Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова, С.Ш.Алибеков

УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

11 КЛАСС

для учащихся 10, 11 классов естественно-математического направления общеобразовательной школы

KELESHEK 2030
КОКШЕТАУ

УДК
ББК

Солтан Г. Н. и др.

Учимся решать задачи по стереометрии: пособие для учащихся 11 класса общеобразовательной школы. Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: ИП Келешек-2030 баспасы, 2020. – 134 с.

В пособии предлагаются решения задач из учебника «Геометрия 11 класс» (авторы Г.Н. Солтан, А.Е. Солтан, А.Ж. Жумадилова, издательство «Келешек-2030»). Оно предназначено в помощь учащимся для формирования умений решать стереометрические задачи.

ISBN

УДК
ББК

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие предназначено в помощь учащимся, испытывающим затруднения при самостоятельном решении задач по стереометрии из учебника «Геометрия 11 класс» (авторы Г.Н. Солтан, А.Е. Солтан, А.Ж. Жумадилова, издво «Келешек 2030»). Им целесообразно пользоваться после поиска решения задачи, а также для проверки правильности своего решения. Возможно, что самостоятельно найденное решение отличается от предложенного в этой книге. Тогда полезно проанализировать и сравнить различные способы, выбрать из них более рациональный.

Решение задач различными способами способствует закреплению теоретических знаний, их повторению и приобретению умений и навыков решения задач. При решении стереометрических задач надо обращать внимание на правильность построения чертежа, стремиться, чтобы изображение фигур были наглядными.

Задачи для 11 класса в основном связаны с исследованием многогранников и тел вращения, нахождением их элементов, площадей поверхностей и объемов. При решении этих задач комплексно используется изученный материал по планиметрии и стереометрии 10 класса. Особенно это проявляется при решении задач на комбинации геометрических тел. Для решения задач по стереометрии необходимо применять знания не только по геометрии, но и по алгебре и началам анализа. Поэтому решение таких задач способствует систематическому повторению всего школьного курса математики и направлено на подготовку к вступительным экзаменам в различные учебные заведения.

Надеемся, что предлагаемое пособие будет полезным для вас при изучении стереометрии.

Желаем успехов!

Авторы

15. Даны точки A (8; 0; 0), B (0; 0; 5), C (0; 7; 0), D (8; 7; 5). Найдите расстояние между прямыми: а) AB и DC; б) AC и BD.

Р е ш е н и е. Отметим данные точки в прямоугольной системе координат $Oxyz$ (рисунок 1). Это вершины прямоугольного параллелепипеда. Пары прямых AB и DC, AC и BD являются скрещивающимися и лежат в параллельных плоскостях, поэтому искомые расстояния равны расстояниям между этими плоскостями: а) 7; б) 5.

О т в е т. а) 7; б) 5.

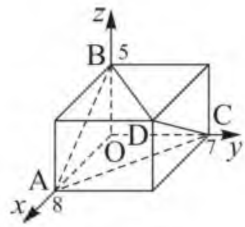


Рисунок 1

16. Дан тетраэдр $DABC$. На медиане DD_1 его грани ADB отмечена точка F так, что $DF : FD_1 = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{CF}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Р е ш е н и е. $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CD_1} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD} + \frac{2}{5} \times$

$\times \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$ (рисунок 2).

О т в е т. $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$

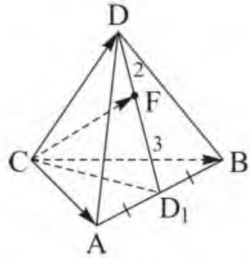


Рисунок 2

17. Основанием пирамиды является правильный треугольник. Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом α. Найдите углы наклона боковых ребер пирамиды к плоскости её основания.

Р е ш е н и е. Пусть дана пирамида $DABC$, грань ABD которой перпендикулярна основанию ABC (рисунок 3). Следовательно, эта грань содержит высоту DO пирамиды, пусть $DO = h$. Так как две другие грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то точка O – середина стороны AB. Пусть $AB = a$, тогда $OM = ON = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ (как перпендикуляры, проведенные из точки O к сторонам AC и BC равностороннего треугольника).

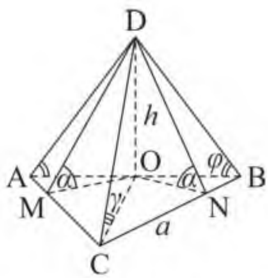


Рисунок 5

Из ΔDON найдем $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ tg α.

Боковые ребра DA и DB одинаково наклонены к плоскости основания, пусть $\angle DBO = \varphi$, тогда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h \cdot 2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\angle DBO = \angle DAO = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)$.

Угол наклона бокового ребра DC к плоскости основания – это $\angle DCO = y$. Из ΔDOC имеем: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{h}{co}$, где медиана $CO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, тогда $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}\operatorname{tg} a$, $\angle DCO = arctg\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)$.

О т в е т. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)$.

18. Основание пирамиды $SABCD$ – ромб $ABCD$ со стороной b и углом A, равным 60°. Грани SAB и SAD перпендикулярны к плоскости основания, а высота пирамиды равна b. Найдите:

а) двугранный угол, образованный плоскостями SBD и ABD;

б) расстояние от точки A до плоскости SBD.

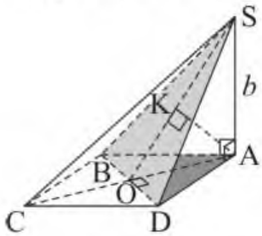


Рисунок 4

Р е ш е н и е. а) Так как грани SAB и SAD перпендикулярны к плоскости ABD, то SA – перпендикуляр, SO – наклонная к этой плоскости, AO – её проекция (O – точка пересечения диагоналей ромба). Из того, что $AO \perp BD$ следует, что $SO \perp BD$, тогда $\angle SOA$ является линейным углом двугранного угла образованного плоскостями SBD и ABD.

Из ΔSOA найдем $\operatorname{tg}\angle SOA = \frac{SA}{OA}$, где $OA = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ (как медиана равностороннего ΔABD, рисунок 4). Получим $\operatorname{tg}\angle SOA = \frac{b \cdot 2}{b\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, тогда $\angle SOA = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) Высота AK треугольника ASO перпендикулярна плоскости SBD, так как $AK \perp SO$ и $AK \perp BD$. Следовательно, расстояние от точки A до плоскости SBD равно $AK = b \cdot \sin\angle ASO$.

В ΔASO гипотенуза $SO = \sqrt{b^2 + \frac{3b^2}{4}} = \frac{b\sqrt{7}}{2}$, $\sin\angle ASO = \frac{AO}{SO} = \frac{b\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot b\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. Тогда $AK = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{b\sqrt{21}}{7}$.

О т в е т. а) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$, б) $\frac{b\sqrt{21}}{7}$.

19. Дан треугольник с вершинами в точках *A* (0; 0; 8), *B* (8; 0; 0), *C* (0; 8; 0), точка *O* – начало системы координат. Найдите сумму площадей ортогональных проекций треугольников *AOB*, *BOC*, *AOC* на плоскость треугольника *ABC*

Р е ш е н и е. Рассмотрим тетраэдр *OABC* с вершиной в точке *O* (рисунок 5). Так как $OA = OB = OC = 8$, а треугольники *OAB*, *OAC* и *OBC* – прямоугольные, то $AB = AC = BC = 8\sqrt{2}$.

Из равенства боковых ребер *OA*, *OB* и *OC* тетраэдра следует, что ортогональной проекцией его вершины *O* на плоскость *ABC* является центр окружности, описанной около ΔABC. Так как ΔABC равносторонний, то это точка *M* пересечения его медиан.

Следовательно, ортогональными проекциями треугольников *AOB*, *BOC*, *AOC* на плоскость *ABC* являются соответственно треугольники *AMB*, *BMC*, *AMC*. Сумма площадей этих треугольников равна площади равностороннего ΔABC и равна $\frac{(8\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}$.

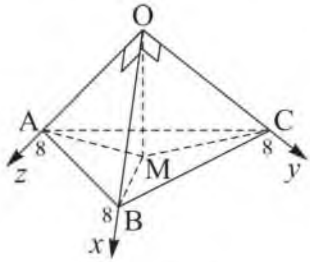


Рисунок 5

О т в е т. $32\sqrt{3}$.

20. Треугольная пирамида задана координатами своих вершин *A* (–6; 0; 2), *B* (2; 8; 2), *C* (–10; 4; 6), *D* (2; 0; 4). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO}$, если *O* – точка пересечения медиан грани *BCD* (рисунок 6).

Р е ш е н и е. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AO}$. Для этого используем формулу $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Зная координаты вершин пирамиды, найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ (8; 8; 0), $\overrightarrow{AC}$ (–4; 4; 4), $\overrightarrow{AD}$ (8; 0; 2). Запишем разложение этих векторов по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найдем их сумму: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} + 8\vec{i} + 2\vec{k} = 12\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$. Тогда $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(12\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}) = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$, то есть $\overrightarrow{AO}$ (4; 4; 2), $|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{16 + 16 + 2} = 6$.

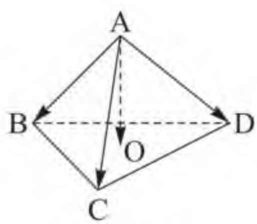


Рисунок 6

О т в е т. 6.

I. МНОГОГРАННИКИ

1. Понятие многогранника. Призма и её элементы

45. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 см, 23 см и 40 см. Найдите, с точностью до 0,1 см, расстояние между большей по площади боковой гранью и противолежащим ей боковым ребром призмы.

Решение. Пусть в наклонной призме $ABCA_1B_1C_1$ расстояния между боковыми ребрами – это длины отрезков $PM = 37$ см, $MN = 23$ см и $NP = 40$ см (рисунок 7). Большая по площади боковая грань CC_1B_1B и противоположное ребро AA_1 параллельны, поэтому расстояние между ними равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки ребра AA_1 на эту грань. Высота MH ΔMNP и является этим перпендикуляром, так как $MN \perp NP$ и $MN \perp CC_1$. Найдем её, выразив площадь ΔMNP двумя способами: $20 \cdot MH = \sqrt{50 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 27}$. Откуда $MH = \frac{3}{2}\sqrt{195} \approx 20{,}9$ (см).

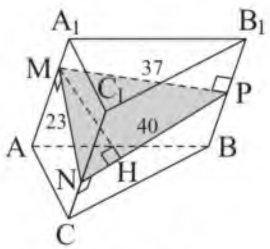


Рисунок 7

Ответ. $\approx 20{,}9$ (см).

46. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 2 дм, а её высота $\sqrt{3}$ дм. Какую наименьшую площадь может иметь сечение призмы плоскостью, проходящей через сторону одного основания и имеющей хотя бы одну общую точку с другим основанием?

Решение. Пусть сечение призмы плоскостью содержит сторону BC одного и точку D другого основания (рисунок 8). Если точка D не совпадает с точкой A_1, то сечением будет равнобедренная трапеция $BCDE$. $S_{BCDE} = \frac{BC + DE}{2} \cdot DN$, где DN – высота трапеции.

Построим $DH \perp (ABC)$, тогда из того что $DN \perp BC$ следует, что $HN \perp BC$. Отрезок HN параллелен высоте AK ΔABC. Проведем $HM \parallel CB$, $HM \cap AK = L$, тогда $HN = LK$. Треугольник AHM равносторонний, обозначим его сторону $2x$, тогда высота $AL = x\sqrt{3}$ (дм).

Так как высота $AK = \sqrt{3}$ дм, то $HN = LK = (\sqrt{3} - x\sqrt{3})$дм.

Из ΔDHN выразим $DN = \sqrt{3 + 3(1 - x)^2}$. Тогда $S_{BCDE} = (1 + x)\sqrt{3 + 3(1 - x)^2}$. Преобразуем это выражение: $S_{BCDE} = \sqrt{3(1 + x)^2 + 3(1 - x)^2(1 + x)^2} =$

$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{(1+x)^2 + (1-x^2)^2}$. После раскрытия скобок под корнем и приведения подобных слагаемых, получим: $S_{BCDE} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^4 - x^2 + 2x + 2}$, где $0 \le 2x \le 2$, $0 \le x \le 1$.

Исследуем функцию $f(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2$ на наименьшее значение.

$f'(x) = 4x^3 - 2x + 2$; $f'(x) = 0$; $2x^3 - x + 1 = 0$; разложим на множители левую часть этого уравнения: $(x^3 + 1) + (x^3 - x) = (x + 1) \times (x^2 - x + 1 + x(x - 1)) = (x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$.

Тогда $(x + 1)(2x^2 - 2x + 1) = 0$, если $x = -1$; $2x^2 - 2x + 1 > 0$ при любых значениях x.

На промежутке [0; 1] функция $f(x)$ возрастает, поэтому наименьшее значение она принимает при $x = 0$. При этом значении x сечением будет ΔBCA_1, $S_{\Delta BCA_1} = \sqrt{6}$ дм^2.

Ответ. $\sqrt{6}$ дм^2.

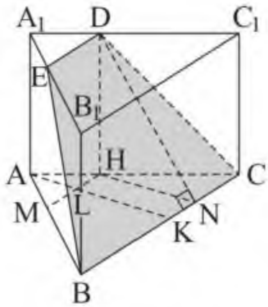


Рисунок 8

47. Сторона основания и высота правильной четырехугольной призмы равны a и h соответственно. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и наклонённую к нему под углом α (α – переменная величина).

Решение. Пусть сечение содержит сторону DC нижнего основания. Плоскость сечения может пересекать верхнее основание или боковую грань призмы (рисунок 9). В любом случае в сечении получится прямоугольник, так как данная призма прямая и её основание квадрат.

Если сечение прямоугольник $MDCN$, то $S_{MDCN} = a \cdot DM$. Из ΔDMH, где $MH \parallel DD_1$, найдем $DM = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Тогда $S_{MDCN} = \dfrac{ah}{\sin\alpha}$, где $0° < \alpha < 90°$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{HD} > \dfrac{h}{a}$.

Если сечение прямоугольник $KDCL$, то $S_{KDCL} = a \cdot DK$. Из ΔDAK найдем $DK = \dfrac{a}{\cos\alpha}$. Тогда $S_{KDCL} = \dfrac{a^2}{\cos\alpha}$, где $0° < \alpha < 90°$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{KA}{a} \le \dfrac{h}{a}$.

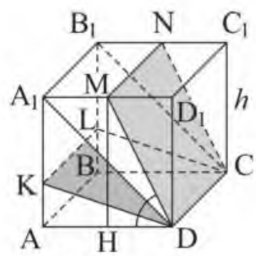


Рисунок 9

Ответ. $0° < \alpha < 90°$, $\dfrac{a^2}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha \le \dfrac{h}{a}$; $\dfrac{ah}{\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha > \dfrac{h}{a}$.

2. Площадь поверхности призмы

61. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости основания под углом $60°$, а ортогональной проекцией вершины B_1 является точка пересечения медиан ΔABC. Найдайте площадь боковой поверхности призмы.

Р е ш е н и е. Пусть O – точка пересечения медиан ΔABC, тогда B_1O – высота призмы (рисунок 10). Так как ΔABC – равнобедренный, то точка O принадлежит его биссектрисе BH, следовательно она равноудалена от сторон AB и BC. То есть $OK = OL$, а это проекции наклонных B_1K и B_1L, значит $B_1K = B_1L$. Поэтому площади граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны.

Так как AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым BH и B_1O, то $AC \perp (BB_1O)$. Следовательно $AC \perp BB_1$ и $AC \perp AA_1$, значит грань AA_1C_1C – прямоугольник. Получили, что $S_{бок.} = 2 \cdot AB \cdot B_1K + AC \cdot AA_1$. Найдем искомую величину.

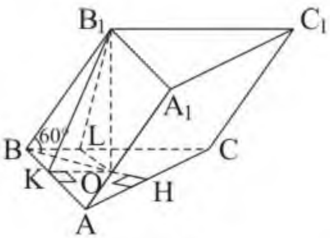


Рисунок 10

1) В ΔABC высота $BH = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$, $BO = \frac{2}{3} \cdot BH = 8$.

2) В прямоугольном ΔBB_1O катет $B_1O = BO \cdot \text{tg } 60° = 8\sqrt{3}$, гипотенуза $BB_1 = \frac{8}{\cos 60°} = 16$. Боковые ребра призмы равны, поэтому $AA_1 = BB_1 = 16$.

3) В ΔABH $\sin \angle B = 0{,}8$, а в ΔBKO $KO = BO \cdot \sin \angle B = 6{,}4$.

4) В прямоугольном ΔKB_1O гипотенуза $B_1K = 1{,}6\sqrt{91}$.

5) $S_{бок.} = 2 \cdot 20 \cdot 1{,}6\sqrt{91} + 32 \cdot 16 = (64\sqrt{91} + 512)$.

О т в е т. $(64\sqrt{91} + 512)$ см^2.

62. Гараж, сделанный из листового металла, имеет форму поверхности прямой пятиугольной призмы $ABMCDA_1B_1M_1C_1D_1$ (рисунок 11). Его основанием является боковая грань AA_1D_1D, $AB = AD = 3$ м, $DD_1 = 4$ м, $\angle MBC = \angle MCB = 15°$. Сколько листов металла размером 1×2 м израсходовано на изготовление гаража (без учета его основания), если на швы ушло 8 % от площади его поверхности?

Р е ш е н и е. 1) $2(S_{ABCD} + S_{DCC_1D_1}) = 2(9 + 12) = 42$(м^2).

2) В ΔBMC $\angle BMC = 150°$, $BM = MC = x$ м. По теореме косинусов $9 = 2x^2 - 2x^2 \cos 150°$, $9 = x^2(2 + \sqrt{3})$; откуда $x = \frac{3}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

3) $2S_{BMC} = x^2 \sin 150° = \dfrac{9}{2(2+\sqrt{3})}$.

4) $2S_{CMM_1C_1} = \dfrac{24}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

5) $S_{\text{пов.}} = 42 + \dfrac{9}{2(2+\sqrt{3})} + \dfrac{24}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \approx 42 +$

$+ \dfrac{9}{7,46} + \dfrac{24}{1,93} \approx 55,6(\text{м}^2)$.

6) $55,6 + 0,08 \cdot 55,6 \approx 60(\text{м}^2)$. Площадь одного листа 2м^2. $60 : 2 = 30$ (листов).

О т в е т. 30 листов.

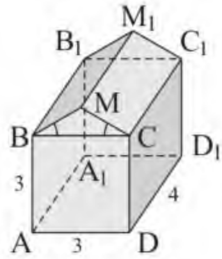


Рисунок 11

3. Пирамида и её элементы. Площадь поверхности пирамиды

86. Палатка имеет форму пирамиды $PABCD$ с основанием – прямоугольником $ABCD$, причем $AB = 2$м, $BC = 2{,}5$ м (рисунок 12). Её ребро PB, равное 2 м, перпендикулярно основанию. Найдите, с точностью до 0,1 $м^2$, сколько квадратных метров брезента израсходовано на изготовление этой палатки, если на швы уходит 2% площади её боковой поверхности.

Р е ш е н и е. Боковая поверхность данной пирамиды состоит из четырех прямоугольных треугольников: ΔAPB с катетами, равными 2 м; ΔBPC, катеты которого равны 2 м и 2,5 м; ΔCPD с катетами, равными 2 м и $0{,}5\sqrt{41}$ м; ΔAPD, катеты которого равны 2,5 м и $2\sqrt{2}$ м.

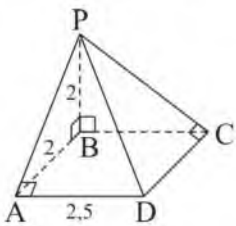


Рисунок 12

Тогда $S_{бок.} = 2 + 2{,}5 + 0{,}5\sqrt{41} + 2{,}5\sqrt{2} \approx$ $\approx 11{,}24(м^2)$.

На швы уходит $11{,}24 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}22(м^2)$. $S_{осн.} = 5$ $м^2$. Тогда на изготовление палатки потребуется $\approx 16{,}5 м^2$ брезента.

О т в е т. $16{,}5м^2$.

87. В треугольной пирамиде $PABC$ ребро PC является её высотой, $AC =$ $= 17$ см, $BC = m$ см, угол PBC вдвое больше угла PAC. Найдите высоту пирамиды и все допустимые значения переменной m.

Р е ш е н и е. Обозначим $\angle PAC = \alpha$, тогда $\angle PBC = 2\alpha$ (рисунок 13). Выразим PC из прямоугольных треугольников ACP и BCP:

$PC = 17 \cdot \operatorname{tg}\alpha = m \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$. Отсюда $17 \cdot \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m \cdot 2tga}{1 - tg^2 a}$,

$17 - 17\operatorname{tg}^2\alpha = 2m$, $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{17 - 2m}{17}$, где $17 - 2m > 0$,

$0 < m < 8{,}5$.

$PC = 17 \cdot \sqrt{\dfrac{17 - 2m}{17}} = \sqrt{17 \cdot (17 - 2m)}$ (см).

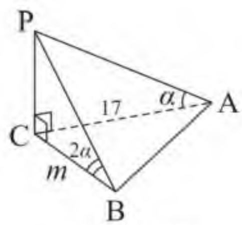


Рисунок 13

О т в е т. $\sqrt{17 \cdot (17 - 2m)}$ (см), $0 < m < 8{,}5$.

88. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна a, а острый угол β. Известно, что две боковые грани пирамиды, угол между которыми равен β, перпендикулярны её основанию, а одна из двух других наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Решение. Пусть в данной пирамиде $PABCD$ $(PBC) \perp (ABC)$, $(PCD) \perp (ABC)$, $\angle PKC = \angle((PDA), (ABC)) = \varphi$ (рисунок 14, а). Тогда $\angle((PBA), (ABC)) = \varphi$.

Так как $\Delta PCD = \Delta PCB$, то $S_{бок.} = 2(S_{\Delta PCD} + S_{\Delta PAD}) = 2(0{,}5a \cdot PC + 0{,}5a \cdot PK) = a \cdot (PC + PK)$.

Сумму $PC + PK$ найдем так. В прямоугольном ΔPCK продлим катет CP на отрезок PN, равный PK (рисунок 14, б). Используя свойство внешнего угла CPK треугольника NPK, установим, что $\angle PNK = 45° - \frac{\varphi}{2}$. Тогда $PC + PK = CN = CK \cdot \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$.

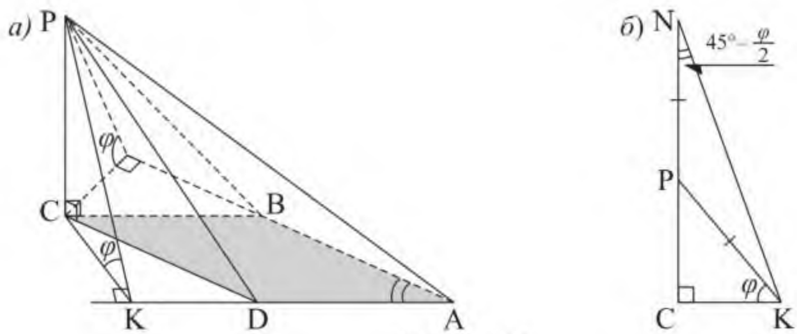


Рисунок 14

В ΔCKD $\angle CDK = \beta$, $CK = a \cdot \sin\beta$, следовательно $PC + PK = a \cdot \sin\beta \times \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$, а искомая площадь равна $a^2 \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$.

Ответ. $a^2 \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$.

89. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна c, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Через сторону основания проведена плоскость, образующая с ним угол β $(\beta < \alpha)$. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Решение. Рассмотрим ортогональную проекцию сечения $ABKP$ на плоскость основания (рисунок 15). Проекция – равнобедренная трапеция $ABTO$, диагонали которой AT и BO перпендикулярны, так как лежат на диагоналях квадрата $ABCD$.

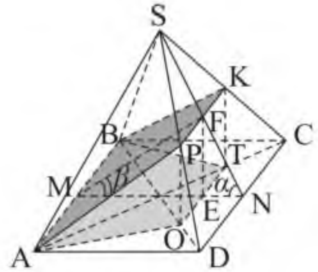


Рисунок 15

Площадь равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями равна квадрату её высоты. На основании зависимости между площадью многоугольника и площадью его ортогональной проекции на данную плоскость имеем: $S_{ABKP} = \dfrac{S_{ABTO}}{\cos\beta} = \dfrac{ME^2}{\cos\beta}$.

В ΔMFE катет $ME = MF \cdot \cos\beta$.

Из ΔMNF по теореме синусов имеем: $\dfrac{MF}{\sin\alpha} = \dfrac{MN}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}$, отсюда $MF = \dfrac{c \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Тогда $ME = \dfrac{c \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, а искомая площадь $S_{ABKP} = \dfrac{c^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$.

О т в е т. $\dfrac{c^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$.

4. Усеченная пирамида. Площадь поверхности усеченной пирамиды

116. Нижним основанием усеченной пирамиды является трапеция, параллельные стороны которой равны b и $2b$, а один из острых углов $60°$. Высота усеченной пирамиды равна $0{,}25b$, а её боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площади её оснований относятся как $1 : 4$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим полную пирамиду $PABCD$ (рисунок 16). Так как боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости ABC, то основанием её высоты PO является центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$, следовательно, она равнобедренная. Учитывая, что в этой трапеции $\angle A = \angle D = 60°$, получаем: $AB = BC = CD = DO = b$.

Основания усеченной пирамиды – подобные трапеции с коэффициентом подобия k, отношение их площадей равно k^2. По условию $k^2 = \frac{1}{4}$, следовательно, $k = \frac{1}{2}$. Значит $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1O_1 = \frac{b}{2}$.

Так как $\Delta APB = \Delta BPC = \Delta CPD$, то в данной усеченной пирамиде три боковые грани равны, поэтому площадь её боковой поверхности равна:

$S_{AA_1D_1D} + 3S_{CC_1D_1D} = \frac{2b+b}{2} \cdot \frac{b}{4} + 3 \cdot \frac{b + \frac{b}{2}}{2} \cdot N_1N = \frac{3b^2}{8} + \frac{9b}{4} \cdot N_1N$, где N_1N – высота боковой грани.

Отрезок N_1N найдем из ΔN_1NH, в котором $N_1H = O_1O = \frac{b}{4}$, $HN = ON - O_1N_1 =$

$= \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{\frac{b}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{4}$.

Тогда $N_1N = \sqrt{\frac{b^2}{16} + \frac{3b^2}{16}} = \frac{b}{2}$. Следовательно, $S_{бок} = \frac{3b^2}{8} + \frac{9b}{4} \cdot \frac{b}{2} = \frac{12b^2}{8} = \frac{3b^2}{2}$

О т в е т. $\frac{3b^2}{2}$

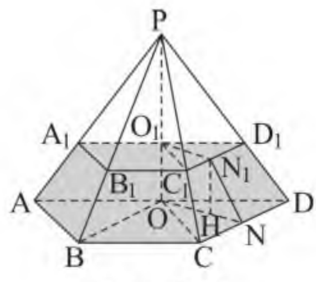


Рисунок 16

117. Каждая сторона нижнего основания усеченной треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ равна 1 дм, а её двугранные углы при этих сторонах относятся как 1 : 2 : 2. Найдите, с точностью до 1°, меньший из этих углов, если расстояние от основания высоты полной пирамиды $PABC$ до стороны BC равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$ дм.

Р е ш е н и е. Достроим данную усеченную пирамиду до пирамиды $PABC$ и проведем её высоту PO (рисунок 17). Из точки O проведем перпендикуляры OM, ON, OK к сторонам BC, AB, AC основания соответственно. Тогда углы PMO, PNO, PKO являются линейными углами двугранных углов при сторонах основания данной пирамиды. Пусть $\angle PMO = \alpha$, тогда $\angle PNO = \angle PKO = 2\alpha$.

Из равенства прямоугольных треугольников POK и PON следует, что $ON = OK$. Получили, что точка O равноудалена от сторон угла BAC, следовательно она принадлежит биссектрисе угла BAC, то есть $O \in AM$.

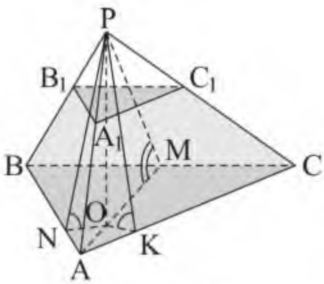


Рисунок 17

В ΔAOK $\angle K = 90°$, катет $OK = AO \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{12}$ (дм).

Выразим высоту PO из треугольников POM и POK: $PO = OM \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = OK \cdot \mathrm{tg}\,2\alpha$.

Решая уравнение $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \mathrm{tg}\,2\alpha$, получим: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{4(1 - tg^2\,\alpha)}$, $\mathrm{tg}^2\alpha = 0{,}5$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$, $\alpha \approx 35°$.

О т в е т. $\approx 35°$.

118. а) Известно, что в основание четырехугольной усеченной пирамиды можно вписать окружность, а каждая её боковая грань наклонена к нему под углом 75°. Найдите площадь боковой поверхности этой усеченной пирамиды, если её высота равна h, а суммы двух соседних сторон нижнего и верхнего оснований соответственно равны p и q.

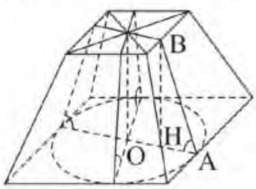


Рисунок 18

Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что основания данной усеченной пирамиды – ромбы со сторонами $\frac{p}{2}$ и $\frac{q}{2}$ и все её боковые грани равны (рисунок 18). Следовательно, площадь её боковой поверхности равна $(p + q) \cdot AB$, где AB высота боковой грани.

Из ΔABH, в котором $\angle H = 90°$, $\angle A = 75°$, $BH = h$, найдем $AB = \frac{h}{\sin 75°}$.

Так как $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, то $AB = = \frac{4h}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = h(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Тогда $S_{бок.} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot h \cdot (p + q)$.

О т в е т. $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot h \cdot (p + q)$.

118. б) Основаниями четырехугольной усеченной пирамиды являются ромбы, меньшие диагонали которых равны m и n, а острые углы – 45°. Найдите площадь её поверхности, если каждая боковая грань наклонена к нижнему основанию под углом 60°.

Р е ш е н и е. Так как каждая боковая грань данной усеченной пирамиды одинаково наклонена к плоскости основания, то все её боковые грани равны (рисунок 19). Пусть стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b, а высота боковой грани – N_1N, тогда площадь поверхности этой усеченной пирамиды равна $a^2 \cdot \sin45° + b^2 \cdot \sin45° + (2a + 2b) \cdot N_1N$.

ΔABD: $m^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos45°$, $m^2 = a^2(2 - \sqrt{2})$, отсюда $a^2 = \frac{m^2}{2-\sqrt{2}}$

$\Delta A_1B_1D_1$: $n^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cdot \cos45°$, $n^2 = b^2(2 - \sqrt{2})$, отсюда $b^2 = \frac{n^2}{2-\sqrt{2}}$.

Высоты нижнего основания $h_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

и верхнего основания $h_2 = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

В ΔFN_1N $\angle F = 90°$, $\angle N = 60°$,

$FN = ON - OF = \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{4}$.

Тогда $N_1N = 2FN = \frac{(a-b)}{\sqrt{2}}$.

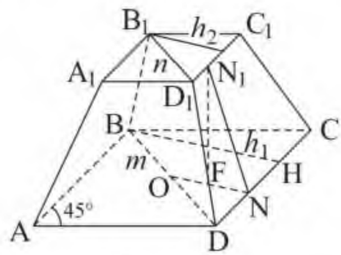


Рисунок 19

$S_{бок.} = 2(a + b)\frac{(a-b)}{\sqrt{2}}$;

$S_{п.п.} = \frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{b^2}{\sqrt{2}} + 2(a + b)\frac{(a-b)}{\sqrt{2}} = \frac{m^2+n^2}{2(\sqrt{2}-1)} + \frac{2m^2-2n^2}{2(\sqrt{2}-1)} = = \frac{3m^2-n^2}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{(3m^2-n^2)(\sqrt{2}+1)}{2}$.

О т в е т. $(\sqrt{2} + 1)(1{,}5m^2 - 0{,}5n^2)$.

5. Многогранный угол и его свойства

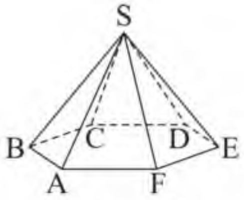


Рисунок 20

119. Дана шестиугольная пирамида.

а) Сколько многогранных углов при её вершинах?

б) Имеются ли: 1) трехгранные; 2) четырехгранные; 3) шестигранные углы при её вершинах, если имеются, то сколько их?

Р е ш е н и е. а) Семь (рисунок 20).б) 1) Имеются, 6; 2) нет; 3) имеется, 1.

120. Существует ли трехгранный угол, имеющий следующие плоские углы: а) 130°, 85°, 36°; б) 100°, 70°, 40°; в) 160°, 130°, 80°; г) 82°, 56°, 26°; д) 150°, 120°, 90°?

Р е ш е н и е. Чтобы трехгранный угол существовал, должны выполняться условия: 1) сумма двух плоских его углов должна быть больше третьего плоского угла; 2) сумма всех плоских углов должна быть меньше 360°.

В заданиях а) и г) не выполняется условие 1): $85° + 36° = 121° < 130°$; $82° + 56° + 26° = 82°$.

В заданиях в) и д) не выполняется условие 2): $160° + 130° + 80° = 370°$; $150° + 120° + 90° = 360°$.

О т в е т. Существует только в случае б); в случаях а), в), г), д) – не существует.

122. В трехгранном угле двугранные углы при его ребрах равны φ,δ,ω. Выберите верное утверждение: а) $\varphi + \delta + \omega = 180°$; б) $\varphi+ \delta+ \omega > 180°$; в) $\varphi + \delta + \omega < 360°$.

