch?v=GNcFjFmqEc8

Практическая работа

«Нұр Әлем» – архитектурный символ Экспо – 2017 в городе Нур-Султан. Это самое большое в мире сферообразное здание, его диаметр равен 80 м. Здание состоит из восьми этажей. Вычислим площадь сечения здания вдоль 7-го этажа (рис. 3.50).

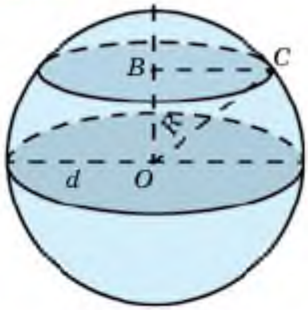


Рис. 3.50

▲ Так как сфера состоит из восьми этажей, то его диаметральное сечение соответствует пятому этажу, т.к. ниже и выше этого этажа будут расположены по четыре этажа. Диаметр сферы равен 80 м, радиус – 40 м. Тогда высота каждого этажа равна 10 м, следовательно, $OB=30$ м. По теореме Пифагора $BC=\sqrt{40^2-30^2}=10\sqrt{7}$ м. Поэтому $S=\pi\cdot\left(10\sqrt{7}\right)^2=700\pi\approx2198$ м². ■

1. Какую поверхность называют сферой? Какие ее элементы вы знаете?
2. Что такое шар? Чем он отличается от сферы?
3. Запишите уравнение сферы.
4. Какую плоскость называют касательной плоскостью? Какие ее свойства вы знаете?
5. Запишите уравнение касательной к сфере.
6. Какие многогранники называются вписанными в сферу, а какие – описанными около нее?
7. Запишите формулу площади сферы.
8. Что вы понимаете под шаровым слоем (слоем поверхности)?
9. Докажите формулу площади сферы.

Упражнения

A

Практическая работа

3.85. На чертеже покажите различные варианты взаимного расположения сферы и плоскости. В каждом из указанных вами вариантах сравните расстояние от центра сферы до данной плоскости с радиусом сферы.

3.86. Найдите длину большей окружности и площадь диаметрального сечения шара радиуса R, если: 1) $R=2$ дм; 2) $R=4$ см; 3) $R=7$ м; 4) $R=12$ мм.

3.87. Найдите площадь сечения, проведенного на расстоянии d от центра шара радиуса R, если: 1) $R=13$ см, $d=5$ см; 2) $R=5$ м, $d=3$ м; 3) $R=25$ мм, $d=24$ мм.

3.88. На рис. 3.51 дана развертка шара, длина экватора которого равна 16 см. Докажите, что площадь поверхности этого шара равна $\frac{256}{\pi}$ см^2.

3.89. Диаметр сферы равен 13 см. Площадь половины ее диаметрального сечения равна $\frac{169\pi}{8}$ см^2. Докажите, что площадь сферы равна 169π см^2 (рис. 3.52).

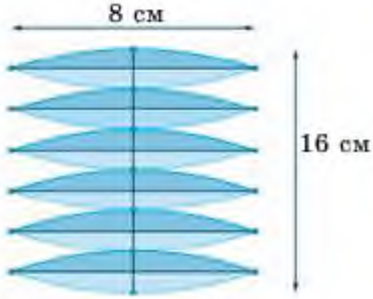


Рис. 3.51

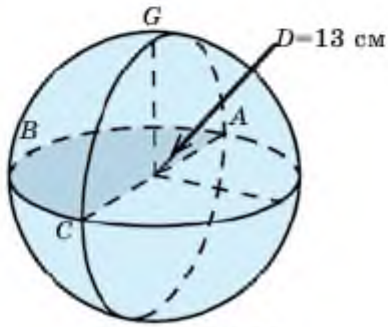


Рис. 3.52

3.90. Расстояние от точки касательной плоскости до центра сферы диаметром 16 м равно 10 м. Найдите расстояние от этой точки до точки касания.

3.91. Напишите уравнение сферы с центром в точке C и радиуса R, если: 1) $C(2;\ -1;\ -3)$, $R=7$; 2) $C(0;\ 4;\ -5)$, $R=15$; 3) $C(3;\ -2;\ 3)$, $R=\sqrt{61}$.

3.92. Напишите уравнение касательной плоскости к сфере в указанной точке: 1) $x^2+y^2+z^2=14$, $A(1;\ -2;3)$; 2) $x^2+y^2+z^2=625$, $B(20;\ 0;\ -15)$; 3) $x^2+y^2+z^2=9$, $C(2;\ 2;-1)$. Сначала убедитесь, что точка принадлежит данной сфере.

3.93. Каким должен быть радиус сферы с центром в точке C, проходящей через точку А, если: 1) $A(1;\ 2;\ 3)$, $C(3;\ 4;\ 2)$; 2) $A(25;\ 6;\ -20)$, $C(-5;\ 6;\ -5)$; 3) $A(-5;\ 3;\ -4)$, $C(0;\ 5;\ 2)$?

Практическая работа

3.94. Город Нур-Султан находится на 51° северной широты. Радиус Земли равен 6400 км. Выясним, какой путь проходит г. Нур-Султан при вращении Земли вокруг своей оси за 3 ч (рис. 3.53).

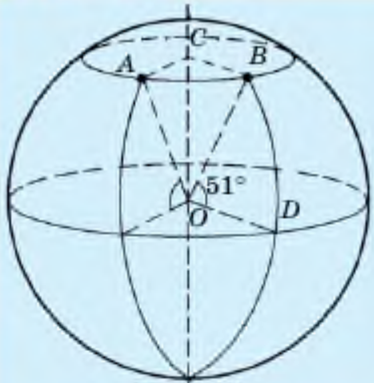


Рис. 3.53

▲ $\angle COB = 90° - 51° = 39° \Rightarrow AC = BC = OB \cdot \sin 39° = 6400 \cdot \sin 39° \approx 4028$ км.

За 3 ч город Нур-Султан проходит $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ дуги окружности, радиус которой равен 4028 км. Поэтому $S = 2\pi R \cdot \frac{1}{8} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4028 \cdot \frac{1}{8} \approx 3162$ км.

Ответ: 3162 км. ■

3.95. Определите по Интернету координаты вашего населенного пункта, а также путь, который проходит ваш населенный пункт при вращении Земли вокруг своей оси за 45 мин.

3.96. Вершины прямоугольника с диагональю, равной 24 см, лежат на сфере радиусом 13 см. Найдите расстояние от плоскости прямоугольника до центра сферы.

3.97. Найдите площадь сферы радиусом R, если: 1) R=7 см; 2) R=5 м; 3) R=12 мм; 4)$R = \sqrt{5}$ дм.

3.98. Найдите площадь сферы радиусом R, если: 1) R=12 см; 2) R=6 м; 3) R=9 мм.

B

3.99. Найдите площадь полной поверхности куба, вписанного в сферу радиусом 1.

3.100. Радиус основания конуса равен 1, а образующая – 2. Найдите радиус сферы, вписанной в данный конус.

3.101. Найдите площадь сечения сферы, проведенного на расстоянии 9 см от ее центра, если радиус сферы равен 41 см.

▲ Дано: сфера с центром в точке O и радиусом OA = 41 см, OB = 9 см – расстояние от центра сферы до его сечения.

Найти $S_{сеч}$ с центром в точке B.

Решение: $S_{сеч} = \pi R^2 = \pi \cdot AB^2$

1)При построении сферы и ее сечения на плоскости, мы видим, что AB является радиусом нашего сечения и его можно вычислить по теореме Пифагора:

$AB^2 = AO^2 - OB^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$ (см).

2) Тогда площадь сечения с центром в точке B такова:

$$S_{сеч} = \pi \cdot AB^2 = 1600\,\pi\ (см^2)$$

3) Ссылка на 3D-иллюстрацию:https://www.geogebra.org/classic/pvfegnca ■

3.102. Сечение шара проходит через середину перпендикулярного ему радиуса. Найдите отношение площади сечения к площади большего круга шара.

3.103. Через точку сферы проведены сечение и диаметр, образующие между собой угол φ. Найдите длину окружности сечения, если радиус сферы равен R.

3.104. Вершины треугольника ABC расположены на сфере, радиус которой равен 13. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 6$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

3.105. Вершины прямоугольника расположены на сфере, радиус которой равен 5. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если диагональ прямоугольника равна 16.

3.106. Точки A и B расположены на сфере с центром в точке O, причем AB не является диаметром. Для того чтобы точка $C \in AB$ была серединой отрезка AB, необходимо и достаточно, чтобы $OC \perp AB$. Докажите.

3.107. Покажите, что данным уравнением определяется сфера и найдите ее центр и радиус, если: 1) $x^2+y^2+z^2-6z=0$; 2) $x^2+y^2+z^2-4x+2y=0$; 3) $x^2+y^2+z^2+10x+4y-8z+3=0$.

Практическая работа

3.108. Самолет летит на высоте 1 км от поверхности земли. Найдите наибольшее расстояние до точки на земной поверхности, которую можно увидеть с самолета, если радиус земного шара считается равным 6400 км.

3.109. Даны две равные сферы. Центр одной сферы расположен на поверхности другой сферы. Пересечение сфер образует окружность радиусом, равным r. Найдите радиус данных сфер.

3.110. Все стороны ромба с диагоналями, равными 15 см и 20 см, касаются сферы радиусом 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

3.111. Радиус сферы равен $\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности куба: 1) вписанного в сферу; 2) описанного около сферы.

3.112. Радиус сферы равен R. Найдите ребро тетраэдра: 1) вписанного в сферу; 2) описанного около сферы.

3.113. Две сферы радиусами R_1 и R_2 имеют только одну общую точку. Чему может быть равно расстояние между их центрами?

3.114. Расстояние между центрами двух сфер радиусами 25 см и 29 см равно 36 см. Найдите длину общей окружности этих сфер.

C

3.115. Данное тело ограничено двумя концентрическими сферами (полый шар). Докажите, что площадь диаметрального сечения этого тела равна площади сечения, касающегося меньшей сферы.

3.116. В полушар вписан конус, имеющий с ним общее основание. Через середину высоты конуса проведена секущая плоскость параллельно основанию. Докажите, что площадь сечения тела, заключенного между поверхностью полушара и боковой поверхностью конуса (кольца), равна половине площади основания (рис. 3.54).

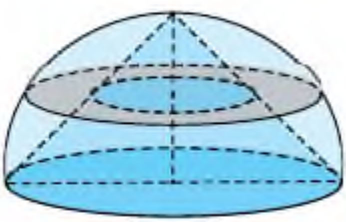


Рис. 3.54

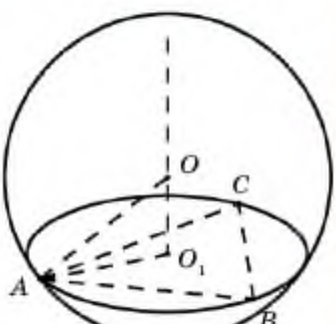


Рис. 3.55

3.117. Вершины треугольника со сторонами 12 см, 16 см и 20 см лежат на сфере радиусом 26 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника (рис. 3.55).

▲ Дано: точки A, B, C расположены на сфере. $OA = 26$ см, $AB = 12$ см, $AC = 20$ см. Точка O_1 – центр окружности, описанной около ΔABC.

Найти OO_1.

Решение: $p = \dfrac{16+12+20}{2} = 24$ см,

$S_{ABC} = \sqrt{24 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 4} = 96$ см².

$AO_1 = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{ABC}} = \dfrac{16 \cdot 20 \cdot 12}{4 \cdot 96} = 10$ см.

Ответ: 24 см. ■

3.118. Цилиндр, осевое сечение которого есть квадрат, вписан в сферу. Найдите отношение площади сферы к площади полной поверхности цилиндра.

3.119. Найдите центр и радиус сферы, проходящей через точки $A(2; 0; 1)$, $B(2; 0; 3)$, $C(1; 4; 0)$ и $D(1; 2; 2)$.

Упражнения для повторения

3.120*. 1) На стороне AB треугольника ABC, площадь которого равна 18, отмечены точки N и M так, что $AM:MN:NB=1:2:3$. Через точки M и N параллельно BC проведены прямые. Найдите площадь фигуры, ограниченной этими прямыми.

2) Точки A_1, B_1, C_1 делят стороны BC, AC и AB треугольника соответственно ABC в отношении: $BA_1:A_1C=3:7$, $AB_1:B_1C=1:3$, $AC_1:C_1B=1$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Цилиндр	Цилиндр	Cylinder
Конус	Конус	Cone
Шар	Шар	Ball
Сфера	Сфера	Sphere
Усеченный конус	Қиық конус	Truncated cone
Осевое сечение	Өстік қима	Axial section
Вписанный	Іштей сызылған	Inscribed
Описанный	Сырттай сызылған	Out scribed

Выводы раздела «ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ»

1) Сечение тела вращения, образованного плоскостью, проходящей через ось вращения, называется ***осевым сечением***.

2) Тело, образованное вращением прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон, ***называется цилиндром***.

3) Если цилиндрическую поверхность разрезать по окружностям оснований и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность вместе с основаниями лежали в одной плоскости, то получим фигуру, называему ***разверткой цилиндра***.

4) Если радиус основания цилиндра равен r, а высота – h, то развертка его боковой поверхности есть прямоугольник с измерениями h и $2\pi r$ (длина окружности основания цилиндра). Тогда площадь боковой поверхности определяется по формуле

$$S_{бок} = 2\pi rh,$$

а площадь полной поверхности – по формуле

$$S_{полн} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h).$$

5) Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и не имеющая с ним других общих точек, называется ***касательной плоскостью***.

6) Тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов, называется ***конусом***.

7) Отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой окружности основания, называется его ***образующей***.

8) Плоскость, проходящая через образующую конуса и не имеющая с ним других общих точек, называется ***касательной плоскостью*** этого конуса.

9) Площадь полной поверхности конуса определяется формулой

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

10) Площадь боковой поверхности усеченного конуса определяется формулой

$$S_{бок} = \pi l(R + r).$$

11) Множество точек пространства, равноудаленных на расстояние R от заданной точки O, называется ***сферой***, а часть пространства, ограниченная сферой, – ***шаром***.

12) Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется ***диаметром сферы***.

13) Всякое сечение сферы плоскостью является окружностью, а центр этой окружности – основанием перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость.

14) Сечение шара плоскостью, являющееся кругом, делит шар на две части, каждая из которых называется ***шаровым сегментом***.

15) Если $M(x; y; z)$ произвольная точка сферы, то по определению сферы необходимо, чтобы имело место равенство $CM=R$. Тогда уравнение сферы имеет такой вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

16) Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен плоскости касания, и, обратно, плоскость, перпендикулярная радиусу и проходящая через конец этого радиуса, является касательной плоскостью

17) Площадь сферы определяется по формуле

$$S = 4\pi R^2.$$

Раздел 4. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

В этом разделе вы изучите одну из интересных и часто применяемых понятий геометрии – *объемы тел*. Здесь вы рассмотрите общие свойства объемов, подобие пространственных тел, объемы многогранников и тел вращения и будете применять их при решении прикладных задач.

Темы, рассматриваемые в разделе

4.1. Понятие объема. Общие свойства объемов тел. Подобие пространственных фигур. Объем многогранников.

4.2. Объемы тел вращения.

4.3. Объемы комбинаций геометрических тел.

Триумфальная арка «Мәңгілік ел» открыта в городе Нур-Султан 16 декабря 2011 года, как символ 20-летия независимости страны. Высота арки – 20 м, ширина – 13 м. Наверху арки предусмотрена обзорная площадка, а на фронтальной части сверху надпись «Мәңгілік ел». Арка украшена казахским орнаментом. В нишах фасадов установлены бронзовые скульптуры аксакала-мудреца, женщины-матери, средневекового батыра и современного воина. Их высота составляет 4,4 м. На боковых арочных нишах с двух сторон установлена копия «Тай-казана» из мавзолея Ходжа Ахмета Яссауи. Наружная облицовка арки выполнена из гранита и мрамора, и стоит отметить, что здесь впервые применили мрамор теплого бежевого цвета. В конце раздела вы научитесь вычислять объем триумфальной арки, как комбинацию отдельных геометрических тел.

4.1. Понятие объема. Общие свойства объемов тел. Подобие пространственных фигур. Объемы многогранников

Изучив пункт, вы будете:

- *знать и применять свойства объемов пространственных тел;*
- *знать свойства объемов подобных пространственных тел и применять их при решении задач;*
- *знать формулу объема призмы и применять ее при решении задач;*
- *знать формулы объема пирамиды и усеченной пирамиды и применять их при решении задач.*

4.1.1. Понятие объема. Общие свойства объемов тел

Аналогично понятию площади фигур на плоскости, пространственные тела также имеют меру, выражающуюся числовыми значениями. Ее называют ***объемом*** рассматриваемого тела. В рамках школьной математики невозможно дать строгое математическое обоснование понятию объема тела. Оно рассматривается в специальном разделе высшей математики – теории меры. Однако мы будем пользоваться следующими свойствами понятия объема.

1°. Каждое тело имеет объем, выражающийся неотрицательным числом.

2°. Равные тела имеют равные объемы.

3°. Если тело разделено на несколько частей, то его объем равен сумме объемов этих частей.

Очевидно, что объем тела зависит от выбранной нами линейной меры, т.е. зависит от выбранной масштабной единицы. Например, объем в 1000 см^3 равен объему в 1 дм^3 или 0,001 м^3. На плоскости в качестве единичной меры площади фигуры мы брали площадь квадрата со стороной, равной масштабной единице. Аналогично в пространстве в качестве единицы объема берется объем куба, ребро которого равно масштабной единице. Если заранее известна величина масштабной единицы, то в записях можно не указывать меру объема. В целом существуют тела, не имеющие объема, т.е. тела, для которых объем не может быть определен. В курсе школьной геометрии рассматриваются только те тела, которые имеют определенный объем.