Р е ш е н и е. В задаче 2 этого пункта доказано, что сумма двугранных углов трехгранного угла больше 180°. Следовательно, верное утверждение б)

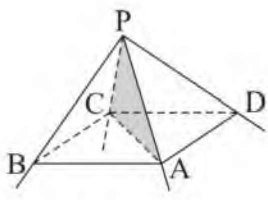


Рисунок 21

123. Докажите, что в четырехгранном угле любой плоский угол меньше суммы всех остальных его плоских углов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан четырехгранный угол $PABCD$, в котором, например, плоский угол APD наибольший. Докажем, что $\angle APD < \angle APB + \angle BPC + \angle CPD$.

Разделим данный четырехгранный угол на два трехгранных, построив сечение APC. Для плоских углов полученных трехгранных углов выполняются неравенства: $\angle APD < \angle APC + \angle DPC$, $\angle APC < \angle APB + \angle BPC$.

Сложив левые и правые части этих неравенств, получим:

$\angle APD + \angle APC < \angle APC + \angle DPC + \angle APB + \angle BPC$, $\angle APD < \angle DPC + \angle APB + \angle BPC$.

То есть наибольший плоский угол меньше суммы остальных плоских углов четырехгранного угла. Что и требовалось доказать.

124. В трехгранном угле $PABC$ двугранный угол при ребре PC – прямой, двугранный угол при ребре PB равен 45°, а плоский угол APB равен 60° (рисунок 22). Найдите два других плоских угла.

Р е ш е н и е. Так как двугранный угол при ребре PC – прямой, то перпендикуляр AC к ребру PC является и перпендикуляром к плоскости BPC, AB – наклонная, CB – её проекция на эту плоскость. Из того, что наклонная $AB \perp PB$ следует, что её проекция $CB \perp PB$.

Следовательно, ABC – линейный угол двугранного угла при ребре PB. Получили, что в ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle B = \angle A = 45°$. Пусть $AC = BC = a$, тогда $AB = a\sqrt{2}$.

В ΔABP $\angle B = 90°$, $\angle P = 60°$, тогда $PB = \dfrac{AB}{tg\,60°} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

В ΔCBP $\angle B = 90°$, $BC = a$, $PB = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, тогда $\operatorname{tg} \angle CPB = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

В ΔACP $\angle C = 90°$, $AC = a$, $PA = 2PB = \dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, тогда $\sin \angle APC = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

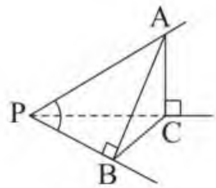


Рисунок 22

О т в е т. $\arcsin \dfrac{\sqrt{6}}{4}$; $\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

125. Дан трехгранный угол $PABC$, в котором плоские углы APB и APC равны. Используя рисунок 23, докажите, что и двугранные углы при ребрах PB и PC равны.

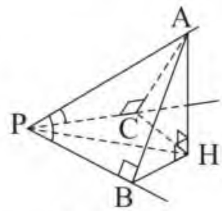


Рисунок 23

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как плоские углы APB и APC равны, то основание H перпендикуляра AH на плоскость CPB лежит на биссектрисе угла PB. Точки биссектрисы угла одинаково удалены от его сторон, поэтому $CH = BH$. Следовательно, равны треугольники ACH и ABH и их углы ACH и ABH, которые являются линейными углами двугранных углов при ребрах PB и PC.

126. а) В трехгранном угле $PABC$ все плоские углы равны по 60°. Найдите двугранные углы при его ребрах PB и PC.

Решение. Используем рисунок 23. Пусть $PB = PC = a$, тогда $AB = AC = a \cdot \operatorname{tg} 60° = a\sqrt{3}$, $BH = CH = a \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Углы ACH и ABH являются линейными углами двугранных углов при ребрах PB и PC и они равны. Из ΔABH находим: $\cos\angle ABH = \frac{a}{\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\arccos \frac{1}{3}$.

126. б) В трехгранном угле $PABC$ двугранные углы при его ребрах PB и PC равны по 60°, а плоский угол CPB равен 120°. Найдите два других его плоских угла.

Решение. Из равенства двугранных углов при ребрах PB и PC следует равенство прямоугольных треугольников ABH и ACH (рисунок 23). Следовательно, равны и отрезки BH и CH, значит, точка H принадлежит биссектрисе угла CPB.

Из равенства прямоугольных треугольников CPH и BPH следует равенство отрезков CP и BP. Прямоугольные треугольники APC и APB равны по двум катетам, следовательно, равны и плоские углы APC и APB.

В ΔABH $\angle H = 90°$, $\angle B = 60°$, обозначим BH = a, тогда AB = 2a.

В ΔBPH $\angle B = 90°$, $\angle P = 60°$, $PB = BH \cdot \operatorname{ctg} 60° = \frac{a}{\sqrt{3}}$

В ΔABP $\angle \mathrm{B} = 90°$, $\operatorname{tg} \angle P = \frac{AB}{PB} = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{a} = 2\sqrt{3}$.

Ответ. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$.

128. В пирамиде $DABC$ все плоские углы при вершине A – прямые. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если DA = 12 см, DB = 20 см, DC = 15 см.

Решение. Площадь поверхности данной пирамиды равна сумме площадей всех её граней. Три грани с общей вершиной A – это прямоугольные треугольники с катетами AD = 12 см, $AB = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (см), $AC = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ (см) (рисунок 24). Сумма их площадей равна $\frac{1}{2} \cdot (12 \cdot 16 + 12 \cdot 9 + 16 \cdot 9) = 222$ (см^2).

Для нахождения площади грани BCD найдем сторону $BC = \sqrt{16^2 + 9^2} = \sqrt{337}$ (см) и высоту $DK = \sqrt{12^2 + AK^2}$, где AK – высота ΔABC. Найдем её, используя его площадь: $72 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{337} \cdot AK$,

$AK = \frac{144}{\sqrt{337}}$ (см). Тогда $DK = \sqrt{144 + \frac{20736}{337}} =$

$= \sqrt{\frac{69264}{337}} = \frac{12\sqrt{481}}{\sqrt{337}}$ (см).

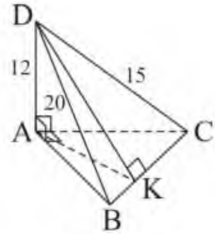


Рисунок 24

$S_{\Delta BCD} = \frac{\sqrt{337} \cdot 12\sqrt{481}}{2 \cdot \sqrt{337}} = 6\sqrt{481}$ (см^2). Тогда площадь поверхности данной пирамиды равна $(222 + 6\sqrt{481})$см^2.

Ответ. $(222 + 6\sqrt{481})$см^2.

129. В треугольной пирамиде $SABC$ $\angle ASB = \angle CSB = 90°$, $\angle ASC = 120°$, $AS = 4$ дм, $SB = 3$ дм, $SC = 2$ дм. Найдите площадь ΔABC.

Решение. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$, где BH – высота ΔABC.

Из ΔASC найдем $AC = \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 8 \cdot \cos 120°} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ (дм).

Выразив площадь ΔASC двумя способами, найдем его высоту SH.

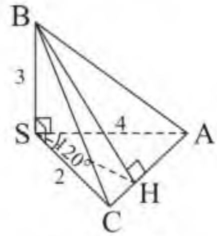


Рисунок 25

$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot SH$, $SH = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ дм.

Тогда $BH = \sqrt{9 + \frac{12}{7}} = \sqrt{\frac{75}{7}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ (дм) и

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 5\sqrt{3}$ (дм^2).

Ответ. $5\sqrt{3}$ дм^2.

130. В трехгранном угле $OABC$ плоский угол BOC равен γ ($\gamma < 90°$), двугранный угол при ребре OC прямой, двугранный угол при ребре OB равен φ ($\varphi < 90°$). Докажите, что: а) $\operatorname{tg} \angle AOB = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi}$; б) $\operatorname{tg} \angle AOC = \sin\gamma \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

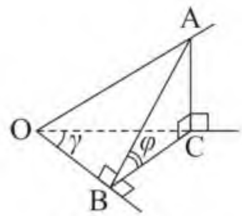


Рисунок 26

Доказательство. а) $\operatorname{tg} \angle AOB = \frac{AB}{OB}$ (рисунок 26).

Пусть $BC = a$, тогда $AB = \frac{a}{\cos\varphi}$, $OB = \frac{a}{\operatorname{tg}\gamma}$, $\operatorname{tg} \angle AOB = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi}$.

б) $\operatorname{tg} \angle AOC = \frac{AC}{OC}$ (рисунок 26). Так как $AC = a \cdot \operatorname{tg} \varphi$, $OC = \frac{a}{\sin \gamma}$, то $\operatorname{tg} \angle AOC = \sin \gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Что и требовалось доказать.

131. Найдите двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды, если сторона её основания и высота пирамиды соответственно равны a и $2a$.

Р е ш е н и е. Пусть дана правильная пирамида $DABC$. Её основание – равносторонний ΔABC со стороной, равной a. Высота этой пирамиды $DO = 2a$ (рисунок 27). Боковые грани этой пирамиды равные равнобедренные треугольники.

Построим линейный угол двугранного угла при ребре BD. Для этого проведем высоты AK и CK в боковых гранях пирамиды. Тогда $\angle AKC$ – искомый.

ΔAKC – равнобедренный, KH – его медиана, высота и биссектриса. Найдем $\sin \frac{\angle AKC}{2} = \frac{CH}{CK}$. Отрезок CK найдем из равенства $DH \cdot AC = DB \cdot CK$.

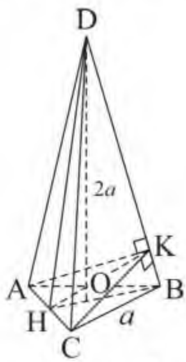


Рисунок 27

В ΔABC отрезок $OH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Тогда $DH = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{147}}{6} = \frac{7a\sqrt{3}}{6}$.

Ребро $DB = DC = \sqrt{DH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{147a^2}{36} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{156}}{6}$. Следовательно, $CK = \frac{7a^2\sqrt{3} \cdot 6}{6 \cdot a\sqrt{156}} = \overrightarrow{AO}$.

Тогда $\sin \frac{\angle AKC}{2} = \frac{a \cdot 2\sqrt{13}}{2 \cdot 7a} = \frac{\sqrt{13}}{7}$, а $\angle AKC = 2\arcsin \frac{\sqrt{13}}{7}$.

О т в е т. $2\arcsin \frac{\sqrt{13}}{7}$.

133. Найдите плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды, если он равен углу наклона бокового ребра к плоскости основания.

Р е ш е н и е. В правильной шестиугольной пирамиде основание – правильный шестиугольник, и все боковые ребра равны (рисунок 28). Пусть сторона основания равна a, $\angle SAO = \varphi = \angle BSC$.

Из ΔSBH выразим $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{BH}{SB}$. Из ΔASO, в котором $AO = a$, найдем $AS = \frac{a}{\cos\varphi} = SB$. Тогда $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a\cdot\cos\varphi}{2\cdot a} = \frac{\cos\varphi}{2}$ Решим тригонометрическое уравнение $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\cos\varphi$.

Используя формулу косинуса двойного угла, получим: $\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = 0$ или $2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2} - 1 = 0$. Решив это квадратное уравнение, найдем $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Следовательно, $\varphi = 2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

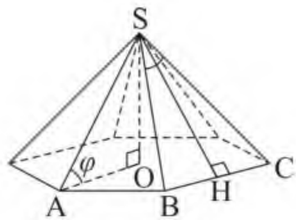


Рисунок 28

О т в е т. $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

6. Правильные многогранники

151. Докажите, что разверткой боковой поверхности правильного тетраэдра может быть трапеция.

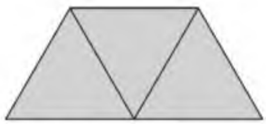


Рисунок 29

Р е ш е н и е. У правильного тетраэдра все грани равные равносторонние треугольники. Развертка его боковой поверхности состоит из трех таких треугольников, из которых может быть составлена равнобедренная трапеция (рисунок 29).

152. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку пересечения его диагоналей и перпендикулярной одной из них. Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно a.

Р е ш е н и е. Вначале докажем, что диагональ B_1D перпендикулярна плоскости AD_1C.

1) $B_1B \perp (ABC)$, B_1D – наклонная, BD – её проекция на эту плоскость. Так как $BD \perp AC$, то и $B_1D \perp AC$ (рисунок 30, а).

2) $B_1C_1 \perp (D_1C_1C)$, B_1D – наклонная, DC_1 – её проекция на эту плоскость. Так как $DC_1 \perp D_1C$, то и $B_1D \perp D_1C$.

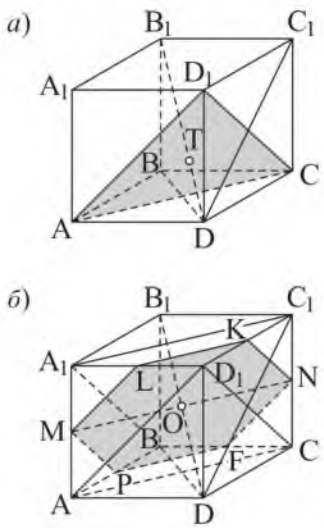


Рисунок 30

3) Так как диагональ B_1D перпендикулярна двум прямым AC и D_1C плоскости AD_1C, то она перпендикулярна этой плоскости. Следовательно, для построения искомого сечения достаточно построить плоскость, проходящую через точку O пересечения диагоналей и параллельную плоскости AD_1C.

4) В плоскости AA_1C_1C через точку O проводим прямую $MN \parallel AC$, M и N – середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно (рисунок 30, б).

5) В грани DD_1C_1C строим отрезок $NK \parallel D_1C$, K – середина ребра D_1C_1. В грани AA_1D_1D строим отрезок $ML \parallel AD_1$, L середина ребра A_1D_1. В грани $A_1B_1C_1D_1$ проводим отрезок KL.

6) Так как $D_1C \parallel A_1B$, то в грани AA_1B_1B строим отрезок $MP \parallel A_1B$, P – середина ребра AB. В грани $ABCD$ строим отрезок $PF \parallel AC$, F – середина ребра BC. В грани BB_1C_1C проводим отрезок FN. Шестиугольник $MLKNFP$ – сечение куба плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей и перпендикулярной диагонали B_1D.

7) Построенный шестиугольник – правильный, каждая его сторона равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, его площадь равна $6 \cdot \frac{2a^2\sqrt{3}}{4 \cdot 4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ответ. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

153. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром, равным a. Его сечение плоскостью, параллельной двум его ребрам, лежащим на скрещивающихся прямых, является квадратом $MNKL$. Найдите площадь поверхности пирамиды $PMNKL$.

Решение. Пусть указанное сечение параллельно ребрам AP и CB, они перпендикулярны. Так как отрезки MN и ML равны, то они являются средними линиями соответствующих треугольников и равны $\frac{a}{2}$ (рисунок 31).

$S_{MNKL} = \frac{a^2}{4}$, $S_{\Delta PNK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

$S_{\Delta MPN} = S_{\Delta LPK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin 30° =$
$= \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

$S_{\Delta MPL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{4} = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$, где $\frac{a\sqrt{11}}{4}$ – высота ΔMPL.

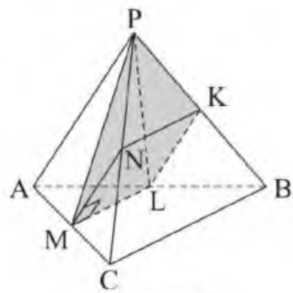


Рисунок 31

Площадь поверхности пирамиды $PMNKL$ равна сумме: $\frac{a^2}{4} + 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{11}}{16} = \frac{a^2}{16}(4 + 3\sqrt{3} + \sqrt{11})$.

Ответ. $\frac{a^2}{16}(4 + 3\sqrt{3} + \sqrt{11})$.

158. Докажите, что центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба (рисунок 32, б). Найдите площадь поверхности этого куба, если ребро правильного октаэдра равно b.

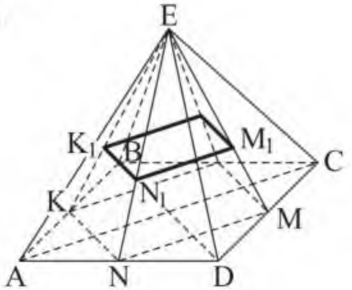
Решение. У правильного октаэдра диагональные сечения $ABCD$ и $DEBF$ являются квадратами, а его грани правильные треугольники. Пусть M_1, N_1, K_1 – центры его граней (рисунок 32, а).

Тогда $M_1N_1 \parallel MN$ и $M_1N_1 = \frac{2}{3}MN$, где MN – средняя линия ΔADC. Следовательно, $M_1N_1 \parallel AC$ и $M_1N_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{3}$.

Аналогично, $K_1N_1 \parallel KN$ и $K_1N_1 = \frac{2}{3}\ KN$, где KN – средняя линия ΔABD. Следовательно, $K_1N_1 \parallel BD$ и $K_1N_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{3}$.

Так как $AC \perp BD$, то параллельные им отрезки также перпендикулярны, то есть $M_1N_1 \perp K_1N_1$. Следовательно, верхняя и параллельная и равная ей нижняя грань вписанного в октаэдр параллелепипеда – квадраты.

Аналогично доказывается, что и боковые грани этого параллелепипеда являются квадратами. Например, боковое ребро $N_1N_2 \parallel TP$ и $N_1N_2 = \frac{2}{3}\ TP$, где TP – средняя линия ΔDEF (рисунок 32, б). Следовательно, $N_1N_2 \parallel EF$ и $N_1N_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{3}$.



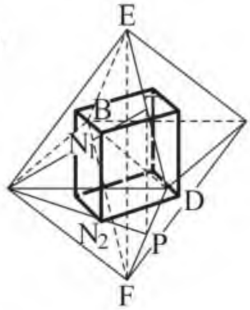


Рисунок 32

Так как $EF \perp BD$, то $N_1N_2 \perp K_1N_1$. Таким образом, каждая боковая грань этого параллелепипеда – квадрат, а сам параллелепипед – это куб.

Так как ребро куба равно $\frac{b\sqrt{2}}{3}$, то площадь его поверхности равна $6 \cdot \left(\frac{b\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4b^2}{3}$.

О т в е т. $\frac{4b^2}{3}$.

159. Для правильного октаэдра $EABCDF$ докажите, что отрезок, соединяющий центры граней BCE и ADF, перпендикулярен плоскостям этих граней и найдите расстояние между ними.

Р е ш е н и е. Пусть точки H и K – центры граней BCE и ADF данного октаэдра (рисунок 33). Отрезок HK пересекает диагональ EF в её середине O.

Рассмотрим пирамиды $OBCE$ и $OADF$. Так как их ребра OB, OC, OE и OA, OD, OF равны как половины равных диагоналей октаэдра, то основаниями высот, проведенных из вершины O к плоскостям оснований BCE и ADF, являются центры окружностей, описанных около треугольников BCE и ADF, то есть центры этих граней. Следовательно, $KH \perp (BCE)$ и $HK \perp (ADF)$.

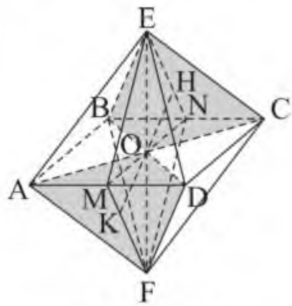


Рисунок 33

Пусть ребро октаэдра равно b. Из ΔOHN найдем $OH = \sqrt{ON^2 - HN^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{12}} = \frac{b}{\sqrt{6}}$. Тогда $HK = \frac{2b}{\sqrt{6}} = \frac{b\sqrt{6}}{3}$.

О т в е т. $\frac{b\sqrt{6}}{3}$.

7. Упражнения на повторение раздела «Многогранники»

161. а) Угол между диагональю боковой грани правильной треугольной призмы и другой её боковой гранью равен 30°. Найдите площадь полной поверхности этой призмы, если её высота равна 2 дм.

Р е ш е н и е. Пусть дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, её основания равносторонние треугольники. Высота и медиана A_1H_1 $\Delta A_1B_1C_1$ является перпендикуляром к плоскости CC_1B_1, диагональ A_1C – наклонная, CH_1 – её проекция на плоскость CC_1B_1 (рисунок 34). Следовательно, угол между диагональю A_1C и боковой гранью CC_1B_1 это $\angle A_1CH_1 = 30°$.

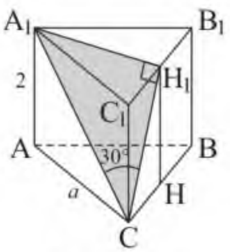


Рисунок 34

Обозначим сторону $\Delta A_1B_1C_1$ через a, тогда его медиана $A_1H_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. В прямоугольном ΔA_1H_1C гипотенуза $A_1C = 2 \cdot A_1H_1 = a\sqrt{3}$.

Для прямоугольного ΔA_1AC верно равенство $4 + a^2 = (a\sqrt{3})^2$. Из него следует, что $a^2 = 2$, $a = \sqrt{2}$ (дм). Тогда $S_{осн.} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (дм^2), $S_{бок.} = 3ah = 6\sqrt{2}$ дм^2, $S = (\sqrt{3} + 6\sqrt{2})$ (дм^2).

О т в е т. $(\sqrt{3} + 6\sqrt{2})$ дм^2.

161. б) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 8 см и наклонена к основанию под углом 75°. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

Р е ш е н и е. Пусть дана правильная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 35). Её основания – квадраты. Обозначим его сторону a. Диагонали этой призмы равны. Угол наклона диагонали D_1B к плоскости основания – это угол D_1BD. В прямоугольном ΔD_1BD $\angle D_1 = 15°$, $D_1B = 8$ см, тогда $D_1D = 8\cos 15°$, $BD = 8\sin 15°$.

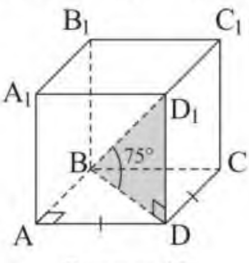


Рисунок 35

Так как $BD = a\sqrt{2} = 8\sin 15°$, то $a = 4\sqrt{2}\sin 15°$.

$S_{бок.} = 16\sqrt{2}\sin 15° \cdot 8\cos 15° = 64\sqrt{2} \cdot \sin 30° = 32\sqrt{2}$ (см^2).

О т в е т. $32\sqrt{2}$ см^2.

163. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2 дм, а одно из её боковых ребер образует с соседними сторонами основания углы, равные по 60° (рисунок 36). Найдите площадь поверхности призмы.

Р е ш е н и е. Так как $\angle A_1AC = \angle A_1AB$, то основание O высоты A_1O принадлежит биссектрисе угла A треугольника ABC.

Грани AA_1C_1C и AA_1B_1B являются равными ромбами, со стороной 2 дм и высотой, равной $2 \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$ (дм).

Докажем, что грань CC_1B_1B – квадрат: $BC \perp AO$ и $BC \perp A_1O$, значит $BC \perp (AA_1O)$, следовательно, $BC \perp AA_1$ и $BC \perp CC_1$, так как $AA_1 \parallel CC_1$.

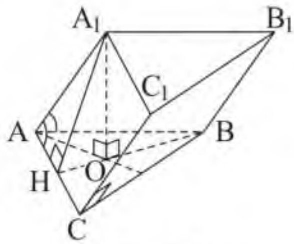


Рисунок 36

$S_{осн.} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ (дм^2), $S_{бок.} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + + 4 = (4\sqrt{3} + 4)$ (дм^2), тогда $S = (6\sqrt{3} + 4)$ (дм^2).

О т в е т. $(6\sqrt{3} + 4)$ дм^2.

165. а) Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

б) В треугольной пирамиде стороны основания равны 13 см, 14 см и 15 см, а все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Р е ш е н и е. Так как боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости её основания, то основанием O высоты PO пирамиды является центр окружности, вписанной в треугольник (рисунок 37).

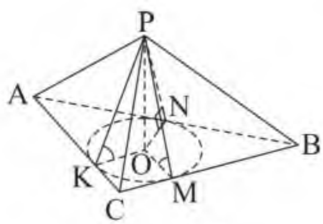


Рисунок 37

а) Для прямоугольного треугольника радиус r вписанной окружности равен $\frac{a+b-c}{2}$, где a, b – катеты, c – его гипотенуза. Для данного треугольника $r = \frac{6+8-10}{2} = 2$(см). Высоты в боковых гранях $PN = PK = PM = = \frac{r}{\cos 60°} = 4$ (см). $S_{бок.} = \frac{1}{2}(6+8+10) \cdot 4 = 48$ (см^2).

б) Для нахождения радиуса r вписанной окружности выразим площадь данного ΔABC двумя способами: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$, где p – полупериметр треугольника со сторонами a, b, c. Получим $84 = 21 \cdot r$, $r = 4$. Тогда высоты в боковых гранях равны $\frac{4}{\cos 45°} = 4\sqrt{2}$ (см).

$S_{бок.} = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) \cdot 4\sqrt{2} = 84\sqrt{2}$ (см^2).

О т в е т. а) 48 см^2; б) $84\sqrt{2}$ (см^2).

Если воспользоваться соотношением между площадью фигуры и её ортогональной проекцией, то площадь боковой поверхности данных пирамид можно вычислить так: $S_{бок.} = S_{осн.} : \cos\varphi$, где φ – угол между боковой гранью и плоскостью основания.

166. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 12 см и 8 см, а двугранный угол при ребре нижнего основания – 60°. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две её апофемы. Рассмотрите все возможные случаи.

Р е ш е н и е. Сечением данной усеченной пирамиды плоскостью, проходящей через две её апофемы, является равнобедренная трапеция MM_1N_1N или KK_1N_1N (рисунок 38, а).

Рисунок 38

$S_{MM_1N_1N} = \frac{8 + 12}{2} N_1H$, где N_1H – высота трапеции MM_1N_1N, которую найдем из ΔN_1HN. В нем $\angle H = 90°$, $\angle N = 60°$, $HN = 2$см, тогда $N_1H = 2 \cdot \text{tg}\, 60° = 2\sqrt{3}$ (см). $S_{MM_1N_1N} = 20\sqrt{3}$ (см^2).

$S_{KK_1N_1N} = \frac{K_1N_1 + KN}{2} \cdot N_1L$, где N_1L – высота трапеции KK_1N_1N (рисунок 38, б), $KN = 6\sqrt{3}$ см, $K_1N_1 = 4\sqrt{2}$ см. Отрезки $KP = LN = \frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ (см), $N_1N = \frac{HN}{\cos 60°} = 4$(см), тогда $N_1L = \sqrt{16 - 2} = \sqrt{14}$ (см). $SKK_1N_1N = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{14} = 10\sqrt{7}$ (см^2).

О т в е т. $20\sqrt{3}$ см^2 или $10\sqrt{7}$ см^2.

167. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды, высоты оснований которой равны $18\sqrt{3}$ см и $12\sqrt{3}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.

Р е ш е н и е. Зная высоты равносторонних треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рисунок 39), найдем их стороны a и b:

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$, $a = 36$ см; $\frac{b\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$, $b = 24$ см.

Высота усеченной пирамиды:

$B_1H = BH \cdot \text{tg}\,60° = (12\sqrt{3} - 8\sqrt{3})\sqrt{3} = 12$ (см).

Её апофема:

$N_1N = \sqrt{NK^2 + N_1K^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 12^2} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$ (см).

Тогда $S_{бок.} = 3 \cdot \frac{36 + 24}{2} \cdot 2\sqrt{39} = 180\sqrt{39}$ (см^2).

О т в е т. $180\sqrt{39}$ (см^2).

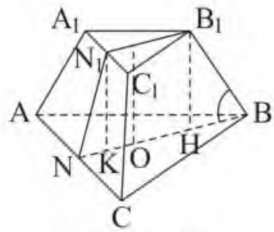


Рисунок 39

168. Площадь основания правильной треугольной призмы равна $4\sqrt{6}$ дм^2. Найдите площадь сечения призмы, проведенного через сторону одного основания и параллельную ей среднюю линию другого основания, если угол между плоскостью сечения и боковой гранью, содержащей указанную сторону основания, равен 30°.

Р е ш е н и е. Пусть дана призма $ABCA_1B_1C_1$ и построено сечение $ABMN$ (рисунок 40). Четырехугольник $ABMN$ – равнобедренная трапеция, $S_{ABMN} = \frac{AB + MN}{2} \cdot KH$, где KH – высота этой трапеции.

Пусть $AB = a$, тогда $MN = \frac{a}{2}$, $KH_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $KH = 2 \cdot KH_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S_{ABMN} = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. Зная площадь ΔABC, найдем a^2: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{6}$, $a^2 = 16\sqrt{2}$. Тогда $S_{ABMN} = \frac{3 \cdot 16\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{8} = 6\sqrt{6}$ (дм^2).

О т в е т. $6\sqrt{6}$ (дм^2).

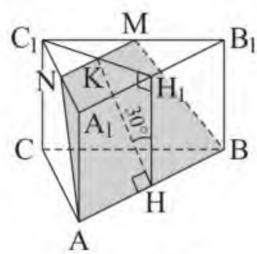


Рисунок 40

169. Основание наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб, сторона которого равна a, а острый угол $\angle A = \varphi$. Вершина A_1 удалена от каждой из точек A, B и D на расстояние, равное a. Найдите площадь четырехугольника BB_1D_1D.

Р е ш е н и е. Из того, что вершина A_1 одинаково удалена от каждой из точек A, B и D следует, что основанием высоты A_1H призмы является центр окружности, описанной около ΔABD. Учитывая, что он равнобедренный ($AB = AD$) заключаем, что точка H принадлежит биссектрисе угла A, то есть диагонали AC ромба (рисунок 41).

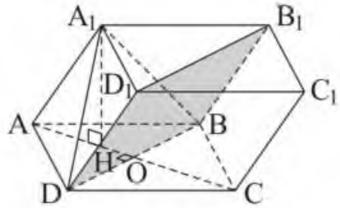


Рисунок 41

Диагональ $BD \perp AC$ и $BD \perp A_1H$, следовательно BD перпендикулярна плоскости AA_1H, значит $BD \perp AA_1$. Так как $AA_1 \parallel DD_1$, то $BD \perp DD_1$. Получили, что четырехугольник DD_1B_1B является прямоугольником, поэтому его площадь равна $DD_1 \cdot BD$.

Из ΔAOD имеем: $OD = a \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$. Тогда $BD = 2a \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$. Ребро $DD_1 = AA_1 = a$. $S_{DD_1B_1B} = 2a^2\sin\frac{\varphi}{2}$.

Ответ. $2a^2\sin\frac{\varphi}{2}$.

170. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, высота которой равна 8 дм, основанием является равнобедренная трапеция с параллельными сторонами, равными 16 дм и 8 дм, а все её двугранные углы при сторонах основания равны (рисунок 42).

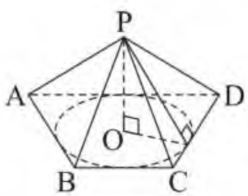


Рисунок 42

Решение. Так как по условию боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости ABC, то основанием высоты PO является центр окружности, вписанной в трапецию (рисунок 42). По свойству четырехугольника, описанного около окружности $16 + 8 = 2AB$, отсюда $AB = 12$ дм. Кроме того, $DH = \frac{1}{2}\ AD = 8$ дм, $CH = \frac{1}{2}\ BC = 4$ дм.

ΔCOD – прямоугольный, его высота $OH = \sqrt{8 \cdot 4} = 4\sqrt{2}$ (дм).

Из ΔPOH найдем $PH = \sqrt{64 + 32} = 4\sqrt{6}$ (дм). Из того, что боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания следует, что высоты во всех боковых гранях равны, поэтому $S_{бок.} = \frac{1}{2}(16 + 8 + 12 + 12) \times$ $\times 4\sqrt{6} = 96\sqrt{6}$ (дм^2).

Высотой h трапеции $ABCD$ является отрезок, равный диаметру вписанной в неё окружности, то есть $h = 8\sqrt{2}$ дм. $S_{ABCD} = 12 \cdot 8\sqrt{2} = 96\sqrt{2}$ (дм^2). Тогда площадь поверхности данной пирамиды равна $96(\sqrt{2} + \sqrt{6})$дм^2.

О т в е т. $96(\sqrt{2} + \sqrt{6})$дм^2.

171. Ортогональной проекцией вершины треугольной пирамиды является центр окружности, вписанной в её основание. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, отделило от неё усеченную пирамиду, площади оснований которой относятся как 4 : 49. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, если стороны её нижнего основания и высота соответственно равны: 25 см, 39 см, 56 см и 12 см.

Р е ш е н и е. Из условия, что ортогональной проекцией вершины пирамиды является центр окружности, вписанной в её основание следует, что высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны. Равны и высоты боковых граней данной усеченной пирамиды. Поэтому $S_{бок.} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot KN$, где P_1 и P_2 – периметры оснований усеченной пирамиды, KN – высота боковой грани (рисунок 43). При этом $P_1 = 120$ см, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{2}{7}$, $P_2 = \frac{240}{7}$ см.

Для нахождения отрезка KN, найдем радиус ON окружности, выразив площадь ΔABC двумя способами: $\sqrt{60 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 4} = 60 \cdot ON$, $ON = 7$ см. Отрезок $O_1K = OH$ найдем из пропорции $\frac{O_1K}{ON} = \frac{2}{7}$, $O_1K = 2$ см. Тогда $HN = 5$ см, $KN = \sqrt{144 + 25} = 13$ (см).

$$S_{бок.} = \frac{1}{2}\left(120 + \frac{240}{7}\right) \cdot 13 = \frac{540 \cdot 13}{7} = 1002\frac{6}{7} \text{ (см}^2\text{)}.$$

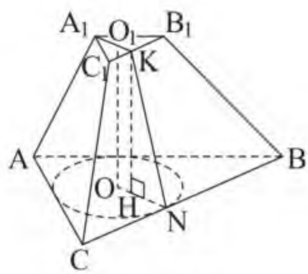


Рисунок 43

О т в е т. $1002\frac{6}{7}$ (см^2).