Теперь вспомним методы определения объема тела с помощью определенного интеграла, рассмотренного нами в курсе алгебры и начал анализа. В зависимости от положения тела D прямоугольную систему координат $Oxyz$ выберем так, как показано на рис. 4.1.

Итак, тело D по оси Ox расположено на промежутке $[a;\ b]$. Каждое его сечение плоскостью α, проведенной в точке $x \in [a;b]$ перпендикулярно оси Ox, имеет площадь $S(x)$, которая является функцией, зависящей от x. Тогда объем тела D находится по формуле

$$V(D) = \int_a^b S\ (x)\ dx. \qquad (1)$$

4.1.2. Объемы параллелепипеда и призмы

Теперь с помощью формулы (1) найдем объем параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$. Для этого выберем систему координат $Oxyz$ так, как показано на рис. 4.2, и площадь сечения параллелепипеда, перпендикулярного оси Ox. Если высота параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$ равна h, то он по оси Ox находится в пределах отрезка $[0;\ h]$, а каждое сечение параллелепипеда, перпендикулярное оси Ox, равно его основанию (т.к. они параллельны). Поэтому $S_{O_2A_2B_2C_2} = S_{OABC} = S$ – постоянное число. Тогда по формуле (1) имеем:

$$V_{OABCO_1A_1B_1C_1} = \int_0^h S\ \cdot dx = S \cdot\ x\Big|_0^h = S \cdot h$$

Итак, объем параллелепипеда равен произведению площади основания на его высоту:

$$V = S_{осн} \cdot h. \qquad (2)$$

Здесь h – высота параллелепипеда, а $S_{осн}$ – площадь основания.

Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед ($AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$), то его площадь основания такова:

$$S_{осн} = AB \cdot AD = a \cdot b,$$

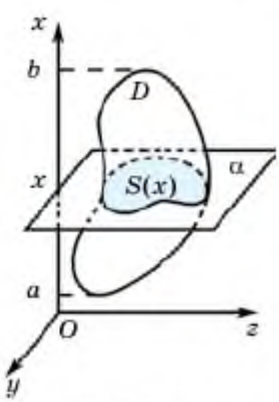


Рис 4.1

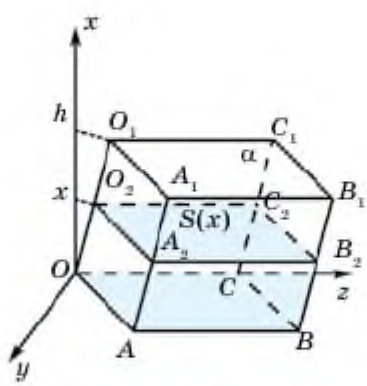


Рис. 4.2

а высота $h=AA_1=c$ (рис. 4.3). Тогда объем прямоугольного параллелепипеда определяется по формуле

$$V = a \cdot b \cdot c, \tag{3}$$

т.е. ***объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.***

Теперь определим объем треугольной призмы. Для этого треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ дополним до параллелепипеда $AEBCA_1E_1B_1C_1$ (рис. 4.4). Этот параллелепипед состоит из двух равных между собой треугольных призм $ABCA_1B_1C_1$ и $AEBA_1E_1B_1$. Поэтому объем треугольной призмы равен половине объема параллелепипеда $AEBCA_1E_1B_1C_1$:

$$V = V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{2}V_{AEBCA_1E_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot S_{осн} \cdot h.$$

Так как $S_{осн} = S_{AEBC} = 2S_{ABC}$, а высота у призмы и параллелепипеда общая, то получим формулу

$$V = \frac{1}{2} \cdot 2S_{ABC} \cdot h = S_{ABC} \cdot h,$$

т.е. *объем треугольной призмы равен произведению площади основания и ее высоты.*

Аналогично, *объем произвольной призмы равен произведению площади основания и ее высоты*:

$$V = S_{осн} \cdot h. \tag{4}$$

В этом можно убедиться, например, с помощью деления данной призмы на несколько треугольных призм (рис. 4.5).

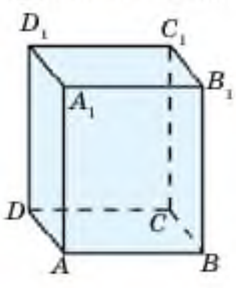


Рис. 4.3

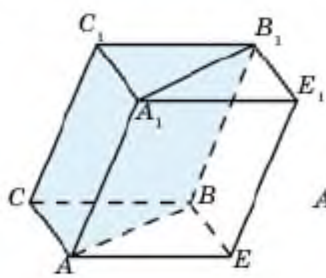


Рис. 4.4

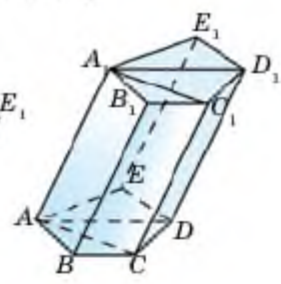


Рис. 4.5

4.1.3. Объем пирамиды

Как показано на рис. 4.6, треугольную призму с помощью диагоналей ее боковых граней можно разбить на три пирамиды с равными объемами. Тогда *объем пирамиды равен произведению площади основания и $\frac{1}{3}$ ее высоты:*

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h. \qquad (5)$$

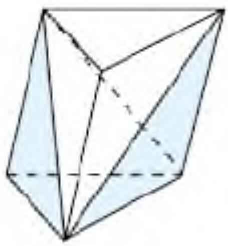


Рис. 4.6

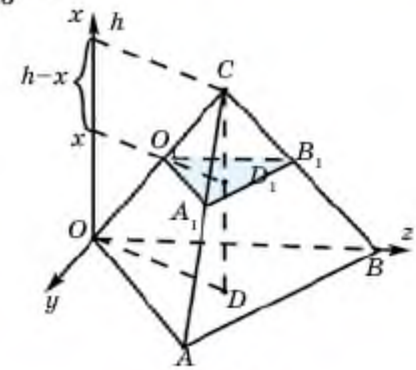


Рис. 4.7

Практическая работа

Эту формулу также можно обосновать с помощью определенного интеграла (рис. 4.7). Докажите это, объединившись в группы.

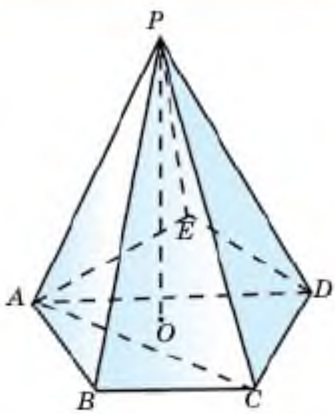


Рис. 4.8

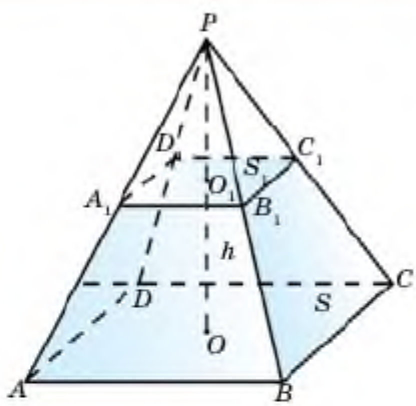


Рис. 4.9

Как видно из рис. 4.8, объем любой пирамиды вычисляется по указанной формуле.

Теперь покажем, что объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} h \left(S + \sqrt{S \cdot S_1} + S_1 \right), \qquad (6)$$

где S_1 и S – площади оснований усеченной пирамиды, а h – ее высота (рис. 4.9).

▲ Действительно, пусть $S_{ABCD} = S$, $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_1$ и $OO_1 = h$ (рис. 4.9). Тогда объем усеченной пирамиды равен разности объемов пирамид $PABCD$ и $PA_1B_1C_1D_1$,

т.е. $V = V_{PABCD} - V_{PA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}S \cdot PO - \frac{1}{3}S_1 \cdot PO_1$. (7)

Если предположить, что $OO_1 = h$, $PO_1 = x$, то из подобия фигур $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ имеем равенство

$$\frac{S}{S_1} = \frac{PO^2}{PO_1^2} = \frac{(h+x)^2}{x^2}.$$

Отсюда $x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$. Тогда из равенства (7) получим:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot (h + x) - \frac{1}{3}S_1 \cdot x = \frac{1}{3}(hS + x(S - S_1)) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(hS + \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}(S - S_1)\right) = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{S \cdot S_1} + S_1\right).$$

Формула (6) доказана. ■

4.1.4. Подобие пространственных фигур. Объемы подобных фигур

Пусть даны два тела. Уменьшая или увеличивая в одно и то же число раз линейные меры одного из них, можно получить другое тело. Эти тела называются подобными (рис. 4.10). Соответственные

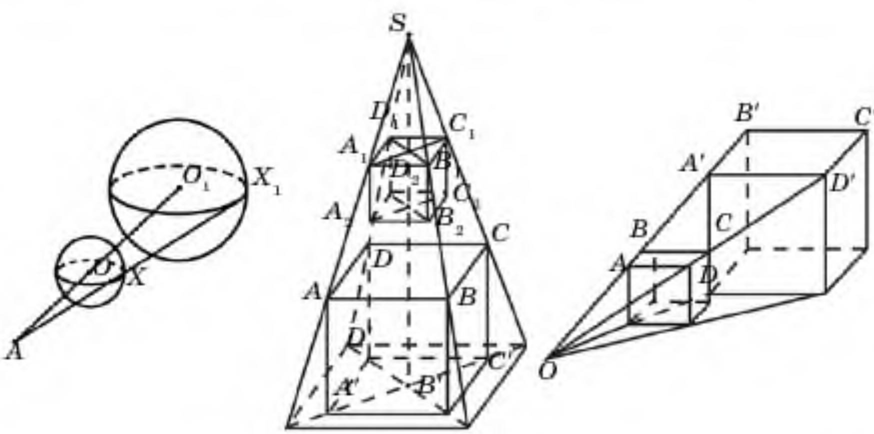


Рис. 4.10

линейные и многогранные углы подобных тел будут равны между собой. Любые два шара так же, как и любые два куба подобны.

Если соответствующие ребра двух тетраэдров пропорциональны, то эти тетраэдры будут подобными. Например, даны два подобных тетраэдра. Если ребра одного из них в два раза длиннее соответствующих ребер другого тетраэдра, то высоты, апофемы и радиус описанной сферы также будут в два раза длиннее соответствующих элементов второго тетраэдра.

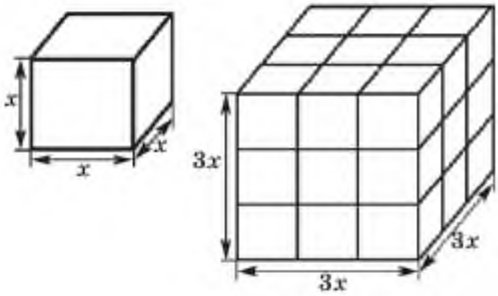


Рис. 4.11

Если у двух правильных призм (правильных пирамид) ребра основания и высоты пропорциональны, то эти фигуры подобны. Если у двух цилиндров или двух конусов радиусы основания и высоты пропорциональны, то они также подобны.

Мы знаем, что отношение площадей плоских фигур равно квадрату отношения их линейных мер (их сторон). Теперь рассмотрим отношение объемов подобных пространственных фигур.

На рис. 4.11 изображены два куба. Ребро второго куба в три раза больше ребра первого куба. Здесь объем первого куба $V_1 = x \cdot x \cdot x = x^3$, а объем второго куба $V_2 = 3x \cdot 3x \cdot 3x = 27x^3$, т.е. объем второго куба в $3^3 = 27$ раз больше объема первого куба. При увеличении (или уменьшении) тела все его линейные меры (например, у прямоугольного параллелепипеда линейными мерами или измерениями являются длина, ширина и высота) увеличиваются (или уменьшаются). Итак, если все линейные меры тела увеличиваются (или уменьшаются) в n раз, то объем этого тела изменится в n^3 раз соответственно. Поэтому ***объемы подобных тел пропорциональны кубам их измерений***. Т.е. отношение объемов подобных тел равно кубу отношения их соответствующих измерений. Например, если рассмотреть модель некоторого изделия, уменьшенную в 6 раз то объем модели будет в $6^3 = 216$ раз меньше объема самого изделия. Таким образом, если V_1 и V_2 – объемы подобных тел, а h_1 и h_2 – какие-то их соответствующие линейные меры (например, высоты), то верно равенство

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3.$$

Практическая работа

Пример 1. В самовар высотой 55 см можно вместить 42 чашки чая. Сколько чашек чая можно залить в подобный самовар высотой 44 см?

▲ Так как отношение объемов подобных тел равно кубу отношения их соответствующих измерений, то имеем:

$$\frac{V_{\text{больш.самов.}}}{V_{\text{маленьк.самов.}}} = \left(\frac{55}{44}\right)^3 \Rightarrow \frac{42 \text{ чашки чая}}{V_{\text{маленьк.самов.}}} = \frac{125}{64} \Rightarrow V_{\text{маленьк.самов.}} \frac{42 \cdot 64}{125} = 21{,}5.$$

Ответ: можно вместить 21,5 чашки чая. ■

Пример 2. В магазине имеются яйца двух сортов. Высота яйца первого сорта равна 60 мм, а цена – 400 тг (за 10 шт). Высота яйца второго сорта равна 55 мм, а цена – 300 тг. Какой сорт яиц выгоднее покупать?

▲ Сравним объемы данных яиц: $\frac{V_{\text{I сорт}}}{V_{\text{II сорт}}} = \left(\frac{60}{55}\right)^3 \approx 1{,}3$. А теперь найдем отношение цен этих яиц:

$$\frac{\text{цена}_{\text{I сорт}}}{\text{цена}_{\text{II сорт}}} = \frac{400}{300} \approx 1{,}33,$$

т.е. имеем в виду, что отношение объемов яиц больше, чем отношение соответствующих цен.

Т.к. $\text{цена}_{\text{I сорт}} = 1{,}3 \cdot 300 = 390 < 400$, то выгоднее покупать яйца II сорта. ■

1. Что такое объем геометрического тела? Какими свойствами он обладает?
2. Как вычисляют объем тела с помощью определенного интеграла?
3. Запишите формулу объема параллелепипеда. Докажите ее.
4. Запишите формулы объемов прямоугольного параллелепипеда и призмы?
5. Запишите формулу объема пирамиды. Докажите ее.
6. Докажите формулу объема усеченной пирамиды.
7. Каков объем 1 л жидкости?

Упражнения

А

Практическая работа

4.1. Найдите объем своего классного кабинета.

4.2. Сколько кубометров материала было израсходовано для изготовления поверхности вашей парты?

4.3. Одной из характеристик холодильника является его внутренний объем. Вычислите объемы холодильника и телевизора в вашем доме.

4.4. Найдите объемы тел, изображенных на рис. 4.12, 4.13.

4.5. Найдите объем составного тела, в нижней части которого расположен прямой параллелепипед размером $8 \times 8 \times 2$, а в верхней части – правильная четырехугольная пирамида (рис. 4.14).

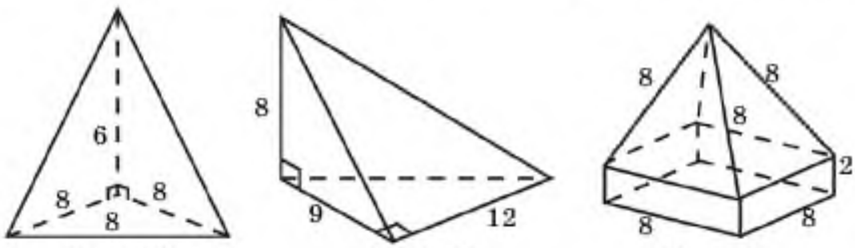


Рис. 4.12 Рис. 4.13 Рис. 4.14

4.6. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с линейными мерами a, b и c, если: 1) $a=2$ м, $b=4$ м, $c=7$ м; 2) $a=5$ см, $b=12$ см, $c=11$ см; 3) $a=3$ дм, $b=5$ дм, $c=6$ дм.

4.7. Диагональ куба равна 12 см. Найдите объем куба.

4.8. Площадь полной поверхности куба равна 96 см^2. Найдите объем куба.

4.9. Если увеличить ребро куба на 1 см, то его объем увеличится на 91 см^3. Чему равно ребро куба?

4.10. Стороны основания параллелепипеда, высота которого равна h, равны a и b, а острый угол между ними – φ. Найдите объем параллелепипеда, если:

1) $h=7$ см, $a=4$ см, $b=8$ см, $\varphi=30^\circ$; 2) $h=\sqrt{2}$ м, $a=5$ м, $b=10$ м, $\varphi=45^\circ$; 3) $h=10$ мм, $a=7$ мм, $b=7\sqrt{3}$ мм, $\varphi=60^\circ$.

4.11. Предыдущую задачу решите для треугольной призмы, где h – высота призмы, a и b – стороны основания (треугольника), а φ – угол между ними.

4.12. Высота треугольной призмы равна h, а стороны основания – a, b и c. Найдите объем призмы, если: 1) $a=15$ см, $b=14$ см, $c=13$ см, $h=12$ см; 2) $a=17$ дм, $b=65$ дм, $c=80$ дм, $h=100$ дм.

4.13. Найдите объем куба, диагональ которого равна d: 1) $d = 5\sqrt{3}$ мм; 2) $d = 2\sqrt{3}$ м; 3) $d=12$ см.

4.14. Найдите объем пирамиды, высота которой равна h, а его основанием является квадрат со стороной, равной a: 1) h=12 см, a=5 см; 2) h=15 м, a=7 м.

4.15. Стороны основания пирамиды, высота которой равна h, равны a и b, а острый угол между ними – φ. Найдите объем пирамиды, если:

1) h=7 см, a=4 см, b=8 см, φ=30°; 2) $h=\sqrt{2}$ м, a=5 м, b=10 м, φ=45°; 3) h=10 мм, a=7 мм, $b=7\sqrt{3}$ мм, φ=60°.