172. В треугольной пирамиде $DABC$ все плоские углы при вершине D прямые. Докажите, что ортогональной проекцией вершины D на плоскость ΔABC является точка пересечения его высот.

Доказательство. Докажем сначала, что ΔABC – остроугольный. Пусть $AD = a$, $CD = b$, $BD = c$ (рисунок 44).

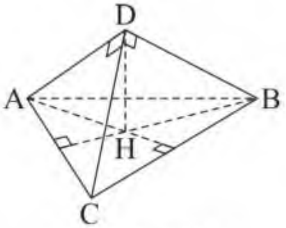


Рисунок 44

Тогда $AC^2 = a^2 + b^2$, $BC^2 = b^2 + c^2$, $AB^2 = a^2 + c^2$.
$a^2 + b^2 < a^2 + c^2 + b^2 + c^2$, т.е. $AC^2 < AB^2 + BC^2$;
$b^2 + c^2 < a^2 + b^2 + a^2 + c^2$, т.е. $BC^2 < AC^2 + AB^2$;
$a^2 + c^2 < a^2 + b^2 + b^2 + c^2$, т.е. $AB^2 < AC^2 + CB^2$.

Следовательно, ΔABC – остроугольный, так как квадрат длины каждой его стороны меньше суммы квадратов длин других сторон.

По условию $AD \perp BD$ и $AD \perp CD$, тогда $AD \perp (BDC)$, следовательно, $AD \perp BC$.

Так как DH – перпендикуляр, проведенный к плоскости ABC, AD – наклонная, AH – её проекция, то по теореме о трех перпендикулярах из того, что $AD \perp BC$ следует, что $AH \perp BC$. Аналогично доказывается, что $BH \perp AC$. Следовательно, точка H – ортоцентр ΔABC, то есть точка пересечения его высот.

173. Дана правильная четырехугольная усеченная пирамида. Найдите площадь её боковой поверхности, если: а) диагонали её оснований равны d и l ($d > l$), а двугранный угол при ребре основания – 60°; б) её высота равна h, площадь диагонального сечения – Q, а острый двугранный угол при стороне основания – β.

Решение. а) По условию $AC = d$, $A_1C_1 = l$ (рисунок 45). Обозначим стороны оснований a и b, тогда $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ $b = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$.

В ΔKHN $\angle N = 60°$, $HN = \dfrac{d-l}{2\sqrt{2}}$, $KN = 2HN = \dfrac{d-l}{\sqrt{2}}$.

$$S_{\text{бок.}} = \frac{2(d+l)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d-l}{\sqrt{2}} = d^2 - l^2.$$

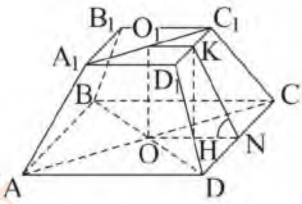


Рисунок 45

б) По условию $OO_1 = h$, $S_{AA_1C_1C} = Q$ (рисунок 45). Обозначим стороны оснований a и b, тогда $Q = \dfrac{a\sqrt{2} + b\sqrt{2}}{2} \cdot h$. Из этого равенства получим $a + b = \dfrac{Q\sqrt{2}}{h}$.

В ΔKHN $\angle N = \beta$, $KH = h$, $KN = \dfrac{h}{\sin\beta}$. Тогда $S_{\text{бок.}} = \dfrac{2Q\sqrt{2}}{h} \cdot \dfrac{h}{\sin\beta} = \dfrac{2Q\sqrt{2}}{\sin\beta}$.

О т в е т. а) $d^2 - l^2$; б) $\dfrac{2Q\sqrt{2}}{\sin\beta}$.

174. Какую наибольшую площадь боковой поверхности может иметь прямоугольный параллелепипед с данной диагональю d и квадратным основанием?

Р е ш е н и е. Обозначим сторону основания a, тогда диагональ $BD = a\sqrt{2}$, а боковое ребро $b = \sqrt{d^2 - 2a^2}$ (рисунок 46). $S_{\text{бок.}} = 4a \cdot \sqrt{d^2 - 2a^2}$. Так как эта величина положительная, то она принимает наибольшее значение при тех же значениях a, при которых достигает наибольшее значение её квадрат.

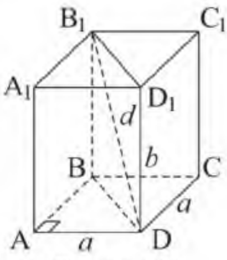


Рисунок 46

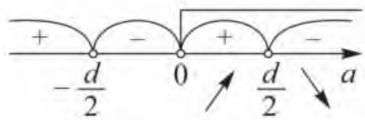


Рисунок 47

Исследуем на наибольшее значение функцию $f(a) = -32a^4 + 16d^2a^2$.

$f'(a) = -128a^3 + 32d^2a = -32a(2a - d)(2a + d)$.

$f'(a) = 0$ при $a = 0$ или $a = \dfrac{d}{2}$ или $a = -\dfrac{d}{2}$.

Знаки функции $f'(a)$ на промежутках показаны на рисунке 47. Следовательно, наибольшее значение функция $f(a)$ достигает при $a = \dfrac{d}{2}$. Наибольшее $S_{\text{бок.}} = 4 \cdot \dfrac{d}{2}\sqrt{d - 2 \cdot \dfrac{d^2}{4}} = \dfrac{2d^2}{\sqrt{2}} = d^2\sqrt{2}$.

О т в е т. $d^2\sqrt{2}$.

175. Дана пирамида, основанием которой является прямоугольник. Каждое её боковое ребро равно 9 см и составляет со смежными сторонами основания углы 60° и α. Найдите высоту этой пирамиды и множество допустимых значений α.

Р е ш е н и е. Так как все боковые ребра пирамиды равны, то основанием O её высоты SO является точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ (рисунок 48). Из условия задачи следует, что ΔASD – равносторон-

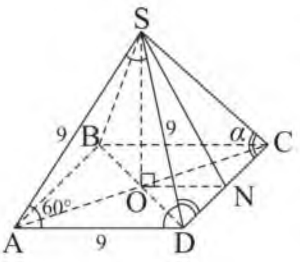


Рисунок 48

ний, а ΔCSD – равнобедренный с углами α при основании. Проведем высоту ΔCSD отрезок $SN = 9 \cdot \sin\alpha$.

В ΔSON $ON = \frac{9}{2}$ см, $SO = \sqrt{81\sin^2\alpha - \frac{81}{4}} = \frac{9}{2}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}$. При этом $4\sin^2\alpha - 1 > 0$, $\sin^2\alpha > \frac{1}{4}$, $|\sin\alpha| > \frac{1}{2}$. Следовательно, $30° < \alpha < 90°$.

О т в е т. $4{,}5\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}$, где $30° < \alpha < 90°$.

176. Боковое ребро правильной десятиугольной пирамиды равно 16, а угол между соседними боковыми ребрами равен φ. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды и множество допустимых значений φ.

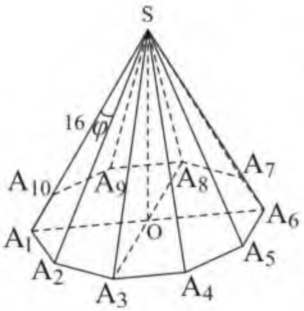


Рисунок 49

Р е ш е н и е. Так как пирамида правильная, то все её боковые грани равные равнобедренные треугольники (рисунок 49). Поэтому $S_{бок.} = 10 \cdot \frac{1}{2}\,16^2 \cdot \sin\varphi = 1280 \cdot \sin\varphi$.

Так как сумма плоских углов при вершине S меньше 360°, то $0° < \varphi < 36°$.

О т в е т. $1280 \cdot \sin\varphi$, где $0° < \varphi < 36°$.

177. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является прямоугольный ΔABC с гипотенузой AC, а её боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину M ребра AB, перпендикулярно ребру SC, $AB = BC = SA = m$ (рисунок 50). Найдите площадь этого сечения.

Р е ш е н и е. 1) При построении указанного сечения провели MK параллельно высоте BF ΔABC, тогда $MK \perp AC$ и $MK \perp SA$, следовательно $MK \perp (SAC)$, поэтому $MK \perp SC$. $MK = \frac{1}{2} \cdot BF = \frac{m\sqrt{2}}{4}$ как средняя линия ΔABF.

2) Далее провели MN параллельно высоте AE ΔSAB, тогда $MN \perp SB$ и $MN \perp BC$, следовательно, $MN \perp (SBC)$, поэтому $MN \perp SC$. $MN = \frac{1}{2} \cdot AE = \frac{m\sqrt{2}}{4}$ как средняя линия ΔBAE.

3) Так как $(KMN) \perp SC$, поэтому провели $KL \parallel AH$ (AH – высота ΔSAC). Получили сечение четырехугольник $KMNL$. Он состоит из двух равных прямоугольных треугольников MKL и MNL, так как $MK \perp (SAC)$, значит $MK \perp KL$ и $MN \perp (SBC)$, поэтому $MN \perp NL$. Следовательно, его площадь равна: $S_{\text{сеч.}} = 2 \cdot S_{\Delta MKL} = MK \cdot KL$.

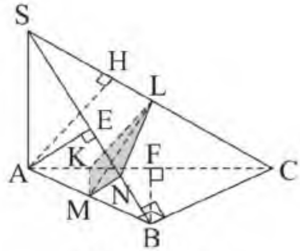


Рисунок 50

4) В прямоугольном ΔSAC гипотенуза $SC = m\sqrt{3}$, $AH = \dfrac{2S_{\Delta ASC}}{SC} = \dfrac{m\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

5) Так как $KL \parallel AH$ и $AK = \dfrac{1}{4} \cdot AC$, то $\Delta AHC \sim \Delta KLC$ с коэффициентом подобия $\dfrac{3}{4}$. Следовательно $KL = \dfrac{3}{4} \cdot AH = \dfrac{m\sqrt{6}}{4}$. Искомая площадь сечения равна: $S_{\text{сеч.}} = \dfrac{m\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{m\sqrt{6}}{4} = \dfrac{m^2\sqrt{3}}{8}$.

Ответ. $\dfrac{m^2\sqrt{3}}{8}$.

II. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

8. Расстояние от точки до плоскости

198. Найдите расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точку: а) $M(4; -2; -6)$ и перпендикулярной оси аппликат; б) $N(-7; 4; 5)$ и перпендикулярной оси абсцисс.

Решение. а) Плоскость, проходящая через точку M, перпендикулярна оси Oz и пересекает её в точке $A(0; 0; -6)$. Поэтому расстояние от точки O – начала координат до этой плоскости равно длине отрезка $OA = 6$.

б) Плоскость, проходящая через точку N, перпендикулярна оси Ox и пересекает её в точке $B(-7; 0; 0)$. Поэтому расстояние от начала координат до этой плоскости равно $OB = 7$.

Ответ. а) 6; б) 7.

200. Найдите расстояние от точки $A(2; 1; m)$, принадлежащей плоскости $3x - y + 2z - 1 = 0$ до плоскости $12x - 3y + 4z + 13 = 0$.

Решение. Используя условие принадлежности точки A плоскости $3x - y + 2z - 1 = 0$, найдем значение m: $3 \cdot 2 - 1 + 2m - 1 = 0$, $2m = -4$, $m = -2$. Тогда расстояние l от точки A до плоскости $12x - 3y + 4z + 13 = 0$ равно:

$$l = \frac{|12 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 13|}{\sqrt{144 + 9 + 16}} = \frac{26}{13} = 2.$$

Ответ. 2.

202. а) Дан треугольник с вершинами в точках $A(2; 1; 0)$, $B(1; 3; 0)$, $C(4; 4; 0)$. Найдите расстояние от точки $M(2020; 2021; 2030)$ до плоскости ABC.

б) Известны координаты вершин тетраэдра $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(5; 2; 1)$, $D(0; -5; 6)$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости ABC.

Решение. а) Так как точки A, B, C принадлежат координатной плоскости xOy, то искомое расстояние – это расстояние от точки M до плоскости xOy, оно равно 2030.

б) Плоскость ABC параллельна плоскости xOy и удалена от неё на расстояние, равное 1. Расстояние от точки D до плоскости xOy равно 6, а до плоскости ABC равно 5.

Ответ. а) 2030; б) 5.

203. Найдите расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точку $A(-5;\ 4;\ -3)$ и перпендикулярной вектору: а) $\vec{n} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$; б) $n = 2\vec{i} + 2\vec{j} + k$.

Р е ш е н и е. а) Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-5;\ 4;\ -3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}\,(3;\ 3;\ 0)$:

$3(x+5) + 3(y-4) + 0(z+3) = 0, \quad 3x + 3y + 3 = 0, \quad x + y + 1 = 0.$

Тогда расстояние от начала координат до этой плоскости равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-5;\ 4;\ -3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}\,(2;\ 2;\ 1)$: $2(x+5) + 2(y-4) + (z+3) = 0, \quad 2x + 2y + z + 5 = 0$. Тогда искомое расстояние равно $\frac{5}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

О т в е т. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $1\frac{2}{3}$.

205. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6. Точки M, N и K – середины его ребер A_1B_1, A_1D_1 и A_1A соответственно. Найдите расстояния от вершин куба до плоскости MNK.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы точка A_1 была началом координат, а оси Ox, Oy, Oz содержали соответсвенно отрезки A_1A, A_1D_1, A_1B_1 (рисунок 51).

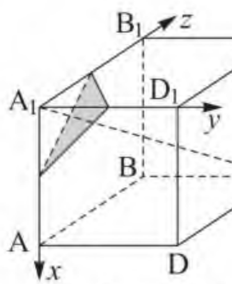


Рисунок 51

Тогда координаты указанных точек: $M(0;\ 0;\ 3)$, $N(0;\ 3;\ 0)$, $K(3;\ 0;\ 0)$, а вершины куба имеют координаты $A(6;\ 0;\ 0)$, $B(6;\ 0;\ 6)$, $C(6;\ 6;\ 6)$, $D(6;\ 6;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ 0;\ 6)$, $C_1(0;\ 6;\ 6)$, $D_1(0;\ 6;\ 0)$.

Уравнение плоскости MNK «в отрезках»: $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$, общее уравнение этой плоскости $x + y + z - 3 = 0$.

Расстояние d от точки A_1 до плоскости MNK равно: $d_{A_1} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Так как диагональ A_1C данного куба равна $6\sqrt{3}$ и перпендикулярна плоскости MNK, то расстояние от точки C до этой плоскости равно $d_C = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Точки A, B_1 и D_1 одинаково удалены от плоскости MNK на расстояние $d_A = d_{B_1} = d_{D_1} = \frac{|6-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Расстояние от каждой из точек C_1, B, D до плоскости MNK равно: $d_{C_1} = d_B = d_D = \dfrac{|6+6-3|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.

Ответ. $d_A = d_{B_1} = d_{D_1} = d_{A_1} = \sqrt{3}$, $d_{C_1} = d_B = d_D = 3\sqrt{3}$, $d_C = 5\sqrt{3}$.

206. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 12. На его ребрах BB_1, BC и BA отмечены точки M, N и K соответственно, которые делят эти ребра в отношении 3 : 1, считая от вершины B. Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости MNK.

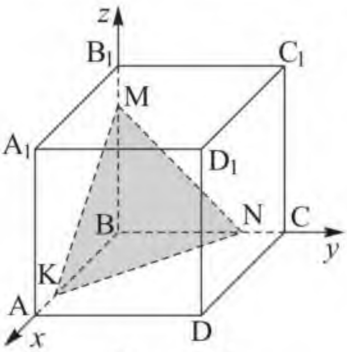


Рисунок 52

Решение. Выберем систему координат с началом в точке B и осями Ox, Oy, Oz, содержащими соответственно ребра BA, BC, BB_1 (рисунок 52), тогда $D_1(12; 12; 12)$.

Так как $BK = BN = BM = 9$, то координаты точек $K(9; 0; 0)$, $N(0; 9; 0)$, $M(0; 0; 9)$. Уравнение плоскости MNK: $x + y + z - 9 = 0$.

Расстояние d от точки D_1 до плоскости MNK:

$$d = \frac{|12+12+12-9|}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}.$$

Ответ. $9\sqrt{3}$.

207. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 3$, $BC = 4$, $BB_1 = 12$. Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости A_1C_1D.

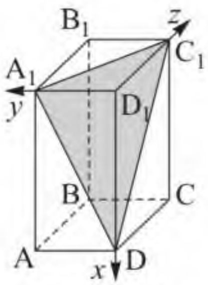


Рисунок 53

Решение. Удобно выбрать систему координат с началом в точке D_1 и осями как показано на рисунке 53, тогда искомое расстояние – это расстояние от начала координат до плоскости A_1C_1D.

Уравнение этой плоскости «в отрезках» $\frac{x}{12} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$, тогда общее уравнение плоскости A_1C_1D $\quad x + 3y + 4z - 12 = 0$.

Искомое расстояние:

$$d = \frac{|-12|}{\sqrt{1+9+16}} = \frac{12\sqrt{26}}{26} = \frac{6\sqrt{26}}{13}.$$

Ответ. $\dfrac{6\sqrt{26}}{13}$.

208. Высота правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равна 4, а сторона основания равна $2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости PCD.

Р е ш е н и е. Так как пирамида $PABCD$ – правильная, то её основание $ABCD$ – квадрат, а ортогональная проекция вершины P – точка O пересечения диагоналей основания.

Выберем систему координат с началом в точке O и осями Ox, Oy, Oz, содержащими лучи OD, OC, OP соответственно (рисунок 54). Учитывая, что сторона основания равна $2\sqrt{2}$, диагонали квадрата равны 4, вершинами пирамиды являются точки $A(0; -2; 0)$, $D(2; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $P(0; 0; 4)$.

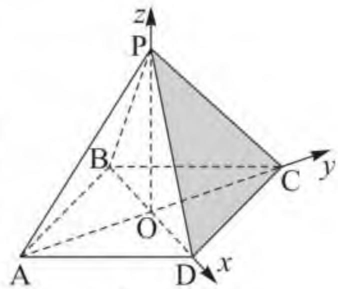


Рисунок 54

Уравнение плоскости PCD «в отрезках» $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$, а общее уравнение плоскости $2x + 2y + z - 4 = 0$.

Расстояние от точки A до этой плоскости равно $\frac{|-4-4|}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

О т в е т. $2\frac{2}{3}$.

210. Дворец Мира и Согласия в Нур-Султане имеет вид правильной четырехугольной пирамиды, высота которой и сторона основания равны по 62 м. Найдите расстояние от вершины этой пирамиды до плоскости, проходящей через диагональ её основания и середину бокового ребра.

Р е ш е н и е. Разместим правильную пирамиду $PABCD$ в системе координат так, чтобы точка O пересечения диагоналей её основания являлась началом координат, а оси Ox, Oy, Oz содержали лучи OD, OC, OP соответственно (рисунок 55). Найдем расстояние от вершины P пирамиды по плоскости BDM, где M – середина ребра PC.

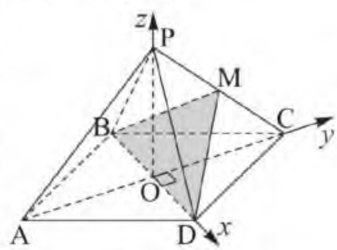


Рисунок 55

Зная высоту и сторону основания пирамиды, найдем координаты точек $B(-31\sqrt{2}; 0; 0)$, $D(31\sqrt{2}; 0; 0)$, $M\left(0; \frac{31\sqrt{2}}{2}; 31\right)$, $P(0; 0; 62)$. Составим уравнение плоскости BDM: $ax + by + cz + d = 0$;

$$\begin{cases} 31\sqrt{2}\,a + d = 0, \\ -31\sqrt{2}\,a + d = 0, \\ \dfrac{31\sqrt{2}}{2}b + 31c + d = 0; \end{cases}$$

так как плоскость BDM проходит через начало координат, то $d = 0$, тогда $a = 0$, пусть $b = 2$, тогда $c = -\sqrt{2}$. Уравнение плоскости BDM имеет вид $2y - \sqrt{2}z = 0$. Расстояние от точки $P(0;\ 0;\ 62)$ до этой плоскости равно $\dfrac{|-62\sqrt{2}|}{\sqrt{6}} = \dfrac{62\sqrt{3}}{3} \approx 35{,}8$ (м).

О т в е т. $\approx 35{,}8$ (м).

212. Напишите уравнение плоскости, расстояние от которой до параллельной ей плоскости $x + y + z - 1 = 0$, равно $\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. Плоскость, параллельная данной плоскости, задается уравнением $x + y + z + d = 0$. Выберем какую-либо точку, принадлежащую плоскости $x + y + z - 1 = 0$, например, $A(3;\ -1;\ -1)$. Тогда расстояние от точки A до плоскости $x + y + z + d = 0$ равно расстоянию между этими параллельными плоскостями, то есть $\dfrac{|3-1-1+d|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Из уравнения $|1 + d| = 3$ найдем $d = 2$ или $d = -4$. Следовательно, $x + y + z + 2 = 0$ и $x + y + z - 4 = 0$ – уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x + y + z - 1 = 0$.

О т в е т. $x + y + z + 2 = 0$ и $x + y + z - 4 = 0$.

213. Найдите расстояние от точки $M(2\sqrt{14}; 0; 2\sqrt{14})$ до плоскости, заданной уравнениями:

а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z = 0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ -x + 2y - z = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Данные в условии плоскости заданы двумя пересекающимися прямыми. Запишем общие уравнения данных плоскостей. Для этого найдем на данных прямых по две точки. Так как тройка чисел $(0;\ 0;\ 0)$ является решением каждой из указанных систем, то точка $O(0;\ 0;\ 0)$ является точкой пересечения указанных прямых. Следовательно, в общем уравнении $ax + by + cz + d = 0$ каждой из плоскостей $d = 0$.

а) Первой прямой принадлежит точка $A(1;\ 1;\ -1)$, второй – точка $B(-2;\ 1;\ 1)$. Подставим координаты точек A и B в уравнение, получим $\begin{cases} a + b - c = 0, \\ -2a + b + c = 0; \end{cases}$ откуда $a = 2b$, $c = 3b$. Пусть $b = 1$, тогда $a = 2$, $c = 3$. Уравнение данной плоскости $2x + y + 3z = 0$. Расстояние от точки $M(2\sqrt{14}; 0; 2\sqrt{14})$ до этой плоскости равно $\frac{|4\sqrt{14} + 6\sqrt{14}|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{10\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 10$.

б) Первой прямой принадлежит точка $C(-1; 1; -1)$, второй – точка $D(3; 1; -1)$. Поставим координаты точек C и D в уравнение, получим $\begin{cases} -a + b - c = 0, \\ 3a + b - c = 0; \end{cases}$ откуда $a = 0$, $c = b = 1$. Уравнение данной плоскости $y + z = 0$. Расстояние от точки $M(2\sqrt{14}; 0; 2\sqrt{14})$ до этой плоскости равно $\frac{|2\sqrt{14}|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{7}$.

О т в е т. а) 10; б) $2\sqrt{7}$.

214. Найдите расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точки: б) $K(1; 2; 3)$, $L(0; 7; 1)$, $P(1; 5; 0)$.

Р е ш е н и е. Подставим в уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ координаты точек K, L, P, получим $\begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0, \\ 7b + c + d = 0, \\ a + 5b + d = 0. \end{cases}$ Выполним вычитание членов третьего уравнения системы из первого: $-3b + 3c = 0$, $c = b$. Тогда из вторго уравнения найдем $b = c = -\frac{1}{8}d$, из третьего уравнения получим $a = -\frac{3}{8}d$. Положим $d = -8$, тогда $a = 3$, $b = c = 1$. Уравнение плоскости KLP $3x + y + z - 8 = 0$. Искомое расстояние равно $\frac{|-8|}{\sqrt{11}} = \frac{8\sqrt{11}}{11}$.

О т в е т. б) $\frac{8\sqrt{11}}{11}$.

215. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через точки M, N и K – середины его ребер A_1D_1, C_1D_1 и DD_1 соответственно. Расстояние от точки D_1 до плоскости сечения равно 3. Найдите расстояние до плоскости MNK от остальных вершин куба.

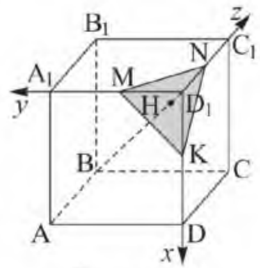


Рисунок 56

Р е ш е н и е. Пусть ребро куба равно n, $n > 0$. Выберем систему координат с началом в точке D_1 и осями как показано на рисунке 56, тогда координаты точек $D_1(0; 0; 0)$, $M\left(0; \frac{n}{2}; 0\right)$, $N\left(0; 0; \frac{n}{2}\right)$, $K\left(\frac{n}{2}; 0; 0\right)$. Уравнение плоскости MNK: $2x + 2y + 2z - n = 0$.

Расстояние от точки D_1 до плоскости MNK равно $d_{D_1} = \dfrac{|-n|}{\sqrt{4+4+4}} =$
$= \dfrac{n}{2\sqrt{3}}$. По условию $\dfrac{n}{2\sqrt{3}} = 3$, откуда $n = 6\sqrt{3}$. Следовательно, уравнение плоскости MNK $\quad 2x + 2y + 2z - 6\sqrt{3} = 0$.

Так как диагональ D_1B куба перпендикулярна плоскости MNK и $D_1B = 18$, то расстояние $BH = d_B = 15$.

Учитывая координаты вершин куба $A(6\sqrt{3};\ 6\sqrt{3};\ 0)$, $C(6\sqrt{3};\ 0;\ 6\sqrt{3})$, $D(6\sqrt{3};\ 0;\ 0)$, $A_1(0;\ 6\sqrt{3};\ 0)$, $B_1(0;\ 6\sqrt{3};\ 6\sqrt{3})$, $C_1(0;\ 0;\ 6\sqrt{3})$, найдем искомые расстояния.

Расстояние от каждой из точек A_1, C_1, D равно:

$$d_{A_1} = d_{C_1} = d_D = \frac{|12\sqrt{3} - 6\sqrt{3}|}{2\sqrt{3}} = 3.$$

Расстояние от каждой из точек A, B_1, C равно:

$$d_A = d_{B_1} = d_C = \frac{|12\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3}|}{2\sqrt{3}} = 9.$$

О т в е т. $d_{A_1} = d_{C_1} = d_D = 3$, $d_A = d_{B_1} = d_C = 9$, $d_B = 15$.

216. Дан тетраэдр $PABC$, каждое боковое ребро которого равно 2 и все плоские углы при вершине P – прямые. Найдите расстояние от вершины P до плоскости, проходящей через середины его ребер AC, AB и CP.

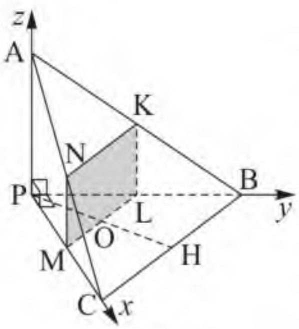


Рисунок 57

Р е ш е н и е. Построим указанную плоскость MNL и разместим данный тетраэдр в системе координат как показано на рисунке 57. Тогда координаты точек $P(0;\ 0;\ 0)$, $M(1;\ 0;\ 0)$, $N(1;\ 0;\ 1)$, $L(0;\ 1;\ 0)$. Составим уравнение плоскости MNL.

$$\begin{cases} a + d = 0, \\ a + c + d = 0, \\ b + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -d, \\ c = 0, \\ b = -d. \end{cases}$$

Положим $d = -1$, тогда $a = b = 1$. Уравнение плоскости MNL имеет вид $x + y - 1 = 0$. Искомое расстояние равно $\dfrac{|-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отметим, что искомое расстояние это длина отрезка PO, равного половине медианы PH равнобедренного прямоугольного ΔPBC, так как $PO \perp ML$ и $PO \perp MN$. В ΔPBC стороны $PC = PB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, медиана $PH = \sqrt{2}$, отрезок $PO = \frac{1}{2}PH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

217. Расстояние от начала координат до центра окружности, описанной около ΔABC с вершинами в точках $A(t;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ t)$, $C(t;\ t;\ t)$, равно $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
Найдите расстояние от начала координат до плоскости ABC.

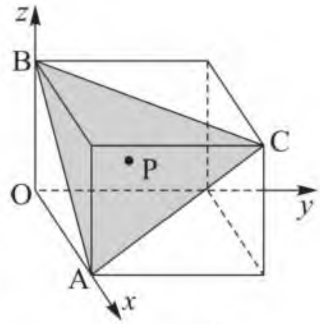


Рисунок 58

Решение. Так как $AB = AC = BC = t\sqrt{2}$, то центр P окружности, описанной около ΔABC – точка пересечения его медиан. Для нахождения координат точки P используем формулу $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, тогда $P\left(\frac{2t}{3}; \frac{t}{3}; \frac{2t}{3}\right)$.

Расстояние $OP = \sqrt{\frac{4t^2}{9} + \frac{t^2}{9} + \frac{4t^2}{9}} = t$, по условию $OP = \frac{\sqrt{6}}{2}$, тогда координаты точек $A\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; 0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Составим уравнение плоскости ABC.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{2}a + d = 0, \\ \frac{\sqrt{6}}{2}c + d = 0, \\ \frac{\sqrt{6}}{2}a + \frac{\sqrt{6}}{2}b + \frac{\sqrt{6}}{2}c + d = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{2d}{\sqrt{6}}, \\ c = -\frac{2d}{\sqrt{6}}, \\ b = \frac{2d}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Пусть $d = -\sqrt{6}$, тогда $a = c = 2$, $b = -2$. Уравнение плоскости ABC $2x - 2y + 2z - \sqrt{6} = 0$. Расстояние от начала координат до плоскости ABC равно $\frac{|-\sqrt{6}|}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Угол между двумя прямыми в пространстве

220. Найдите угол между прямой: а) $\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{2\sqrt{2}}=\frac{z}{-2\sqrt{2}}$ и осью абсцисс; б) $\frac{x}{2\sqrt{2}}=\frac{y+1}{4\sqrt{3}}=\frac{z}{2\sqrt{2}}$ и осью ординат.

Р е ш е н и е. а) Пусть φ – искомый угол. Направляющий вектор данной прямой $\vec{p_1}(-4;\ 2\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$. На оси Ox выберем, например, вектор $\vec{p_2}(4;\ 0;\ 0)$. Тогда $\cos\varphi=\frac{|-16+0+0|}{\sqrt{16+8+8}\cdot\sqrt{16}}=\frac{16}{16\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\varphi=45°$.

б) $\vec{p_1}(2\sqrt{2};4\sqrt{3};2\sqrt{2})$, $\vec{p_2}(0;\ 1;\ 0)$, $\cos\varphi=\frac{|0+4\sqrt{3}+0|}{\sqrt{8+48+8}\cdot\sqrt{1}}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\varphi=30°$.

О т в е т. а) 45°; б) 30°.

221. б) Даны векторы $\vec{p}\,(1;\ -2;\ 3)$, $\vec{q}\,(0;\ 4;\ -5)$. Найдите угол между прямыми, на которых лежат векторы $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=-2\vec{p}-3\vec{q}$.

Р е ш е н и е. Разложим данные вектора по координатным векторам: $\vec{p}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{q}=4\vec{j}-5\vec{k}$. Тогда $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}+4\vec{j}-5\vec{k}=$ $=2\vec{i}+\vec{k}$, откуда $\vec{a}\,(2;\ 0;\ 1)$; $\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}-12\vec{j}+15\vec{k}=-2\vec{i}-8\vec{j}+9\vec{k}$, значит $\vec{b}\,(-2;\ -8;\ 9)$. Пусть угол между прямыми, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равен φ, тогда $\cos\varphi=\frac{|-4+0+9|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{149}}=\sqrt{\frac{5}{149}}$.

О т в е т. б) $\arccos\sqrt{\frac{5}{149}}$.

224. Найдите наибольший угол треугольника, вершинами которого являются точки $A(1;\ 2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ -1)$ и $C(-1;\ 2;\ 5)$.

Р е ш е н и е. Наибольший угол лежит против большей стороны, поэтому найдем длины сторон ΔABC: $AB=\sqrt{0+4+9}=\sqrt{13}$, $AC=\sqrt{4+0+9}=\sqrt{13}$, $BC=\sqrt{4+4+36}=\sqrt{44}$. Следовательно, наибольший угол BAC.

$\overrightarrow{AB}\,(0;\ 2;\ -3)$, $\overrightarrow{AC}\,(-2;\ 0;\ 3)$, $\cos\angle BAC=\frac{|0+0-9|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=\frac{9}{13}$, $\angle BAC=\arccos\frac{9}{13}$.

О т в е т. $\arccos\frac{9}{13}$.

226. Основание $ABCD$ пирамиды $PABCD$ квадрат, сторона которого равна 4, ребро PB равно 6 и является её высотой. Найдите угол между прямыми AP и BD.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат с вершиной в точке B и осями Ox, Oy, Oz, содержащими соответственно ребра BA, BC, BP пирамиды (рисунок 59). Тогда координаты точек $A(4;\ 0;\ 0)$, $P(0;\ 0;\ 6)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $D(4;\ 4;\ 0)$.

$\overrightarrow{AP}(-4;\ 0;\ 6)$, $\overrightarrow{BD}(4;\ 4;\ 0)$,

$\cos\angle(AP;\ BD) = \dfrac{|-16|}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{32}} = \dfrac{2}{\sqrt{26}} = \sqrt{\dfrac{2}{13}}$,

$\angle(AP;\ BD) = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{13}}$.

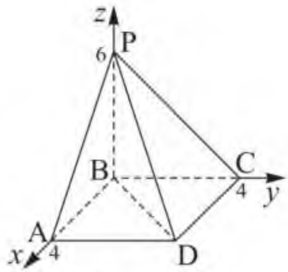


Рисунок 59

О т в е т. $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{13}}$.

228. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны координаты вершин $B(1;\ 2;\ 3)$, $A(9;\ 6;\ 4)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $B_1(3;\ 0;\ 4)$. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми BB_1 и CD.

Р е ш е н и е. Так как $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, то для нахождения угла между прямыми BB_1 и CD используем векторы $\overrightarrow{BB_1}(2;\ -2;\ 1)$ и $\overrightarrow{BA}(8;\ 4;\ 1)$.

Найдем $\cos\angle(BB_1;\ CD) = \dfrac{|16-8+1|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{81}} = \dfrac{9}{3\cdot 9} = $

$= \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333$, $\angle(BB_1;\ CD) \approx 71°$.

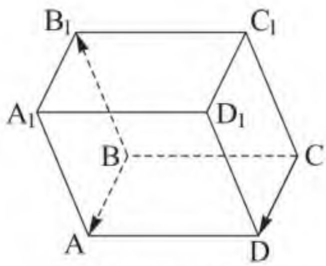


Рисунок 60

О т в е т. ≈ 71°.

229. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями:

в) $\begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} -x + y + 2z + 3 = 0, \\ 2x - y - z + 4 = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Найдем координаты двух точек каждой прямой, то есть найдем тройки чисел, являющихся решениями указанных систем.

Для первой прямой: пусть $x = 0$, тогда $y = -z - 1$. Если $z = 1$, то $y = -2$; если $z = -1$, то $y = 0$. Найдены точки $A(0;\ -2;\ 1)$, $B(0;\ 0;\ -1)$.

Для второй прямой: пусть $x = 0$, тогда $y = -2z - 3$ и $y = -z + 4$, откуда $z = -7$, $y = 11$. Если $z = 0$, то $y = x - 3$ и $y = 2x + 4$, откуда $x = -7$, $y = -10$. То есть второй прямой принадлежат точки $C(0;\ 11;\ -7)$ и $D(-7;\ -10;\ 0)$.

$\overrightarrow{AB}(0;\ 2;\ -2)$, $\overrightarrow{CD}(-7;\ -21;\ 7)$, $\cos\angle(AB;\ CD) = \dfrac{|-42-14|}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{539}} = \dfrac{56}{2\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{11}} =$

$= \dfrac{4}{\sqrt{22}} = \sqrt{\dfrac{8}{11}}$, $\angle(AB;\ CD) = \arccos\sqrt{\dfrac{8}{11}}$.

О т в е т. в) $\arccos\sqrt{\frac{8}{11}}$.

230. Используя условие перпендикулярности прямых, докажите, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости A_1BD.

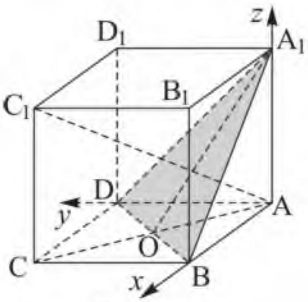


Рисунок 61

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть диагонали AC и BD основания $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажем, что прямая AC_1 перпендикулярна двум прямым BD и A_1O плоскости A_1BD. Для этого введем систему координат с центром в точке A и осями координат как показано на рисунке 61 и найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1O}$.

Пусть ребро куба равно 2, тогда координаты точек $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 2;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 2)$, $C_1(2;\ 2;\ 2)$, $O(1;\ 1;\ 0)$.

$\overrightarrow{AC_1}(2;\ 2;\ 2)$, $\overrightarrow{BD}(-2;\ 2;\ 0)$, $\overrightarrow{A_1O}(1;\ 1;\ -2)$.

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD} = -4+4+0=0$, $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1O} = 2+2-4=0$.

Следовательно, $AC_1 \perp BD$ и $AC_1 \perp A_1O$, а прямая AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD. Что и требовалось доказать.

232. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ длина стороны основания равна 12, её высота равна 18, а точка K делит ребро PC в отношении $PK : KC = 2 : 1$. Найдите с точностью до 1° угол между прямыми: а) AK и BD; б) BK и AD.

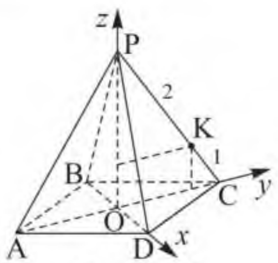


Рисунок 62

Р е ш е н и е. Введем систему координат с центром точке O пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ и осями Ox, Oy, Oz, содержащими соответственно лучи OD, OC, OP (рисунок 62). Тогда координаты точек $A(0;\ -6\sqrt{2};\ 0)$, $B(-6\sqrt{2};\ 0;\ 0)$, $D(6\sqrt{2};\ 0;\ 0)$, $K(0;\ 4\sqrt{2};\ 6)$.

а) $\overrightarrow{AK}(0;\ 10\sqrt{2};\ 6)$, $\overrightarrow{BD}(12\sqrt{2};\ 0;\ 0)$,

$\cos\angle(AK;\ BD) = 0$, $\angle(AK;\ BD) = 90°$.

б) $\overrightarrow{BK}(6\sqrt{2};\ 4\sqrt{2};\ 6)$, $\overrightarrow{AD}(6\sqrt{2};\ 6\sqrt{2};\ 0)$,

$$\cos\angle(BK;\ AD) = \frac{|72+48|}{\sqrt{72+32+36}\cdot\sqrt{144}} = \frac{120}{2\sqrt{35}\cdot 12} = \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{7} \approx 0{,}845,$$

$\angle(BK;\ AD) \approx 32°$.

О т в е т. а) 90°, б) ≈ 32°.

238. В правильном тетраэдре $DABC$ точка K – середина ребра AD, точки M и N – центры граней ABC и BCD соответственно. Найдите угол между прямыми: а) MN и AB; б) MK и AC.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы ее началом была точка M пересечения медиан грани ABC, ось Oz содержала высоту DM пирамиды, ось Ox – прямую, проходящую через точку M и параллельную стороне BC, а ось Oy – луч MA (рисунок 63).

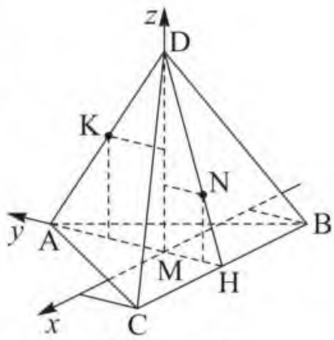


Рисунок 63

Не снижая общности решения, положим, что ребро данного тетраэдра равно, например, 18, тогда медиана AH правильного ΔABC равна $9\sqrt{3}$, а высота DM тетраэдра равна $\sqrt{18^2-(6\sqrt{3})^2}=6\sqrt{6}$.

Координаты точек $A(0;\ 6\sqrt{3}\ ;\ 0)$, $B(-9;\ -3\sqrt{3}\ ;\ 0)$, $C(9;\ -3\sqrt{3}\ ;\ 0)$, $M(0;\ 0;\ 0)$, $N(0;\ -2\sqrt{3}\ ;\ 2\sqrt{6}\ )$, $K(0;\ 3\sqrt{3}\ ;\ 3\sqrt{6}\ )$.

а) $\overrightarrow{MN}\ (0;\ -2\sqrt{3}\ ;\ 2\sqrt{6}\ )$, $\overrightarrow{AB}\ (-9;\ -9\sqrt{3}\ ;\ 0)$, $\cos\angle(MN;\ AB)=\dfrac{|54|}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{324}}=$

$=\dfrac{54}{6\cdot 18}=\dfrac{1}{2}$, $\angle(MN;\ AB)=60°$.

б) $\overrightarrow{MK}\ (0;\ 3\sqrt{3}\ ;\ 3\sqrt{6}\ )$, $\overrightarrow{AC}\ (9;\ -9\sqrt{3}\ ;\ 0)$, $\cos\angle(MK;\ AC)=\dfrac{|81|}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{324}}=$

$=\dfrac{81}{9\cdot 18}=\dfrac{1}{2}$, $\angle(MK;\ AC)=60°$.

О т в е т. а) 60°; б) 60°.

10. Угол между прямой и плоскостью, двумя плоскостями

241. Докажите, что: а) прямая $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{4}$ параллельна плоскости $-4x - 6y + 8z - 1 = 0$; б) прямая AB перпендикулярна плоскости $-8x + 13y + 4z - 1 = 0$, если $A(1; -2; 4)$, $B(-7; 11; 8)$.

Доказательство. а) Прямая параллельна плоскости, если направляющий вектор $\vec{p}\,(5; 2; 4)$ данной прямой перпендикулярен вектору $\vec{n}\,(-4; -6; 8)$ нормали данной плоскости.

$\vec{p} \cdot \vec{n} = -20 - 12 + 32 = 0$, следовательно, $\vec{p} \perp \vec{n}$, поэтому данные прямая и плоскость параллельны.

б) Прямая перпендикулярна плоскости, если её направляющий вектор параллелен вектору нормали данной плоскости. Так как $\overrightarrow{AB}(-8; 13; 4) = \vec{n}\,(-8; 13; 4)$, где $\vec{n}$ – вектор, перпендикулярный плоскости $-8x + 13y + 4z - 1 = 0$, то прямая AB перпендикулярна этой плоскости.

242. Найдите угол между прямой, проходящей через точки $A(3; 8; 1)$ и $B(-3; 5; 3)$, и плоскостью: а) xOy; б) yOz.

Решение. Пусть угол между прямой AB и указанной плоскостью равен φ. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}(-6; -3; 2)$.

а) Уравнение плоскости xOy: $z = 0$, её вектором нормали является вектор $\vec{n}\,(0; 0; 1)$. Тогда $\sin\varphi = \frac{|2|}{1 \cdot \sqrt{36+9+4}} = \frac{2}{7}$, $\varphi = \arcsin\frac{2}{7}$.

б) Уравнение плоскости yOz: $x = 0$, её вектором нормали является вектор $\vec{n}\,(1; 0; 0)$, тогда $\sin\varphi = \frac{|-6|}{1 \cdot \sqrt{49}} = \frac{6}{7}$, $\varphi = \arcsin\frac{6}{7}$.

Ответ. а) $\arcsin\frac{2}{7}$; б) $\arcsin\frac{6}{7}$.

245. Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 2; 1)$ и $D(5; 4; 0)$.

Решение. Запишем уравнения данных плоскостей вида $ax + by + cz + d = 0$. Так как эти плоскости проходят через начало координат, то $d = 0$. Найдем коэффициенты a, b, c.

Для плоскости ABC имеем: $\begin{cases} a+b+c=0, \\ 3a+2b+c=0; \end{cases}$ $\begin{cases} b=-2a, \\ c=a. \end{cases}$ Пусть $a = c = 1$, тогда $b = -2$ и $x - 2y + z = 0$, $\vec{n_1}(1; -2; 1)$.

Для плоскости ABD имеем: $\begin{cases} a+b+c=0, \\ 5a+4b=0; \end{cases}$ $\begin{cases} b=-\dfrac{5}{4}a, \\ c=\dfrac{1}{4}a. \end{cases}$ Пусть $a = 4$, тогда $b = -5$, $c = 1$ и $4x - 5y + z = 0$, $\vec{n_2}(4; -5; 1)$.

Пусть искомый угол равен γ, тогда $\cos\gamma = \dfrac{|4+10+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{16+25+1}} = \dfrac{15}{6\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$, $\gamma = \arccos\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

О т в е т. $\arccos\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

246. Дан тетраэдр $PABC$, плоские углы при вершине A которого прямые, $AB = AC = 5$ см, $AP = 10$ см. Точка M – середина ребра AP, точка N делит ребро PC в отношении $PN : NC = 2 : 3$ (рисунок 64). Найдите угол между прямой MN и плоскостью: а) ABC; б) PBC.

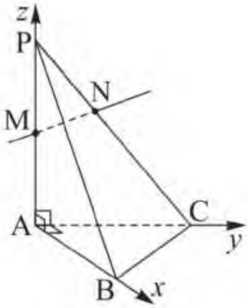


Рисунок 64

Р е ш е н и е. $M(0; 0; 5)$, $N(0; 2; 6)$, $\overrightarrow{MN}(0; 2; 1)$.

а) Уравнение плоскости ABC $z = 0$, её вектор нормали $\vec{n}(0; 0; 1)$. $\sin\angle(MN; (ABC)) = \dfrac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\angle(MN; (ABC)) = \arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

б) Уравнение плоскости PBC «в отрезках» $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{5} + \dfrac{z}{10} = 1$, общее уравнение этой плоскости $2x + 2y + z - 10 = 0$, $\vec{n}(2; 2; 1)$.

$\sin\angle(MN; (PBC)) = \dfrac{|4+1|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{5}{3\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\angle(MN; (PBC)) = \arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

О т в е т. а) $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

247. Дан тетраэдр $PABC$, в котором $\angle APB = \angle APC = 45°$, а плоские углы при вершине A – прямые. Найдите угол между: а) прямой AB и плоскостью BCP; б) плоскостями ABC и BCP.

Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что грани PAB, CAB и PAC являются равными прямоугольными равнобедренными треугольниками. Пусть их катеты равны 1.

Введем систему координат, как показано на рисунке 65. Тогда $B(0; 0; 1)$, $C(1; 0; 0)$, $P(0; 1; 0)$.

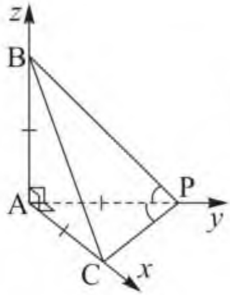


Рисунок 65

а) Имеем $\overrightarrow{AB}(0;\ 0;\ 1)$. Уравнение плоскости BCP «в отрезках» $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$, следовательно, общее уравнение этой плоскости $x+y+z-1=0$. Вектор нормали этой плоскости $\vec{n}(1;\ 1;\ 1)$. Тогда $\sin\angle(AB;\ (BCP)) = \frac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, искомый угол равен $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Уравнение плоскости ABC $y=0$, а плоскости BCP $x+y+z-1=0$. Тогда соответственно $\vec{n_1}(0;\ 1;\ 0)$ и $\vec{n}(1;\ 1;\ 1)$, $\cos\angle((ABC);\ (BPC)) = \frac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; а угол между этими плоскостями равен $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

О т в е т. а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

249. Найдите с точностью до 1° угол между прямой, проходящей через начало координат и точку $M(1;\ 2;\ 3)$, и плоскостью, параллельной вектору $\vec{p}(3;\ 1;\ -1)$, содержащей начало координат и точку $C(0;\ 2;\ -1)$.

Р е ш е н и е. Уравнение указанной плоскости имеет вид $ax+by+cz=0$. Учитывая, что вектор $\vec{p}(3;\ 1;\ -1)$ перпендикулярен вектору нормали $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ этой плоскости и точка $C(0;\ 2;\ -1)$ принадлежит ей, получим $\begin{cases}3a+b-c=0,\\ 2b-c=0;\end{cases}$ $\begin{cases}c=2b,\\ a=\frac{1}{3}b.\end{cases}$ Пусть $b=3$, тогда $a=1$, $c=6$. Уравнение плоскости $x+3y+6z=0$. Пусть угол между прямой OM, где точка O – начало координат, и данной плоскостью равен φ. Тогда $\overrightarrow{OM}(1;\ 2:\ 3)$, $\vec{n}(1;\ 3;\ 6)$, а $\sin\varphi = \frac{|1+6+18|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{46}} = \frac{25}{2\sqrt{161}} = \frac{25\sqrt{161}}{322} \approx\approx 0{,}985$, $\varphi\approx 80°$.

О т в е т. $\approx 80°$.

250. Найдите с точностью до 1° угол между прямой, проходящей через точки $M(-2;\ 0;\ -1)$ и $N(10;\ 3;\ 3)$, и плоскостью, параллельной оси Oz и содержащей точки $A(1;\ -2;\ 0)$ и $B(3;\ 1;\ 0)$.

Р е ш е н и е. Обозначим искомый угол φ. Уравнение указанной плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$. Так как плоскость параллельна оси Oz, то $c=0$. Найдем коэффициенты a, b и d. Имеем $\begin{cases}a-2b+d=0,\\ 3a+b+d=0;\end{cases}$ $\begin{cases}a=-\frac{3}{2}b,\\ b=\frac{2}{7}d\end{cases}$

Пусть $d = 7$, тогда $b = 2$, $a = -3$. Уравнение плоскости $-3x + 2y + 7 = 0$, её вектор нормали $\vec{n}(-3; 2; 0)$.

$\overrightarrow{MN}(12; 3; 4)$, $\sin\varphi = \dfrac{|-36+6|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{169}} = \dfrac{30}{13\sqrt{13}} = \dfrac{30\sqrt{13}}{169} \approx 0{,}640$, $\varphi \approx 40°$.

О т в е т. $\approx 40°$.

252. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой, проходящей через центры граней $ABCD$ и DD_1C_1C, и плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BB_1 и CC_1.

Р е ш е н и е. Введем систему координат как показано на рисунке 66. Центры указанных граней – точки M и N, а указанная в условии плоскость KLF. Пусть ребро куба равно 2. Тогда координаты точек $M(1; 1; 0)$, $N(1; 2; 1)$, $K(1; 0; 0)$, $L(0; 0; 1)$, $F(0; 2; 1)$. Составим уравнение плоскости KLF.

Имеем $\begin{cases} a + d = 0, \\ c + d = 0, \\ 2b + c + d = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a = c = -d, \\ b = 0. \end{cases}$ Уравнение плоскости KLF $x + z - 1 = 0$,

её вектор нормали $\vec{n}(1; 0; 1)$.

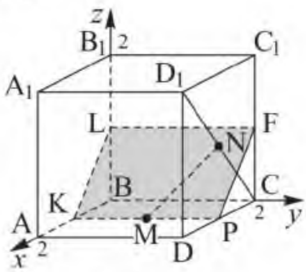


Рисунок 66

$\overrightarrow{MN}(0; 1; 1)$, $\sin\angle(MN; (KLF)) = \dfrac{1}{2}$, $\angle(MN; (KLF)) = 30°$.

О т в е т. 30°.

253. а) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ и перпендикулярной прямой: $\begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0, \\ 2x + y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. а) Так как данная прямая перпендикулярна искомой плоскости, то вектор $\overrightarrow{AB}$, лежащий на ней, является вектором нормали искомой плоскости. Найдем координаты точек A и B.

Сложив уравнения системы, получим $5x + 2z + 3 = 0$, $z = \frac{-5x-3}{2}$. Умножив первое уравнение системы на 3, и сложив со вторым, получим $11x - 2y + 1 = 0$, $y = \frac{11x+1}{2}$.

Если $x = 1$, то $y = 6$, $z = -4$. Если $x = -1$, то $y = -5$, $z = 1$.

Получили точки $A(1; 6; -4)$, $B(-1; -5; 1)$. Следовательно, $\overrightarrow{AB}(-2; -11; 5)$, уравнение плоскости $-2x - 11y + 5z + d = 0$. Далее, подставив в это уравнение координаты точки M, найдем $d = 2 - 11 - 10 = -19$. Искомая плоскость: $-2x - 11y + 5z - 19 = 0$.

О т в е т. а) $-2x - 11y + 5z - 19 = 0$.

254. Вектор $\vec{a}(1 - t; 4 + t; t)$ имеет наименьшую длину. Найдите угол между прямой, содержащей этот вектор, и плоскостью $4x - 4y + 2z - 7 = 0$.

Р е ш е н и е. Вектор $\vec{a}$ имеет наименьшую длину. Следовательно, наименьшее значение имеет функция $f(t) = (1 - t)^2 + (4 + t)^2 + t^2$, $f(t) = 3t^2 + 6t + 17$. Полученный квадратный трехчлен принимает наименьшее значение при $t = \frac{-6}{6} = -1$. Тогда координаты вектора $\vec{a}(2; 3; -1)$. Вектор нормали данной плоскости $\vec{n}(4; -4; 2)$. Найдем угол φ между прямой, содержащей вектор $\vec{a}$, и данной плоскостью: $\sin\varphi = \frac{|8-12-2|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{36}} = \frac{6}{6\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

О т в е т. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{14}}$.

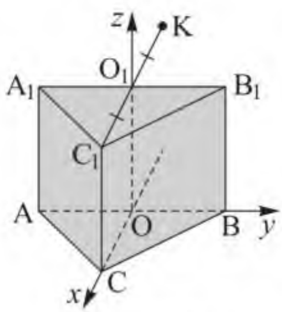


Рисунок 67

255. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, каждое ребро которой равно 2. Точки O и O_1 – середины ребер AB и A_1B_1 соответственно, точка K принадлежит лучу C_1O_1, причем $O_1K = C_1O_1$ (рисунок 67). Найдите с точностью до 1° угол между: а) прямой OK и плоскостью ABC; б) плоскостями ABC и KBC_1.

Р е ш е н и е. Основание данной призмы – равносторонний треугольник, сторона которого равна 2, следовательно его медиана $C_1O_1 = \sqrt{3}$. Координаты точек $O(0; 0; 0)$, $K(-\sqrt{3}; 0; 2)$, $B(0; 1; 0)$, $C_1(\sqrt{3}; 0; 2)$.

а) Уравнение плоскости ABC $z = 0$, её вектор нормали $\vec{n}(0;\ 0;\ 1)$. $\overrightarrow{OK}(-\sqrt{3};\ 0;\ 2)$, $\sin\angle(OK;\ (ABC)) = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \approx 0{,}756$ следовательно, $\angle(OK;\ (ABC)) \approx 49°$.

б) Найдем уравнение плоскости KBC_1. Имеем $\begin{cases} -\sqrt{3}a + 2c + d = 0, \\ b + d = 0, \\ \sqrt{3}a + 2c + d = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} b = -d, \\ c = -\frac{1}{2}d, \\ a = 0. \end{cases}$ Пусть $d = -2$, тогда $b = 2$, $c = 1$. Уравнение плоскости KBC_1

$2y + z - 2 = 0$, её вектор нормали $\vec{n_1}(0;\ 2;\ 1)$. Найдем угол γ между плоскостями ABC и KBC_1: $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}447$, $\gamma \approx 64°$.

О т в е т. а) $\approx 49°$; б) $\approx 64°$.

11. Упражнения на повторение раздела «Применение уравнений прямой и плоскости»

257. Исследуйте, лежит ли прямая $\begin{cases} 3x + y - z - 2 = 0, \\ 7x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ в плоскости $x + y - 2z - 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Найдем координаты двух точек данной прямой. Сложим уравнения системы и отнимем от второго уравнения первое: $\begin{cases} 10x + 2y - 6 = 0, \\ 4x + 2z - 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + y - 3 = 0, \\ 2x + z - 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 5x, \\ z = 1 - 2x. \end{cases}$

Если $x = 0$, то $y = 3$, $z = 1$. Если $x = 1$, то $y = -2$, $z = -1$. Получили точки (0; 3; 1) и (1; –2; –1).

Проверим, принадлежат ли эти точки данной плоскости: $0 + 3 - 2 - 1 = 0$ и $1 - 2 + 2 - 1 = 0$. Получили верные равенства, следовательно, две точки прямой принадлежат данной плоскости, поэтому и сама прямая принадлежит этой плоскости.

О т в е т. Лежит.

258. Прямая задана уравнениями $\frac{x+5}{5} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{3}$. Найдите расстояния от каких-либо двух точек этой прямой до плоскости $2x + 2y - z = 0$.

Р е ш е н и е. Запишем параметрические уравнения данной прямой
$$\begin{cases} x = 5t - 5, \\ y = 4t - 4, \\ z = 3t - 3. \end{cases}$$

При $t = 1$ получим точку $O(0; 0; 0)$, эта точка принадлежит плоскости.

При $t = -1$ получим точку $M(-10; -8; -6)$. Расстояние d от точки M до данной плоскости равно $d = \frac{|-20 - 16 + 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{30}{3} = 10$.

При $t = 0$ получим точку $N(-5; -4; -3)$, она находится от данной плоскости на расстоянии

$$d = \frac{|-10 - 8 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{15}{3} = 5.$$

О т в е т. Расстояние от точки $M(-10; -8; -6)$ равно 10, от точки $N(-5; -4; -3)$ равно 5.

261. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно перпендикулярны, а их длины соответственно равны 3, 2, 6, $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$. Найдите угол между: а) прямыми, на которых лежат векторы $\vec{d}$ и $\vec{p}$; б) прямой, содержащей вектор $\vec{d}$, и плоскостью $x + 2y + 2z - 1 = 0$; в) плоскостью, заданной векторами $\vec{d}$ и $\vec{p}$, и плоскостью $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$.

Р е ш е н и е. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ от начала координат: $\vec{a}$ на оси Ox, $\vec{b}$ на оси Oy, $\vec{c}$ на оси Oz. Тогда координаты векторов $\vec{a}(3; 0; 0)$, $\vec{b}(0; 2; 0)$, $\vec{c}(0; 0; 6)$; $\vec{d}(3; 6; 6)$, $\vec{p}(3; -2; -6)$.

а) $\cos\alpha = \frac{|9-12-36|}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{49}} = \frac{39}{9\cdot 7} = \frac{13}{21}$, $\alpha = \arccos\frac{13}{21}$.

б) $\sin\varphi = \frac{|3+12+12|}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{9}} = \frac{27}{9\cdot 3} = 1$, $\varphi = 90°$.

в) Векторы $\vec{d}$ и $\vec{p}$ отложены от точки $O(0; 0; 0)$. Пусть $\vec{d} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OB}$, тогда $A(3; 6; 6)$, $B(3; -2; -6)$. Составим уравнение плоскости AOB: $\begin{cases} 3a+6b+6c=0, \\ 3a-2b-6c=0; \end{cases}$ $\begin{cases} a+2b+2c=0, \\ 3a-2b-6c=0. \end{cases}$ Сложив уравнения системы, получим $4a - 4c = 0$, то есть $a = c$, тогда $b = -\frac{3}{2}c$.

Пусть $a = c = 2$, тогда $b = -3$. Уравнение плоскости AOB $2x - 3y + 2z = 0$, её вектор нормали $\vec{n_1}(2; -3; 2)$.

Запишем общее уравнение плоскости $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$: $3x - 2y + 2z - 6 = 0$, её вектор нормали $\vec{n_2}(3; -2; 2)$. Найдем угол γ между плоскостями: $\cos\gamma = \frac{|6+6+4|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}} = \frac{16}{17}$. $\gamma = \arccos\frac{16}{17}$.

О т в е т. а) $\arccos\frac{13}{21}$; б) $90°$; в) $\arccos\frac{16}{17}$.

264. Две вершины правильного тетраэдра $PABC$ лежат на оси Ox, а третьей является точка $(0; 6; 0)$. Найдите высоту PH этого тетраэдра.

Р е ш е н и е. В правильном тетраэдре все ребра равны. Пусть вершины A и B лежат на оси Ox, а вершина $C(0; 6; 0)$ на оси Oy (рисунок 68). Тогда начало координат O – середина ребра AB. Отрезок $CO = 6$ – медиана равностороннего ΔABC. Найдем длину ребра a тетраэдра из равенства $6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $a = 4\sqrt{3}$.

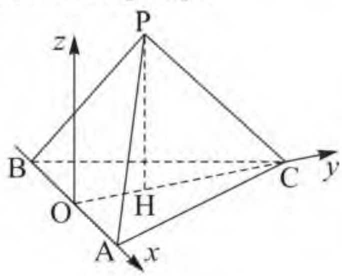


Рисунок 68

В ΔPHC $\angle H = 90°$, $PC = 4\sqrt{3}$, $CH = \frac{2}{3}CO = 4$, следовательно, $PH = \sqrt{48-16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Ответ. $4\sqrt{2}$.

265. Из точки $M(0;\ 0;\ 18)$ к плоскости Oxy проведены наклонные MK и MN, длины ортогональных проекций которых на эту плоскость соответственно равны 40 и 30, а $KN = 50$. Найдите расстояние от ортогональной проекции точки M на плоскость Oxy до плоскости MNK.

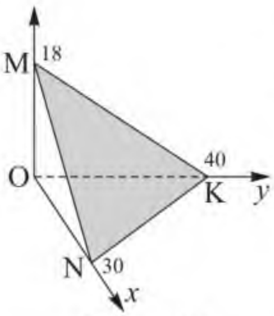


Рисунок 69

Решение. Так как точка M принадлежит оси Oz, то её ортогональной проекцией на плоскость Oxy является точка O. Так как $40^2 + 30^2 = 50^2$, то, согласно обратной теореме Пифагора, $\angle NOK = 90°$. Тогда проекциями наклонных MK и MN на эту плоскость являются соответственно отрезки OK и ON (рисунок 69).

Уравнение плоскости MNK «в отрезках» $\frac{x}{30} + \frac{y}{40} + \frac{z}{18} = 1$, а общее уравнение этой плоскости $12x + 9y + 20z - 360 = 0$.

Расстояние d от точки O до этой плоскости равно $d = \frac{|-360|}{\sqrt{144+81+400}} = \frac{360}{25} = \frac{72}{5} = 14{,}4$.

Ответ. 14,4.

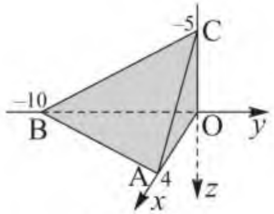


Рисунок 70

266. Найдите площадь поверхности тетраэдра, вершинами которого являются начало координат и точки пересечения плоскости $5x - 2y - 4z - 20 = 0$ с осями координат.

Решение. Запишем данное уравнение плоскости в виде: $\frac{x}{4} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{-5} = 1$. Эта плоскость пересекает ось Ox в точке $A(4;\ 0;\ 0)$, ось Oy в точке $B(0;\ -10;\ 0)$, ось Oz в точке $C(0;\ 0;\ -5)$ (рисунок 70).

Площадь поверхности тетраэдра $OABC$ найдем как сумму площадей его граней: $\frac{1}{2}(5 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC)$.

$AB = \sqrt{16+100} = 2\sqrt{29}$, $BC = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5}$, $AC = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$,

$\cos\angle ABC = \dfrac{116+125-41}{2\cdot 2\sqrt{29}\cdot 5\sqrt{5}} = \dfrac{200}{20\sqrt{29\cdot 5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$, $\sin\angle ABC = \sqrt{1-\dfrac{20}{29}} =$

$= \dfrac{3}{\sqrt{29}}$, $S_{OABC} = \dfrac{1}{2}\left(110 + \dfrac{10\sqrt{29\cdot 5}\cdot 3}{\sqrt{29}}\right) = 55 + 15\sqrt{5}$.

О т в е т. $55 + 15\sqrt{5}$.

267. Существует ли плоскость, которой принадлежат точки $A(3;\ 4;\ 5)$, $B(3;\ 5;\ 4)$, $C(4;\ 3;\ 5)$, $D(4;\ 5;\ 3)$, $M(5;\ 3;\ 4)$, $N(5;\ 4;\ 3)$? Если существует, то найдите расстояние от начала координат до такой плоскости.

Р е ш е н и е. Найдем уравнение плоскости ABC. Имеем $\begin{cases} 3a+4b+5c+d=0, \\ 3a+5b+4c+d=0, \\ 4a+3b+5c+d=0; \end{cases}$ выполнив вычитание членов первого уравнения от второго и третьего, получим $\begin{cases} b-c=0, \\ a-b=0, \\ 3a+4b+5c+d=0; \end{cases}$ откуда $a = b = c$, $d = -12a$.

Уравнение плоскости ABC $x + y + z - 12 = 0$. Так как координаты точек D, M и N удовлетворяют данному уравнению, то все эти точки принадлежат этой плоскости.

Расстояние d от начала координат до плоскости ABC равно $d = \dfrac{|-12|}{\sqrt{3}} =$ $= 4\sqrt{3}$.

О т в е т. Существует, $d = 4\sqrt{3}$.

270. Даны точки $B(-1;\ 2;\ 3)$ и $C(-2;\ 3;\ 4)$. Какую фигуру образует множество всех точек $M(x;\ y;\ z)$, для каждой из которых верно равенство $MB^2 - MC^2 = 16$? Запишите уравнение этой фигуры.

Р е ш е н и е. Используя формулу расстояния между точками, данное равенство запишем в виде $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - (x+2)^2 - (y-3)^2 - (z-4)^2 =$ $= 16$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, получим $-2x + 2y + 2z - 31 = 0$. Следовательно, множеством всех точек $M(x;\ y;\ z)$, для каждой из которых верно равенство $MB^2 - MC^2 = 16$ является плоскость $2x - 2y - 2z + 31 = 0$.

О т в е т. Плоскость $2x - 2y - 2z + 31 = 0$.

271. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Найдите угол между прямыми AC и CB.

Р е ш е н и е. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j}$. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}(4; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC}(3; 4; 0)$, $\overrightarrow{CB}(1; -2; 0)$.

Тогда $\cos\angle(AC; CB) = \dfrac{|3-8|}{5\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\angle(AC; CB) = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

О т в е т. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

272. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{i}$ равен $120°$, а между векторами $\vec{a}$ и $\vec{k}$ – $135°$. Найдите угол между прямыми, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{j}$.

Р е ш е н и е. Пусть координаты вектора $\vec{a}(x; y; z)$, $|\vec{a}| = 1$. Учитывая, что $\vec{i}(1; 0; 0)$ и $\cos\angle(\vec{a}; \vec{i}) = \dfrac{x}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} = -\dfrac{1}{2}$, найдем $x = -\dfrac{1}{2}$. Так как $\vec{k}(0; 0; 1)$ и $\cos\angle(\vec{a}; \vec{k}) = \dfrac{z}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Используя формулу длины вектора $\vec{a}$, найдем y: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y^2 = 1 - \dfrac{3}{4}$, $y = \pm\dfrac{1}{2}$. Тогда $\vec{a}\left(-\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\cos\angle(\vec{a}; \vec{j}) = \pm\dfrac{1}{2}$. Так как угол α между прямыми, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{j}$, не больше $90°$, то $\cos\alpha = |\cos\angle(\vec{a}; \vec{j})| = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 60°$.