4.16. Высота треугольной призмы равна h, а стороны основания – a, b и c. Найдите объем пирамиды, если: 1) a=15 см, b=14 см, c=13 см, h=12 см; 2) a=17 дм, b=65 дм, c=80 дм, h=100 дм.

4.17. Основаниями усеченной пирамиды являются квадраты, стороны которых равны a и a_1, а ее высота равна h. Найдите ее объем, если: 1) a=2 м, a_1=5 м, h=6 м; 2) a=15 см, a_1=20 см, h=10 см.

4.18. Найдите объем правильной: 1) четырехугольной; 2) треугольной пирамиды, каждое ребро которой равно a.

4.19. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды, равное b, образует с ее высотой угол φ. Найдите ее объем, если: 1) b=6 м, φ=30°; 2) b=12 см, φ=60°; 3) $b=\sqrt{2}$ дм, φ=45°.

4.20. Площадь диагонального сечения куба равна $9\sqrt{2}$ см². Найдите объем куба.

4.21. Найдите объем тераэдра, ребро которого равно a.

4.22. Каждая боковая грань параллелепипеда есть квадрат со стороной, равной 6 см, а острый угол ромба, являющегося его основанием, равен 60°. Найдите объем параллелепипеда.

4.23. Найдите объем октаэдра, ребро которого равно 10 см.

4.24. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы равна 20 см. Покажите, что объем призмы равен 1680 см³.

4.25. Площадь диагонального сечения куба равна $25\sqrt{2}$ см². Докажите, что объем куба равен 125 см³.

4.26. Все ребра прямой треугольной призмы равны $2\sqrt{3}$. Найдите ее объем.

4.27. Высота правильной треугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$, а сторона основания – 4. Найдите объем пирамиды.

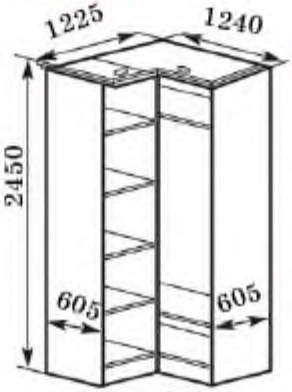


Рис. 4.15

A

Практическая работа

4.28. Размеры углового шкафа, изображенного на рис. 4.15, указаны в миллиметрах. Найдите общую площадь материалов, израсходованных на его изготовление, и объем этого шкафа.

B

4.29. Площадь основания правильной треугольной призмы равна $12\sqrt{3}$. Найдите объем призмы, если ее высота в два раза больше стороны основания.

4.30. Объем куба $16\sqrt{2}$ см^3. Докажите, что радиус окружности, описанной около грани куба, равен 2 см.

4.31. Объем правильной треугольной призмы равен $27\sqrt{3}$ см^3. Радиус окружности, описанной около ее основания равен 2 см. Найдите высоту призмы.

4.32. Одна из сторон треугольника, являющегося основанием прямой призмы, равна 2 м, а две другие стороны – 3 м. Боковое ребро призмы равно 4 м. Ребро куба, имеющее равные объемы с данной призмой, равно $2\sqrt[6]{2}$ м. Докажите это.

4.33. Основанием призмы является правильный треугольник. Радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен 6, а боковые грани призмы являются квадратами. Чему равен объем призмы?

4.34. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания. Площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и имеющего с ним общую вершину высоты основания, равна 75 см^2. Найдите объем призмы.

4.35. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребро увеличить в 2 раза?

4.36. Одна грань наклонной треугольной призмы есть ромб с диагоналями, равными 3 см и 4 см, и она перпендикулярна плоскости основания. Чему равен объем призмы, если ее основание есть равносторонний треугольник?

4.37. Ребра двух кубов относятся как 2 : 5. Каково отношение их объемов?

4.38. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем параллелепипеда, если меньшая сторона основания равна a.

4.39. Объем прямой призмы, основанием которой является квадрат площадью S, равен V. Найдите площадь ее боковой поверхности.

4.40. Основанием наклонной призмы является квадрат. Одно из ее боковых ребер, образующих равные углы со сторонами основания, наклонено к основанию под углом φ. Найдите объем призмы, если сторона ее основания равна a, а боковое ребро – b.

4.41. Стороны основания треугольной призмы равны 5 см, 6 см и 9 см. Боковое ребро, равное 10 см, образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите объем призмы.

4.42 Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно 15 см, а расстояние между ее боковыми ребрами – 26 см, 25 см и 17 см. Найдите объем призмы.

4.43. Радиус окружности, описанной около основания правильной треугольной призмы, равен R и все боковые грани призмы являются квадратами. Найдите объем призмы.

4.44. Стороны основания правильной шестиугольной призмы равны a, а площадь большого диагонального сечения – S. Найдите объем призмы.

4.45. В каком отношении делится объем пирамиды сечением, проходящим через середину ее высоты параллельно основанию?

4.46. В правильной четырехугольной пирамиде: 1) высота равна h, а двугранный угол при основании равен φ; 2) сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен φ. Найдите объем пирамиды.

4.47. Основанием высоты треугольной пирамиды является центр окружности, описанной около ее основания, а основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 8 см, 6 см. Найдите объем пирамиды, если ее боковые ребра равны 13 см (рис. 4.16).

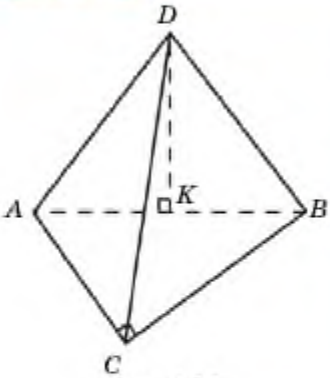


Рис. 4.16

▲ Дано: пирамида $DABC$, $\angle ACB = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. $AD = BD = CD = 13$ см, DK – высота пирамиды.

Найти V_{DABC}.

Решение: $AB = 10$ см, $AK = 5$ см, $\Delta ADK : DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см.

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 96 \text{ см}^3. ■$$

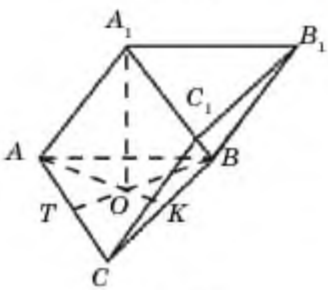


Рис. 4.17

4.48. Основанием призмы является правильный треугольник. Основанием высоты призмы, проведенной из вершины верхнего основания, является центр нижнего основания. Боковые ребра призмы образуют с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите объем призмы, если ее высота равна 4 см (рис. 4.17).

4.49. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и острым углом, равным 30°. Боковые грани, проходящие через вершину острого угла, перпендикулярны плоскости основания, а две другие грани с плоскостью основания образуют угол, равный 60°. Найдите объем пирамиды.

4.50. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 1 см и 2 см, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите ее объем.

Практическая работа

4.51. Фермеры решили проложить канал длиной 1 км (рис. 4.18). Экскаватор за час работы способен перекопать грунт объемом 10 м³. За сколько дней экскаватор выроет канал, если он работает ежедневно по 10 ч?

4.52. Угол между диагональю правильной четырехугольной призмы и ее боковой гранью равен 30°, а сторона основания равна a. Найдите объем призмы.

4.53. Основанием прямой призмы является прямоугольный

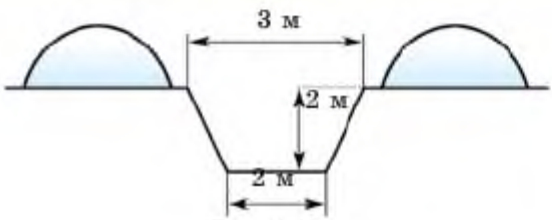


Рис. 4.18

равнобедренный треугольник с катетом, равным 3 см. Площадь сечения, проходящего через катет нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, равна 7,5 см^2. Найдите объем призмы.

4.54. Объем правильной шестиугольной призмы равен 6 см^3. Площадь сечения, проходящего через наибольшую диагональ, равна 4 см^2. Найдите длину стороны основания и бокового ребра.

4.55. Бак имеет форму прямого параллелепипеда, основанием которого служит квадрат со стороной, равной 18, а боковое ребро равно 42. Когда бак наклонили вдоль ребра нижнего основания на 30°, то вода в нем имела такую форму, как показано на рис. 4.19. Найдите объем воды в баке.

Рис. 4.19

C

4.56*. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α. Диагональ грани, расположенной напротив данного угла, равна l и образует с плоскостью основания угол, равный β. Покажите, что объем призмы равен $\frac{1}{8} l^3 \sin 2\beta \cos\beta \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

4.57. Площади трех взаимно перпендикулярных граней прямоугольного параллелепипеда равны S_1, S_2 и S_3. Докажите, что его объем вычисляется по формуле $V = \sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$.

4.58. Объем усеченной пирамиды равен V, а площади ее оснований – S_1 и S_2. Найдите объем целой пирамиды.

4.59. Боковые ребра четырехугольной пирамиды равны b, а ее основанием является прямоугольник, одна из сторон которого равна a. Найдите наибольшее из возможных значений объема пирамиды.

4.60. Высота усеченной пирамиды равна h, а площадь ее срединного сечения равна S. В каких пределах может меняться объем усеченной пирамиды?

4.61. Найдите наибольшее значение объемов треугольных призм, вписанных в цилиндр высотой h и радиусом R.

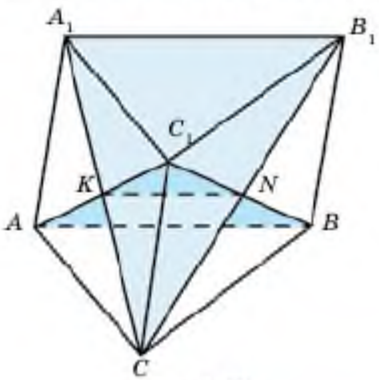


Рис. 4.20

4.62. Основанием пирамиды является квадрат, а площади всех ее пяти граней равны между собой. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна h.

4.63*. В призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены два сечения, проходящие через вершины A, B, C_1 и A_1, B_1, C. Эти сечения делят призму на 4 части, объем меньшей из которых равен V. Найдите объем призмы (рис. 4.20).

Упражнения для повторения

4.64. 1) Отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и концы этого отрезка расположены на боковых сторонах AB и CD соответственно. Отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Найдите MN, если $AD=a$, $BC=b$.

2) Отрезок PQ параллелен основаниям трапеции $ABCD$, концы отрезка расположены на боковых сторонах AB и CD соответственно и пересекает диагональ AC в точке L, а диагональ – BD в точке R. Найдите PQ, если $AD=a$, $BC=b$ и $PL=LR$.

4.2. Объемы тел вращения

Изучив пункт, вы будете:

- *знать и применять формулу объема цилиндра при решении задач;*
- *знать и применять формулы объемов конуса и усеченного конуса при решении задач;*
- *знать и применять формулы объемов шара и его частей при решении задач;*

- *применять формулы объема тел вращения при решении практических задач.*

4.2.1. Объем цилиндра

Чтобы определить объем цилиндра радиусом R и высотой h, выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 4.21. Площадь поперечного сечения цилиндра в пределах $[0;h]$ есть величина постоянная, не зависящая от выбора точки $x \in [0;h]$. Это число равно площади основания цилиндра πR^2. Поэтому объем цилиндра в силу формулы (1) (п.4.1.1) таков:

$$V = \int_0^h S \cdot dx = \pi R^2 \cdot x\Big|_0^h = \pi R^2 h.$$

Итак, *объем цилиндра равен произведению площади основания и высоты*:

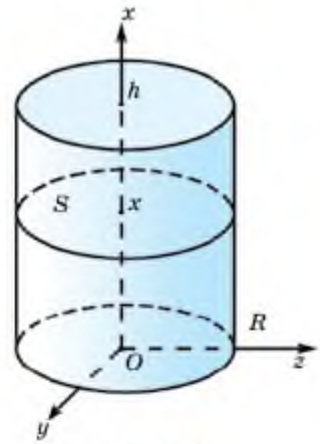


Рис. 4.21

$$V = \pi R^2 h \qquad (1)$$

4.2.2. Объем конуса

Конус, высота которого равна h, а радиус – R, расположим так, как показано на рис. 4.22. Площадь сечения $S(x)$ этого конуса, проведенного через точку $x \in [0;h]$ параллельно основанию, выразим через R, h и x. Так как $OA=R$, $OP=h$, $OO_1=x$, то из подобия прямоугольных треугольников PO_1B и POA имеем:

$$\frac{O_1B}{PO_1} = \frac{OA}{PO} \Rightarrow \frac{O_1B}{h-x} = \frac{R}{h} \Rightarrow O_1B = \frac{R}{h}(h-x).$$

Тогда

$$S(x) = \pi \cdot (O_1B)^2 = \frac{\pi R^2}{h^2}\,(h-x)^2.$$

Поэтому

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h (h-x)^2 dx = -\frac{\pi R^2}{3h^2}(h-x)^3\Big|_0^h = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Итак, *объем конуса равен произведению площади основания и* $\frac{1}{3}$ *высоты, т.е.* $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h.$ (2)

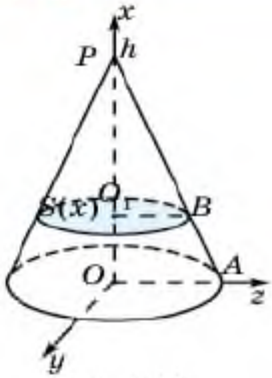


Рис. 4.22

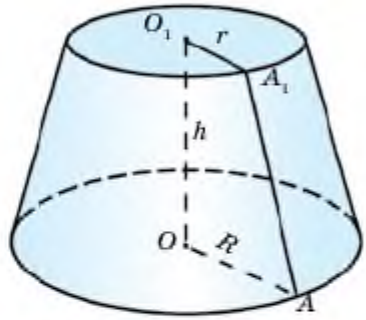


Рис. 4.23

Объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны R и r, а высота – h (рис. 4.23), определяется по формуле

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2). \qquad (3)$$

Эта формула доказывается аналогично соответствующей формуле объема усеченной пирамиды.

4.2.3. Объемы шара и его частей

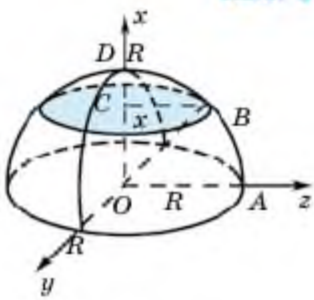


Рис. 4.24

Так как плоскость, проходящая через центр шара, является для него плоскостью симметрии, то для нахождения объема шара достаточно найти объем полушара и полученный результат удвоить. Расположим полушар радиусом R так, как показано на рис. 4.24. Тогда площадь сечения полушара $S(x)$, ($x \in [0;R]$) параллельного основанию, является функцией от x. Теперь определим вид этой функции. Так как $OA=R=OB$, $OC=x$, то радиус сечения определяется равенством $CB = \sqrt{OB^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Поэтому объем полушара таков:

$$\frac{1}{2}V = \int_0^R \pi\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2\pi R^3}{3} \qquad (4)$$

а объем шара определяется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (5)$$

Каждое сечение делит шар на две части. Эти части называются ***шаровым сегментом*** (рис. 4.25). Теперь определим объем

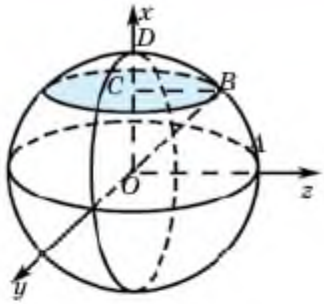


Рис. 4.25

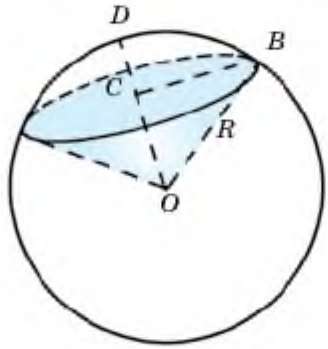


Рис. 4.26

меньшего шарового сегмента. Расположим прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, как показано на рис. 4.24. Здесь отрезок CD называется *высотой шарового сегмента*. Нужно определить объем шарового сегмента по его высоте $h = CD$ и радиусу шара R.

Так как $OC=R-h$, то интеграл (4) берется в пределах от $R-h$ до R:

$$V_{\text{сег}} = \int_{R-h}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{R-h}^{R} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

Объем шарового сектора равен сумме объемов шарового сегмента и объема конуса (рис. 4.26). Если $CD=h$, то $OC=R-h$ и $CB = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$.

Следовательно,

$$V_{\text{сек}} = V_{\text{сег}} + V_{\text{кон}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) + \frac{1}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot OC = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) + \frac{\pi}{3}(2Rh - h^2)\cdot(R-h) = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

1. Напишите формулу объема цилиндра.
2. Напишите формулу объема конуса и докажите ее. Напишите формулу объема усеченного конуса.
3. Напишите формулу объема шара и докажите ее.
4. Напишите формулу объема шарового сегмента (сектора). Докажите ее.

Упражнения

А

Практическая работа

4.65. Высота торта 5 см, а диаметр – 30 см (рис. 4.27). Из тор-

Рис. 4.27

та вырезали кусок в форме кругового сектора с центральным углом, равным 30°. Найдите объем этого куска торта.

4.66. Найдите объемы конусов, изображенных на рис. 4.28.