О т в е т. $60°$.

273. Дан тетраэдр $PABC$. Известны координаты его вершины $C(0; 4; 0)$ и точки $M(2; 3; -2)$ – середины ребра AB. Найдите высоту PH этого тетраэдра, если H принадлежит прямой CM, а координаты вершины P равны: а) $(1; 2; -1)$; б) $(1; 2; 3)$.

Р е ш е н и е. Так как $H \in CM$ и $PH \perp CM$, то $PH = PC \cdot \sin\angle PCM$ (рисунок 71).

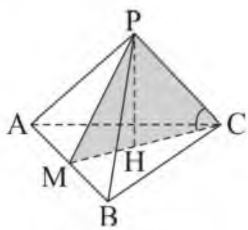


Рисунок 71

а) $CM = \sqrt{4+1+4} = 3$, $PM = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $CP = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$.

$\cos\angle MCP = \dfrac{6+9-3}{2\sqrt{6}\cdot 3} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

$\sin\angle MCP = \sqrt{1-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $PH = \sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

б) $CM = 3$, $PM = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $CP = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$,

$\cos\angle MCP = \dfrac{14+9-27}{2\sqrt{14}\cdot 3} = \dfrac{-4}{6\sqrt{14}} = -\dfrac{2}{3\sqrt{14}}$, $\sin\angle MCP = \sqrt{1-\dfrac{4}{126}} = \dfrac{\sqrt{122}}{3\sqrt{14}} =$

$= \dfrac{\sqrt{61}}{3\sqrt{7}}$, $PH = \sqrt{14}\cdot\dfrac{\sqrt{61}}{3\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{122}}{3}$.

Ответ. а) $\sqrt{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{122}}{3}$.

III. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ

12. Цилиндр и его элементы. Сечение цилиндра плоскостью

297. Найдите высоту цилиндра, в котором диагональ сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 дм от нее, в два раза длиннее радиуса основания.

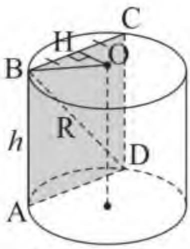


Рисунок 72

Р е ш е н и е. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси – это прямоугольник $ABCD$ (рисунок 72). Перпендикуляр OH, проведенный из центра O основания к хорде BC, является расстоянием от оси до этого сечения, по условию $OH = 4$ дм.

В ΔOBH $BH = \sqrt{R^2 - 16}$, где R – радиус основания цилиндра.

В ΔABD катеты $AD = 2BH$, $AB = h$ – высота цилиндра, гипотенуза $BD = 2R$, тогда $h = \sqrt{4R^2 - 4(R^2 - 16)} = 8$ (дм).

О т в е т. 8 дм.

299. Через образующую цилиндра проведены две секущие плоскости, угол между которыми равен β. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если одно из сечений является осевым.

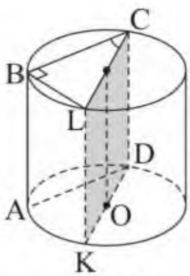


Рисунок 73

Р е ш е н и е. Пусть через образующую CD проведены два сечения $ABCD$ и осевое сечение $CDKL$, которые являются прямоугольниками (рисунок 73).

Угол BCL является линейным углом между плоскостями этих сечений, $\angle BCL = \beta$. В прямоугольном ΔBCL $BC = CL \cdot \cos\beta$.

Так как $S_{ABCD} = AB \cdot BC$, $S_{CDKL} = KL \cdot CL$, причем $AB = KL$, то $\frac{S_{ABCD}}{S_{CDKL}} = \frac{AB \cdot CL \cdot \cos\beta}{KL \cdot CL} = \cos\beta$.

О т в е т. $\cos\beta$.

300. Цилиндр расположен внутри двугранного угла, равного 60°, так, что на гранях угла лежит по одной его образующей. Расстояние от центра основания цилиндра до ребра двугранного угла равно 15 см. Найдите радиус основания цилиндра.

Р е ш е н и е. Пусть грани двугранного угла с ребром MN содержат образующие AB и CD цилиндра (рисунок 74). Угол АМС является линейным углом данного двугранного угла, $\angle AMC = 60°$. Прямые MA и MC – касательные к окружности основания цилиндра с центром в точке O, луч MO – биссектриса угла AMC и радиус OC перпендикулярен MC. Длина отрезка OM равна расстоянию от центра основания цилиндра до ребра двугранного угла, $OM = 15$ см.

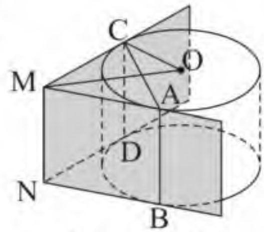


Рисунок 74

В ΔOMC $\angle C = 90°$, $\angle M = 30°$, следовательно, $OC = \frac{1}{2} \cdot OM = 7{,}5$ см.

О т в е т. 7,5 см.

301. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу, равную 120°, и удалена от оси на расстояние d. Диагональ полученного сечения равна $4d$. Найдите высоту и радиус основания цилиндра.

Р е ш е н и е. Сечением цилиндра плоскостью, параллельной его оси является прямоугольник $ABCD$ (рисунок 75). Так как эта плоскость отсекает от окружности основания дугу AB, равную 120°, то $\angle AOB = 120°$, где O – центр окружности основания цилиндра. В ΔOAB высота $OH = d$ является медианой и биссектрисой, поэтому $\angle BOH = 60°$, $OB = 2d$, $AB = 2BH = 2 \cdot 2d \cdot \sin 60° = 2d\sqrt{3}$.

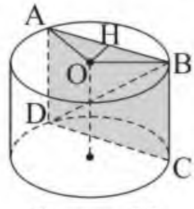


Рисунок 75

Из прямоугольного ΔADB, в котором $BD = 4d$, найдем высоту цилиндра $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{16d^2 - 12d^2} = 2d$.

О т в е т. $2d$, $2d$.

302. Через образующую цилиндра проведены две секущие плоскости цилиндра. Площади полученных сечений равны $10\sqrt{3}$ см² и $10\sqrt{2}$ см². Найдите угол между плоскостями этих сечений, если радиус основания цилиндра равен 2 см, а его высота 5 см.

Р е ш е н и е. Пусть через образующую AB цилиндра проходят два его сечения $ABCD$ и $ABKL$, площади которых соответственно равны $10\sqrt{3}$ см² и $10\sqrt{2}$ см² (рисунок 76). Учитывая, что высота цилиндра равна 5 см, найдем $AD = 2\sqrt{3}$ см, $AL = 2\sqrt{2}$ см.

Угол между указанными плоскостями – это угол DAL. Для его вычисления проведем перпендикуляры ON и OM к хордам AD и AL соответственно, тогда $AN = \frac{1}{2} \cdot AD = \sqrt{3}$ см, $AM = \frac{1}{2} \cdot AL = \sqrt{2}$ см.

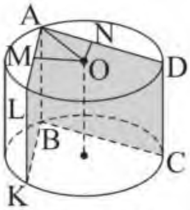


Рисунок 76

Так как по условию $OA = 2$ см, то $\cos\angle OAN = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\angle OAM = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\angle OAN = 30°$, $\angle OAM = 45°$, а $\angle DAL = 30° + 45° = 75°$.

Ответ. 75°.

303. Двугранный угол между плоскостями двух сечений цилиндра, проходящими через одну из его образующих, равен 60°. Площади этих сечений равны 110 см^2 и 130 см^2. Найдите радиус основания цилиндра, если его высота равна 10 см.

Решение. По условию $\angle DAL = 60°$, $AB = 10$ см, $S_{ABKL} = 110$ см^2, $S_{ABCD} = 130$ см^2 (рисунок 77). Следовательно, $AL = 11$ см, $AD = 13$ см.

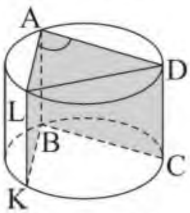


Рисунок 77

В ΔADL сторона $DL = \sqrt{11^2 + 13^2 - 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cos 60°} = \sqrt{121 + 169 - 143} = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$ (см). Найдем радиус основания цилиндра, используя формулу $\frac{DL}{\sin\angle DAL} = 2R$, $R = \frac{7\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 7$ (см).

Ответ. 7 см.

304. Образующая цилиндра является общей стороной двух его перпендикулярных сечений, площади которых равны S_1 и S_2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

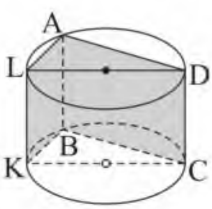


Рисунок 78

Решение. Так как сечения $ABCD$ и $ABKL$ перпендикулярны, то $\angle DAL = 90°$, $DL = 2R$ – диаметр основания цилиндра (рисунок 78). Осевым сечением является прямоугольник $DCKL$, $S_{DCKL} = 2Rh$, где h – высота цилиндра, $h = KL = AB$.

Обозначим $AD = a$, $AL = b$, тогда в ΔADL $4R^2 = a^2 + b^2$. Так как $a = \frac{S_1}{h}$, $b = \frac{S_2}{h}$, то получим $4R^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{h^2}$, $(2Rh)^2 = S_1^2 + S_2^2$, $2Rh = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

Ответ. $\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

305. а) Найдите наибольшее расстояние между двумя точками поверхности цилиндра, радиус основания которого равен 6 см, а высота – 5 см.

б) Дан цилиндр, радиус основания которого равен r, а образующая – l. Найдите наименьший угол между плоскостью его основания и прямой, проходящей через две точки окружностей его оснований.

Р е ш е н и е. а) Зафиксируем точку A на окружности верхнего основания цилиндра, тогда образующая AB – перпендикуляр на плоскость его нижнего основания (рисунок 79). Длина наклонной AC будет наибольшей, если её ортогональная проекция на эту плоскость будет наибольшей. Из всех хорд наибольшую длину имеет диаметр. Из ΔABC, в котором $AB = 5$ см, $BC = 12$ см, найдем $AC = \sqrt{25+144} = 13$ (см).

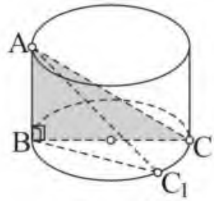


Рисунок 79

б) Угол между плоскостью основания цилиндра и прямой, проходящей через две точки окружностей его оснований будет наименьшим, если наименьшим будет тангенс этого угла.

Из ΔABC $\operatorname{tg}\angle ACB = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2r}$, из ΔABC_1 $\operatorname{tg}\angle AC_1B = \dfrac{AB}{BC_1}$, $\dfrac{AB}{BC} < \dfrac{AB}{BC_1}$.

Следовательно, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2r}$.

О т в е т. а) 13 см; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2r}$.

307. В помещении высотой 1,9 м на полу стоит цилиндрическая бочка. Можно ли в этом помещении повалить бочку на бок, если диаметр ее основания 1,2 м, а высота – 1,6 м?

Р е ш е н и е. Осевым сечением цилиндра с диаметром основания 1,2 м и высотой – 1,6 м является прямоугольник с диагональю, равной $\sqrt{1{,}2^2 + 1{,}6^2} = 2$ (м). При наклоне бочки возникнет ситуация, когда диагональ будет перпендикулярна плоскости пола. Так как высота помещения меньше 2 м, то повалить бочку на пол в этом помещении нельзя.

О т в е т. Нельзя.

13. Площадь поверхности цилиндра

321. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $9\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите высоту равностороннего цилиндра, вписанного в эту пирамиду.

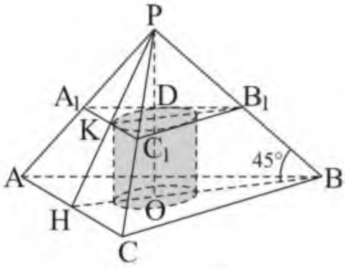


Рисунок 80

Решение. Пусть дана пирамида $PABC$, её основание – правильный ΔABC, а каждое боковое ребро равно $9\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол, равный 45° (рисунок 80). В эту пирамиду вписан цилиндр, ось DO которого лежит на высоте PO пирамиды. Окружность верхнего основания цилиндра касается сторон равностороннего $\Delta A_1B_1C_1$, подобного ΔABC. Так как цилиндр равносторонний, то его высота $DO = 2r$, где r – радиус основания цилиндра.

Центры O и D оснований цилиндра принадлежат соответственно медианам BH и B_1K. Из подобия треугольников KPD и HPO следует, что $\frac{PD}{PO} = \frac{DK}{OH}$, где $PD = PO - 2r$, $DK = r$, $OH = \frac{1}{2} \cdot$ BO.

Из ΔPOB имеем $PO = BO = 9$ см. Тогда $\frac{9-2r}{9} = \frac{r \cdot 2}{9}$, $9 = 4r$, $2r = 4{,}5$ см.

Ответ. 4,5 см.

322. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с ней угол α. В пирамиду вписан цилиндр, высота которого равна радиусу его основания. Найдите радиус основания цилиндра.

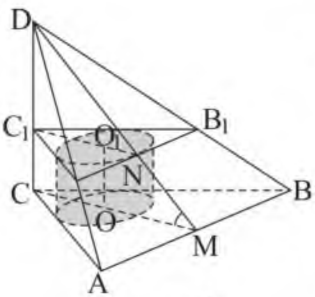


Рисунок 81

Решение. Пусть дана пирамида $DABC$, в которой $DC \perp (ABC)$, ΔABC – правильный, $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – его медиана, $\angle DMC = \alpha$ (рисунок 81).

В пирамиду вписан цилиндр, высота OO_1 которого равна радиусу r основания цилиндра.

Из подобия треугольников DCM и DC_1N следует, что $\frac{CM}{C_1N} = \frac{DC}{DC_1}$, где $C_1N = 3r$, $DC_1 = DC - r$. Тогда получим: $CM \cdot (DC - \text{r}) = 3r \cdot DC$, $CM \cdot DC = r(3 \cdot DC + CM)$, $r = \frac{CM \cdot DC}{3 \cdot DC + CM}$.

В ΔDMC сторона $DC = CM \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Тогда $3 \cdot DC + CM =$ $= \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot (3\operatorname{tg} \alpha + 1)$, следовательно, $r = \frac{a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2(3\operatorname{tg} \alpha + 1)}$.

Ответ. $\frac{a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2(3\operatorname{tg} \alpha + 1)}$.

323. Правильный тетраэдр $OABC$, ребро которого равно b, и цилиндр расположены так, что вершина O тетраэдра является центром одного основания цилиндра, а вершины A, B, C лежат на окружности другого основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Решение. Радиус R основания цилиндра – это отрезок $BO_1 = \frac{2}{3} \cdot BH = \frac{2 \cdot b\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$ (рисунок 82). Высоту цилиндра $h = OO_1$ найдем из ΔBO_1O: $O_1O = \sqrt{b^2 - \frac{3b^2}{9}} =$ $= \frac{b\sqrt{6}}{3}$. Площадь S полной поверхности цилиндра равна: $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = \frac{2\pi b^2}{3} + \frac{2\pi b^2\sqrt{2}}{3} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{3} \cdot \pi b^2$.

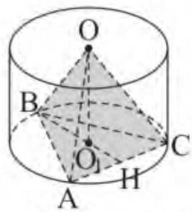


Рисунок 82

Ответ. $\frac{2 + 2\sqrt{2}}{3} \cdot \pi b^2$.

324. Периметр осевого сечения цилиндра равен P. Найдите высоту и радиус основания этого цилиндра, если площадь его боковой поверхности наибольшая.

Решение. По условию $P = 2(2R + h)$, где R – радиус основания цилиндра, h – его высота. Из этого равенства выразим $2R = \frac{P}{2} - h$.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{\text{бок.}} = 2\pi Rh$. Рассмотрим эту площадь как функцию, зависящую от h, и установим при каком значении h она наибольшая, получим $S(h) = -\pi h^2 + \frac{\pi P}{2} h$. Это квадратичная функция, она принимает наибольшее значение при $h = \frac{-\pi P}{2 \cdot (-2\pi)} = \frac{P}{4}$, при этом $R = \frac{P}{4} - \frac{h}{2} = \frac{P}{4} - \frac{P}{8} = \frac{P}{8}$.

Ответ. $h = \frac{P}{4}$, $R = \frac{P}{8}$.

325. Дан цилиндр, диаметр основания которого равен d. Сечением боковой поверхности этого цилиндра является эллипс, плоскость которого наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью.

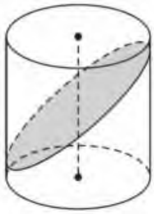


Рисунок 83

Р е ш е н и е. Ортогональной проекцией данного сечения цилиндра на плоскость его основания является круг, площадь которого равна $\frac{\pi d^2}{4}$ (рисунок 83). Используя формулу зависимости площади фигуры и площади её ортогональной проекции, запишем $S_{\text{круга}} = S_{\text{сеч.}} \cdot \cos 30°$, откуда $S_{\text{сеч.}} = \frac{\pi d^2 \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}}$.

О т в е т. $\frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}}$.

326. Цилиндр и правильный октаэдр $EABCDF$ расположены так, что вершины E и F октаэдра являются центрами оснований цилиндра, а вершины A, B, C, D принадлежат цилиндрической поверхности (рисунок 84). Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если ребро октаэдра равно a.

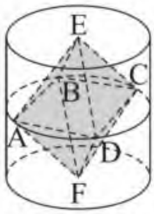


Рисунок 84

Р е ш е н и е. Так как ребро октаэдра равно a, а все его диагональные сечения – равные квадраты, то $AC = a\sqrt{2} = EF$. Таким образом, радиус основания цилиндра $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а его высота $h = a\sqrt{2}$. Тогда площадь S полной поверхности цилиндра равна $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = \pi a^2 + 2\pi a^2 = 3\pi a^2$.

О т в е т. $3\pi a^2$.

14. Конус и его элементы. Сечение конуса плоскостью

335. Одна из образующих конуса принадлежит плоскости, не имеющей с конусом общих внутренних точек. На каком наибольшем расстоянии от этой плоскости находятся точки конуса, если его образующая равна 2,5 дм, а радиус основания – 2 дм?

Р е ш е н и е. Пусть образующая BC принадлежит указанной плоскости. Эта плоскость касается боковой поверхности конуса (рисунок 85). Наиболее удаленной от этой плоскости точкой конуса будет вершина А его осевого сечения ABC.

Для нахождения расстояния AH запишем площадь ΔABC двумя способами: $\frac{1}{2}AC \cdot BO = \frac{1}{2}BC \cdot AH$, где $AC = 4$ дм, $BO = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = 1{,}5$ (дм).

Тогда $AH = \frac{4 \cdot 1{,}5}{2{,}5} = 2{,}4$ (дм).

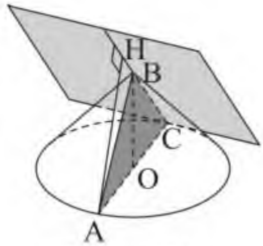


Рисунок 85

О т в е т. 2,4 дм.

336. Два конуса имеют общую вершину и общий центр оснований. Из точки окружности основания большего конуса проведены две касательные к окружности основания меньшего конуса, угол между которыми 60°. Образующая большего конуса наклонена к основанию под углом 45°. Найдите радиус основания меньшего конуса, если его высота равна 5 см.

Р е ш е н и е. Пусть даны два конуса с общей вершиной D и общим центром основания O (рисунок 86). Из точки A окружности основания большего конуса проведены две касательные AB и AC к окружности основания меньшего конуса, $\angle BAC = 60°$. Отрезки OB и OC являются радиусами основания меньшего конуса и они перпендикулярны касательным. Кроме того, точка О лежит на биссектрисе $\angle BAC$, следовательно, в ΔABO $\angle BAO = 30°$ и $OB = \frac{1}{2} \cdot$ AO.

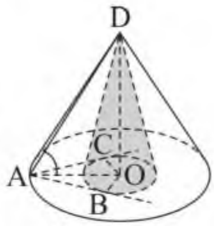


Рисунок 86

Так как $\angle DAO = 45°$, то в прямоугольном ΔADO $AO = DO = 5$ см. Итак, искомый радиус равен 2,5 см.

О т в е т. 2,5 см.

337. а) Найдите ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна 1 дм и наклонена к плоскости основания под углом 45°.

б) В конус вписан куб. Найдите косинус угла при вершине конуса в его осевом сечении, если середина высоты конуса принадлежит верхней грани куба.

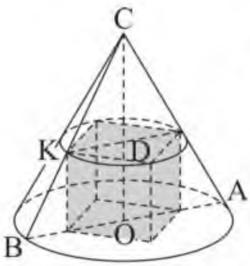


Рисунок 87

Р е ш е н и е. а) Пусть ребро куба, вписанного в конус, равен а (рисунок 87), O – центр основания конуса, образующая конуса $BC = 1$ дм, $\angle CBO = 45° = \angle CKD$, где K – вершина куба, D – центр его верхней грани.

Прямоугольные треугольники CBO и CKD равнобедренные, причем $CO = BO = BC \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (дм), $KD = CD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ дм.

Отрезок $CD = CO - DO$, где $DO = a$. Тогда имеем: $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - a$, $a\sqrt{2} = \sqrt{2} - 2a$, $a \cdot (\sqrt{2} + 2) = \sqrt{2}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1$.

б) Осевое сечение конуса равнобедренный ΔABC (рисунок 87), его высота CO является биссектрисой $\angle ACB = \varphi$. Косинус этого угла можно найти, используя формулу $\cos \varphi = \frac{1 - tg^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + tg^2 \frac{\varphi}{2}}$. Так как $CD = DO = a$, где a – длина ребра вписанного в конус куба, $KD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то $\text{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3}.$$

О т в е т. а) $\sqrt{2} - 1$; б) $\frac{1}{3}$.

338. Найдите площадь основания конуса высотой h, в котором имеются три взаимно перпендикулярные образующие.

Р е ш е н и е. Пусть три взаимно перпендикулярные образующие – это DA, DB, DC и длины их равны a (рисунок 88). Прямоугольные треугольники DAB, DBC, DAC равны, причем $AB = BC = AC = a\sqrt{2}$.

В равностороннем ΔABC точка O – центр описанной около него окружности, её радиус $R = CO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

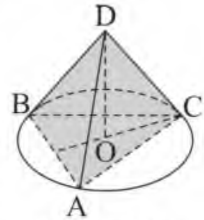


Рисунок 88

Выразим a через h, по теореме Пифагора в ΔDOC: $h^2 + \frac{2a^2}{3} = a^2$, $a^2 = 3h^2$, $a = h\sqrt{3}$. Тогда $R = h\sqrt{2}$ и $S_{осн.} = \pi R^2 = 2\pi h^2$.

О т в е т. $2\pi h^2$.

339. а) Радиус основания конуса равен 12 см, а его высота равна 8 см. Какую наибольшую площадь может иметь сечение конуса, содержащее его вершину?

б) Площадь наибольшего сечения конуса, содержащего его вершину, вдвое больше площади его осевого сечения. Найдите угол наклона образующей конуса к основанию.

Р е ш е н и е. а) Пусть ΔABC – осевое сечение конуса, O – центр его основания (рисунок 89). Тогда $AO = 12$ см, $CO = 8$ см и $\operatorname{tg}\angle ACO = \frac{12}{8} = 1{,}5$. Следовательно, $\angle ACO \approx 56°$, а $\angle ACB \approx 112°$, то есть осевое сечение – тупоугольный треугольник. Поэтому наибольшую площадь будет иметь сечение конуса, в котором угол между образующими 90°.

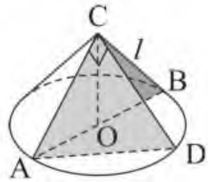


Рисунок 89

Найдем длину образующей конуса $l = \sqrt{144 + 64} = \sqrt{208}$ (см). Тогда $S_{наибол.} = \frac{1}{2} \cdot l^2 = 104$ (см^2).

б) По условию задачи $\angle ACB$ в осевом сечение конуса – тупой и $\frac{1}{2}l^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin\angle ACB$ (рисунок 89). Следовательно, $\sin\angle ACB = \frac{1}{2}$, $\angle ACB = 150°$. Тогда угол наклона образующей конуса к основанию $\angle CAB = 15°$.

О т в е т. а) 104 см^2; б) 15°.

340. а) Образующая конуса равна 1 м и наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите высоту равностороннего цилиндра, вписанного в конус.

б) Можно ли в равносторонний конус, образующая которого равна 1 м, вписать равносторонний цилиндр? Если можно, то найдите радиус основания такого цилиндра.

Р е ш е н и е. а) Пусть в конус с вершиной P и центром основания O вписан цилиндр, высота KO которого равна диаметру основания BC (рисунок 90). Точка B принадлежит образующей конуса PA. По условию $PA = 1$ м, $\angle PAO = 45° = \angle PBK$.

В ΔAPO $AO = PO = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (м). В ΔPBK $BK = PK = \frac{1}{2} \cdot KO$. Таким образом, $PO = PK + KO = \frac{3}{2} \cdot KO$, $KO = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (м).

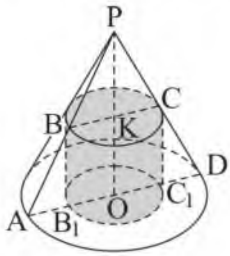


Рисунок 90

б) Осевое сечение равностороннего конуса – правильный ΔPAD со стороной, равной 1 м (рисунок 90). Его высота $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (м). Предположим, что в этот конус вписан цилиндр, высота KO которого равна $2r$, где r – радиус основания цилиндра, тогда $PK = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2r$. С другой стороны, ΔPBC является правильным со стороной, равной $2r$ и его высота $PK = \frac{2r\sqrt{3}}{2} =$ $= r\sqrt{3}$. Получили $r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2r$, откуда $r = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})}{2} =$ $= \sqrt{3} - 1{,}5$.

О т в е т. а) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ м; б) Можно, $\sqrt{3} - 1{,}5$ м.

341. В конус вписана прямая треугольная призма с равными ребрами. Радиус основания конуса равен R, а угол наклона образующей к плоскости основания равен 60°. Найдите длину ребра призмы.

Р е ш е н и е. Пусть в конус с вершиной P и центром основания O вписана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рисунок 91). Вершина A_1 призмы принадлежит образующей PD. По условию $\angle PDO = 60° = \angle PA_1O_1$, где O_1 – центр окружности, описанной около правильного $\Delta A_1B_1C_1$, $DO = R$. Высота конуса $PO = R \cdot \text{tg } 60° = R\sqrt{3}$.

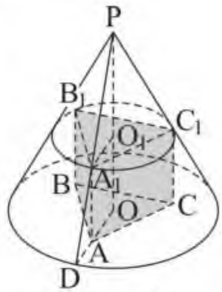


Рисунок 91

Обозначим длину ребра данной призмы a, тогда и её высота $O_1O = a$, отрезки $A_1O_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $PO_1 = R\sqrt{3} - a$.

Из подобия треугольников PDO и PA_1O_1 следует, что $\frac{R\sqrt{3}}{R\sqrt{3} - a} = \frac{R \cdot 3}{a\sqrt{3}}$, откуда $3Ra = 3R^2\sqrt{3} - 3Ra$, $6Ra = 3R^2\sqrt{3}$, $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

О т в е т. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

15. Площадь поверхности конуса

352. Найдите площадь поверхности тела, полученного в результате вращения ромба со стороной 4 см и углом 30° вокруг: а) его стороны; б) его меньшей диагонали.

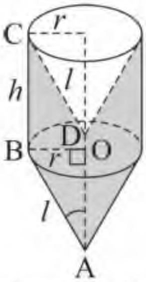


Рисунок 92

Р е ш е н и е. а) При вращении ромба $ABCD$ вокруг стороны AD получится тело, показанное на рисунке 92. Его поверхность состоит из боковых поверхностей двух равных конусов и цилиндра, образующие l и высота h которых соответственно равны $AB = DC = CB = 4$ см, а радиусы r оснований равны $BO = 2$ см. Искомая площадь равна $S = 2\pi rl + 2\pi rh = 32\pi$ (см^2).

б) При вращении данного ромба $ABCD$ вокруг его меньшей диагонали BD получится тело, состоящее из двух равных конусов, образующие l которых $DC = BC = 4$ см, а радиус r основания $CO = 4 \cdot \cos 15°$ (рисунок 93).

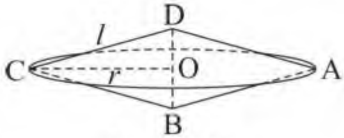


Рисунок 93

$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Тогда $r = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, а искомая площадь равна $S = 2\pi rl = 8\pi(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см^2.

О т в е т. а) 32π см^2; б) $8\pi(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см^2.

353. В равносторонний конус вписана правильная шестиугольная пирамида. Найдите двугранный угол пирамиды при ребре ее основания.

Р е ш е н и е. Пусть в конус с вершиной P и центром основания O вписана правильная пирамида $PABCDFE$ (рисунок 94). По условию осевое сечение конуса ΔPBF является равносторонним со стороной, равной $2R$, где R – радиус основания конуса, его высота $PO = R\sqrt{3}$. Так как шестиугольник $ABCDFE$ – правильный, то в ΔABO высота $OH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Угол PHO является линейным углом двугранного угла при ребре AB основания пирамиды. Из ΔPOH найдем $\text{tg}\angle PHO = \dfrac{PO}{OH} = 2$. Следовательно, $\angle PHO = \text{arctg } 2$.

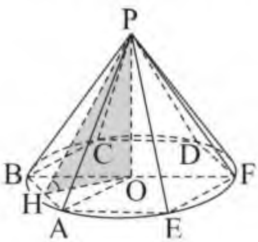


Рисунок 94

О т в е т. arctg 2.

354. Найдите высоту конуса, в который вписана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания a и углом 30° между соседними боковыми ребрами.

Р е ш е н и е. Пирамида $PABCD$, основание которой квадрат $ABCD$ со стороной a, вписана в конус с вершиной P и центром основания O (рисунок 95). По условию $\angle APD = 30°$. Пусть боковое ребро пирамиды равно b. Тогда из ΔAPD имеем: $a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos 30°$, $a^2 = b^2(2 - \sqrt{3})$, $b^2 = \dfrac{a^2}{2-\sqrt{3}} = a^2(2+\sqrt{3})$.

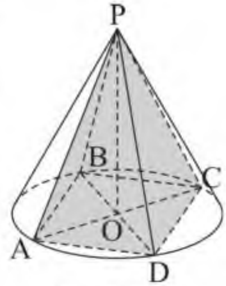


Рисунок 95

Высоту конуса PO найдем из ΔAPO:

$$PO = \sqrt{a^2(2+\sqrt{3}) - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6+4\sqrt{3}}.$$

О т в е т. $\frac{a}{2}\sqrt{6+4\sqrt{3}}$.

355. Найдите наибольшую площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в конус с высотой 12 дм и радиусом основания 5 дм.

Р е ш е н и е. В конус с высотой $PO = 12$ дм и радиусом основания $OA = 5$ дм вписан цилиндр с высотой $CO = h$ и радиусом основания $BC = r$ (рисунок 96).

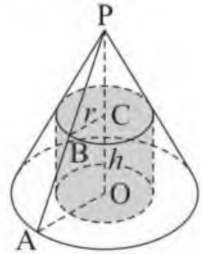


Рисунок 96

Из подобия треугольников PBC и PAO имеем: $\dfrac{12-h}{12} = \dfrac{r}{5}$, $60 - 5h = 12r$, $h = 12 - 2{,}4r$. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S = 2\pi rh$. Исследуем функцию $S(r) = 2\pi r(12 - 2{,}4r)$ на наибольшее значение.

Имеем $S(r) = 2\pi(-2{,}4r^2 + 12r)$. Эта квадратичная функция имеет наибольшее значение при $r = \dfrac{-12}{-4{,}8} = \dfrac{5}{2}$, тогда $h = 12 - 2{,}4 \cdot 2{,}5 = 6$.

Итак, наибольшая площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данный конус равна $S = 2\pi \cdot \dfrac{5}{2} \cdot 6 = 30\pi$ (дм^2).

О т в е т. 30π дм^2.

356. В конусе радиус основания относится к его высоте как $1 : \sqrt{2}$. Найдите угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус.

Р е ш е н и е. В конус с вершиной P и центром основания O вписана правильная пирамида $PABC$ (рисунок 97). По условию $\frac{OC}{PO} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, где $OC = R$, тогда высота $PO = R\sqrt{2}$.

Обозначим сторону основания пирамиды a, боковое ребро b. Тогда $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, откуда $a = R\sqrt{3}$; $b = \sqrt{2R^2 + R^2} = R\sqrt{3}$. Получили, что $a = b$, то есть боковые грани пирамиды – правильные треугольники. Поэтому линейным углом двугранного угла при ребре PC пирамиды является $\angle AKB$, где K – середина PC.

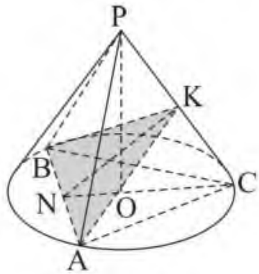


Рисунок 97

В ΔAKB $AK = BK = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R$, $\cos\angle AKB = \frac{2 \cdot \frac{9}{4}R^2 - 3R^2}{2 \cdot \frac{9}{4}R^2} = \frac{1}{3}$, $\angle AKB = $ $= \arccos\frac{1}{3}$.

О т в е т. $\arccos\frac{1}{3}$.

357. В правильной треугольной пирамиде вершина основания удалена на 10 см от противолежащей боковой грани. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к основанию под углом 75°. Найдите высоту и радиус основания конуса.

Р е ш е н и е. Дана правильная пирамида $PABC$, вершина B которой удалена от плоскости грани APC на 10 см (рисунок 98). Пусть N – середина AC, тогда высота BK ΔBPN перпендикулярна грани APC, $BK = 10$ см.

В эту пирамиду вписан конус с вершиной P и центром основания O. Его радиус основания – это отрезок $ON = \frac{1}{3} \cdot BN$, высота конуса – отрезок PO.

Из ΔBPN имеем $BN = \frac{10}{\sin 75^\circ}$, $PO = ON \cdot \text{tg } 75^\circ$.

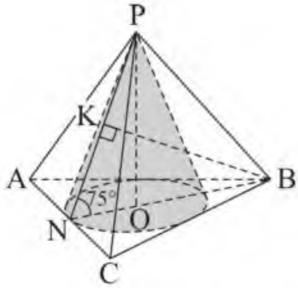


Рисунок 98

$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75° =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\mathrm{tg}\, 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. $BN = \frac{10 \cdot 4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$ $= 10(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, тогда $ON = \frac{10}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $PO = \frac{10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3} \cdot \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})} =$ $= \frac{10}{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

Ответ. $\frac{10}{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, $\frac{10}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

16. Усеченный конус и его элементы

365. Образующая усеченного конуса равна 8 см и наклонена к плоскости его нижнего основания под углом 60°. Прямая, содержащая диагональ его осевого сечения, делит этот угол пополам. Найдите радиусы оснований усеченного конуса.

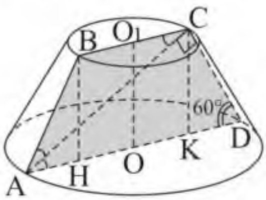


Рисунок 99

Р е ш е н и е. Пусть трапеция $ABCD$ – осевое сечение данного усеченного конуса, точки O и O_1 – центры его оснований (рисунок 99). По условию $AB = CD = 8$ см, $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, AC – биссектриса этого угла. Следовательно, $\angle BCA = 30° = \angle BAC$. Значит ΔABC – равнобедренный, в нем $AB = BC = 8$ см, $BO_1 = 4$ см.

Проведем высоты трапеции BH и CK. Тогда $AH = DK = 4$ см, $HK = BC = 8$ см. Следовательно, $AD = 16$ см, $AO = 8$ см.

О т в е т. 4 см, 8 см.

367. Образующая усеченного конуса равна l и наклонена к плоскости его нижнего основания под углом φ. Найдите радиусы оснований усеченного конуса, если отношение площадей его оснований равно $\frac{1}{9}$.

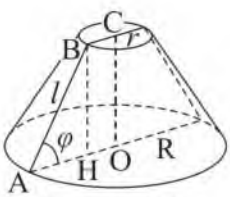


Рисунок 100

Р е ш е н и е. Пусть R и r – радиусы нижнего и верхнего оснований усеченного конуса, тогда $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{9}$. Следовательно, $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$, $R = 3r$. В ΔABH катет $AH = 2r = l \cdot \cos\varphi$ (рисунок 100). Тогда $r = \frac{l}{2}\cos\varphi$, $R = \frac{3l}{2}\cos\varphi$.

О т в е т. $0{,}5l \cdot \cos\varphi$; $1{,}5l \cdot \cos\varphi$.

368. Найдите отношение площади сечения, перпендикулярного высоте усеченного конуса и проходящего через ее середину, к площади его осевого сечения, диагонали которого перпендикулярны.

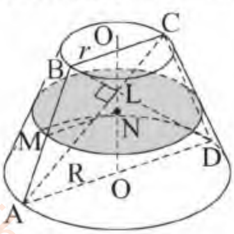


Рисунок 101

Р е ш е н и е. Пусть трапеция $ABCD$ – осевое сечение усеченного конуса с высотой $h = OO_1$, N – середина высоты, L – точка пересечения диагоналей указанной трапеции (рисунок 101).

Так как по условию $AC \perp BD$, то $h = R + r$, где R и r – радиусы оснований усеченного конуса, и $S_{ABCD} = h^2$.

Радиус сечения, перпендикулярного высоте и проходящего через точку N равен $NM = \frac{R+r}{2} = \frac{h}{2}$, площадь этого сечения равна $S_{\text{сеч.}} = \pi\frac{h^2}{4}$. Тогда искомое отношение $\frac{S_{\text{сеч.}}}{S_{ABCD}} = \frac{\pi}{4}$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

369. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна S. Найдите площадь сечения конуса, которое содержит хорды его оснований, стягивающие дуги, равные 2α, если известно, что угол между плоскостями сечения и основания равен φ.

Решение. Пусть трапеция $PKCD$ – осевое сечение усеченного конуса, $S_{PKCD} = (r + R)h$, где r, R – радиусы его оснований, $h = O_1O$ – высота (рисунок 102).

Найдем площадь сечения $ABCD$, если $\angle AOD = \angle BO_1C = 2\alpha$, $\angle NMO = \varphi$, где N и M – середины хорд BC и AD соответственно. Проведем перпендикуляр NL к плоскости основания, $NL = h$, тогда из ΔMNL $NM = \frac{h}{\sin\varphi}$.

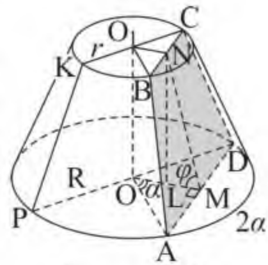


Рисунок 102

Из прямоугольных ΔAOM и ΔBO_1N, в которых $\angle AOM = \angle BO_1N = \alpha$, найдем $AM = R \cdot \sin\alpha$, $BN = r \cdot \sin\alpha$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot NM = (R + r) \cdot \text{h} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{S \cdot \sin\alpha}{\sin\varphi}$.

Ответ. $\frac{S \cdot \sin\alpha}{\sin\varphi}$.

17. Площадь поверхности усеченного конуса

377. Через две образующие усеченного конуса, угол между которыми 90°, проведена плоскость, отсекающая от окружностей его оснований дуги в 120°. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если отношение площадей его оснований равно $\frac{1}{4}$, а образующая $2\sqrt{6}$ см.

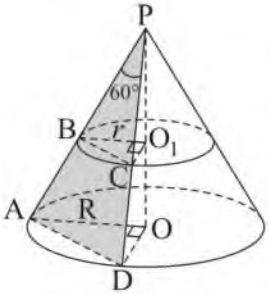


Рисунок 103

Р е ш е н и е. Пусть угол между образующими BA и CD усеченного конуса равен 60°. Дополним его до полного конуса с вершиной P, тогда треугольники APD и BPC – правильные со сторонами 6 см и 4 см соответственно и $AB = CD = 2$ см (рисунок 103).

Точки O и O_1 – центры оснований данного усеченного конуса, R и r – их радиусы. Так как треугольники AOD и BO_1C – равнобедренные прямоугольные, то $R = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (см), $r = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (см).

$S_{\text{бок.ус.кон.}} = \pi \cdot AB \cdot (R + r) = 10\pi\sqrt{2}$ (см^2).

О т в е т. $10\pi\sqrt{2}$ см^2.

381. Площади нижнего, верхнего оснований и боковой поверхности усеченного конуса относятся как 4 : 3 : 2 соответственно. Найдите угол наклона образующей к его нижнему основанию.

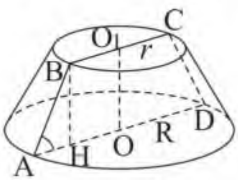


Рисунок 104

Р е ш е н и е. Пусть R и r – радиусы усеченного конуса, l – его образующая, тогда $\frac{R^2}{r^2} = \frac{4}{3}$ и $\frac{r^2}{l(R+r)} = \frac{3}{2}$. Угол φ наклона образующей к его нижнему основанию найдем из ΔABH, где $AH = R - r$, $AB = l$, $\cos\varphi = \frac{R-r}{l}$ (рисунок 104). Из второй пропорции имеем

$l = \frac{2r^2}{3(R+r)}$, тогда $\cos\varphi = \frac{3(R^2 - r^2)}{2r^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{2}$, $\varphi = 60°$.

О т в е т. 60°.

382. Какую высоту будет иметь ведро, если в заготовке для получения его боковой поверхности величины дуг равны по 72°, а их радиусы – 92 см и 65 см? Достаточно ли листа жести размером 105 × 30 см для его изготовления?

Р е ш е н и е. Заготовка ведра показана на рисунке 105, *а*. Длины дуг AA_1 и BB_1 выразим двумя способами: $2\pi R = \frac{\pi \cdot 92 \cdot 72^\circ}{180^\circ}$ и $2\pi r = \frac{\pi \cdot 65 \cdot 72^\circ}{180^\circ}$. Тогда $R = 18{,}4$ см, $r = 13$ см.

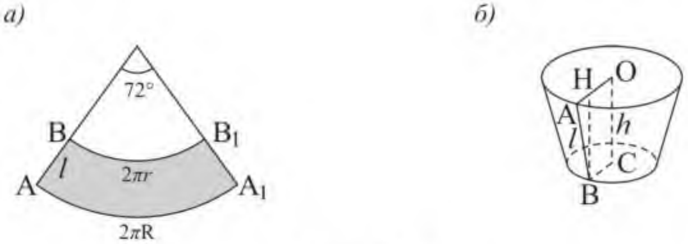


Рисунок 105

Из ΔABH (рисунок 105, *б*), в котором $AB = 92 - 65 = 27$ (см), $AH = R - r = 5{,}4$ (см), найдем высоту ведра $BH = \sqrt{27^2 - 5{,}4^2} = \sqrt{\frac{216 \cdot 324}{100}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 81}{100}} = 10{,}8\sqrt{6}$ (см).

Так как хорда $AA_1 = 2 \cdot 92 \cdot \sin 36^\circ \approx 108{,}2$ (см), то листа жести казанных размеров недостаточно для изготовления данного ведра.

О т в е т. Нет.

18. Сфера и шар. Сечение шара плоскостью

390. Сфера задана уравнением $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$. Установите, каково взаимное расположение этой сферы и плоскости: а) $2x-3y+4z-10=0$; б) $2x+y-2z-6=0$; в) $6x-3y+6z+5=0$.

Решение. Найдем расстояние d от её центра $(2; -1; 3)$ до указанной плоскости и сравним его с радиусом сферы $R=3$: а) $d=\dfrac{|4+3+12-10|}{\sqrt{4+9+16}}=$

$=\dfrac{9}{\sqrt{29}}\approx 1{,}7<R$; б) $d=\dfrac{|4-1-6-6|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{9}{3}=3=R$;

в) $d=\dfrac{|12+3+18+5|}{\sqrt{36+9+36}}=\dfrac{38}{9}>R$.

Ответ. Плоскость: а) пересекает сферу; б) касается её; в) не имеем с ней общих точек.

391. Составьте уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2+y^2+z^2=9$ в точке: а) $M(1; 2; 2)$; б) $N(1; -2; -2)$.

Решение. Центр данной сферы – это точка $O(0; 0; 0)$. Отрезки OM и ON перпендикулярны искомым плоскостям, поэтому векторы $\overrightarrow{OM}(1; 2; 2)$ и $\overrightarrow{ON}(1; -2; -2)$ являются векторами нормали для этих плоскостей. Следовательно, искомые плоскости задаются уравнениями:

а) $x+2y+2z+d=0$; б) $x-2y-2z+d=0$. Подставив координаты точек M и N в соответствующие уравнения, получим $d=-9$.

Ответ. а) $x+2y+2z-9=0$; б) $x-2y-2z-9=0$.

394. Два шара, радиусы которых равны 16 см и 9 см, касаются в точке C и имеют общую касательную AB (A и B – точки касания). Общая касательная CM этих шаров пересекает прямую AB в точке M (рисунок 106). Найдите расстояние CM.

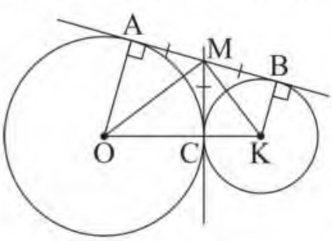


Рисунок 106

Решение. По свойству касательных, проведенных из точки M, $MA=MC=MB$. Точки O и K центры данных шаров, лучи MO и MK являются биссектрисами смежных углов AMC и BMC поэтому $\angle OMK=90°$. Отрезок MC является высотой ΔOMK, $MC=\sqrt{OC\cdot KC}=$ $=\sqrt{16\cdot 9}=12$ (см).

Ответ. 12 см.

395. Шар радиуса 3 см касается двух параллельных плоскостей в точках A и B. Через середину отрезка AB проведена прямая, составляющая с прямой AB угол 60°. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между данными плоскостями.

Р е ш е н и е. Пусть прямые AC и BD касаются окружности с диаметром AB (рисунок 107), O – середина AB. Так как $AC \parallel BD$, то все указанные точки лежат в одной плоскости. При этом $AB \perp BD$, $\angle(AB; CD) = 60°$, $OC = OD = \frac{3}{\cos 60°} = 6$ (см), $CD = 12$ см.

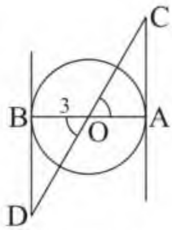


Рисунок 107

О т в е т. 12 см.

396. а) Два касающихся шара, радиусы которых 7 дм и 1 дм, имеют общую касательную AB (A и B – точки касания). Найдите расстояние AB.

б) Два касающихся шара, радиусы которых 8 см и 12 см, лежат на плоскости. Найдите расстояние от точки касания шаров до этой плоскости.

Р е ш е н и е. а) Используем рисунок 106 и объяснение, данное при решении задачи № 394. По условию $OA = OC = 7$ дм, $KB = KC = 1$ дм, тогда отрезок $AB = 2MC = 2\sqrt{7}$ дм.

б) Пусть центры шаров – точки A и C, тогда расстояния $AB = 12$ см, $CD = 8$ см, M – точка касания шаров, найдем расстояние MN (рисунок 108). Проведем $CF \parallel BD$, $CF \cap MN = K$. В ΔACF гипотенуза $AC = 20$ см, катет $AF = 12 - 8 = 4$ (см). Из подобия треугольников ACF и MCK имеем: $\frac{20}{8} = \frac{4}{MK}$, $MK = 1{,}6$ см. Тогда $MN = 8 + 1{,}6 = 9{,}6$ (см).

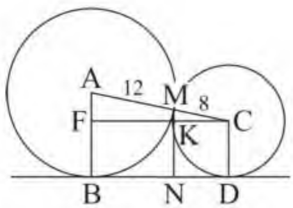


Рисунок 108

О т в е т. а) $2\sqrt{7}$ дм; б) 9,6 см.

400. Сфера проходит через вершины равнобедренного треугольника с основанием $6\sqrt{2}$ см и углом 45° при вершине. Расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 8 см. Найдите радиус сферы.

Р е ш е н и е. Равнобедренный ΔABC, в котором $AB = BC$, $AC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle ABC = 45°$, вписан в окружность с центром в точке K, являющейся сечением сферы плоскостью ABC (рисунок 109). Отрезок $AK = r$ – радиус этой окружности. Применяя формулу $\frac{b}{\sin\angle B} = 2r$, получим: $2AK = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45°}$, $AK = 6$ см.

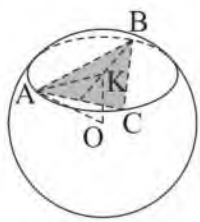


Рисунок 109

Расстояние от центра O сферы до плоскости треугольника – это отрезок $OK = 8$ см, OA – радиус сферы. Из прямоугольного ΔAKO имеем $OA = 10$ см.

О т в е т. 10 см.

401. а) Сфера радиуса 10 см проходит через вершины A, B, D параллелограмма $ABCD$. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости параллелограмма, если $AD = BD = 10$ см, $\angle BCD = 45°$.

б) Сфера проходит через три вершины ромба со стороной 12 см и углом 60°. Найдите расстояние от центра сферы до четвертой вершины ромба, если радиус сферы 8 см.

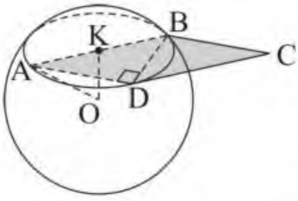


Рисунок 110

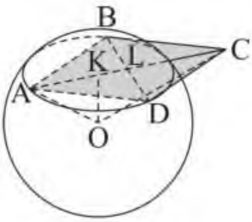


Рисунок 111

Р е ш е н и е. а) Расстояние от центра O сферы до плоскости параллелограмма $ABCD$ – это отрезок OK (рисунок 110). Найдем его длину из прямоугольного ΔAKO. Так как $\angle BAD = 45°$ и $AD = BD = 10$ см, то ΔADB – прямоугольный с гипотенузой $AB = 10\sqrt{2}$ см. Тогда $AK = \frac{1}{2} = 5\sqrt{2}$ см, $OA = 10$ см, $OK = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$ (см).

б) Пусть дан ромб $ABCD$ со стороной $AB = 12$ см и углом $\angle A = 60°$ (рисунок 111). Тогда ΔABD – равносторонний, точка K – центр описанной около него окружности, является точкой пересечения его медиан. Следовательно, точка K принадлежит диагонали AC ромба и отрезок $KC = 2AK$.

Из ΔABD найдем $AK = \frac{2}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (см), тогда $KC = 8\sqrt{3}$ см.

Из ΔAKO найдем $OK = \sqrt{64 - 48} = 4$ (см).

Из ΔOKC искомое расстояние $OC = \sqrt{16 + 192} = 4\sqrt{13}$ (см).

О т в е т. а) $5\sqrt{2}$ см; б) $4\sqrt{13}$ см.

402. а) Центр шара радиуса R лежит внутри прямого двугранного угла. Шар касается одной из граней этого угла, а диаметр сечения шара плоскостью второй грани R. Найдите расстояние от центра шара до ребра двугранного угла.

б) Найдите радиус сферы, касающейся граней двугранного угла, равного 120°, если ее центр удален от ребра этого двугранного угла на b см.

Р е ш е н и е. а) Рассмотрим сечение сферы, содержащее её центр O и перпендикулярное граням данного двугранного угла (рисунок 112). Тогда $\angle CDA = 90°$ является его линейным углом, прямая DA касается окружности в точке A, прямая DC пересекает эту окружность в точках B и C, причем $BC = OA = R$.

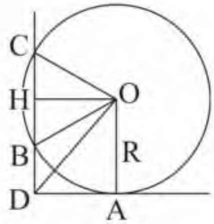


Рисунок 112

Искомое расстояние OD найдем из ΔAOD, в котором $AD = OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, где OH – медиана равностороннего ΔBOC, тогда $OD = \frac{R\sqrt{7}}{2}$.

б) Пусть сечение сферы, содержащее её центр O и перпендикулярное граням данного двугранного угла, касается его граней в точках A и B (рисунок 113). Тогда $\angle ADB = 120°$ линейный угол данного двугранного угла, по условию $OD = b$. По свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки D, луч DO – биссектриса $\angle ADB$. Следовательно, в ΔODA $\angle ADO = 60°$, $OA = b \cdot \sin 60° = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ (см).

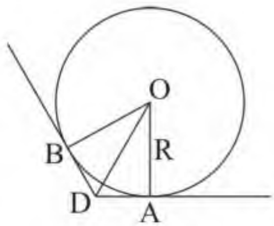


Рисунок 113

О т в е т. а) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$; б) $\frac{b\sqrt{3}}{2}$ см.

404. Сфера касается сторон треугольника ABC. Найдите радиус сферы, если ее центр лежит в плоскости этого треугольника, $AB = BC = 15$ см, $AC = 24$ см.

Р е ш е н и е. Так как центр O сферы лежит в плоскости ΔABC, то окружность, содержащая центр сферы, является вписанной в этот треугольник (рисунок 114). Поскольку ΔABC – равнобедренный, то точка O лежит на его высоте и медиане $BH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ (см).

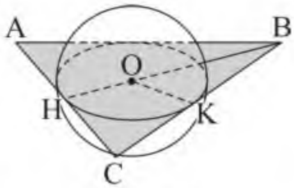


Рисунок 114

Пусть окружность касается стороны BC в точке K. Отрезки OH и OK равны радиусу R сферы, $BO = 9 - R$. Выразим $\sin\angle CBH$ из треугольников BHC и BKO, получим $\frac{12}{15} = \frac{R}{9-R}$, откуда $R = 4$ см.

О т в е т. 4 см.

405. а) Каждая сторона ромба, равная $6\sqrt{2}$ см, касается шара, радиус которого 5 см. Найдите площадь ромба, если его плоскость удалена от центра шара на 4 см.

б) Диагонали ромба 15 см и 20 см. Сфера радиуса 10 см касается всех сторон ромба. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

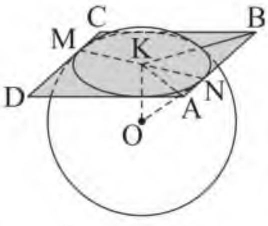


Рисунок 115

Р е ш е н и е. а) Пусть противоположные стороны ромба касаются шара в точках M и N, тогда отрезок MN – высота ромба (рисунок 115). Точка K – центр окружности, вписанной в ромб, середина MN, O – центр шара. Тогда из ΔOKN, в котором $OK = 4$ см, $ON = 5$ см, найдем $KN = 3$ см. Следовательно, $MN = 6$ см и $S_{\text{ромба}} = 36\sqrt{2}$ см^2.

б) Используем рисунок 115. Зная диагонали, найдем сторону ромба $AB = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 10^2} = \frac{25}{2}$ (см). Выразим площадь ΔAKB двумя способами $\frac{75}{2} = \frac{25}{4} \cdot KN$, откуда $KN = 6$ см. Тогда расстояние от центра сферы до плоскости ромба $OK = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

О т в е т. а) $36\sqrt{2}$ см^2; б) 8 см.

406. а) Докажите, что если две сферы имеют три общие точки, то они пересекаются по окружности, содержащейся в плоскости, перпендикулярной прямой, проходящей через их центры.

б) Найдите длину линии пересечения сфер, радиусы которых равны 50 мм и 58 мм, а расстояние между их центрами 72 мм.

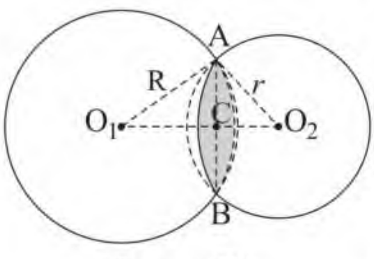


Рисунок 116

Р е ш е н и е. а) Три общие точки двух сфер не лежат на одной прямой. Через три такие точки проходит только одна плоскость сечения этих сфер. Сечением сферы является окружность с центром, например, в точке C, диаметр которой равен AB. Прямая, проходящая через центры O_1 и O_2 данных окружностей является серединным перпендикуляром к отрезку AB и любому другому диаметру окружности с центром C. Следовательно, прямая O_1O_2 перпендикулярна плоскости, содержащей эту окружность.

б) Пусть $O_1A = 58$ мм, $O_2A = 50$ мм, $O_1O_2 = 72$ мм. Обозначим длину отрезка CO_2 через x мм и составим и решим уравнение $58^2 - (72 - x)^2 = 50^2 - x^2$,

$(72 - x)^2 - x^2 = 58^2 - 50^2$, $(72 - 2x) \cdot 72 = 8 \cdot 108$, $x = 30$. Тогда радиус окружности $CA = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$ (мм), а её длина равна $2\pi \cdot 40 = 80\pi$ (мм).

Ответ. б) 80π мм.

407. а) Докажите, что если хорды AB и CD шара пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

б) Сферу радиуса $\sqrt{41}$ см пересекают две перпендикулярные плоскости по равным окружностям с общей хордой 6 см. Найдите радиусы этих окружностей.

Решение. а) Через две пересекающиеся хорды проходит единственная плоскость. Сечением шара этой плоскостью является круг, в котором выполняется указанное свойство: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

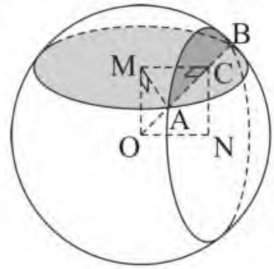


Рисунок 117

б) Пусть O – центр данной сферы, M и N – центры равных окружностей, лежащих в перпендикулярных плоскостях и имеющих общую хорду $AB = 6$ см, C – середина этой хорды. Тогда $OA = \sqrt{41}$ см – радиус сферы, $MA = r$ – искомый радиус окружности. Учитывая, что $OMCN$ – квадрат и $OM^2 = MC^2$, составим и решим уравнение $41 - r^2 = r^2 - 9$, $2r^2 = 50$, $r = 5$.

Ответ. б) 5 см.

409. В сосуд формы полусферы с внутренним диаметром 5 дм налита вода до уровня 1 дм. Сосуд надо наклонить, но так, чтобы вода из него не выливалась. Найдите множество допустимых значений величины угла наклона.

Решение. Пусть O – центр, OA – радиус сферы, C – центр круга, являющегося поверхностью воды (рисунок 118). По условию $AC = 1$ дм, тогда $OC = 1{,}5$ дм.

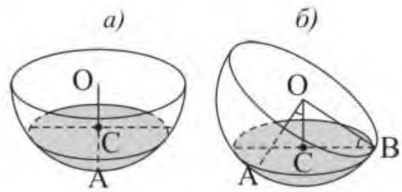


Рисунок 118

Сосуд наклонили на максимально возможный угол OBC. Из прямоугольного ΔOBC найдем $\sin\angle OBC = \dfrac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$, $\angle OBC \approx 37°$. Тогда $0° < \angle OBC \le \arcsin 0{,}6$.

Ответ. $(0; \arcsin 0{,}6]$.

19. Площадь поверхности шара

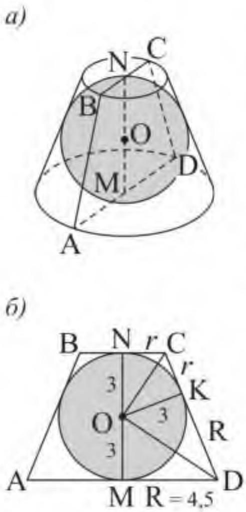


Рисунок 119

422. Дан усеченный конус, в который можно вписать шар. Высота этого конуса равна 6 см, а диаметр одного из оснований – 9 см. Найдите диаметр второго основания.

Р е ш е н и е. Пусть в усеченный конус вписан шар с центром O, отрезок MN – высота конуса и диаметр шара (рисунок 119, *а*). Рассмотрим осевое сечение $ABCD$ данного усеченного конуса. Сечением шара плоскостью ABC является круг с центром в точке O, вписанный в трапецию $ABCD$ (рисунок 117, *б*).

Отрезки $OM = ON = OK = 3$ дм, как радиусы шара. По свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки $CN = CK = r$, $DM = DK = R$. Учитывая, что ΔCOD – прямоугольный и OK – его высота, получим $9 = r \cdot 4{,}5$, $r = 2$ см. Следовательно, $BC = 4$ см.

О т в е т. 4 см.

423. б) В конус вписан шар и через точки его касания с образующими проведено сечение шара плоскостью. Найдите расстояние от вершины конуса до плоскости сечения, если радиус его основания R, а образующая составляет с основанием угол 45°.

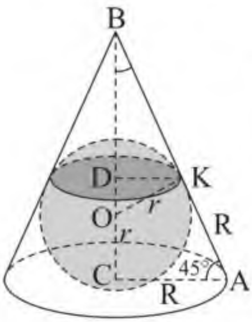


Рисунок 120

Р е ш е н и е. В конус с вершиной B и центром основания C вписан шар с центром в точке O, который касается образующей BA конуса в точке K (рисунок 120). Через точку K проходит сечение шара плоскостью – круг с центром D.

Так как в прямоугольном ΔABC $\angle BAC = 45°$, $CA = R$, то $AB = R\sqrt{2}$.

По свойству касательных, проведенных к окружности из точки A $AC = AK = R$, поэтому $BK = R\sqrt{2} - R$.

Так как ΔBDK прямоугольный с углом KBD равным 45°, то его гипотенуза $BK = BD\sqrt{2}$. Следовательно, расстояние от вершины конуса до плоскости сечения $BD = \dfrac{R\sqrt{2} - R}{\sqrt{2}} =$

$= R(1 - 0{,}5\sqrt{2})$.

О т в е т. $R(1 - 0{,}5\sqrt{2})$.

424. В усеченный конус, радиусы оснований которого 9 дм и 6 дм, вписан шар. Найдите угол наклона образующей усеченного конуса к плоскости его нижнего основания.

Р е ш е н и е. Используем рисунок 119, *б*. По условию $CN = CK = 6$ дм, $DM = DK = 9$ дм. Тогда в ΔCOD высота $OK = \sqrt{6 \cdot 9} = 3\sqrt{6}$ (дм). Проведем высоту CH трапеции $ABCD$. Тогда в ΔCHD $CH = 2OK = 3\sqrt{6}$ дм, $HD = 9 - 6 = 3$ (дм), $\operatorname{tg}\angle CDH = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$.

Можно рассмотреть ΔOKD, тогда ответ будет другой вид, так как $\angle KDM = 2\angle KDO = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

О т в е т. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{6}$.

425. Найдите площадь сферы, описанной около равностороннего цилиндра, площадь поверхности которого равна 3 дм^2.

Р е ш е н и е. Пусть сфера с центром в точке O описана около равностороннего цилиндра (рисунок 121). Образующая AB данного цилиндра равна диаметру основания, $AB = 2r$. Площадь поверхности такого цилиндра

$S_{ц.} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$. По условию $6\pi r^2 = 3$, откуда $r^2 = \frac{1}{2\pi}$.

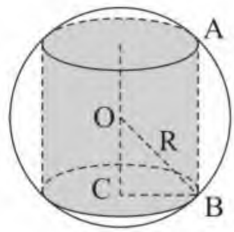


Рисунок 121

В прямоугольном ΔOBC катеты $OC = CB = r$, тогда его гипотенуза $OB = R = r\sqrt{2}$ дм. Площадь сферы $S = 4\pi R^2 = 8\pi r^2 = \frac{8\pi}{2\pi} = 4$ (дм^2).

О т в е т. 4 дм^2.

428. Около конуса описан шар, площадь большого круга которого равна 4π см^2, и в него вписан шар. Найдите радиус вписанного в конус шара, если образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом 30°.

Р е ш е н и е. Около конуса с вершиной A и центром основания H описан шар с центром в точке O (рисунок 122). Зная площадь большого круга $\pi R^2 = 4\pi$, найдем его радиус $R = 2$ см.

Так как образующая AB конуса наклонена к плоскости его основания под углом 30°, то ΔABO – правильный со стороной 2 см, его медиана и высота $BH = \sqrt{3}$ см.

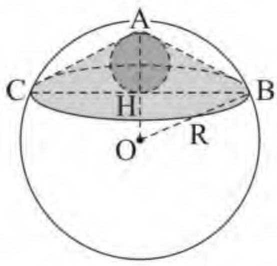


Рисунок 122

Чтобы найти радиус r шара вписанного в конус, выразим площадь ΔABC двумя способами: $\frac{3(}{2}BC \cdot AH = p \cdot r$, где p – его полупериметр.

Имеем $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = (2+\sqrt{3}) \cdot r$, $r = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = (2\sqrt{3}-3)$ (см).

О т в е т. $(2\sqrt{3}-3)$ см.

430. Найдите площадь поверхности шара вписанного: а) в куб, площадь полной поверхности которого равна S; б) в равносторонний конус, площадь полной поверхности которого равна Q.

Р е ш е н и е. а) Пусть ребро куба равно a, тогда радиус вписанного в него шара $R = \frac{a}{2}$. По условию $6a^2 = S$, откуда $a^2 = \frac{S}{6}$, следовательно, $R^2 = \frac{S}{24}$. Площадь поверхности шара равна $4\pi R^2 = \frac{1}{6}\pi S$.

б) Пусть радиус основания равностороннего конуса равен R, его образующая равна $2R$, площадь поверхности $S_{к.} = \pi R^2 + \pi R \cdot 2R = 3\pi R^2$. По условию $3\pi R^2 = Q$, откуда $R^2 = \frac{Q}{3\pi}$. Радиус шара, вписанного в равносторонний конус, равен $r = R \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{R}{\sqrt{3}}$, тогда $r^2 = \frac{Q}{9\pi}$. Площадь поверхности шара равна $4\pi r^2 = \frac{4\pi \cdot Q}{9\pi} = \frac{4}{9}Q$.

О т в е т. а) $\frac{1}{6}\pi S$; б) $\frac{4}{9}Q$.

431. В конус вписана сфера радиуса R. Окружность касания этой сферы с боковой поверхностью конуса является окружностью основания цилиндра, вписанного в сферу. Найдите площадь осевого сечения этого цилиндра, если образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом β.

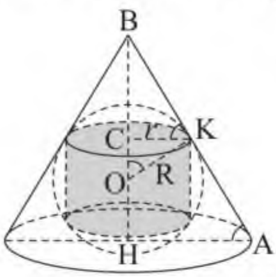


Рисунок 123

Р е ш е н и е. Пусть сфера с центром O вписана в конус с центром основания H, образующая BA которого наклонена к плоскости его основания под углом β, K – точка касания сферы поверхности конуса, $K \in BA$, C – центр верхнего основания цилиндра, вписанного в сферу (рисунок 123). Площадь осевого сечения этого цилиндра равна $2r \cdot h$, где $r = CK$, $h = 2OC$.

Так как $\angle BAH = \angle BKC = \angle COK = \beta$, то из ΔOCK, в котором $OK = R$, найдем $CK = R \cdot \sin\beta$, $OC = R \cdot \cos\beta$. Тогда искомая площадь равна $2R^2 \cdot 2\sin\beta \cdot \cos\beta = 2R^2 \cdot \sin 2\beta$.

О т в е т. $2R^2 \cdot \sin 2\beta$.

432. В цилиндр высотой 14 см вписан шар. Найдите радиус сечения шара плоскостью, проходящей через две образующие цилиндра, расстояние между которыми 10 см.