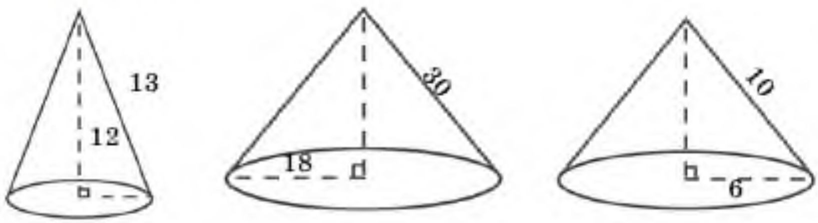


Рис. 4.28

4.67. Найдите объемы тел вращения, изображенных на рис. 4.29.

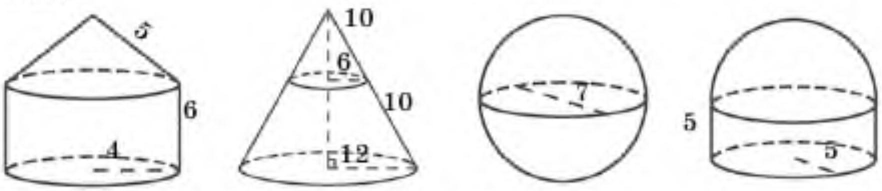


Рис. 4.29

4.68. Из прямого параллелепипеда, основанием которого служит квадрат со стороной 3, вырезали цилиндр диаметром 2 (рис. 4.30). Найдите объем полученной детали, если высота параллелепипеда равна 4.

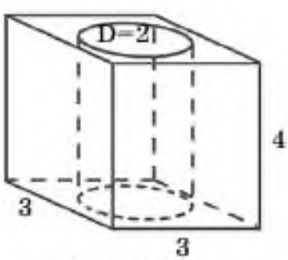


Рис. 4.30

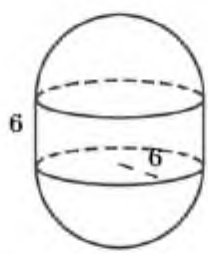


Рис. 4.31

4.69. Цилиндр радиусом 6 и высотой 6 со стороны оснований дополнили полушарами так, как показано на рис. 4.31. Найдите объем полученного тела.

4.70. Найдите объем цилиндра радиусом R и высотой h, если: 1) $R=3$ м, $h=5$ м; 2) $R=10$ мм, $h=12$ мм; 3) $R=4$ дм, $h=7$ дм; 4) $R=6$ см, $h=14$ см.

4.71. Решите предыдущую задачу относительно конуса радиусом R и высотой h.

4.72. Найдите объем шара и площадь сферы радиусом R, если: 1) $R=12$ см; 2) $R=6$ м; 3) $R=9$ мм.

4.73. Площадь осевого сечения цилиндра равна S, а радиус $-R$. Найдите его объем, если: 1) $S=24$ см^2, $R=4$ см; 2) $S=70$ м^2, $R=5$ м; 3) $S=144$ дм^2, $R=6$ дм.

4.74. Решите предыдущую задачу относительно конуса с площадью осевого сечения S и радиусом R.

Практическая работа

4.75. Музейно-мемориальный комплекс жертв политических репрессий и тоталитаризма «Алжир» имеет форму усеченного конуса (рис. 4.32). Его высота равна 8 м, а диаметры оснований – 20 м и 15 м. Найдите его объем.

Рис. 4.32

4.76. Радиусы оснований усеченного конуса равны r и R, а высота – h . Найдите его объем, если: 1) $r=3$ см, $R=5$ см, $h=4$ см; 2) $r=7$ мм, $R=12$ мм, $h=10$ мм; 3) $r=1$ м, $R=8$ м, $h=3$ м.

4.77. Диагональ осевого сечения цилиндра, равная d, образует с его образующей угол φ. Найдите объем цилиндра, если: 1) $d = 12$ см, $\varphi = 30°$; 2) $d = 2\sqrt{2}$ м, $\varphi = 45°$; 3) $d = 18$ дм, $\varphi = 60°$.

4.78. Образующая конуса равна l, а угол при вершине осевого сечения φ. Найдите объем конуса, если: 1) $l = 20$ см, $\varphi = 60°$; 2) $l = 5\sqrt{2}$ м, $\varphi = 90°$; 3) $l = 12$ дм, $\varphi = 120°$.

4.79. Осевое сечение усеченного конуса есть равнобокая трапеция, стороны которой равны 5 см, 10 см, 17 см и 10 см. Найдите его объем.

4.80. Высота сегмента шара радиусом R равна h. Найдите объем этого сегмента и объем соответствующего шарового сектора, если: 1) $R=10$ см, $h=5$ см; 2) $R=6$ м, $h=1$ м.

B

4.81. Плоскость, параллельная оси цилиндра, проходит на расстоянии 15 см от этой оси. Диагональ образованного сечения равна 20 см, а радиус цилиндра – 17 см. Найдите объем цилиндра.

4.82. Свернули полукруг радиусом 6 см в конус (рис. 4.33). Найдите объем конуса.

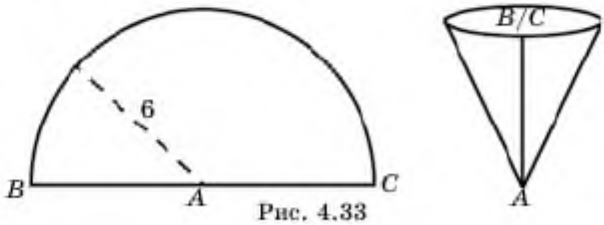


Рис. 4.33

4.83. Из круглой жести радиусом 20 см вырезали круговой сектор с центральным углом 240° и из него свернули конус. Найдите объем этого конуса.

4.84. Как изменится объем цилиндра, если его радиус увеличить на 40 %, а высоту уменьшить наполовину?

A). Уменьшится на 2%. B). Уменьшится на 30 %. C). Увеличится на 30%. D). Увеличится на 2%.

4.85. Высота конуса объемом V разделена на три равные части. Через точки деления параллельно основанию проведены плоскости, которые делят конус на три части. Найдите объем средней части.

4.86. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна сумме площадей его оснований, а радиусы оснований равны r и R. Найдите объем усеченного конуса.

▲ Решение: $V_{\text{усеч. кон}} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

1) Площадь осевого сечения усеченного конуса такова:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{2R + 2r}{2} \cdot h = (R + r) \cdot h.$$

2) Сумма площадей двух оснований такова:

$$S_{\text{верх.осн}} + S_{\text{нижн.осн}} = \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(R^2 + r^2).$$

3) Найдем высоту усеченного конуса:

$(R + r) \cdot h = \pi(R^2 + r^2)$,

$$h = \frac{\pi(R^2 + r^2)}{(R + r)}.$$

4) А теперь вычислим объем усеченного конуса:

$$V_{\text{усеч. кон}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\pi(R^2 + r^2)}{(R + r)} \cdot (R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi^2(R^2 + r^2)(R^2 + Rr + r^2)}{3(R + r)}.$$

4.87. Найдите объем конуса, развертка боковой поверхности которого является полукругом радиусом 15 см.

4.88. В конус вписана сфера радиусом r, площадь которой равна площади основания конуса. Найдите объем конуса.

Практическая работа

4.89. Катушка стальной проволоки диаметром 6 мм весит 30 кг. Найдите длину проволоки, если плотность стали равна 7600 кг/м^3.

4.90. Внешний диаметр стальной газопроводной трубы равен 1,42 м, а ее толщина 2,2 см. Сколько весит 1 км трубы, если плотность стали равна 7600 кг/м^3 ?

4.91. Охотник переплавил три шарообразные свинцовые пули диаметром 3 мм в одну шарообразную пулю. Найдите диаметр этой пули.

4.92. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части длиной 4 см и 10 см. На какие части делится объем шара этой плоскостью?

4.93. Металлический цилиндр диаметром 4 см и высотой 4 см переплавили в шар. Найдите радиус этого шара.

4.94. Объемы шара и цилиндра, имеющие равные радиусы, равны между собой. Найдите отношение высоты цилиндра к радиусу шара.

C

4.95. Вершины куба с ребром 1 являются центрами шаров с одинаковыми радиусами. Объем части куба, расположенной вне этих шаров, равен $\frac{1}{2}$. Какая часть ребра куба находится вне шаров?

4.96*. Докажите, что площадь поверхности сегмента шара радиусом R определяется по формуле $S = 2\pi Rh$ (h – высота шарового сегмента).

Практическая работа

4.97. Объем льда, имеющегося в Антарктике, равен 30 млн км³. На сколько метров поднимется уровень воды, если весь этот лед растает? Считается, что радиус Земли равен 6 тыс. км, а 70,8% поверхности всего земного шара составляет вода.

4.98*. Через вершину конуса проведено сечение наибольшей площади, которая вдвое больше площади осевого сечения конуса. Найдите объем конуса, если его радиус равен R.

Упражнения для повторения

4.99. 1) Биссектриса, опущенная из вершины B треугольника ABC делит сторону AC на отрезки, равные 28 и 12. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB-BC=18$.

2) Стороны AB, BC, AC треугольника ABC относятся как 2:4:5. В каком отношении делятся его биссектрисы в точке их пересечения?

4.3. Объемы комбинации геометрических тел

Изучив пункт, вы будете:

- *изображать на плоскости комбинации многогранников и тел вращения;*
- *находить объемы комбинаций многогранников и тел вращения;*
- *решать практические задачи, заданные в виде комбинации геометрических тел.*

Вы уже знаете свойства многогранников и тел вращения. Рассмотрим комбинации этих тел. На практике часто встречаются комбинации следующих геометрических тел:

1) шар и пирамида;
2) шар и призма;
3) шар и конус;
4) шар и цилиндр;
5) конус и пирамида;
6) конус и призма;
7) конус и цилиндр;
8) цилиндр и пирамида;
9) цилиндр и призма и т.п.

В п. 3.1 мы изучали комбинации цилиндра и призмы, в п. 3.2 – комбинации конуса и пирамиды. Теперь рассмотрим комбинации фигур с шаром.

Комбинация шара и призмы

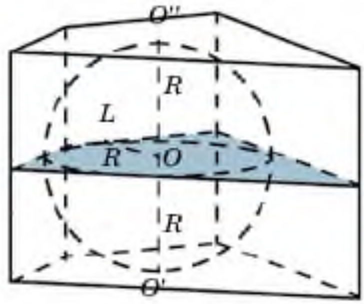


Рис. 4.34

Если шар вписан в призму (рис. 4.34), то:

1) высота призмы равна диаметру шара;

2) точки касания боковых граней призмы с шаром расположены на плоскости, проходящей через центр шара перпендикулярно боковым ребрам призмы;

3) радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы.

Не всегда около данной призмы можно описать сферу или вписать в нее шар. Для того чтобы около данной прямой призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около ее основания можно было описать окружность.

Работа в группе

Для того чтобы в данную прямую призму можно было вписать шар, необходимо и достаточно, чтобы в ее основание можно было вписать окружность, и диаметр этой окружности был равен высоте призмы. При обосновании утверждения используйте соответствующие готовые рисунки.

Пример 1. В прямую призму вписан шар. Основанием призмы является прямоугольный треугольник, один катет которого равен 15 см, а гипотенуза – 17 см. Найдем объем призмы.

▲ По теореме Пифагора второй катет основания находим так:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ см}.$$

Радиус шара равен радиусу вписанной в основание окружности:

$$r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8}{8 + 15 + 17} = \frac{120}{40} = 3 \text{ см}.$$

Поэтому диаметр шара таков: $d = 2r = 6$ см. Так как диаметр шара равен высоте призмы, то

$$V = S \cdot h = 60 \cdot 6 = 360 \text{ см}^3.$$

Ответ: 360 см³. ■

Комбинация шара и пирамиды

Центр сферы, вписанной в пирамиду, является точкой пересечения всех биссекторных плоскостей двугранных углов пирамиды. Если все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, т.е. боковые грани образуют с плоскостью основания равные углы, то основанием высоты пирамиды служит центр окружности, вписанной в основание пирамиды, и высоты всех боковых граней также равны между собой (рис. 4.35).

Работа в группе

Для того чтобы около данной пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около ее основания можно было описать окружность (рис. 4.36). При обосновании утверждения используйте соответствующие готовые рисунки.

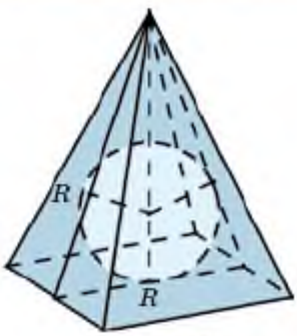


Рис. 4.35

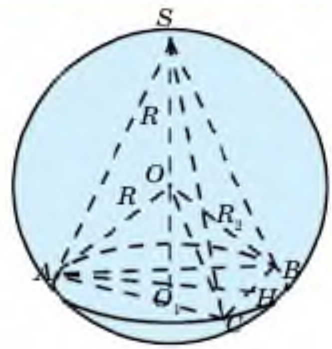


Рис. 4.36

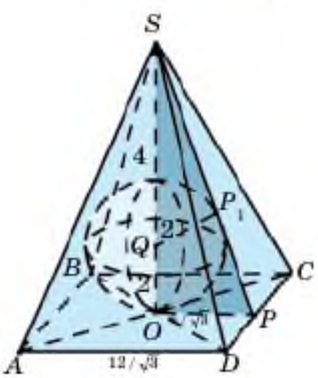


Рис. 4.37

Пример 2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар объемом $\frac{32\pi}{3}$. Высота пирамиды равна 6. Найдем объем пирамиды (рис. 4.37).

▲ Найдем радиус шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3} \Rightarrow R = 2.$$

$$SQ = SO - OQ = 6 - 2 = 4.$$

$$SP_1 = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}.$$

Треугольники SP_1Q и SOP подобны, поэтому $\frac{QP_1}{OP} = \frac{SP_1}{SO}$,

$$OP = \frac{QP_1 \cdot SO}{SP_1} = \frac{2\cdot 6}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{1}{3}S\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot 6 = 96.$$

Ответ: 96. ■

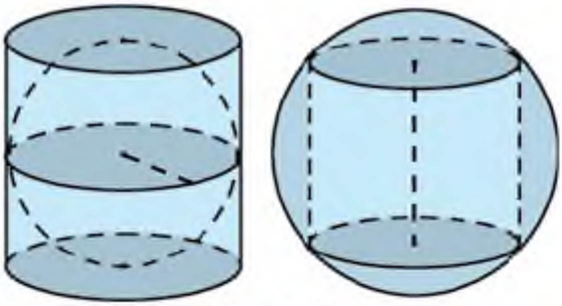


Рис. 4.38

Комбинация шара и цилиндра

Около любого цилиндра можно описать сферу (рис. 4.38). Центр сферы является серединой высоты цилиндра, лежащего на оси цилиндра. Если R – радиус сферы, r – радиус цилиндра, а H – высота цилиндра, то по теореме Пифагора имеем:

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2 \cdot$$

В цилиндр можно вписать шар тогда и только тогда, когда диаметр и высота цилиндра равны между собой. При этом шар касается оснований цилиндра в их центрах, а боковой поверхности касается вдоль диаметральной окружности. Пусть R – радиус сферы, r – радиус цилиндра, H – высота цилиндра. Тогда $R = r$ и $H = 2R$.

Комбинация шара и конуса

Около любого конуса можно описать сферу (рис. 4.39) и в каждый конус можно вписать шар (рис. 4.40).

Вершина и окружность основания конуса лежат на описанной около этого конуса сфере (рис. 4.39). При этом центр сферы лежит

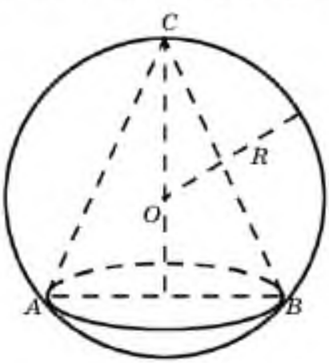


Рис. 4.39

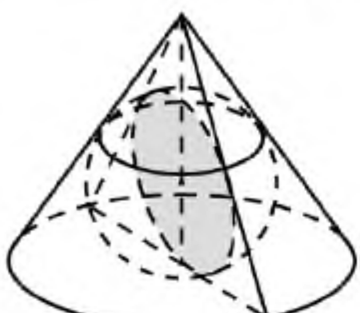


Рис. 4.40

на оси конуса и совпадает с центром окружности, описанной около осевого сечения конуса. Пусть R – радиус сферы, r – радиус конуса, H – высота конуса, то по теореме Пифагора $R^2 = (H - R)^2 + r^2$. В паре докажите это равенство.

Шар, вписанный в конус (рис. 4.40), касается основания конуса в его центре, а боковой поверхности – вдоль окружности, параллельной основанию. При этом центр шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в осевое сечение конуса. Пусть R – радиус шара, r – радиус конуса, H – высота конуса, то верно равенство $\dfrac{R}{H-R} = \dfrac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$.

В паре докажите это равенство.

Творческая работа

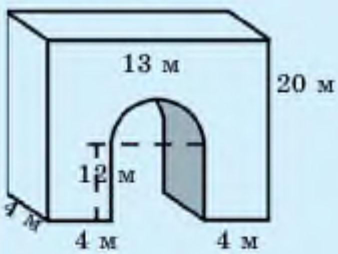


Рис. 4.41

Высота триумфальной арки «Мәңгілік ел» равна 20, а ширина – 13 м. По данным рис.4.41 нужно найти объем арки.

▲ Сначала вычислим объем большого параллелепипеда, а затем от него отнимем сумму объемов малого параллелепипеда и полуцилиндра. Измерения большого параллелепипеда – 20 м, 4м, 13м.

$V_{\text{больш. пар.}} = 20 \cdot 13 \cdot 4 = 1040$ м^3,

$V_{\text{маленьк. пар.}} = 12 \cdot 4 \cdot (13 - 4 - 4) = 240$ м^3.