Р е ш е н и е. Так как в цилиндр вписан шар, то радиус основания цилиндра равен радиусу R шара, а высота цилиндра равна $2R$. Следовательно, $R = 7$ см. Через две образующие AB и MN проходит плоскость, пересекающая цилиндр и вписанный в него шар (рисунок 124). Сечением цилиндра этой плоскостью является прямоугольник $ABNM$, а сечением шара – круг, лежащий внутри этого прямоугольника. Расстояние OC от центра шара до указанного круга равно расстоянию O_1H от центра основания цилиндра до плоскости сечения.

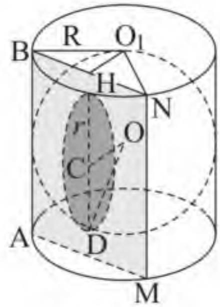


Рисунок 124

По условию хорда $BN = 10$ см, тогда $O_1H = \sqrt{49 - 25} = 2\sqrt{6}$ (см).

Из ΔOCD, в котором $OD = R = 7$ см, найдем радиус сечения шара $r = CD = \sqrt{49 - 24} = 5$ (см).

О т в е т. 5 см.

20. Упражнения на повторение раздела «Тела вращения и их элементы»

433. а) Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Высота призмы равна 24 см, а диагональ ее боковой грани равна 26 см. Найдите радиус основания цилиндра.

б) Правильная треугольная призма, все ребра которой равны a, вписана в цилиндр. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

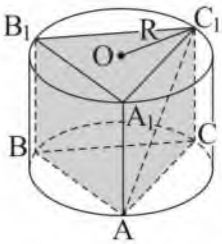


Рисунок 125

Р е ш е н и е. а) Пусть в цилиндр вписана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рисунок 125). Зная высоту призмы $C_1C = 24$ см и диагональ её боковой грани $AC_1 = 26$ см, найдем сторону основания призмы

$AC = \sqrt{2}$ $= 10$ (см). Так как призма правильная, то её основания правильные треугольники, вписанные в окружности основания цилиндра. Поэтому радиус R основания цилиндра равен $\frac{2}{3}$ медианы ΔABC:

$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ (см).

б) Используем рисунок 125. Высота цилиндра $h = a$, радиус основания $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда площадь осевого сечения цилиндра равна $2R \cdot h = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

О т в е т . а) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см; б) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

434. Дан конус, в осевое сечение которого вписана окружность. Высота конуса в 4 раза больше радиуса этой окружности. Найдите площадь поверхности конуса, если его образующая равна 9 см.

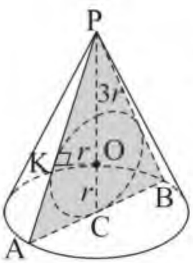


Рисунок 126

Р е ш е н и е. Пусть ΔABP – осевое сечение данного конуса, в него вписана окружность с центром O и радиусом r, точка O принадлежит высоте PC конуса (рисунок 126). Эта окружность касается стороны AP в точке K, тогда $OC = OK = r$. Так как $PC = 4r$, то $PO = 3r$.

В ΔPOK $\sin\angle OPK = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$. Из ΔACP, в котором $AP = l = 9$ см, $\sin\angle APC = \frac{1}{3}$, найдем радиус R основания конуса $R = CA = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$ (см).

Площадь поверхности конуса $S = \pi R^2 + \pi Rl = \pi(9 + 27) = 36\pi$ (см^2).

О т в е т. 36π см^2.

435. В шар радиуса R вписан конус, угол между высотой и образующей которого равен α. Найдите высоту конуса.

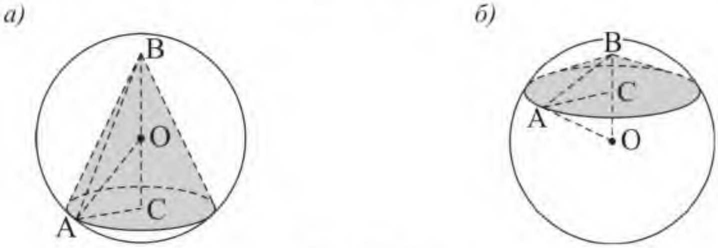


Рисунок 127

Р е ш е н и е. В шар с центром O вписан конус с вершиной B и центром основания C (рисунок 126). Угол $\angle ABC = \alpha$, $OB = OA = R$.

1) Если высота конуса $BC > R$, то в ΔAOC $\angle AOC = 2\alpha$, $OC = R \cdot \cos 2\alpha$. Тогда $BC = BO + OC = R(1 + \cos 2\alpha) = 2R\cos^2\alpha$.

2) Если $BC < R$, то в ΔAOC $\angle AOC = 180° - 2\alpha$, $OC = R \cdot \cos(180° - 2\alpha) = -R \cdot \cos 2\alpha$. Тогда $BC = BO - OC = R(1 + \cos 2\alpha) = 2R\cos^2\alpha$.

3) Если $BC = R$, то $\alpha = 45°$ и точки C совпадает с точкой O. Тогда высота конуса равна $R = 2R\cos^2\alpha$.

Итак, $BC = 2R\cos^2\alpha$ при $0° < \alpha < 90°$.

О т в е т. $2R\cos^2\alpha$.

436. Дан тетраэдр, в который можно вписать конус, причем стороны его основания равны 6,5 см, 7 см, 7,5 см, а образующая конуса наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности этого тетраэдра.

Р е ш е н и е. Пусть дан тетраэдре $PABC$ (рисунок 127). Так как в него можно вписать конус, образующая которого наклонена к основанию под углом 60°, то высоты боковых граней тетраэдра равны $PN = PK = PH = \dfrac{r}{\cos 60°} = 2r$, где r – радиус основания конуса. Найдем r, используя формулы площади ΔABC. Полупериметр ΔABC $p = \dfrac{21}{2}$,

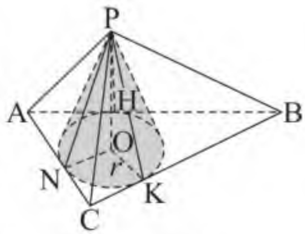


Рисунок 128

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\dfrac{21}{2} \cdot \dfrac{8}{2} \cdot \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{6}{2}} = 21$ (см^2) и $S_{\Delta ABC} = p \cdot r$, откуда $r = 2$ см, $PK = 4$ см.

$S_{\text{бок.конуса}} = \dfrac{21}{2} \cdot 4 = 42$ (см^2), $S_{\text{пол.}} = 42 + 21 = 63$ (см^2).

О т в е т. 63 см^2.

437. Докажите, используя рисунок 129, что площадь поверхности шарового сегмента равна площади круга $S = \pi l^2$, имеющего радиусом отрезок l, который проведен от вершины сегмента к окружности, служащей ему основанием (задача Архимеда).

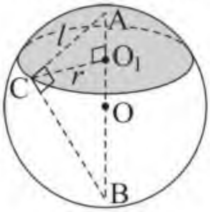


Рисунок 129

Р е ш е н и е. Площадь поверхности шарового сегмента $S = 2\pi Rh$, где $R = OA$, $h = AO_1$. В прямоугольном ΔABC катет AC есть среднее пропорциональное между гипотенузой AB и его проекцией AO_1 на гипотенузу. То есть имеем $l^2 = 2R \cdot h$. Следовательно, $S = \pi l^2$. Что и требовалось доказать.

438. В шар радиуса 10 см вписан конус, в который вписана пирамида, причем ее основание – прямоугольный треугольник с гипотенузой 19,2 см. Найдите высоту этой пирамиды.

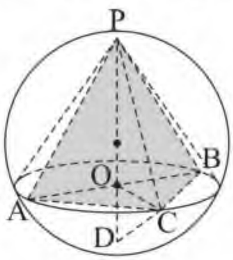


Рисунок 130

Р е ш е н и е. Пусть в шар с диаметром $PD = 20$ см вписан конус с вершиной P и центром основания O. В конус вписана пирамида $PABC$, основание ABC которой прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 19{,}2$ см (рисунок 129). Медиана CO этого треугольника равна 9,6 см. Причем отрезок CO является высотой в прямоугольном ΔPCD. Следовательно, $CO^2 = PO \cdot OD$. Пусть $PO = h$, решив уравнение $9{,}6^2 = h(20 - h)$, $h^2 - 20h + 92{,}16 = 0$, найдем $h_1 = 12{,}8$, $h_2 = 7{,}2$.

О т в е т. 12,8 см или 7,2 см.

439. Найдите радиус шара, описанного около конуса, в который вписана правильная треугольная пирамида со стороной основания $12\sqrt{3}$ см и боковым ребром 20 см.

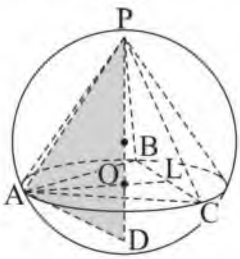


Рисунок 131

Р е ш е н и е. Пусть около конуса с вершиной P и центром основания O описан шар диаметра $PD = 2R$ (рисунок 130). В конус вписана правильная пирамида $PABC$, в которой отрезок $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 12$ (см). Тогда высота пирамиды $PO = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (см).

Из прямоугольного ΔPDA имеем $AO^2 = PO \cdot OD$, $144 = 16 \cdot (2R - 16)$, откуда найдем $R = 12{,}5$ см.

О т в е т. 12,5 см.

441. Найдите наибольшую площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в конус, высота которого равна 8 дм, а радиус основания – 6 дм.

Р е ш е н и е. Пусть в конус с вершиной B и центром основания O вписан цилиндр, высота которого CO (рисунок 131). Радиус основания конуса $OA = 6$ дм, а его высота $BO = 8$ дм.

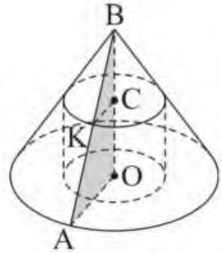


Рисунок 132

Обозначим радиус цилиндра $CK = r$, высоту цилиндра $CO = h$. Из подобия треугольников KBC и ABO имеем $\frac{r}{6} = \frac{8-h}{8}$, $r = 6 - \frac{3}{4}h$.

$S_{\text{бок.цил.}} = 2\pi rh = 2\pi\left(6h - \frac{3}{4}h^2\right)$. Наибольшее значение функция $f(h) = -\frac{3}{4}h^2 + 6h$ принимает при $h = \frac{-6 \cdot 2}{-3} = 4$. При этом $r = 3$, $S_{\text{бок.цил.}} = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$ (дм^2).

О т в е т. 24π дм^2.

442. Плоскость, образующая с осью цилиндра угол 45°, делит ось в отношении 1 : 3. Найдите радиус сечения этой плоскостью вписанного в цилиндр шара, если высота цилиндра равна $4\sqrt{2}$ см.

Р е ш е н и е. Пусть ось цилиндра $MN = 4\sqrt{2}$ см. Точка K делит её на части $NK = \sqrt{2}$ см, $KM = 3\sqrt{2}$ см. Сечение шара указанной плоскостью – круг с центром C, причем $\angle AKO = 45°$(рисунок 132).

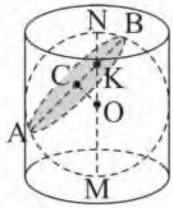


Рисунок 133

Проведем отрезок OC, перпендикулярный плоскости сечения, тогда ΔOKC – равнобедренный, с гипотенузой $KO = \sqrt{2}$ см и катетом $CK = \frac{KO}{\sqrt{2}} = 1$ (см). Обозначим радиус сечения $CA = r$. По свойству пересекающихся хорд AB и MN имеем $AK \cdot KB = NK \cdot KM$, $(r+1)(r-1) = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$, $r^2 = 7$, $r = \sqrt{7}$ см.

О т в е т. $\sqrt{7}$ см.

443. В конус вписана правильная треугольная пирамида, высота которой равна 20 см, а расстояние от основания этой высоты до плоскости боковой грани пирамиды равно 12 см. Найдите радиус сферы, описанной около этого конуса.

Р е ш е н и е. В конус с вершиной S и центром основания O вписана правильная пирамида $SABC$ (рисунок 133). Высота пирамиды $SO = 20$ см, расстояние от точки O до плоскости её боковой грани $OK = 12$ см. Около конуса описана сфера, её диаметр $SN = 2R$.

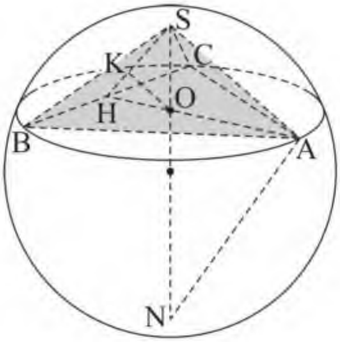


Рисунок 134

Из прямоугольного ΔOKS найдем $KS = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (см).

В прямоугольном ΔSOH $OK^2 = SK \cdot KH$, откуда $KH = \frac{144}{16} = 9$ (см). Тогда $OH = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ (см), $AO = 30$ см.

В прямоугольном ΔASN отрезок AO – высота, следовательно, $AO^2 = SO \cdot ON$, $ON = \frac{900}{20} = 45$ (см), $SN = 65$ см, $R = 32{,}5$ см.

Ответ. 32,5 см.

444. Найдите высоту равностороннего цилиндра, вписанного в правильную треугольную пирамиду, боковое ребро которой равно b и наклонено к основанию под углом α.

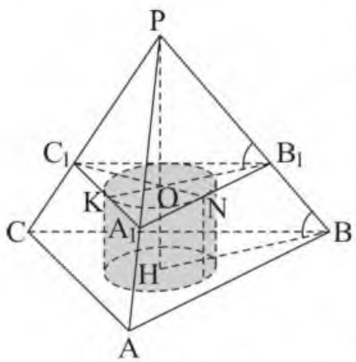


Рисунок 135

Решение. В правильную пирамиду $PABC$ вписан равносторонний цилиндр, его высота $OH = 2r$, где $r = ON$ – радиус основания цилиндра (рисунок 134).

Пусть сечение пирамиды плоскостью, содержащей верхнее основание цилиндра – равносторонний $\Delta A_1B_1C_1$, PH – высота пирамиды, $PB = b$, $\angle PBH = \angle PB_1O = \alpha$.

$PH = b \cdot \sin\alpha$, $PO = PH - OH = b \cdot \sin\alpha - 2r$.

Из ΔPOB_1, в котором $OB_1 = 2r$, имеем $PO = 2r \cdot \text{tg}\,\alpha$. Тогда из равенства $2r \cdot \text{tg}\,\alpha = b \cdot \sin\alpha - 2r$ найдем $2r = \frac{b \cdot \sin\alpha}{1 + \text{tg}\,\alpha}$.

Ответ. $\frac{b \cdot \sin\alpha}{1 + \text{tg}\,\alpha}$.

IV. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

21. Общие свойства объёмов тел. Объём призмы

484. Из прямоугольного листа жести требуется изготовить коробку, вырезая во всех его углах равные квадраты и загибая края жести (рисунок 136). Найдите длину стороны такого квадрата, если размеры листа жести 60 × 70 см, а объём коробки 20 дм^3.

Р е ш е н и е. Пусть сторона квадрата равна x дм, тогда объем коробки равен $(6-2x)\cdot(7-2x)\cdot x$. Составим и решим уравнение $(6-2x)\cdot(7-2x)\cdot x = 20$. Раскрыв скобки и разделив это равенство на 2, получим уравнение $2x^3-13x^2+21x-10=0$.

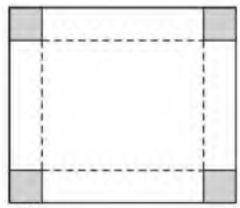


Рисунок 136

Чтобы его решить, можно многочлен, стоящий в левой части, разложить на множители. Для этого устно устанавливаем, что $x = 1$ является корнем уравнения. Далее выполняем деление многочленов $(2x^3-13x^2+21x-10):(x-1)=2x^2-11x+10$. Таким образом, уравнение примет вид: $(x-1)\cdot(2x^2-11x+10)=0$. Решив квадратное уравнение $2x^2-11x+10=0$, получим $x_1=\dfrac{11+\sqrt{41}}{4}\approx 4{,}4$ – не удовлетворяет условию задачи, $x_2=\dfrac{11-\sqrt{41}}{4}\approx 1{,}1$. Итак, сторона квадрата может быть равна 1 дм или ≈ 1,1 дм.

О т в е т. 1 дм или $\dfrac{11-\sqrt{41}}{4}$ дм.

485. После сушки и обжига объём кирпича составляет 75 % объёма сырого кирпича. Какими должны быть размеры сырого кирпича, если он уменьшается при обжиге в одинаковом отношении, а размеры готового кирпича – 25 × 12 × 6 см?

Р е ш е н и е. Пусть размеры сырого кирпича равны $a\times b\times c$ см. Так как при обжиге его размеры уменьшаются в одинаковом отношении, то $\dfrac{a}{25}=\dfrac{b}{12}=\dfrac{c}{6}=k$. Тогда $a=25k$, $b=12k$, $c=6k$, объем V_1 сырого кирпича равен $25k\cdot 12k\cdot 6k=1800k^3$. По условию объем кирпича после сушки и обжига $V_2=1800$ см^3, что составляет $0{,}75\cdot V_1$. Из равенства $1800=0{,}75\cdot 1800k^3$

найдем $k^3 = \frac{4}{3}$, следовательно, $k = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \approx 1{,}10$. Тогда $a \approx 27{,}5$ см, $b \approx 13{,}2$ см, $c \approx 6{,}6$ см.

О т в е т. $\approx (27{,}5 \times 13{,}2 \times 6{,}6)$ см.

486. а) Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, в котором диагонали боковых граней, выходящие из одной вершины, равны 6 см и 8 см, а угол между ними 60°.

б) Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, периметр основания которого равен 16 см, площадь поверхности равна 168 см^2, а объём равен 108 см^3.

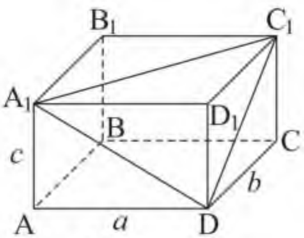


Рисунок 137

Р е ш е н и е. а) Пусть дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $DA_1 = 8$ см, $DC_1 = 6$ см, $\angle A_1DC_1 = 60°$ (рисунок 137). Обозначим $AD = a$ см, $DC = b$ см, $AA_1 = c$ см. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 64, \\ b^2 + c^2 = 36, \\ a^2 + b^2 = 64 + 36 - 48; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 64, \\ a^2 + b^2 + 2c^2 = 100, \\ a^2 + b^2 = 52; \end{cases} \qquad \begin{cases} c^2 = 24, \\ a^2 = 40, \\ b^2 = 12. \end{cases}$$

Следовательно, $a = 2\sqrt{10}$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см, $c = 2\sqrt{6}$ см, $V = 8\sqrt{180} = 48\sqrt{5}$ (см^3).

б) Используем рисунок 137.Диагональ прямоугольного параллелепипеда $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Составим и решим систему уравнений по условию задачи:

$$\begin{cases} abc = 108, \\ 2ab + 16c = 168, \\ a + b = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} ab = \frac{108}{c}, \\ \frac{216}{c} + 16c = 168, \\ a^2 + 2ab + b^2 = 64; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2c^2 - 21c + 27 = 0, \\ a^2 + b^2 = 64 - \frac{216}{c}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 9, c_2 = 1,5, \\ a^2 + b^2 = 40; \end{cases}$$

c_2 – не удовлетворяет условию задачи. Тогда $d = \sqrt{40 + 81} = 11$ (см).

О т в е т. а) $48\sqrt{5}$ см^3; б) 11 см.

488. Площадь одной из боковых граней треугольной призмы равна Q, а расстояние между плоскостью этой грани и противолежащим ей боковым ребром равно d. Найдите объём этой призмы.

Р е ш е н и е. Пусть площадь грани CC_1B_1B равна Q, а расстояние между плоскостью этой грани и противолежащим ей боковым ребром – это перпендикуляр, например, MH, проведенный из любой точки ребра AA_1 к плоскости BCC_1 (рисунок 138). Этот перпендикуляр является высотой в ΔMNK, стороны которого перпендикулярны прямым, содержащим боковые ребра призмы. Объем призмы $V = S_{\Delta MNK} \cdot c$, где c – боковое ребро

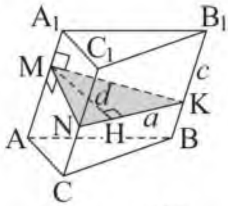


Рисунок 138

призмы. Пусть $NK = a$, тогда $V = \frac{1}{2}adc = \frac{1}{2}Qd$, так как $ac = Q$.

О т в е т. $\frac{1}{2}Qd$.

489. а) Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, если периметры двух его смежных боковых граней равны 16 см и 24 см.

б) Найдите площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, имеющего наибольший объём, если стороны его основания относятся как 3 : 5, а периметр меньшей боковой грани равен 36 см.

Р е ш е н и е. а) Пусть измерения прямоугольного параллелепипеда в см равны a, b, c, причем $a + c = 12$, $b + c = 8$. Площадь S его боковой поверхности равна $2(a + b) \cdot c$. Выразив a и b через c, получим: $S = 2(12 - c + 8 - c) \cdot c$, $S = 4(10c - c^2)$. Наибольшее значение функция $f(c) = -c^2 + 10c$ принимает при $c = \frac{-10}{-2} = 5$. При этом $a = 7$, $b = 3$, а объем $V = 105$ см^3.

б) Обозначим стороны основания данного прямоугольного параллелепипеда в см через $3x$ и $5x$, а боковое ребро c. Тогда $3x + c = 18$, откуда $c = 18 - 3x$. Его объем $V = 5x \cdot 3x \cdot (18 - 3x)$, $V = 45(6x^2 - x^3)$.

Исследуем на наибольшее значение функцию $V(x) = 6x^2 - x^3$ на промежутке, на котором $18 - 3x > 0$, $0 < x < 6$. Найдем производную $V' = 12x - 3x^2$, $V' = 3x(4 - x)$, $V' = 0$ при $x = 4$. Так как производная в окрестности точки $x = 4$ меняет знак с «+» на «–», то в этой точке функция $V(x) = 6x^2 - x^3$ достигает наибольшего значения. При этом значении x измерения данного прямоугольного параллелепипеда 12 см, 20 см и 6 см, а площадь его боковой поверхности равна $2(12 + 20) \cdot 6 = 384$ см^2.

О т в е т. а) 105 см^3; б) 384 см^2.

490. а) Высота прямого параллелепипеда равна h, а стороны его основания a и b. Чему должен быть равен двугранный угол при боковом ребре параллелепипеда, чтобы его объем был наибольшим? Найдите этот объём.

б) Докажите, что из всех прямоугольных параллелепипедов, сумма трех измерений которых равна d, наибольший объем имеет куб с ребром $\frac{d}{3}$.

Р е ш е н и е. а) Так как параллелепипед прямой, то линейным углом двугранного угла при его боковом ребре является один из углов параллелограмма – его основания. Обозначим этот угол α, тогда объем данного параллелепипеда $V = ab \cdot \sin\alpha \cdot h$. Это выражение принимает наибольшее значение $V = abh$ при $\alpha = 90°$.

б) Обозначим измерения параллелепипеда a, b, c, тогда его объем $V = abc$. По условию задачи $a + b + c = d$. Для доказательства утверждения надо знать, когда при постоянной сумме длин трех отрезков, их произведение – наибольшее. Оказывается, что оно наибольшее, когда эти отрезки равны. Установим это, доказав неравенство $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ о среднем арифметическом и среднем геометрическом трех положительных чисел a, b, c.

Обозначим: $\sqrt[3]{a} = m$, $\sqrt[3]{b} = n$, $\sqrt[3]{c} = t$. Тогда это неравенство представим в виде: $m^3 + n^3 + t^3 - 3mnt \geq 0$, где m, n, t – положительные числа. Так как неравенство не изменяется от перестановки переменных m, n, t, то, не снижая общности, положим $m \leq n \leq t$.

Тогда $n = m + p$, где $p \geq 0$, $t = m + k$, где $k \geq 0$, а $m^3 + n^3 + t^3 - 3mnt =$ $= m^3 + (m + p)^3 + (m + k)^3 - 3m(m + p)(m + k) = 3m((p - k)^2 + pk) + p^3 + k^3 \geq 0$, причем знак равенства имеет место лишь при $p = k = 0$. Неравенство $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ доказано.

Значение выражения $\frac{a+b+c}{3}$ постоянно и равно $\frac{d}{3}$, а $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{d}{3}$, причем знак равенства имеет место лишь при $a = b = c$. Следовательно, значение выражения $\sqrt[3]{abc}$, а вместе с ним и abc, будет наибольшим при $a = b = c =$ $= \frac{d}{3}$. Таким образом, наибольший объем имеет куб с ребром $\frac{d}{3}$.

Отметим, что из неравенства $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, где a, b, c – положительные числа, следует, что если произведение трех положительных величин постоянно, то их сумма принимает наименьшее значение, когда эти величины равны. Из этого свойства следует, что из всех прямоугольных параллелепипедов с данным объёмом наименьший каркас имеет куб.

491. а) Требуется изготовить ящик с крышкой формы прямоугольного параллелепипеда, объём которого равен 9 $м^3$, причем стороны основания должны относиться как 1 : 2. Каковы должны быть размеры ящика, чтобы площадь его поверхности была наименьшая?

б) Объём правильной треугольной призмы равен 16 $дм^3$. Каковы должны быть длины стороны основания и высоты призмы, чтобы площадь её поверхности была наименьшей?

Р е ш е н и е. а) Обозначим стороны основания и высоту прямоугольного параллелепипеда в метрах соответственно a, $2a$ и c. Тогда его объём равен $2a^2c = 9$. Отсюда $c = \frac{9}{2a^2}$. Площадь поверхности такого параллелепипеда равна $S = 4a^2 + 6ac$, $S = 4a^2 + \frac{27}{a}$.

Исследуем функцию $S(a)$ на наименьшее значение. Найдем производную $S' = 8a - \frac{27}{a^2}$. $S' = 0$, если $\frac{8a^3 - 27}{a^2} = 0$, $a = \frac{3}{2}$. В окрестности этой точки производная меняет знак с «–» на «+», значит в этой точке функция $S(a)$ принимает наименьшее значение. При этом размеры ящика следующие: $a = 1{,}5$ м, $2a = 3$ м, $c = 2$ м.

б) Пусть сторона основания и высота правильной треугольной призмы в дм соответственно равны a и h, тогда её объем $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 16$. Отсюда $h = \frac{64}{a^2\sqrt{3}}$. Площадь поверхности этой призмы $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{64\sqrt{3}}{a}$. Исследуем функцию $S(a)$ на наименьшее значение.

$S' = a\sqrt{3} - \frac{64\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}a^3 - 64\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}(a^3 - 64)}{a^2}$, $S' = 0$ при $a = 4$. В окрестности этой точки производная меняет знак с «–» на «+», значит в этой точке функция $S(a)$ принимает наименьшее значение. При этом $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ дм.

О т в е т. а) $1{,}5 \times 3 \times 2$ м; б) 4 дм и $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ дм.

22. Объемы пирамиды и усеченной пирамиды

496. Докажите, что объём правильной треугольной пирамиды равен $\frac{1}{3}Sa$, где a – сторона основания, S – площадь сечения пирамиды, проходящего через боковое ребро и перпендикулярного основанию.

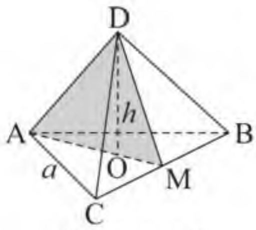


Рисунок 139

Доказательство. Объем правильной треугольной пирамиды $DABC$ со стороной основания a и высотой h равна $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро AD и перпендикулярного основанию – это ΔADM, где AM – медиана и высота ΔABC (рисунок 139). Площадь сечения $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot h$. Выражение $\frac{1}{3}Sa = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = V$. Что и требовалось доказать.

503. Высота пирамиды 8 см. На расстоянии 3 см от вершины параллельно основанию проведена плоскость. Площадь полученного сечения 27 см^2. Найдите объём образованной при этом усеченной пирамиды.

Решение. Так как $\frac{S_{\text{сеч.}}}{S_{\text{осн.}}} = \left(\frac{3}{8}\right)^2$, то $S_{\text{осн.}} = \frac{64 \cdot 27}{9} = 192$ (см^2). Искомый объём равен $V = \frac{1}{3} \cdot 5(27 + 192 + \sqrt{27 \cdot 192}) = 485$ (см^3).

Ответ. 485 см^3.

505. Основание пирамиды – прямоугольная трапеция, в которой большая из боковых сторон 12 см, а меньший угол 30°. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости её основания. Площадь боковой поверхности пирамиды равна 90 см^2. Найдите объём пирамиды.

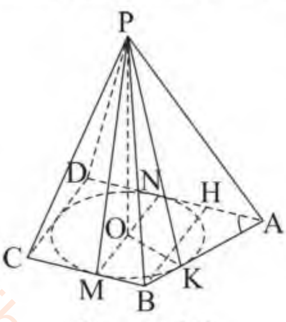


Рисунок 140

Решение. Основание пирамиды $PABCD$ прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой $\angle C = \angle D = 90°$, $AB = 12$ см, $\angle A = 30°$ (рисунок 140). Так как боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости её основания, то ортогональной проекцией вершины P на плоскость ABC является центр O окружности вписанной в трапецию, M, N, K – точки касания этой окружности сторон трапеции, r – её радиус.

Высота трапеции $BH = MN = CD = AB \cdot \sin 30° = 6$ см. Так как $MN = 2r$, то $r = 3$ см. Следовательно, $MC = ND = OK = 3$ см. По свойству описанной около окружности трапеции $AB + CD = BC + AD = 18$ см. Тогда площадь трапеции $S = 9 \cdot 6 = 54$ (см^2).

Площадь боковой поверхности данной пирамиды $90 = 18 \cdot PK$, откуда $PK = 5$ см. Тогда высота пирамиды $PO = \sqrt{PK^2 - OK^2} = 4$ см. Объём пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot 54 \cdot 4 = 72$ (см^3).

О т в е т. 72.

506. а) Найдите объём треугольной пирамиды, боковые ребра которой взаимно перпендикулярны, и каждое из них равно 6 дм.

б) Найдите с точностью до 0,1 дм^3 объём тетраэдра $PABC$, стороны основания ABC которого равны 5 дм, 6 дм, 7 дм, а все плоские углы при вершине P – прямые.

Р е ш е н и е. а) Пусть в пирамиде $PABC$ боковые ребра PA, PB, PC взаимно перпендикулярны и каждое из них равно 6 дм. Примем за основание одну из боковых граней, например, APC (рисунок 141). Тогда объем пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta APC} \cdot BP = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$ (дм^3).

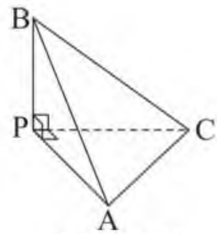


Рисунок 141

б) Используем рисунок 141. Пусть $AC = 5$ дм, $AB = 6$ дм, $BC = 7$ дм. Обозначим $PA = a$ дм, $PB = b$ дм, $PC = c$ дм. Тогда объем пирамиды $V = \frac{1}{6}abc$.

Составим систему уравнений: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 36, \\ b^2 + c^2 = 49, \\ a^2 + c^2 = 25. \end{cases}$

Сложив уравнения системы и разделив равенство на 2, получим $a^2 + b^2 + c^2 = 55$. Вычитая из этого равенства каждое уравнение системы, найдем $a^2 = 6$, $b^2 = 30$, $c^2 = 19$. Тогда $a = \perp$, $b = \sqrt{30}$, $c = \sqrt{19}$, $V = \frac{1}{6} \cdot 6\sqrt{95} \approx$ $\approx 9{,}7$ (дм^3).

О т в е т. а) 36 дм^3; б) $\approx 9{,}7$ дм^3.

507. Высота правильной усеченной треугольной пирамиды равна $3\sqrt{3}$ см, её объём равен 189 см^3, а площади оснований относятся как 1 : 4. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть площади верхнего и нижнего оснований усеченной пирамиды равны соответственно S_1 и S_2 (рисунок 142). Так как $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$, то $S_2 = 4S_1$. Зная объем пирамиды, составим уравнение:

$189 = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}\,(S_1 + 4S_1 + 2S_1)$,

откуда найдем $S_1 = \frac{189}{7\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}$ (см^2). Тогда $S_2 = 36\sqrt{3}$ см^2.

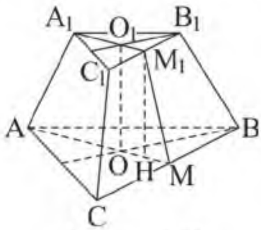


Рисунок 142

$S_1 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, $b = A_1B_1 = 6$ см, $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$, $a = AB = 12$ см.

Высота $O_1O = M_1H = 3\sqrt{3}$ см. Отрезки $OM = 2\sqrt{3}$ см, $O_1M_1 = \sqrt{3}$ см. Апофема данной пирамиды $M_1M = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{30}$ (см). Площадь боковой поверхности этой усеченной пирамиды $S_{бок.} = \frac{18+36}{2} \cdot \sqrt{30} = 27\sqrt{30}$ (см^2).

О т в е т. $27\sqrt{30}$ см^2.

508. В треугольной пирамиде две боковые грани перпендикулярны и перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Площади этих граней равны S и Q, а длина их общего ребра равна b. Через середину высоты пирамиды проведено сечение, параллельное её основанию. Найдите объём образованной при этом усеченной пирамиды.

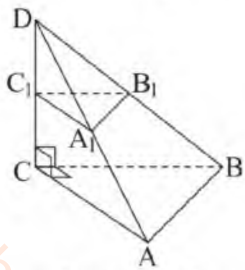


Рисунок 143

Р е ш е н и е. В треугольной пирамиде $DABC$ грани ACD и BCD перпендикулярны. Так как каждая из них перпендикулярна плоскости основания ABC, то их общее ребро $CD \perp (ABC)$ и $\angle ACB = 90°$ (рисунок 143). По условию $CD = b$, $S_{\Delta ACD} = S = \frac{1}{2}b \cdot CA$, $S_{\Delta BCD} = Q = \frac{1}{2}b \cdot CB$, откуда $CA = \frac{2 \cdot S}{b}$, $CB = \frac{2 \cdot Q}{b}$. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot S \cdot Q}{b^2}$.