Радиус полуцилиндра:

$$R = \frac{13 - 4 - 4}{2} = \frac{5}{2} \text{ м.}$$

$$V_{\text{полуцил.}} = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 4 = \frac{25\pi}{2} \text{ м}^3,$$

$$V_{\text{арки}} = 1040 - 240 - \frac{25\pi}{2} \approx 761 \text{ м}^3. \ ■$$

1. Какими свойствами обладает шар, вписанный в призму? Приведите примеры.
2. Что вы можете сказать о комбинации шара и цилиндра?
3. Что вы знаете о комбинации шара и конуса? Приведите примеры.
4. Перечислите свойства комбинации шара и пирамиды.

Упражнения

А

4.100. В цилиндр вписан куб так, что все его вершины принадлежат окружностям оснований цилиндра. Найдите объем цилиндра, если объем куба равен 343 $см^3$.

4.101. Тело состоит из комбинации цилиндра и полушара (рис. 4.42). Высота цилиндра равна 6 см, а радиус полушара – 2 см. Найдите объем этого тела.

4.102. Найдите объем: 1) цилиндра; 2) конуса, вписанного в куб объемом 216 $м^3$. Причем вершиной конуса является центр верхней грани куба.

4.103. В сферу радиусом 5 см вписан цилиндр, высота которого равна 6 см. Найдите объем цилиндра (рис. 4.43).

4.104. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 м и 6 м, а высота – 5 м. Найдите объем: 1) вписанного в нее; 2) описанного около нее усеченного конуса.

4.105. Цилиндр высотой 6 и радиусом 3 расположен внутри параллелепипеда с измерениями 10, 12 и 18. Вычислите вероятность того, что наудачу выбранная точка параллелепипеда окажется внутри цилиндра (рис. 4.44).

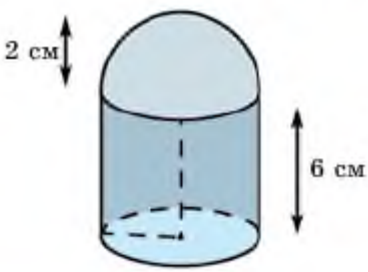


Рис. 4.42

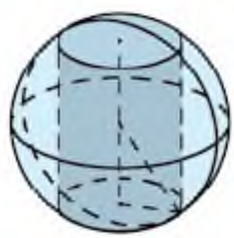


Рис. 4.43

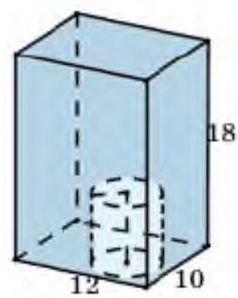


Рис. 4.44

4.106. Решите задачу **4.104,** рассматривая правильную треугольную усеченную пирамиду вместо четырехугольной.

4.107. Найдите объем куба и объем тетраэдра: 1) вписанного в шар; 2) описанного около шара радиусом 12 см.

4.108. Молот можно рассматривать как комбинацию цилиндра и параллелепипеда. По данным на рис.4.45 вычислите объем молота.

Рис. 4.45

Рис. 4.46

4.109. Три теннисных мяча диаметром 6 см поместили в цилиндрический футляр с таким же диаметром (рис. 4.46). Высота футляра ограничена тремя теннисными мячами. Найдите объем свободного от мячей пространства в футляре.

4.110. Геометрическая модель юрты является комбинацией цилиндра и усеченного конуса (рис. 4.47). По данным на рис. 4.47 найдите площадь боковой поверхности и объем юрты.

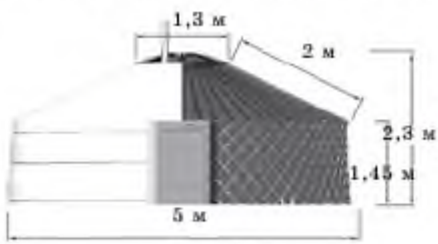


Рис. 4.47

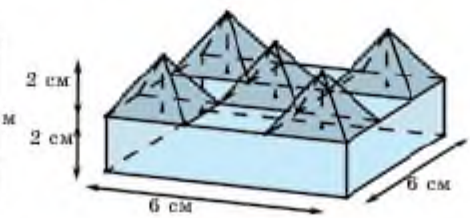


Рис. 4.48

4.111. Тело, изображенное на рис. 4.48, состоит из комбинации пяти пирамид и одного прямоугольного параллелепипеда. Сторона основания параллелепипеда равна 6 см и является квадратом. Высоты параллелепипеда и пирамид равны 2 см. Найдите объем этого тела.

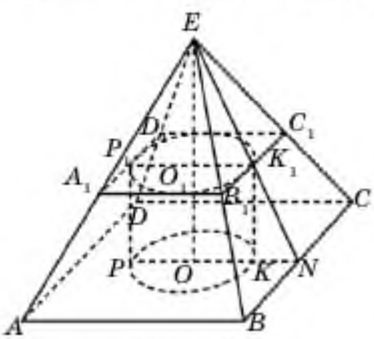


Рис. 4.49

B

4.112. В правильную четырехугольньную пирамиду вписан цилиндр, диагональное сечение которого является квадратом, и окружность верхнего основания цилиндра касается всех боковых граней пирамиды, а нижнее основание цилиндра лежит на основании пирамиды (рис. 4.49). Сторона основания пирамиды равна 10 см, а боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания угол, равный 60°. Найдите объем цилиндра.

4.113. Используя условие предыдущей задачи, найдите объем: 1) конуса; 2) шара, вписанного в данную пирамиду.

4.114. В основание конуса вписан квадрат со стороной, равной a. Через одну из сторон квадрата и вершину конуса, угол при вершине которого равен φ, проведено сечение. Найдите объем конуса.

4.115. Тело, изображенное на рис. 4.50, получено путем вращения прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг большего основания CD. Известно, что $ABFD$ является квадратом со стороной r. Найдите объем тела, если $CF=h$.

4.116. Высота равностороннего треугольника ABC равна h. Найдите объем тела, полученного вращением этого треугольника вокруг стороны AB (рис. 4.51).

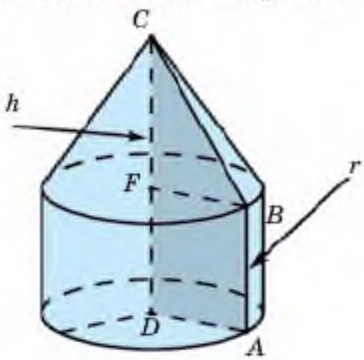


Рис. 4.50

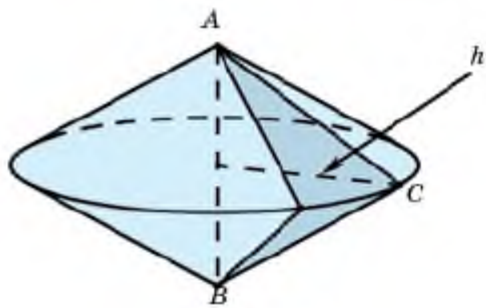


Рис. 4.51

4.117. Вершина конуса совпадает с центром основания полушара. Основание конуса, касающееся поверхности полушара, параллельно основанию полушара. Угол между образующей и осью конуса равен φ. Найдите отношение объемов полушара и конуса (рис. 4.52).

Дано: в полушар вписан конус с осевым сечением OAB, $\angle AOC = \varphi$.

Найти $V_{\text{полуш.}} : V_{\text{кон.}}$.

▲ Пусть $AO = R$. Тогда из ΔAOC имеем: $OC = AO \cdot \cos\varphi = R \cdot \cos\varphi$,

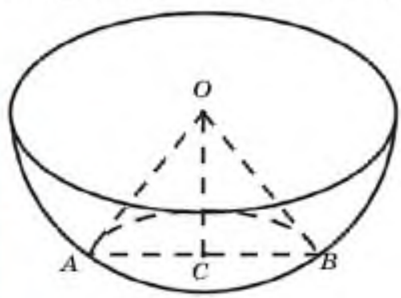


Рис. 4.52

$$AC = AO \cdot \sin\varphi = R \cdot \sin\varphi,$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot OC \cdot AC^2 = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi,$$

$$V_{\text{полуш.}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_{\text{полуш.}} : V_{\text{кон.}} = \frac{2}{3}\pi R^3 : \left(\frac{\pi R^3}{3} \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi\right) = \frac{2}{\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi}.$$ ■

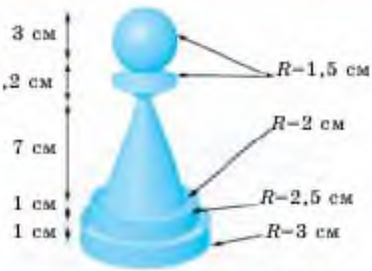


Рис. 4.53

4.118. Шахматная фигура «Пешка» изображена на рис. 4.53. Найдите ее объем.

4.119. Образующая конуса радиусом R составляет с плоскостью основания угол φ. Около конуса описана треугольная пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник. Найдите объем пирамиды, если острый угол ее основания равен γ.

4.120. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно k. Каково отношение объемов данных тел?

C

4.121. В шар вписаны цилиндр и конус, имеющие общее основание. Они расположены по разные стороны от общего основания. Площадь осевого сечения цилиндра равна 75 м², а отношение объемов цилиндра и конуса равно 9:1. Найдите радиус шара (рис. 4.54).

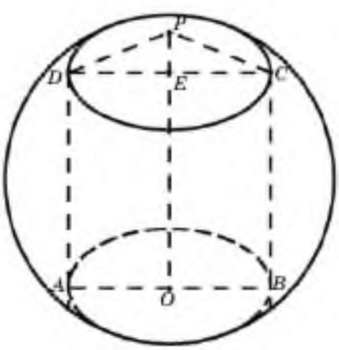


Рис. 4.54

4.122. Радиус цилиндра, вписанного в конус, вдвое меньше радиуса конуса. Найдите отношение объема конуса к объему цилиндра.

4.123. В шар радиусом R вписан конус. Из центра шара образующая конуса видна под углом φ. Найдите объем конуса.

4.124. Высота треугольной пирамиды равна 5, а стороны основания – 7, 8 и 9. Некий шар касается боковых граней пирамиды в точках, принадлежащих сторонам ее основания. Найдите объем шара.

4.125. В цилиндр радиусом R и высотой h вписана треугольная пирамида так, что два ее противоположных ребра расположены на основаниях цилиндра. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды.

4.126. Шар радиусом R касается всех ребер тетраэдра. Найдите площадь поверхности тела, образованного комбинацией шара и тетраэдра.

Упражнения для повторения

4.127. 1) На стороне AC треугольника ABC взята точка N так, что $AN=\frac{2}{5}AC$. Медиана AE и отрезок BN перпендикулярны и $AE=m$, $BN=n$. Найдите площадь треугольника ABC.

2) На стороне AC треугольника ABC взята точка K так, что $AK=\frac{3}{5}AC$. Медиана AP и отрезок BK перпендикулярны и $AP=a$, $BK=b$. Найдите площадь треугольника ABC.

Термины на трех языках

На русском языке	На казахском языке	На английском языке
Объем	Көлем	Volume
Сегмент шара	Шар сегменті	Segment
Сектор шара	Шар секторы	Sector
Вписанный	Іштей сызылған	Inscribed
Описанный	Сырттай сызылған	Outscribed
Площадь поверхности	Бетінің ауданы	Surface area

Выводы раздела «ОБЪЕМЫ ТЕЛ»

1) Объем произвольной призмы равен произведению площади основания и ее высоты:

$$V = S_{осн} \cdot h.$$

2) Объем пирамиды равен произведению площади основания и $\frac{1}{3}$ ее высоты:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h.$$

3) Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле

$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right)$, где S_1 и S_2 – площади оснований усеченной пирамиды, а h – ее высота.

4) Объемы подобных тел пропорциональны кубам их измерений.

5) Объем цилиндра равен прозведению площади основания и высоты:

$$V = \pi R^2 h.$$

6) Объем конуса равен произведению площади основания и $\frac{1}{3}$ высоты, т.е.

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h.$$

7) Объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны R и r, а высота – h, определяется по формуле

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right).$$

8) Объем шара определяется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

9) Объем шарового сегмента определяется по формуле

$$V_{сег} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right).$$

10) Объем шарового сектора равен сумме объемов шарового сегмента и конуса:

$$V_{сек} = V_{сег} + V_{кон} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\left(2Rh - h^2\right) \cdot (R - h) = \frac{2}{3}\ \pi R^2 h.$$

Раздел 5. ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

ПЛАНИМЕТРИЯ

7-й класс

1. Что такое геометрия, планиметрия?

2. Как следует понимать предложение: «Точка B лежит между точками A и C»?

3. Что такое луч, дополнительный луч?

4. Что такое отрезок, его концы и внутренние точки?

5. Как измеряется длина отрезка? Какие меры длины вы знаете?

6. Что такое угол? Назовите элементы угла. Как обозначается угол?

7. Что такое развернутый угол, острый, тупой?

8. Каким инструментом измеряют величину угла и какие меры угла вы знаете?

9. Какие углы называются смежными и чему равна их сумма?

10. Какие углы называются вертикальными и какие их свойства вы знаете?

11. Какие прямые называются перпендикулярными?

12. Какие углы называются накрест лежащими, внутренними односторонними и соответственными?

13. Какие прямые называются параллельными?

14. Сформулируйте признаки параллельности прямых и докажите их.

15. Какие свойства параллельных прямых вы знаете (параллельные третьей прямой)?

16. Какая фигура называется треугольником? Какие их виды вы знаете? Назовите их элементы.

17. Что такое медиана, биссектриса и высота треугольника?

18. Докажите теорему о сумме внутренних углов треугольника.

19. Сформулируйте признаки равенства треугольников, докажите их.

20. Что такое прямоугольный треугольник? Какие его свойства вы знаете?

21. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников.

22. Что такое перпендикуляр, наклонная и ее проекция? Какими свойствами они обладают?

23. Длина какого отрезка берется в качестве расстояния от точки до прямой?

24. Как можно построить треугольник по трем сторонам, по двум сторонам и углу между ними, по стороне и прилежащим к ней углам?

25. Как построить угол, равный данному углу?

26. Как построить биссектрису угла?

27. Как найти середину отрезка?

28. Как построить перпендикуляр, опущенный из точки на данную прямую?

29. Что такое серединный перпендикуляр отрезка? Как его строят?

30. Что такое окружность? Какие ее элементы вы знаете?

8-й класс

1. Какая фигура называется многоугольником? Что такое выпуклый многоугольник?

2. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, сумма внешних углов?

3. Что такое четырехугольник? Чему равна сумма его внутренних углов?

4. Что такое параллелограмм?

5. Докажите свойства параллелограмма.

6. Докажите признаки параллелограмма.

7. Что такое прямоугольник? Назовите его свойства.

8. Что такое ромб, квадрат? Какие их свойства вы знаете?

9. Докажите теорему Фалеса.

10. Что такое средняя линия треугольника? Докажите ее свойства.

11. Что такое трапеция, равнобокая трапеция, прямоугольная трапеция?

12. Докажите теорему о средней линии трапеции.

13. Какие точки называются замечательными точками треугольника?

14. Докажите, что в треугольник можно вписать окружность и около него описать окружность.

15. Какими свойствами обладают вписанные и описанные четырехугольники?

16. Как определяется косинус острого угла?

17. Докажите теорему Пифагора.

18. Что такое косинус, синус и тангенс острого угла?

19. Опишите зависимость тригонометрических функций острого угла.

20. Как определяются значения тригонометрических функций углов, равных 30°, 45°, 60°?

21. Докажите, что катет прямоугольного треугольника есть геометрическое среднее гипотенузы и проекции данного катета на нее.

22. Каким свойством обладает высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла? Докажите это свойство.

23. Какие фигуры называются равновеликими, равносоставленными?

24. Как определяется площадь прямоугольника?

25. По каким формулам определяются площади параллелограмма, треугольника и трапеции? Докажите их.

26. Что такое прямоугольная система координат? Как определяются координаты точки?

27. Как определяется расстояние между точками?

28. Напишите формулу деления отрезка в данном соотношении. Как определяется середина отрезка?

29. Напишите уравнение прямой и окружности.

30. Каковы особенности расположения прямой и окружности, заданных своими уравнениями, по отношению к осям координат?

31. Как определяется косинус, синус и тангенс угла от 0° до 180°?

32. Напишите формулы приведения.

9-й класс

1. Что такое скалярные и векторные величины? Какие векторы называются скалярными? Какова связь между вектором и параллельным переносом?

2. Как определяется сумма векторов? Сформулируйте *правила треугольника и параллелограмма*.

3. Что такое модуль вектора? Какие векторы называются равными?

4. Как определяется разность векторов? Как определяется умножение вектора на число? Какими свойствами обладают эти действия?

5. Что такое угол между векторами и проекция вектора на ось? Какие их свойства вы знаете?

6. Докажите единственность разложения вектора по базису.

7. Как определяются координаты вектора? Как определяются действия над векторами, заданными в координатах, модуль вектора?

8. Что такое скалярное произведение векторов? Докажите формулу $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$. Как определяется скалярное произведение в координатах?

9. Определите с помощью векторов координаты центра тяжести треугольника.

10. Что такое решение треугольника?

11. Докажите теорему косинусов.

12. Докажите теорему синусов.

13. Как можно решить треугольник по двум сторонам и углу между ними, по одной стороне и двум углам?

14. Что такое ломаная линия? Какими свойствами она обладает?

15. Что такое правильный многоугольник?

16. Какие векторы называются направляющими и нормальными векторами прямой? Напишите соответствующие уравнения прямой.

17. Что вы понимаете под преобразованием плоскости?

18. Как определяется осевая и центральная симметрии?

19. Что такое поворот и параллельный перенос?

20. Что такое движение? Какова его связь с совмещением?

21. Что такое преобразование подобия и коэффициент подобия?

22. Что такое гомотетия? Какими свойствами она обладает? Что такое центр и коэффициент гомотетии?

23. Докажите признаки подобия треугольников.

24. Какими свойствами обладают биссектрисы треугольника?

25. Сформулируйте признаки подобия прямоугольных треугольников.

26. Что такое пропорциональные отрезки на окружности и каковы их свойства?

27. Что такое окружность? Назовите основные элементы окружности.

28. Какими свойствами обладает касательная окружность?

29. Как могут располагаться прямая и окружность относительно друг друга?

30. Какими свойствами обладает хорда и дуга окружности?

31. Сколько осей симметрии имеет окружность? А центров симметрии?

32. Что такое вписанный угол и центральный угол окружности и каковы их свойства?

33 Как располагаются две окружности относительно друг друга? Как определяется расстояние между их центрами?

34. Чему равен угол между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности?

35. Как определяется угол между двумя секущими окружности?

36. Чему равна сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника?

37. Что такое центр и апофема правильного многоугольника?

38. Докажите теорему об отношении длины окружности к ее диаметру. По какой формуле определяется длина окружности?

39. Чему равно отношение площадей подобных треугольников, подобных многоугольников?

40. Что такое круг? Какие его элементы вы знаете?

41. По какой формуле вычисляется площадь круга? Напишите эту формулу.

42. Как определяются площади сектора и сегмента?

43. Как вычисляется площадь правильного многоугольника?

44. Что такое пропорциональные отрезки в круге? Какие их свойства вы знаете?

45. Какие метрические соотношения в прямоугольном треугольнике вы знаете?

46. Как определить вид треугольника (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный)?

47. Какими свойствами обладает биссектриса треугольника?

48. Какова зависимость между сторонами и диагоналями вписанного четырехугольника?

49. Назовите основные этапы развития геометрии.

Упражнения

5.1. Даны $\angle AOB = \alpha$ и $\angle BOC = \beta$ с общей стороной. Чему равен угол между их биссектрисами? Рассмотрите случай смежных углов.

5.2. $\angle AOB = \alpha$ и $\angle BOC = \beta$, $\angle COD = \gamma$ и они расположены последовательно. Найдите угол между биссектрисами углов AOB и COB.

5.3. Периметр равнобедренного треугольника равен 18,3 м, а основание на 3 м больше боковой стороны. Найдите стороны треугольника.

5.4. Медиана прямоугольного треугольника длиной m, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите катеты треугольника.

5.5. Найдите расстояние между серединами диагоналей трапеции по основаниям a и b.

5.6. Найдите углы между касательными к окружности, проведенными через вершины треугольника, вписанного в данную окружность, если даны углы вписанного треугольника.

5.7. При каких условиях центр описанной около треугольника окружности расположен внутри, на стороне, вне этого треугольника?

5.8. В треугольнике ABC дано: $BC=a$, а точки D и E делят стороны AB и AC в отношении $m : n$. Найдите BE.

5.9. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны 4 см. Найдите среднюю линию трапеции, если ее высота равна 2 см.

5.10. Большая сторона трапеции равна 24 см, а расстояние между серединами ее диагоналей – 4 см. Найдите меньшее основание.

5.11. Высота ромба делит его сторону на отрезки, равные a и b. Найдите диагонали ромба.

5.12. Разделите параллелограмм на две части так, чтобы из этих частей можно было составить прямоугольник.

5.13. Разделите треугольник на три части так, чтобы из этих частей можно было составить прямоугольник.

5.14. Трапеция своими диагоналями делится на 4 треугольника. Докажите, что треугольники, основаниями которых служат боковые стороны трапеции, равновеликие.

5.15. Найдите длину общей касательной окружностей радиусами r и R, касающихся друг друга внешним образом.

5.16. Постройте квадрат, равновеликий с данным треугольником.

5.17. В правильный шестиугольник со стороной $10\sqrt{3}$ см вписан круг. Найдите сторону квадрата, вписанного в этот круг.

5.18. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4 см, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3 см. Найдите основание треугольника.

5.19. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5 см. Найдите боковую сторону треугольника.

5.20. Если a, b, c – стороны треугольника, а R – радиус описанной окружности, то докажите формулу $S = \dfrac{abc}{4R}$.

5.21. Если h_1, h_2, h_3 – высоты треугольника, а r – радиус вписанной окружности, то докажите формулу $\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} = \dfrac{1}{r}$.

5.22. По заданным сторонам a, b, c треугольника найдите высоту h_a и площадь треугольника.

5.23. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

5.24. Вне прямоугольного треугольника построены полукруги так, что стороны треугольника являются диаметрами этих полукругов. Докажите, что площадь большего полукруга равна сумме площадей двух других.

5.25. Найдите площадь ромба с периметром $2p$, если сумма диагоналей равна m.

5.26. Две стороны треугольника равны *a и b*, а его площадь $S = \frac{3}{10}ab$. Найдите третью сторону треугольника.

5.27. Высота треугольника, равная 4 см, делит его основание в отношении 1:8. Найдите длину отрезка, параллельного этой высоте и делящего этот треугольник на равновеликие части.

5.28. Около окружности радиусом R описана трапеция, меньшее основание которой равно $1{,}5R$. Найдите площадь этой трапеции.

5.29. Найдите углы параллелограмма, высоты которого равны h_1 и h_2, а периметр равен $2p$.

5.30. Основания и меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равны a, b и c соответственно. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до основания и меньшей боковой стороны.

5.31. Основание треугольника и высота, опущенная на эту сторону, равны a и h соответственно. Найдите сумму боковых сторон, если угол между ними равен φ.

5.32. Высота равнобокой трапеции равна h, а острый угол между ее диагоналями равен 2φ. Найдите среднюю линию трапеции.

5.33. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с ним общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.

5.34. Стороны параллелограмма равны *a и b*, а острый угол равен φ. Найдите тангенсы углов, образованных диагональю острого угла и сторонами параллелограмма.

5.35. Площадь сектора с центральным углом 140° равна $31{,}5\pi$ см^2. Найдите его радиус.

5.36. Найдите угол между диагоналями четырехугольника с вершинами в точках $A(-5;\ 2\sqrt{3})$, $B(-4;\ 2)$, $C(-2;\ \sqrt{3})$, $D(0;\ 2)$.

5.37. Даны вершины треугольника ABC: $A(2;\ 0)$, $B(-3;\ 4)$, $C(0;\ 1)$. Найдите вектор, коллинеарный биссектрисе угла A.

5.38. Докажите, что угол между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

5.39. При каких значениях *a и b* прямые $ax+8y+b=0$ *и* $2x+ay-1=0$: а) совпадают; б) параллельны; в) перпендикулярны?

5.40. Две стороны треугольника равны *a и b*, а биссектриса угла между ними – l. Найдите этот угол треугольника.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

10-й класс

1. Что такое стереометрия? Сформулируйте три ее основные аксиомы.

2. По аксиоме III две пересекающиеся прямые определяют плоскость однозначно, т.е. через эти прямые проходит единственная плоскость. В каких еще случаях плоскость определяется однозначно?

3. Как расположены относительно друг друга прямая и плоскость, если они имеют: а) только одну общую точку; б) две общие точки; в) не имеют общих точек?

4. Обязательно ли параллельны две непересекающиеся прямые в пространстве? Какому еще требованию должны удовлетворять эти прямые для того, чтобы быть параллельными?

5. Какие прямые называются скрещивающимися? Приведите пример.

6. Как располагаются две плоскости, если они: а) имеют; б) не имеют общую точку?

7. Докажите признаки параллельности: а) прямой и плоскости; б) двух плоскостей.

8. Что вы понимаете под углом между прямыми в пространстве? Какие прямые называются перпендикулярными?

9. Что вы понимаете под углом между прямой и плоскостью? Какую прямую называют перпендикулярной плоскости?

10. Докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.

11. Покажите, что прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

12. Что вы понимаете под перпендикуляром, опущенным из точки на плоскость? Как определяется расстояние от точки до плоскости?

13. Что вы понимаете под наклонной, опущенной из точки на плоскость, ее проекцией и основанием?

14. Докажите теорему о трех перпендикулярах.

15. Какие плоскости называются перпендикулярными?

16. Докажите признак перпендикулярности двух плоскостей.

17. Как определяется расстояние между скрещивающимися прямыми?

18. Какие свойства параллельного проектирования вы знаете ?

19. Назовите принципы изображения пространственных фигур на плоскости. Приведите пример.

20. Что такое ортогональное проектирование? Как определяется площадь ортогональной проекции многоугольника?

21. Что вы понимаете под векторами в пространстве? Какие действия применяются к ним? Покажите *правило параллелепипеда* для трех векторов.

22. Как определяются координаты точки и вектора в пространстве? Найдите координаты вектора по координатам его концов.

23. Что такое скалярное произведение двух векторов? Как определяется угол между векторами?

24. Напишите формулу деления отрезка в данном отношении и поясните ее смысл.

11-й класс

1. Что называется двугранным, трехгранным (многогранным) углами?

2. Что такое линейный угол двугранного угла?

3. Какие элементы имеет многогранный угол? Какой должна быть сумма его плоских углов?

4. Что вы понимаете под геометрическим телом? Что такое выпуклое тело?

5. Какие тела называются многогранниками? Что такое поверхность многогранника? Какие элементы его вы знаете?

6. Что такое развертка многогранника? Как определяется площадь полной поверхности многогранника?

7. Какой многогранник называется призмой? Какие элементы ее вы знаете? Какие виды призмы вы знаете?

8. Какую призму называют параллелепипедом? Какие виды его вы знаете?

9. Каким свойством обладают диагонали параллелепипеда? Для каких видов параллелепипедов справедлива обобщенная теорема Пифагора?

10. Какой многогранник называется пирамидой? Какие элементы ее вы знаете?

11. Что такое усеченная пирамида? Какие элементы ее вы знаете?

12. Как определяется боковая поверхность, полная поверхность призмы (пирамиды)?

13. Что называется сечением, секущей плоскостью многогранника? Что такое след секущей плоскости?

14. Какие многогранники называются правильными? Назовите их виды.

15. Что такое движение в пространстве? Какое преобразование называется параллельным переносом, симметрией относительно плоскости?

16. Какие фигуры в пространстве называются подобными? Что такое преобразование подобия?

17. Напишите уравнение прямой и уравнение плоскости в пространстве.

18. Напишите условие параллельности двух прямых (прямой и плоскости, двух плоскостей).

19. Напишите условие перпендикулярности двух прямых (прямой и плоскости, двух плоскостей).

20. Как определяются углы в пространстве? Каковы их особенности?

21. Какие тела (поверхности) называются телами (поверхностями) вращения? Что такое ось, осевое сечение тела вращения? Что такое образующая?

22. Какие тела называются цилиндром, конусом? Какие их элементы вы знаете?

23. По каким формулам вычисляются площади боковой и полной поверхностей цилиндра и конуса?

24. Какое тело называется усеченным конусом? Какие его элементы вы знаете? По каким формулам вычисляются площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса?

25. Какое тело (поверхность) называется шаром (сферой)? Как определяется площадь сферы?

26. Напишите уравнение сферы и ее касательной плоскости.

27. Что вы понимаете под вписанным в тело вращения (описанным около тела вращения) многогранником? Приведите пример.

28. Что вы понимаете под объемом геометрического тела? Какими свойствами обладает понятие объема?

29. По какой формуле вычисляется объем призмы? Напишите формулу нахождения объема прямоугольного параллелепипеда.

30. По каким формулам вычисляются объемы пирамиды и усеченной пирамиды?

31. По каким формулам вычисляются объемы цилиндра, конуса и усеченного конуса?

32. Как определяется объем шара?

33. По какой формуле вычисляется объем шарового сегмента (сектора)?

Упражнения

5.41. Плоскость α, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает другие его стороны в точках A_1 и B_1. Найдите A_1C, если $AC=15$ см, $A_1B_1=4$ см, $AB=20$ см.

5.42. Точка, находящаяся на расстоянии 3 см от плоскости квадрата, равноудалена от всех его сторон. Найдите сумму расстояний от этой точки до всех вершин квадрата, если его сторона равна 4 см.

5.43. Расстояние от середины отрезка AB, пересекающего плоскость α, до нее равно 6 см, а расстояние от точки B до этой плоскости равно 24 см. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если середина плоскости и точка A расположены по разные стороны плоскости α.

5.44. При каких значениях m выполняется равенство $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4\sqrt{3}$? Здесь $A(4;\ m;\ 1)$, $B(8;\ 5;\ 5)$.

5.45. Вершины равнобедренных треугольников ABC и ABD общие и расположены в разных плоскостях. Найдите косинус угла между плоскостями ABC и ABD, если $AB=2$ м, $AC=2$ м, $AD=4$ м, $CD=3$ м.

5.46. Точка R делит отрезок PQ в отношении 3:2. Найдите координаты точки R, если $P(4;\ -4;\ 1)$, $Q(8;\ -2;\ 7)$.

5.47. Два плоских угла трехгранного угла равны 45°, а двугранный угол между этими гранями прямой. Найдите третий плоский угол.

5.48. Из данной точки к плоскости проведены две наклонные длиной 10 м и 17 м, а разность их проекций равна 9 м. Найдите их проекции.

5.49. Отрезок длиной 10 дм пересекает плоскость, а его концы удалены от нее на расстояние 5 дм и 3 дм. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.

5.50. Найдите модуль вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 60^\circ$ и $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 1$.

5.51. Даны точки $A(-2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ 3;\ 2)$, $C(1;\ 1;\ 4)$. Найдите точку пересечения медиан треугольника ABC.

5.52. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ дано: $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $AB = 2$ см, $AA_1 = 2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь: 1) полной поверхности; 2) сечения A_1BC призмы.

5.53. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 4$ и $\left|\vec{c}\right| = 5$. Найдите величину выражения $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$.

5.54. Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны m, $2m$ и $3m$. Найдите угол между прямыми BD и AB_1.

5.55. Боковая грань призмы есть квадрат, основание – правильный треугольник. Радиус описанной около этого треугольника окружности равен 6 см. Найдите объем призмы.

5.56. Все ребра прямой призмы равны, а площадь боковой поверхности равна 48 дм^2. Найдите высоту призмы.

5.57. Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм, стороны которого равны 6 см и 8 см, а острый угол –30°. Найдите объем параллелепипеда, если его высота равна 5 см.

5.58. Найдите площадь диагонального сечения прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 14 см, 48 см и 8 см.

5.59. Площадь полной поверхности куба равна 150 м^2. Найдите его объем.

5.60. Найдите ребро куба, равновеликого с прямоугольным параллелепипедом, линейные меры которого равны 15 см, 50 см и 36 см.

5.61. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которого равна a, а боковое ребро – b.

5.62. Найдите объем шара, описанного около куба с ребром a.

5.63. Образующая конуса наклонена к основанию под углом φ. Найдите отношение объема вписанного в него шара к объему конуса.

5.64. Отношение площади осевого сечения цилиндра к площади его основания равно $4:\pi$. Найдите угол между диагональю осевого сечения и основанием цилиндра.

5.65. Найдите радиус шара, объем которого равен среднему арифметическому объемов шаров радиусами 3 м, 4 м и 5 м.

5.66. Найдите объем тела вращения, образованного вращением прямоугольного треугольника вокруг меньшего катета, если катеты треугольника равны 4 см и 3 см.

5.67. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 м и 6 м, а высота – 4 м. Найдите образующую усеченного конуса.

5.68. Образующая конуса равна диаметру основания. Найдите отношение боковой поверхности конуса к боковой поверхности пирамиды, вписанной в него.

5.69. Площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого равны r и R, равна S. Найдите площадь боковой поверхности полного конуса.

5.70. Отношение радиусов оснований и образующей усеченного конуса равно 1:4:5, а его высота – 8 м. Найдите объем усеченного конуса.

5.71. Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, если площади оснований равны Q_1 и Q_2, а площадь боковой поверхности – Q_3.

5.72. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан другой цилиндр. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

5.73. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, каждое ребро которой равно a.

5.74. Центры граней куба являются вершинами октаэдра. Найдите отношение объемов куба и октаэдра.

5.75. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция, основания которой равны 3 м и 5 м, а боковая сторона – 7 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей пирамиды. Найдите объем пирамиды, если большее боковое ребро равно 10 м.

5.76. Высота конуса объемом V разделена на три равные части. Через точки деления параллельно основанию проведены плоскости, которые делят конус на три части. Найдите объем средней части.

5.77. Около шара описана правильная треугольная призма, около которой описан другой шар. Найдите отношение объемов этих шаров.

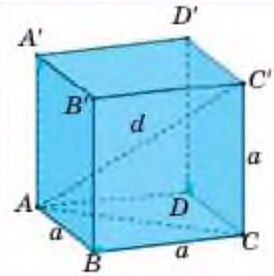
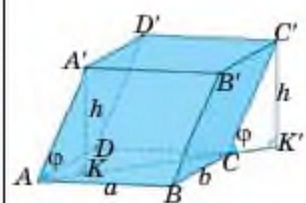
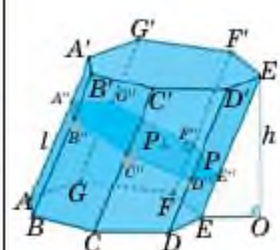
5.78. Найдите отношение объемов трех шаров, которые касаются всех граней куба, всех ребер куба и проходят через все вершины этого куба.

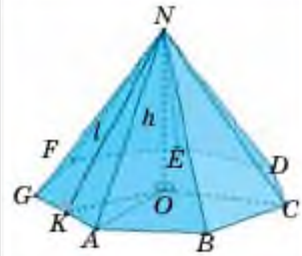
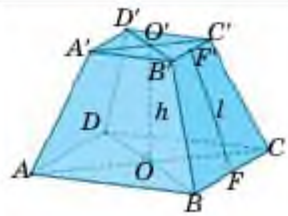
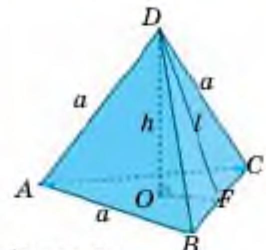
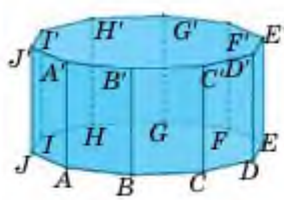
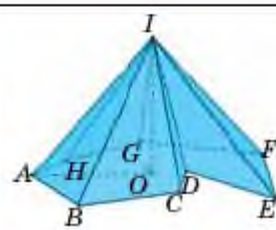
5.79. В основание полушара вписан прямоугольник со сторонами a и b. Плоскости, перпендикулярные основанию полушара, проходят через стороны прямоугольника и отсекают от него четыре полусегмента. Найдите объем оставшейся части полушара.

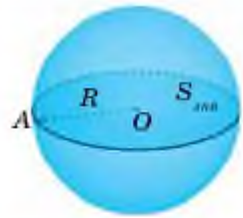
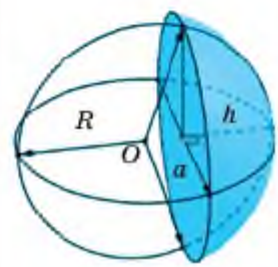
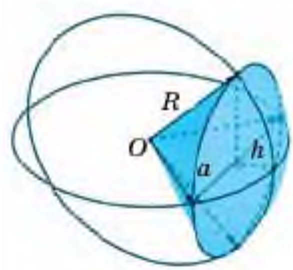
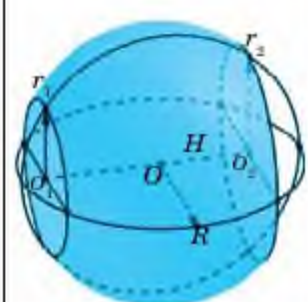
5.80. В конус высотой 8 см и радиусом 6 см вписан ряд шаров. Первый шар касается основания и боковой поверхности конуса, а следующий шар касается предыдущего шара и боковой поверхности конуса и т.д. Чему равен предел суммы объемов этих шаров, если их количество бесконечно?

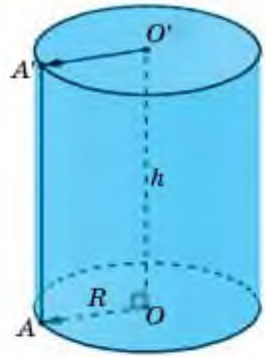
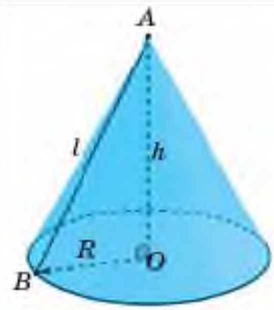
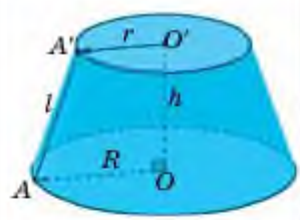
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И 3D-ИЛЛЮСТРАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

Многогранники с 3D-иллюстрациями

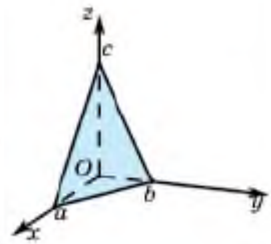
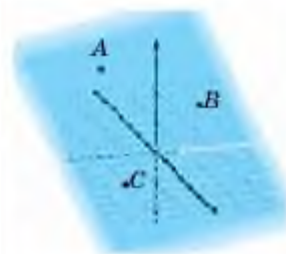
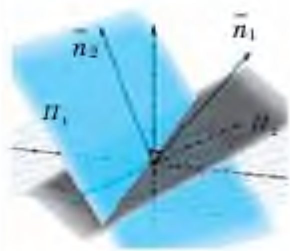
1	***Куб*** **Диогональ куба:** $d = a\sqrt{3}$ **Площадь основания:** $S_{осн} = a^2$. **Площадь полной поверхности:** $$S_{полн} = 6a^2.$$ **Объем куба:** $V_{куб} = a^3$.	
2	***Параллелепипед*** **Периметр основания параллелепипеда:** $P_{осн} = 2(a+b)$. **Площадь основания:** $S_{осн} = ab\sin\alpha$. **Площадь боковой поверхности:** $$S_{бок} = P_{осн}h.$$ **Площадь полной поверхности:** $$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}.$$ **Объем прямого параллелепипеда:** $$V = S_{осн}h.$$ **Объем наклонного параллелепипеда:** $$V = a \cdot b \cdot c \cdot \sin\,\theta.$$	
3	***Призма*** **Площадь боковой поверхности:** $$S_{бок} = P_{осн}h.$$ **Площадь боковой поверхности произвольной призмы:** $S_{бок} = P_{сеч}l$ ($P_{сеч}$ – периметр перпендикулярного сечения, l – длина бокового ребра) **Площадь полной поверхности:** $$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}.$$ **Объем призмы:** $$V = S_{осн}h.$$	

4	***Пирамида*** **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} l$ (l – апофема). **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$. **Объем пирамиды:** $V = S_{осн} h$.	
5	***Усеченная пирамида*** **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} l$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$. **Объем усеченной пирамиды:** $V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$.	*Тетраэдр*
6	***Выпуклый многогранник*** **Теорема Эйлера для многогранников:** $В + Г - Р = 2$. Ребра: $3n$. Вершины: $2n$. Грани: $n + 2$. Диагонали: $n \cdot (n - 3)$.	
	Теорема Эйлера для пирамид: $В + Г - Р = 2$. Ребра: $2n$. Вершины: $n + 1$. Грани: $n + 1$.	

1	***Сфера. Шар*** **Площадь экваториального сечения:** $S_{экв.сеч} = \pi R^2$. **Площадь сферы:** $S = 4\pi R^2$. **Объем шара:** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.	
2	***Шаровой сегмент*** **Радиус основания сегмента:** $a^2 = h(2R - h)$. **Площадь шаровой поверхности:** $S_{ш.п.} = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = \pi(h^2 + 2a^2)$. **Объем шарового сегмента:** $V_{сег} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$.	
3	***Шаровой сектор*** **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = \pi R(2h + a)$. **Объем шарового сектора:** $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.	
4	***Шаровой пояс*** **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = 2\pi RH$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = \pi(r_1^2 + r_2^2 + 2RH)$. **Объем шарового пояса:** $V = \frac{\pi}{6}H(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$.	

5	***Цилиндр*** **Площади оснований:** $S_{осн} = 2\pi R^2$. **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = 2\pi Rh$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = 2\pi R(h + R)$. **Объем цилиндра:** $V = \pi R^2 h$.	
6	***Конус*** **Площадь оснований:** $S_{осн} = \pi R^2$. **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = \pi Rl$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = \pi R(l + R)$. **Объем конуса:** $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.	
7	***Усеченный конус*** **Площади оснований:** $S_{осн} = \pi(R^2 + r^2)$. **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = \pi l(R + r)$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = \pi(R^2 + l(R + r) + r^2)$. **Объем усеченного конуса:** $V = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2)$.	

Уравнения прямой и плоскости, уравнение сферы в пространстве с 3D-иллюстрациями

1	***Уравнение плоскости в отрезках*** **Уравнение плоскости общего вида:** $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$ **Уравнение плоскости в отрезках:** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, где a, b, c – координаты точек, отсекаемых на осях Ox, Oy, Oz соответственно.	
2	***Уравнение плоскости, проходящей через три точки*** **Точки в пространстве:** $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$. **Уравнение плоскости через три точки:** $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$.	
3	***Угол между двумя плоскостями*** **Уравнения плоскостей:** Π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$ Π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$ **Векторы нормали:** $\bar{n}_1\,(A_1;\ B_1;\ C_1)$ и $\bar{n}_2\,(A_2;\ B_2;\ C_2)$. **Угол между двумя плоскостями:** $\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\lvert\bar{n}_1\rvert \cdot \lvert\bar{n}_2\rvert} =$ $= \frac{\lvert A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 \rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$. **Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей:** $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$	

<table>
<tr>
<td>4</td>
<td>

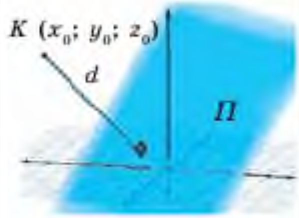
Расстояние от точки до плоскости

$K\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ – **произвольная точка, не лежащая на плоскости.**

Расстояние от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>

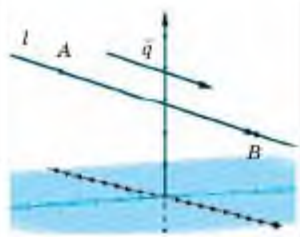
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Точки в пространстве:
$A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ **и** $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Направляющий вектор: $\vec{q}(m; k; p)$.

Уравнение прямой через две заданные точки:
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

</td>
<td rowspan="2">



</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>

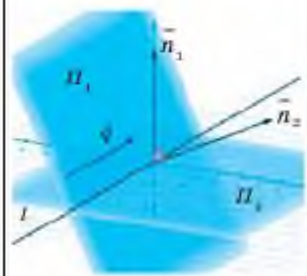
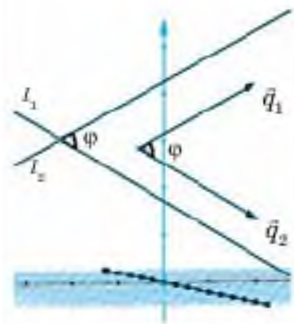
Параметрическое уравнение прямой

Точка в пространстве: $A\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Направляющий вектор: $\vec{q}(m; k; p)$.

Параметрическое уравнение прямой:
$$l = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ k \\ p \end{pmatrix}.$$

</td>
</tr>
</table>

7	***Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей*** **Уравнения плоскостей:** $П_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$ $П_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$ **Векторы нормали:** $\bar{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2; B_2; C_2)$. **Направляющий вектор:** $\vec{q}(m; k; p)$. **Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей:** $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} \vec{q} \perp \bar{n}_1, \\ \vec{q} \perp \bar{n}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2.$	
8	***Угол между прямыми*** **Уравнения прямых:** $l_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_1 \\ k_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ и $l_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$ **Направляющие векторы:** $\vec{q}_1(m_1; k_1; p_1)$ и $\vec{q}_2(m_2; k_2; p_2)$. **Угол между прямыми:** $\cos\varphi = \frac{\lvert \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 \rvert}{\lvert \vec{q}_1 \rvert \cdot \lvert \vec{q}_2 \rvert} =$ $= \frac{\lvert m_1 \cdot m_2 + k_1 \cdot k_2 + p_1 \cdot p_2 \rvert}{\sqrt{m_1^2 + k_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + k_2^2 + p_2^2}}.$ **Условия параллельности и перпендикулярности прямых:** $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{p_1}{p_2},$ $l_1 \perp l_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 + k_1 \cdot k_2 + p_1 \cdot p_2 = 0.$	

<table>
<tr>
<td>9</td>
<td>

Угол между прямой и плоскостью

Уравнение плоскости:

$П: Ax + By + Cz + D = 0.$

Уравнение прямой: $l = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ k \\ p \end{pmatrix}$

Вектор нормали: $\vec{n}(A;\ B;\ C)$.

Направляющий вектор: $\vec{q}(m; k; p)$.

Угол между прямой и плоскостью:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\left|\vec{q} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{q}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} =$$

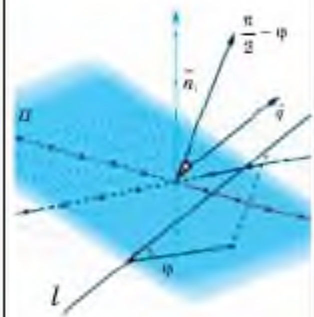
$$= \frac{\left|m \cdot A + k \cdot B + p \cdot C\right|}{\sqrt{m^2 + k^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости:

$$l \perp П \Rightarrow \frac{m}{A} = \frac{k}{B} = \frac{p}{C},$$

$$l \parallel П \Rightarrow m \cdot A + k \cdot B + p \cdot C = 0.$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>10</td>
<td>

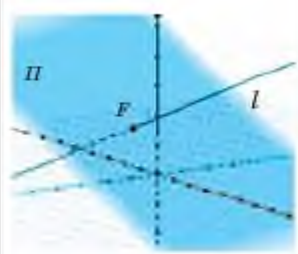
Точка пересечения прямой и плоскости

Алгоритм действий вычисления точки пересечения прямой и плоскости:

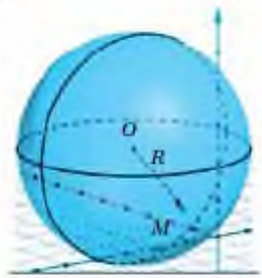
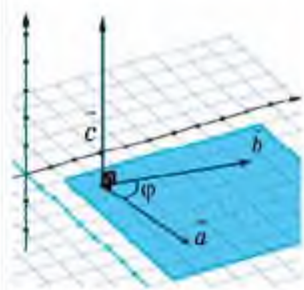
1. $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{k} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases} \Rightarrow$

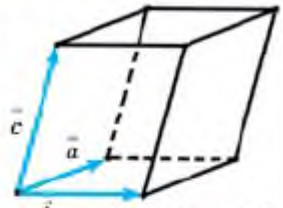
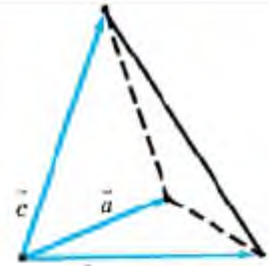
$$\Rightarrow \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \begin{cases} x = m\lambda + x_0, \\ y = k\lambda + y_0, \\ z = p\lambda + z_0. \end{cases} \end{cases}$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2. $A(m\lambda + x_0) + B(k\lambda + y_0) +$
$+ C(p\lambda + z_0) + D = 0.$
3. $\lambda_0 = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0}{Am + Bk + Cp}$
4. $\begin{cases} x_F = m\lambda_0 + x_0 \\ y_F = k\lambda_0 + y_0 \\ z_F = p\lambda_0 + z_0 \end{cases} \Rightarrow F(x_F; y_F; z_F).$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>11</td>
<td>Уравнение сферы
Координата центра шара:
$O\ (x_0;\ y_0;\ z_0).$
Уравнение сферы:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>12</td>
<td>Векторное произведение векторов
Координаты орт-вектор:
$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$
Площадь параллелограмма:
$S = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|$
Площадь треугольника:
$S = \frac{1}{2}|\vec{c}| = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

13	***Смешанное произведение векторов*** **Объем параллелепипеда:** $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left\|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right\|$	 *Параллелепипед*
14	**Объем пирамиды:** $V = \frac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right\|$	 *Пирамида*

ОТВЕТЫ

Раздел-повторение 1. **0.1.** 1) 6 см. **0.2.** 2) 20 см. **0.7.** 1) 4 см. **0.9.** 1) 5 см. **0.11.** 1) 8 м; 2) 26 см. **0.15.** 48 см. **0.16.** 16 см. **0.17.** 1) 5 м; 2) $a + c - b$. **0.18.** 2 см. **0.19.** $8\sqrt{3}$ см. **0.20.** 10 см и $2,5\sqrt{3}$ см. **0.22.** 1. **0.23.** $-\frac{69}{2}$. **0.24.** $6a^2$. $6\sqrt{2}$. **0.30.** $x = 0$.

Раздел 1, п.1.1. **1.5.** 1) Невозможно; 2) можно; 3) невозможно; 4) невозможно. **1.6.** 1) Невозможно; 2) можно; 3) невозможно; 4) невозможно. **1.7.** 12. **1.8.** 1) $k=4$. **1.9.** 3) 864 м². **1.11.** 4) 7 мм. **1.12.** 3) $25\sqrt{3}$ дм². **1.13.** 60°. **1.14.** 4) $\operatorname{tg}\alpha = 0,5$. **1.15.** $[40°; 100°]$. **1.16.** 2) 760 см². **1.17.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 2) 45°. **1.19.** $\sqrt{155}$ см. **1.20.** 4 см. **1.22.** 1) Измерения a, a, $\sqrt{2}\,a$; 2) $2\left(2\sqrt{2}+1\right)a^2$. **1.24.** 17 см. **1.25.** 90°. **1.26.** $n \leqslant 3$. **1.27.** $2S_1 + 2S_2 + \frac{2S_1S_2}{a^2}$; $\frac{1}{a}\sqrt{a^4 + S_1^2 + S_2^2}$. **1.29.** $\sqrt{\frac{S_1S_2}{S_3}}$; $\sqrt{\frac{S_1S_3}{S_2}}$; $\sqrt{\frac{S_2S_3}{S_1}}$.

П.1.2. **1.48.** 1) 3 м; 3) 26 дм. **1.49.** 1) 180 см²; 2) 220 см²; 3) $10\sqrt{41}$ см². **1.50.** 2) 3 м, 7 м, 11 м. **1.51.** 3) 260 мм² и 300 мм². **1.53.** 520 см² и 858 см². **1.54.** 1) $\frac{240+25\sqrt{3}}{2}$ м². **1.55.** 120°. **1.56.** 1) Можно, имеет 30 ребер и 12 граней; 3) невозможно. **1.57.** $d = a\sqrt{3}$. **1.60.** $d = \frac{\sqrt{6}}{2}d_1$. **1.61.** 490 см². **1.64.** 14 см, 48 см. **1.65.** 6 см, 14 см, 16 см. **1.66.** $3\sqrt{105} + 2\left(\sqrt{81-6\sqrt{35}} + \sqrt{81+6\sqrt{35}}\right)$ (м²). **1.67.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}a^2$. **1.70.** $6\left(6+\sqrt{3}\right)r^2$. **1.71.** 906 см². **1.72.** 42 см².

П.1.3. **1.84.** 2) Не существует. **1.86.** 2) 84 м². **1.87.** 1) $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ см². **1.88.** 1) 24 см². **1.89.** 2) 32 м². **1.92.** 1) 64 см². **1.93.** 2) 150 м². **1.94.** 1) 16 м; 2) $96\sqrt{15}$ м². **1.101.** 1) 5 см; 2) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{5}$; 3) $\sqrt{34}$ см; 4) $\cos\gamma = \frac{\sqrt{102}}{17}$. **1.106.** $48 + 27\sqrt{3} + 9\sqrt{91}$ (см²). Двугранный угол равен 90°. **1.107.** 1) 5 см; 6 см; 2) $8\sqrt{5} + 12\sqrt{6} + 4\sqrt{14}$ (см²). **1.108.** 1) $b\sin\varphi$; 2) $2b\cos\varphi$; 3) $b\cos\varphi$; 4) $\frac{b}{2}\sqrt{4-\cos^2\varphi}$; 5) $\frac{3b^2}{2}\sqrt{4-\cos^2\varphi}$. **1.109.** $2a^2$. **1.110.** 6 см. **1.111.** 2 см. **1.112.** 51 см, 39 см. **1.117.** $3\sqrt{5}\,a^2$. **1.118.** $(n-1)360°$. **1.119.** $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\varphi\cos\frac{\pi}{n}$.

1.120. $\left(\dfrac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}\right)^2$. **1.121.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}-1}}$. **1.122.** $\dfrac{a^2}{2}\left(2+\sqrt{7}\right)$.
1.129. 1) $25\sqrt{2}$ см². **1.130.** 60°. **1.134.** 2) 144 см². **1.137.** $3\sqrt{11}$ см².
1.142. 10 см². **1.143.** 1) $\frac{h}{2}(2b^2-2h^2)$. **1.144.** $32\sqrt{5}$ см². **1.145.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.
1.148. $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$. **1.149.** $\cos\varphi=-\dfrac{1}{3}$. **1.150.** 8 см², 18 см². **1.153.** $\dfrac{h^2\cdot \mathrm{tg}^2\varphi\sin\varphi}{\cos(\gamma-\varphi)}$. **1.154.** Нужно взять развертку пирамиды.**1.155.** $\dfrac{b^2\sqrt{5}}{6}$.
1.156. $\sqrt{-2\cos2\varphi}\cdot ab$.

Раздел 2, п.2.1. **2.2.** 2) $\vec{p}(4;\ -2;\ 7)$; 3) $\vec{p}(4;\ 1;\ -1)$. **2.4.** 1) $\vec{n}(1;\ 2;\ -1)$; 4) $\vec{n}(0;\ 2;\ 1)$. **2.5.** 2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, т.к. $\dfrac{0}{2}\neq\dfrac{3}{5}\neq\dfrac{-4}{4}$. $\vec{n}(32;\ -8;\ -6)$ или $\vec{n}(16;\ -4;\ -3)$. **2.7.** 2) $16x-4y-3z+44=0$; 4) $11x+10y+3z-8=0$. **2.8.** 1) $\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{3}$; 3) $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-3}{4}$. **2.9.** 1) $3x-2y-5z+16=0$; 4) $x+y-3=0$. **2.11.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-5}{5}$ или $\begin{cases}x-2y-5=0,\\5x-4z+15=0.\end{cases}$ **2.13.** 2) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-2}=1$, $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ -2)$. **2.14.** 1) $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z-7}{3}$; 3) $\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z-7}{4}$. **2.15.** $x+5y-7z+1=0$. **2.16.** $x+z-1=0$. **2.17.** $x+y+z-6=0$. **2.20.** $x+y-5=0$.

П.2.2. **2.21.** Необходимо, чтобы $ax_0+by_0+cz_0+d=0$. Точки A и C принадлежат прямой, а другие точки не принадлежат. **2.22.** Необходимо, чтобы $\dfrac{x_1-x_0}{m}=\dfrac{y_1-y_0}{n}=\dfrac{z_1-z_0}{k}$. **2.23.** 2) Пересекаются; 3) параллельны. **2.24.** 2) Взаимно параллельны. **2.25.** 1) Скрещивающиеся прямые. **2.26.** 2) $A(1{,}2;\ 1{,}6;\ 0{,}2)$. **2.27.** 4) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. **2.28.** 1) $z=0$; 2) $y=0$; 3) $x=0$. **2.29.** 2) $\begin{cases}x=0,\\z=0.\end{cases}$
2.30. 4) $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ -2)$. **2.31.** 3) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{3}$. **2.32.** 2) $x-y-2z-1=0$. **2.33.** 1) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.
2.35. 4) $d=-3$. **2.36.** 2) $A(-15{,}8;\ -6{,}2;\ -6{,}8)$ точка пересечения;

3) $B(2;\ 3;\ 1)$ точка пересечения. **2.37.** $13x - 8y + 2z + 37 = 0$. **2.38.** 1) $M_1\left(-\frac{25}{77};\ \frac{90}{77};\ \frac{289}{77}\right)$. **2.39.** $2x + 3y - 8 = 0$. **2.40.** 1) $3x - 2z - 3 = 0$, $3x - 2z + 9 = 0$. **2.41.** $-y + z = 2$. **2.42.** 2) $O(2;\ -1{,}5;\ 2)$. **2.43.** 2) $A(-1;\ 1;\ -2)$. **2.45.** 3) $\cos A = -\frac{1}{3}$, тогда $\angle A$ – тупой угол, т.е. ΔABC – тупоугольный.

П.2.3. **2.46.** 2) $\frac{3\sqrt{14}}{7}$. **2.47.** 4) $\frac{\sqrt{14}}{7}$. **2.48.** 1) $\frac{2}{7}\sqrt{42}$. **2.49.** 3) $\frac{1}{7}\sqrt{2730}$. **2.50.** $\frac{5\sqrt{205}}{41}$. **2.51.** $m = -\frac{14}{3}$, $d = \frac{6\sqrt{29}}{29}$. **2.52.** 1) $\frac{\sqrt{714}}{17}$. **2.53.** 1) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$; 2) $\frac{13\sqrt{11}}{11}$. **2.56.** 2) $2x + z - 1 = 0$ и $2x + z - 14 = 0$; 3) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$. **2.57.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **2.58.** $\cos A = \cos C = \frac{9\sqrt{130}}{130}$; $\cos B = \frac{8\sqrt{65}}{65}$. **2.59.** 80°; 100°. **2.60.** 9 см.

П.2.4. **2.63.** 1) $\cos\varphi = \frac{5\sqrt{646}}{646}$. **2.64.** 4) $\sin\varphi = \frac{6\sqrt{39}}{39}$. **2.65.** 3) $\cos\varphi = \frac{3\sqrt{14}}{14}$. **2.67.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{21}}{6}$. **2.68.** 1) $\begin{cases} x = 2, \\ z = -2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -z, \\ y = 0. \end{cases}$. **2.69.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2227}}{2227}$. **2.70.** $4x + 4y + z - 6 = 0$. **2.71.** 1) $M\left(-\frac{2}{3};\ -3;\ -\frac{8}{3}\right)$; 2) $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{34}}{17}$. **2.72.** 1) $\cos(\angle ABC) = -\frac{\sqrt{6}}{9}$; 2) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{10}}{30}$; 3) $\cos\omega = \frac{17}{\sqrt{298}}$. **2.73.** $x + z = 0$ и $x - z = 0$. **2.74.** $x + y + z = 0$. **2.75.** 3) $\cos(\angle ABC) = -\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Раздел 3, п.3.1. **3.7.** 1) 12π см². **3.8.** 2) 143π м². **3.11.** 16 см², 16π см². **3.12.** 13 см. **3.13.** 2) 6 см; 3) 27π см². **3.14.** $16\left(1 + \sqrt{2}\right)\pi$ см². **3.15.** $\frac{5}{\pi}$ см. **3.23.** 48 см². **3.24.** 2) $\pi : 2\sqrt{3}$. **3.26.** $2a^2\pi$. **3.27.** $h = R$. **3.28.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}ah$. **3.31.** $S_{бок} = \pi \cdot S$. **3.35.** $1 : \cos\varphi$. **3.42.** 21, 13, 7, 15 и $S = 168$.

П.3.2. **3.51.** 2) 16 м². **3.52.** 1) 3π м². **3.53.** 3) 24π м². **3.54.** 2) 10 м. **3.55.** 1) 36 см². **3.56.** 2) 256π см². **3.57.** 3) 300π см². **3.58.** 1) 30°.

3.59. 45°. **3.60.** 5 см². **3.63.** 1) $l\cos\varphi$; 2) $l\sin\varphi$. **3.64.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}h$. **3.67.** 3) $\frac{r\sqrt{4l^2-r^2}}{4}$. **3.68.** R^2. **3.69.** $\frac{128}{15\pi}$, $\frac{161}{15}$, $\frac{161}{15}$. **3.70.** 9 см², 16 см². **3.71.** $\pi\left[\left(1+\sqrt{2}\right)R^2+\left(1-\sqrt{2}\right)r^2\right]$. **3.72.** $2\pi Q$. **3.73.** $\sqrt{2}\cdot r$. **3.74.** $\frac{25}{16}\pi h^2$. **3.75.** 1) $\frac{3\sqrt{39}}{16}l^2$; 2) l^2. **3.81.** $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi Q$. **3.82.** $\cos\varphi=\frac{1}{3}$.

П.3.3. **3.86.** 2) 8π см, 16 см². **3.87.** 3) 49π мм². **3.90.** 6 м. **3.91.** 1) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=49$. **3.92.** 2) $4x-3z-125=0$. **3.93.** 3) $\sqrt{65}$. **3.96.** 5 см. **3.97.** 2) 100π м². **3.101.** 1600π см². **3.102.** 3 : 4. **3.103.** $2\pi R\cos\varphi$. **3.107.** 3) $C(-5;-2;4)$ – центр, $R=\sqrt{42}$. **3.108.** ≈113,14 км. **3.109.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$. **3.110.** 8 см. **3.111.** 1) 16; 2) 48. **3.112.** 2) $a=2\sqrt{6}R$. **3.118.** 3:4.

Раздел 4. п.4.1. **4.6.** 1) 56 м³. **4.10.** 2) 50 м³. **4.11.** 2) 25 мм³. **4.12.** 2) 28800 дм³. **4.13.** 1) 125 мм³. **4.14.** 2) 245 м³. **4.15.** 1) $\frac{112}{3}$ см³. **4.16.** 1) 336 см³. **4.17.** 2) $\frac{9250}{3}$ см³. **4.18.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **4.19.** 3) $\frac{b^3}{3}\sin2\varphi\sin\varphi$. **4.20.** 27 см³. **4.21.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **4.23.** $\frac{\sqrt{2}\cdot10^3}{3}$ см³. **4.37.** 8 : 125. **4.38.** $ad\sin\varphi\sqrt{d^2\cos^2\varphi-a^2}$. **4.39.** $\frac{4V}{\sqrt{S}}$. **4.40.** $a^2b\sin\varphi$. **4.41.** 100 см³. **4.42.** 3060 см³. **4.43.** $\frac{9}{4}R^3$. **4.44.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a\cdot S$. **4.46.** $\frac{4}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\varphi$. **4.48.** $48\sqrt{3}$ см³. **4.49.** $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$. **4.51.** 50 дней. **4.58.** $\frac{V\sqrt{S_2^3}}{\sqrt{S_2^3}-\sqrt{S_1^3}}$, $S_2>S_1$. **4.59.** $\frac{a\left(4b^2-a^2\right)}{12}$. **4.60.** $\left(\frac{1}{3}Sh;\ \frac{4}{3}Sh\right)$. **4.61.** $\frac{2}{3}R^2h$. **4.62.** $\frac{4h^3}{15}$.

4.63. $15V$.

П.4.2. **4.70.** 1) 45π м³. **4.71.** 2) 400π мм³. **4.72.** 3) 324π мм³, 972π мм³. **4.73.** 2) 175π м³. **4.74.** 1) 32π см³. **4.76.** 3) 73π м³. **4.78.** 2) $\frac{125}{3}\pi$ м³. **4.79.** 266π см³. **4.80.** 2) $\frac{17}{3}\pi$ м³. **4.81.** 3468π см³. **4.83.** $\frac{32000\sqrt{5}\pi}{81}$ см³. **4.85.** $\frac{7}{27}V$. **4.86.** $\frac{\pi^2\left(R^2+r^2\right)\left(R^2+rR+r^2\right)}{3(r+R)}$.

4.87. $\frac{1125\sqrt{3}\pi}{8}$ см³. **4.88.** $\frac{32\pi r^3}{9}$. **4.89.** ≈140 м. **4.90.** 148 т. **4.91.** $3\sqrt[3]{3}$ мм. **4.92.** $\frac{272\pi}{3}$ см³ и $\frac{1100\pi}{3}$ см³. **4.94.** 4 : 3. **4.95.** $1-\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$. **4.97.** ≈94 м. **4.98.** $\frac{\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{3}R^3$.

П.4.3. **4.100.** 171,5π см³. **4.102.** 1) 54π м³. **4.104.** 2) $\frac{130}{3}\pi$ м³. **4.107.** 2) 13824 см³, $13824\sqrt{3}$ см³. **4.114.** $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\varphi}}{12\sin\frac{\varphi}{2}}$. **4.119.** $\frac{1}{6}R^3\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\varphi\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+1\right)^2$. **4.120.** $4:((2-k)k^2)$. **4.121.** 6,25 м. **4.122.** 8 : 3. **4.124.** $8\sqrt{6}\cdot\pi$. **4.125.** $\frac{2}{3}\pi R^2h$.

Раздел 5. **5.3.** 5,1 м, 8,1 м, 5,1 м. **5.4.** m, $m\sqrt{3}$. **5.5.** $\frac{a-b}{2}$. **5.8.** $\frac{ma}{m+n}$. **5.9.** $3\sqrt{3}$ см. **5.10.** 16 см. **5.11.** $\sqrt{2b(a+b)}$, $\sqrt{2(a+b)(2a+b)}$. **5.18.** $\sqrt{10}$ см. **5.19.** 6 см. **5.30.** $\frac{ac}{a+b}$, $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{bc}{a+b}$. **5.31.** $\frac{\sqrt{a^2\sin\varphi+2ah\cos\varphi+2ah}}{\sqrt{\sin\varphi}}$. **5.32.** $h\cdot\operatorname{ctg}\varphi$. **5.33.** $\frac{ab}{a+b}$. **5.34.** $\frac{a\sin\varphi}{b+a\cos\varphi}$; $\frac{b\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}$. **5.40.** $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{(a+b)l}{2ab}$. **5.41.** 3 см. **5.42.** $4\sqrt{17}$ см. **5.43.** 12 см. **5.44.** 1; 9. **5.45.** $0{,}3\sqrt{5}$. **5.46.** $R(6{,}4;\ -2{,}8;\ 4{,}6)$. **5.47.** 60°. **5.48.** 6 м, 15 м. **5.49.** 6 дм. **5.50.** $\sqrt{28}$. **5.51.** $E(0;\ 1;\ 3)$. **5.52.** 1) $12+16\sqrt{3}$ см². **5.53.** −21. **5.54.** $\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{65}}{65}$. **5.55.** 486 см³. **5.56.** 4 дм. **5.57.** 120 см³. **5.58.** 400 см³. **5.59.** 125 м³. **5.60.** 30 см. **5.61.** $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$. **5.62.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **5.64.** 45°. **5.65.** $2\sqrt[3]{9}$ м. **5.66.** 16π см³. **5.67.** 5 м. **5.68.** $\pi:\sqrt{7}$. **5.69.** $\frac{SR^2}{R^2-r^2}$. **5.70.** 224π м³. **5.71.** $\frac{1}{\pi}\sqrt{Q_3^2-\left(Q_2-Q_1\right)^2}$. **5.72.** 4 : 1. **5.73.** πa^3. **5.74.** 6 : 1. **5.75.** 80 м³. **5.77.** $1:5\sqrt{5}$. **5.79.** $\frac{\pi}{24}\left[(a+b)^2+a^2+b^2-\left(a^2+b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\right]$. **5.80.** $\frac{48\pi}{5}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Абдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланович
Маделханов Сержан Сункарович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 11 класса общеобразовательной школы
естественно-математического направления

Редактор *А. Изтлеуова*
Художественный редактор *А. Лукманов*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Компьютерная верстка *А. Чагимкуловой*

Сдано в набор 20.04.2019. Подписано в печать 29.06.2020.
Формат $60x90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура
«Школьная». Усл. печ.л. 12,0. Учет.-изд. л. 10,19.
Тираж 5000 экз. Заказ №5174.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.

Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра», Республика Казахстан,
050002, г. Алматы, ул. М. Макатаева, 41.

Оглавление

page35
page36
page37
page38
page39
page40
page41
page42
page43
page44
page45
page46
page47
page48
page49
page50
page51
page52
page53
page54
page55
page56
page57
page58
page59
page60
page61
page62
page63

page70
page71
page72
page73
page74
page75
page76
page77
page78
page79
page80
page81
page82
page83
page84
page85
page86
page87
page88
page89
page90
page91
page92
page93
page94
page95
page96
page97
page98

page105
page106
page107
page108
page109
page110
page111
page112
page113
page114
page115
page116
page117
page118
page119
page120
page121
page122
page123
page124
page125
page126
page127
page128
page129
page130
page131
page132
page133

page140
page141
page142
page143
page144
page145
page146
page147
page148
page149
page150
page151
page152
page153
page154
page155
page156
page157
page158
page159
page160
page161
page162
page163
page164
page165
page166
page167
page168

page175
page176
page177
page178
page179
page180
page181
page182
page183
page184
page185
page186
page187
page188
page189
page190
page191
page192