Через середину C_1 ребра CD проведено сечение пирамиды плоскостью $(C_1A_1B_1) \| (CAB)$. Тогда $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot S \cdot Q}{b^2} = \frac{S \cdot Q}{2b^2}$.

Объём образованной при этом усеченной пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2}\left(\frac{2 \cdot S \cdot Q}{b^2} + \frac{S \cdot Q}{2b^2} + \sqrt{\frac{2 \cdot S \cdot Q}{b^2} \cdot \frac{S \cdot Q}{2b^2}}\right) = \frac{b}{6} \cdot \frac{7 \cdot S \cdot Q}{2b^2} = \frac{7 \cdot S \cdot Q}{12b}.$$

О т в е т. $\frac{7 \cdot S \cdot Q}{12b}$.

509. Найдите объём треугольной усеченной пирамиды, стороны одного основания которой равны 2,7 дм, 2,9 дм и 5,2 дм, периметр другого основания равен 7,2 дм, а высота этой пирамиды равна 1 дм.

Р е ш е н и е. Так как периметр оснований $P_1 = 7{,}2$ дм, $P_2 = (2{,}7 + 2{,}9 + 5{,}2) = 10{,}8$ (дм), то коэффициент подобия этих треугольников $k = \frac{7{,}2}{10{,}8} = \frac{2}{3}$. Поэтому отношение их площадей $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9}$.

$S_2 = \sqrt{5{,}4 \cdot 2{,}7 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}2} = 2{,}7$ (дм^2), $S_1 = \frac{4}{9} \cdot S_2 = 1{,}2$ (дм^2). Объем усеченной пирамиды равен $V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (2{,}7 + 1{,}2 + \sqrt{2{,}7 \cdot 1{,}2}) = 1{,}9$ (дм^3).

О т в е т. 1,9 дм^3.

510. а) Найдите наибольший объём правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 6 см.

б) Чему равен наибольший объём правильной треугольной пирамиды, сумма длин всех ребер которой равна 9 дм?

Р е ш е н и е. а) Пусть сторона основания данной пирамиды $PABCD$ равна a см (рисунок 144). Тогда $\frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ см, высота $h = PH = \sqrt{\frac{72 - a^2}{2}}$ см и объём пирамиды $V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{72a^4 - a^6}{2}}$ (см^3), при этом $72 - a^2 > 0$, $(6\sqrt{2} - a)(6\sqrt{2} + a) > 0$, $0 < a < 6\sqrt{2}$.

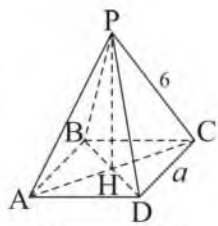


Рисунок 144

Исследуем функцию $f(a) = 36a^4 - \frac{1}{2}a^6$ на наибольшее значение на промежутке $(0;\ 6\sqrt{2})$. Имеем $f'(a) = 144a^3 - 3a^5 = 3a^3(48 - a^2)$, $f'(a) = 0$ при $a = 4\sqrt{3}$. В окрестности этой точки производная меняет знак с «+» на «–», следовательно, функция $f(a)$ при $a = 4\sqrt{3}$ принимает наибольшее значение.

При этом $h = \sqrt{36 - 24} = 2\sqrt{3}$, тогда наибольший объем пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 2\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$ (см^3).

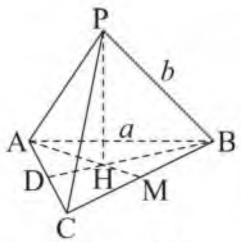


Рисунок 145

б) Обозначим ребра данной пирамиды a дм и b дм (рисунок 145). Тогда $3a + 3b = 9$, $a + b = 3$, $b = 3 - a$, отрезок $BH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, высота $PH = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3(9 - 6a + a^2) - a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2 - 18a + 27}{3}}$, площадь основания $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, объём пирамиды $V = \frac{a^2}{12}\sqrt{2a^2 - 18a + 27} = \frac{1}{12}\sqrt{2a^6 - 18a^5 + 27a^4}$.

При этом $0 < a < 3$ и $2a^2 - 18a + 27 > 0$, откуда $0 < a < \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}$.

Исследуем функцию $f(a) = 2a^6 - 18a^5 + 27a^4$ на наибольшее значение на промежутке $\left(0; \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}\right)$. Имеем $f'(a) = 12a^5 - 90a^4 + 108a^3 = 6a^3(2a^2 - 15a + 18)$, $f'(a) = 0$ при $a = \frac{3}{2}$. В окрестности этой точки производная меняет знак с «+» на «–», следовательно, функция $f(a)$ при этом значении a принимает наибольшее значение. Следовательно, наибольший объём данной пирамиды равен $\frac{9\sqrt{2}}{32}$ дм^3.

О т в е т. а) $32\sqrt{3}$ см^3; б) $\frac{9\sqrt{2}}{32}$ дм^3.

511. Из одного металла изготавливаются не равные детали формы усеченных пирамид, имеющих равные суммы площадей оснований и равные высоты. Равны ли массы этих деталей? Можно ли изготовить такую деталь с наибольшей массой?

Р е ш е н и е. Пусть площади оснований одной усеченной пирамиды S_1 и S_2, а другой Q_1 и Q_2. По условию $S_1 + S_2 = Q_1 + Q_2 = S$. Так как детали изготавливаются из одного металла, то их массы равны, если равны их объемы $V_1 = V_2$.

Допустим, что объемы этих деталей равны. Тогда из формулы объема усеченной пирамиды, с учетом условия задачи, следует, что $S_1 \cdot S_2 = Q_1 \cdot Q_2$. Далее решение задачи сводится к исследованию, равны ли произведения положительных чисел ab и cd, если $a + b = c + d = m$.

Пусть a = $b + p$, $c = d + q$. Тогда $2b + p = m$ и $2d + q = m$, откуда $b = \frac{m-p}{2}$, $d = \frac{m-q}{2}$, $a = \frac{m+p}{2}$, $c = \frac{m+q}{2}$, $ab = \frac{m^2-p^2}{4}$, $cd = \frac{m^2-q^2}{4}$. Из последних двух равенств следует, что $ab = cd$ лишь при $p = q$. При этом условии детали равны, что невозможно. Следовательно, массы таких деталей не равны.

Чтобы масса детали была наибольшей, нужно чтобы её объем был наибольшим. Учитывая, что сумма $S_1 + S_2$ постоянна, должно быть наибольшим $S_1 \cdot S_2$. Из неравенства $\frac{S_1+S_2}{2} \geq \sqrt{S_1 \cdot S_2}$ следует, что при постоянной сумме произведение будет наибольшим, если $S_1 = S_2$, что невозможно.

О т в е т. Не равны. Нельзя, т.к. объём будет наибольшим, если равны основания усеченной пирамиды, что невозможно.

512. а) Объём усеченной треугольной пирамиды равен V, а отношение площадей её оснований равно 4. Через сторону верхнего основания проведена секущая плоскость, параллельная противо-положному ребру. Найдите объём каждого из многогранников, на которые делит эту усеченную пирамиду её сечение указанной плоскостью.

Р е ш е н и е. Пусть в усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площади оснований равны $S_{\Delta ABC} = S_1$, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_2$. По условию $\frac{S_1}{S_2} = 4$, откуда $S_1 = 4S_2$. Объем этой пирамиды $V = \frac{1}{3}h(4S_2 + S_2 + 2S_2) = \frac{7}{3}S_2h$, откуда $S_2h = \frac{3}{7}V$.

Через сторону C_1B_1 проведена плоскость, параллельная ребру AA_1. Сечением данной пирамиды этой плоскостью является параллелограмм MC_1B_1N (рисунок 146). Многогранник $ANMA_1B_1C_1$ – наклонная призма, её объем $V_1 = S_2h = \frac{3}{7}V$. Объем многогранника MC_1CNB_1B равен $V - V_1 = \frac{4}{7}V$.

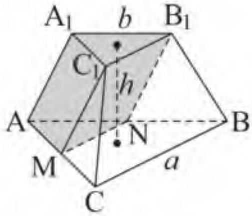


Рисунок 146

О т в е т. а) $\frac{3}{7}V$ и $\frac{4}{7}V$.

23. Объем цилиндра

523. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом 60°, периметр этого сечения равен ($12 + 4\sqrt{3}$) дм. Найдите наибольший возможный объем цилиндра объём цилиндра.

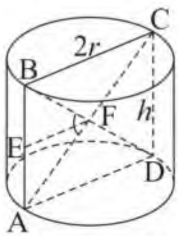


Рисунок 147

Р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ – осевое сечение цилиндра, диагонали которого пересекаются в точке F, h – высота цилиндра, r – радиус его основания (рисунок 147). По условию $2(h + 2r) = (12 + 4\sqrt{3})$ дм, следовательно, $h + 2r = (6 + 2\sqrt{3})$ дм.

Если $\angle BFA = 60°$, то ΔABF –равносторонний. Проведем его высоту FE, тогда $BE = \frac{h}{2} = r \cdot \text{tg}\,30°$, $h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ дм.

Имеем $\frac{2r\sqrt{3}}{3} + 2r = 6 + 2\sqrt{3}$, $2r(\sqrt{3}+3) = 3 \cdot 2(3 + \sqrt{3})$, $r = 3$ дм, $h = 2\sqrt{3}$ дм. Объем данного цилиндра $V = \pi r^2 h = 18\pi\sqrt{3}$ (дм^3).

Если $\angle BFC = 60°$, то $r = \sqrt{3}$ дм, $h = 6$ дм. Объем данного цилиндра $V = 18\pi$ дм^3.

О т в е т. $18\pi\sqrt{3}$ (дм^3).

524. На изготовление открытой цилиндрической банки расходуется 75π см^2 жести. Каковы должны быть высота и радиус основания банки, чтобы её объем был наибольшим? (Расход материала на швы не учитывается).

Р е ш е н и е. Обозначим радиус основания цилиндрической банки r, а её высоту h. Тогда $\pi r^2 + 2\pi rh = 75\pi$, $2rh = 75 - r^2$, $h = \frac{75 - r^2}{2r}$, где $75 - r^2 > 0$, $0 < r < 5\sqrt{3}$.

Объём банки $V = \pi r^2 \cdot \frac{75 - r^2}{2r} = \frac{\pi}{2}(75r - r^3)$ (см^3).

Исследуем функцию $f(r) = 75r - r^3$ на наибольшее значение на промежутке $(0; 5\sqrt{3})$. $f'(r) = 75 - 3r^2$, $f'(r) = 0$ при $r = 5$. Так как в окрестности этой точки производная меняет знак с «+» на «–», то функция $f(r)$, а вместе с ней и объём V, принимает наибольшее значение при $r = 5$ см. При этом значении r высота $h = 5$ см.

О т в е т. $h = r = 5$ см.

525. Закрытая цилиндрическая бочка вмещает 128π л жидкости. Каковы должны быть высота и радиус основания бочки, чтобы на её изготовление тратилось наименьшее количество материала? (Без учета расхода материала на швы).

Р е ш е н и е. По условию задачи $\pi r^2 h = 128\pi$ (дм^3), где r – радиус основания банки, h – её высота, отсюда $h = \frac{128}{r^2}$ дм. Площадь поверхности банки $S(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{128}{r}\right)$.

$S'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{128}{r^2}\right)$, $S'(r) = 0$ при $r = 4$. Так как в окрестности этой точки производная изменяет знак с «–» на «+», то функция $S(r)$ принимает наименьшее значение при $r = 4$ дм. При этом $h = 8$ дм.

О т в е т. $h = 8$ дм, $r = 4$ дм.

24. Объем конуса и усеченного конуса

535. Чему равно отношение объёма конуса, описанного около правильного тетраэдра, к объёму вписанного в него конуса?

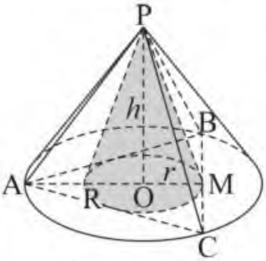


Рисунок 148

Р е ш е н и е. Пусть в правильный тетраэдр $PABC$ вписан конус радиуса $r = OM$ и около него описан конус радиуса $R = OA$ (рисунок 148). Так как $R = 2r$, то отношение объёмов этих конусов:

$$\frac{V_O}{V_B} = \frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4.$$

О т в е т. 4.

536. В конус вписана правильная четырехугольная пирамида, сторона основания которой 6 см, а угол между соседними боковыми ребрами 45°. Найдите объём конуса.

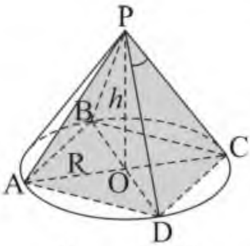


Рисунок 149

Р е ш е н и е. В конус с центром основания O вписана правильная пирамида $PABCD$ (рисунок 149). Радиус основания конуса $R = OA = 3\sqrt{2}$ см.

В ΔCPD $\angle CPD = 45°$, $DC = 6$ см, $PC = PD = b$, по теореме косинусов $36 = 2b^2 - 2b^2\cos 45°$, откуда $b^2 = 18(2 + \sqrt{2})$.

Тогда из ΔPOC найдем высоту конуса $h = PO = \sqrt{36 + 18\sqrt{2} - 18} =$ $= 3\sqrt{2(1 + \sqrt{2})}$ (см). Объём конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 18\pi\sqrt{2(1 + \sqrt{2})}$ (см^3).

О т в е т. $18\pi\sqrt{2(1 + \sqrt{2})}$ (см^3).

537. Найдите объём конуса, площадь поверхности которого равна 96π дм^2, а радиус окружности, вписанной в осевое сечение конуса, равен 3 дм.

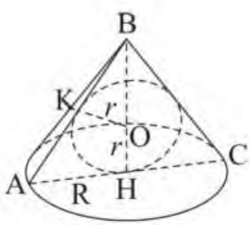


Рисунок 150

Р е ш е н и е. Обозначим радиус основания данного конуса $HA = R$ дм, образующую $AB = l$ дм, высоту $PH = h$ дм. Тогда площадь его поверхности $96\pi = \pi Rl + \pi R^2$, откуда $l = \frac{96}{R} - R$.

Осевое сечение конуса – ΔABC, в него вписана окружность с центром O и радиусом $r = 3$ дм (рисунок 150). Так как $S_{\Delta ABC} = Rh$ или $S_{\Delta ABC} = pr$, где полупериметр ΔABC $p = l + R$, то $Rh = 3(l + R)$, $\frac{Rh}{3} = \frac{96}{R}$, $R^2 h = 96 \cdot 3$.

Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 96\pi$ (дм^3).

О т в е т. 96π дм^3.

538. Через две образующие усеченного конуса, угол между которыми 30°, проведена плоскость, пересекающая основания конуса по хордам, равным 2 дм и 1 дм. Каждая из этих хорд стягивает дугу 150°. Найдите объём усеченного конуса.

Р е ш е н и е. Пусть дан усеченный конус с центрами оснований K и O (рисунок 151). Через две его образующие BA и CD проведена плоскость, которая пересекает основания по хордам $AD = 2$ дм и $BC = 1$ дм. По условию $\angle APD = 30°$, $\angle AOD = \angle BKC = 150°$.

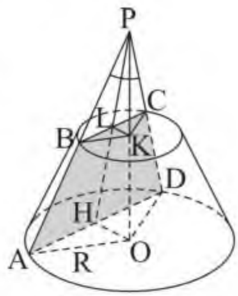


Рисунок 151

Из подобия треугольников KBC и OAD, BPK и APO следует, что $\frac{BC}{AD} = \frac{KB}{OA} = \frac{PK}{PO} = \frac{PB}{PA} = \frac{1}{2}$.

Из ΔAOH, в котором $\angle AOH = 75°$, $AH = 1$ дм, найдем $R = OA = \frac{1}{\sin 75°}$. Так как $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, то $R = (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ дм, $r = KB = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ дм.

В ΔAPD имеем $4 = 2PA^2 - 2PA^2 \cdot \cos 30°$, тогда $PA^2 = \frac{2 \cdot 2}{2-\sqrt{3}} = 4(2+\sqrt{3})$.

Из ΔAPO найдем $PO = \sqrt{PA^2 - R^2} = 2\sqrt{2\sqrt{3}}$ (дм), тогда $h = KO = \sqrt{2\sqrt{3}}$ дм.

Объём усеченного конуса $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\,\pi}{3}(14 - 7\sqrt{3})$ дм^3.

О т в е т. $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\,\pi}{3}(14 - 7\sqrt{3})$ дм^3.

539. Около шара радиуса R описан конус наименьшего объема. Найдите этот объем.

Р е ш е н и е. Пусть около шара с центром O описан конус с центром основания C и образующей AB, $BC = h$ – высота конуса, $CA = r$ – радиус его основания (рисунок 152).Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

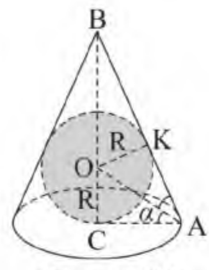


Рисунок 152

Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle OAC = \alpha$, $r = R \cdot \operatorname{ctg}\alpha$,

$h = r \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = R \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{R \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot 2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2R}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Выразим объём конуса как функцию, зависящую от α, получим:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha \cdot \frac{2R}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha \cdot (1-\mathrm{tg}^2\alpha)}.$$

Это выражение принимает наименьшее значение, когда $\mathrm{tg}^2\alpha \cdot (1-\mathrm{tg}^2\alpha)$ будет наибольшим. Обозначим $\mathrm{tg}^2\alpha = x$ и исследуем функцию $f(x) = x - x^2$ на наибольшее значение. Эта квадратичная функция принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{2}$. Следовательно, конус имеет наименьший объем при $tg^2\alpha = \frac{1}{2}$. Этот объём равен $\frac{8\pi R^3}{3}$.

Ответ. $\frac{8}{3}\pi R^3$.

540. Бревно, длиной 2 м, имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 дм и 1 дм. Из бревна изготовлен брус наибольшего объёма с квадратным поперечным сечением. Найти высоту этого бруса.

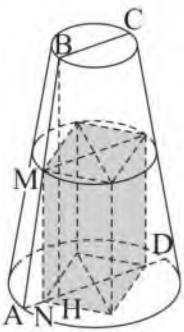


Рисунок 153

Решение. Пусть $ABCD$ – диагональное сечение данного усеченного конуса, тогда $BC = 1$ дм, $AD = 2$ дм, его высота $BH = 20$ дм (рисунок 153). Обозначим половину диагонали поперечного сечения вырезанного бруса через x дм, а высоту бруса h дм. Тогда из подобия треугольников ABH и AMN имеем $\frac{BH}{MN} = \frac{AH}{AN}$, $\frac{20}{h} = \frac{1-0,5}{1-x}$, $h = 40(1-x)$ дм.

Площадь поперечного сечения равна $\frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2$. Объем бруса $V = 2x^2 \cdot h = 80x^2(1-x)$. Исследуем функцию $V(x) = 80(x^2 - x^3)$ на наибольшее значение на промежутке $(0,5; 1)$.

$V'(x) = 80(2x - 3x^2)$, $V'(x) = 0$ при $x = \frac{2}{3}$. Так как в окрестности этой точки производная меняет знак с «+» на «–», то функция V(x) принимает наибольшее значение при $x = \frac{2}{3}$. Тогда высота бруса $h = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ (дм).

Ответ. $13\frac{1}{3}$ дм.

25. Объем шара и его частей

550. а) Найдите, с точностью до 0,01 м^3, объём шара, вписанного в равносторонний конус, образующая которого равна 1 м.

б) В шар радиуса 3 дм вписан конус, объём которого равен 25 % объёма шара. Найдите высоту конуса.

Р е ш е н и е. а) Пусть шар с центром O вписан в равносторонний конус с вершиной B и центром основания H (рисунок 154). Осевое сечение конуса – правильный ΔABC со стороной 1 м. Тогда радиус шара $r = \frac{1}{3}BH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (м).

Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{54}$ (м^3) $\approx 0{,}10$ (м^3).

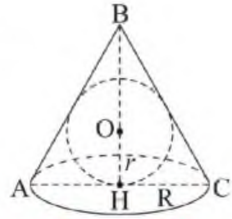


Рисунок 154

б) В шар с центром O и диаметром BD вписан конус с центром основания C и радиусом $r = AC$ (рисунок 155). Тогда высота конуса $h = BC$. Объём шара $V_ш = 36\pi$ дм^3, тогда объём вписанного в него конуса равен $V_к = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 9\pi$ (дм^3), откуда получим $r^2 h = 27$. Пусть $OC = x$ дм, тогда из прямоугольного ΔABD, в котором AC – высота, имеем $r^2 = (3 + x)(3 - x)$, $r^2 = 9 - x^2$. Учитывая, что $h = (3 + x)$ дм, получим: $(9 - x^2)(3 + x) = 27$, $x^3 + 3x^2 - 9x = 0$, $x(x^2 + 3x - 9)=0$, $x_1 = 0, x_2 = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$. При $x = 0$ высота $h = 3$ дм, при $x = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$ высота $h = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ дм.

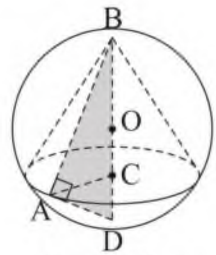


Рисунок 155

Ответ. а) 0,10 м^3; б) 3 дм или $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ дм.

551. Найдите объем шарового сектора, если известно, что: а) дуга в его осевом сечении равна 120°, а стягивающая хорда равна $4\sqrt{3}$ см; б) длина окружности основания равна 18π см, а радиус шара 15 см.

Р е ш е н и е. а) Пусть дуга AB равна 120°, хорда $AB = 4\sqrt{3}$ см, O – центр шара, отрезки $OP = OB = R$ – радиусы шара, $PC = h$ – высота данного сектора (рисунок 156). Тогда в ΔOBC $\angle COB = 60°$, $CB = 2\sqrt{3}$ см, $OB = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°} =$ $=4$ (см), $OC = 2$ см, следовательно, $PC = 2$ см.

Объем шарового сектора $V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{64}{3}\pi$ (см^3).

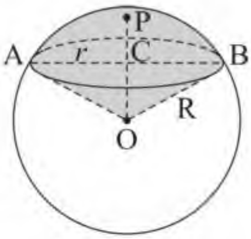


Рисунок 156

б) Так как длина окружности основания $2\pi r = 18\pi$, то $r = 9$ см.

Из ΔAOC, в котором $OA = R = 15$ см, $AC = r = 9$ см, найдем $OC = \sqrt{225-81} = 12$ (см). Тогда высота данного сектора $h = 15 - 12 = 3$ (см), его объем $V_{\text{сект}} = 450\pi$ см^3.

О т в е т. а) $\frac{64}{3}\pi$ (см^3); б) 450π см^3.

552. б) Плоскость, проведенная через конец радиуса шара и образующая с ним угол 60°, отсекает от полушара сегмент. Найдите его объем, если радиус шара равен 2 дм.

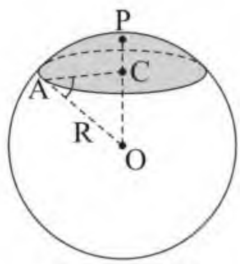


Рисунок 157

Р е ш е н и е. Пусть указанная плоскость образует с радиусом шара угол OAC, равный 60°, тогда $AC = 1$ дм, $OC = \sqrt{3}$ дм, а высота сегмента $h = PC = (2 - \sqrt{3})$ дм (рисунок 157). Объем шарового сегмента:

$$V = \pi \text{h}^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) = \pi(7 - 4\sqrt{3})\left(2 - \frac{2-\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \frac{16-9\sqrt{3}}{3}\pi \text{ (дм}^3\text{)}.$$

О т в е т. б) $\frac{16-9\sqrt{3}}{3}\pi$ дм^3.

553. Диаметр шара, равный 20 см, разделен на три части в отношении 1 : 4 : 5. Через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. Найдите объем получившегося шарового слоя.

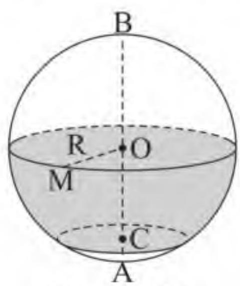


Рисунок 158

Р е ш е н и е. Диаметр шара $AB = 20$ см разделен на три части так, что $AC : CO : OB = 1 : 4 : 5$ (рисунок 158). Точка O – центр шара радиуса $R = OB = 10$ см. Объём V указанного шарового слоя равен разности объемов полушара и шарового сегмента, высота которого $h = AC = 2$ см,

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) = \frac{2000-112}{3}\pi =$$

$$= \frac{1888}{3}\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

О т в е т. $\frac{1888}{3}\pi$ см^3.

554. В цилиндрическую мензурку с водой, наполненной до некоторого уровня, опущены 4 металлических шарика, радиус каждого из которых равен 5 мм. На сколько миллиметров поднялся уровень воды в мензурке, если диаметр её основания равен 2,5 см? Ответ дайте с точностью до 0,1 мм.

Р е ш е н и е. Радиус основания данного цилиндра $R = \dfrac{25}{2}$ мм. Пусть уровень воды в мензурке поднимется на h мм. Тогда объем слоя воды в ней высотой h равен $V = \dfrac{625}{4}\pi h$ мм^3.Причем он равен объёму воды, вытесненной четырьмя шариками,радиус каждого из которых $r = 5$ мм, $V = \dfrac{16 \cdot 125}{3}\pi$ мм^3.
Получили $\dfrac{625}{4}\pi h = \dfrac{16 \cdot 125}{3}\pi$, откуда $h = \dfrac{16 \cdot 125 \cdot 4}{3 \cdot 625} = \dfrac{64}{15} = 4\dfrac{4}{15} \approx 4{,}3$ (мм).

О т в е т. $\approx 4{,}3$ мм.

555. Прямая треугольная призма, стороны основания которой 29 см, 35 см и 48 см, описана около шара. Найдите объём шара.

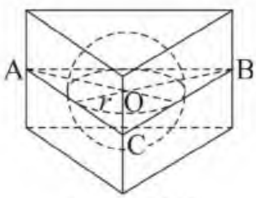


Рисунок 159

Р е ш е н и е. Пусть шар с центром O вписан в прямую треугольную призму (рисунок 159). Тогда его большой круг вписан в ΔABC, равный основанию призмы. Радиус шара r равен радиусу окружности вписанной в ΔABC, $r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}$, где

$$p = \frac{29 + 35 + 48}{2} = 56 \text{ (см)},$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{56 \cdot 27 \cdot 21 \cdot 8} = 504 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тогда $r = 9$ см, а объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 972\pi$ (см^3).

О т в е т. 972π см^3.

556. б) Найдите отношение объёма шарового сектора к объёму шара, если площадь осевого сечения сектора в 3 раза меньше площади большого круга шара.

Р е ш е н и е. Отношение объемов шарового сектора и шара равно $\dfrac{V_{\text{сект.}}}{V_{\text{шара}}}$ $= \dfrac{2 \cdot \pi R^2 h \cdot 3}{3 \cdot 4\pi R^3} = \dfrac{h}{2R}$.

Площадь осевого сечения сектора $S_{\text{сект.}} = \dfrac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$, где $\alpha = \angle AOB$ на рисунке 156. Так как по условию $\dfrac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^\circ} = \dfrac{\pi R^2}{3}$, то $\alpha = 120^\circ$. Следовательно, высота сектора $h = \dfrac{R}{2}$. Тогда $\dfrac{V_{\text{сект.}}}{V_{\text{шара}}} = \dfrac{1}{4}$.

О т в е т. $\frac{1}{4}$.

557. Диаметр шара разделен на три равные части и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. Сравните объем полученного шарового слоя с суммой объемов двух шаровых сегментов.

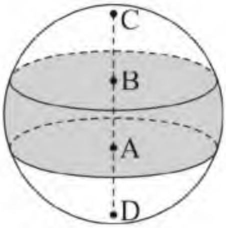


Рисунок 160

Р е ш е н и е. . Так как диаметр шара CD разделен на три равные части, то высоты полученных сегментов $CB = DA = \frac{2R}{3}$ (рисунок 160). Следовательно, равны и объемы этих сегментов, причем объём одного из них равен $V_{\text{сегм.}} = \pi\frac{4R^2}{9}\left(R - \frac{2R}{9}\right) = \frac{28R^3}{81}\pi$.

Объём шарового слоя $V_{\text{слоя}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{56}{81}\pi R^3 = \frac{52}{81}\pi R^3$.

О т в е т. $V_{\text{слоя}} < 2V_{\text{сегм.}}$.

558. Основанием прямой призмы, вписанной в шар, является треугольник, две стороны которого равны 4 дм и 14 дм, а угол между ними равен 60°. Объём призмы равен 168 дм^3. Найдите площадь поверхности шара.

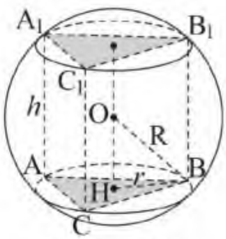


Рисунок 161

Р е ш е н и е. Пусть в шар с центром O вписана призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AC = 4$ дм, $BC = 14$ дм и $\angle ACB = 60°$ (рисунок 161). Площадь основания призмы $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 14 \cdot \sin 60° = 14\sqrt{3}$ (дм^2).

Зная её объем, найдем высоту призмы:
$168 = 14\sqrt{3} \cdot h, \quad h = 4\sqrt{3}$ дм.

Отрезок $HB = r$ – радиус окружности, описанной около ΔABC, найдем, используя формулу $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4r}$, где $c = AB = \sqrt{16 + 196 - 56} = 2\sqrt{39}$ (дм). Имеем $r = \frac{4 \cdot 14 \cdot 2\sqrt{39}}{4 \cdot 14\sqrt{3}} = 2\sqrt{13}$ (дм).

Из ΔOBH, , в котором $OH = 2\sqrt{3}$ дм, найдем радиус шара $R = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{13})^2} = 8$ (дм). Тогда площадь его поверхности $S = 4\pi \cdot 64 = 256\pi$ (дм^2).

О т в е т. 256π дм^2.

559. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, площадь диагонального сечения которой $3\sqrt{3}$ дм^2. Найдите объём шара, если боковое ребро пирамиды равно диагонали её основания.

Р е ш е н и е. Диагональное сечение пирамиды, вписанной в шар – правильный ΔABC. Центр шара O принадлежит высоте CH этого треугольника, радиус шара $R = \frac{2}{3}CH$(рисунок 162). Пусть сторона ΔABC равна b, зная его площадь, получим: $\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$, $b^2 = 12$, $b = 2\sqrt{3}$ дм.

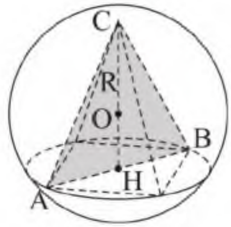


Рисунок 162

Следовательно, $R = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 2}$=2 (дм), объем шара $V = \frac{32}{3}\pi$ дм^3.

О т в е т. $\frac{32}{3}\pi$ дм^3.

560. В конус, образующая которого в 3 раза больше радиуса его основания, помещены два шара, один из которых вписан в конус, а второй касается первого и боковой поверхности конуса. Найдите отношение объёмов первого и второго шаров.

Р е ш е н и е. Пусть в конус с вершиной B и центром основания H помещены два шара, первый – с центром O и радиусом r_1, второй – с центром C и радиусом r_2, K и N – точки касания шаров образующей AB(рисунок 163). Отношение объёмов первого и второго шаров равно $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$.Выразим r_1 и r_2 через R – радиус основания конуса.

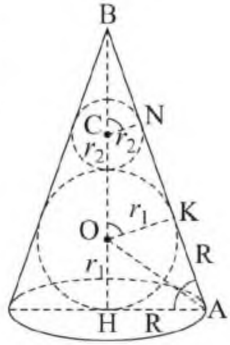


Рисунок 163

Так как образующая конуса $AB = 3R$, то $\cos\angle BAH = \frac{1}{3}$, $BH = 2R\sqrt{2}$. Обозначим $\angle OAH = \alpha$, тогда $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{3}$, откуда:

$$\cos^2\alpha = \frac{2}{3},\ \mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $r_1 = R \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Учитывая, что $\angle BAH = \angle BOK = \angle BCN$, получим $\frac{1}{3} = \frac{CN}{BC}$, $CN = r_2$. $BC = 3r_2$.

Тогда $BH = 4r_2 + 2r_1 = 2R\sqrt{2}$, $r_2 = \frac{R\sqrt{2} - r_1}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{4}$. Следовательно, $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = 2^3 = 8$.

О т в е т. 8.

26. Упражнения на повторение раздела «Объёмы тел»

561. а) Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, если стороны его основания равны 9 м и 16 м, а отношение длин диагоналей боковых граней равно 0,75.

Р е ш е н и е. а) Обозначим боковое ребро и диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда в метрах соответственно c, d_1, d_2 и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 81 + c^2 = d_1^2, \\ 256 + c^2 = d_2^2, \\ d_1 = \frac{3}{4}d_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 81 + c^2 = d_1^2, \\ 175 = d_2^2 - \left(\frac{3}{4}d_2\right)^2; \end{cases}$$

$d_2 = 20$, $d_1 = 15$, $c = 12$. Тогда объем данного прямоугольного параллелепипеда равен $V = 9 \cdot 16 \cdot 12 = 1728$ (м^3).

О т в е т. а) 1728 м^3.

562. .Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AC = 2$ см, $BC = 2\sqrt{7}$ см, двугранный угол при ребре AA_1 равен 150°, $AM = \sqrt{7}$ см, где M – середина ребра B_1C_1.

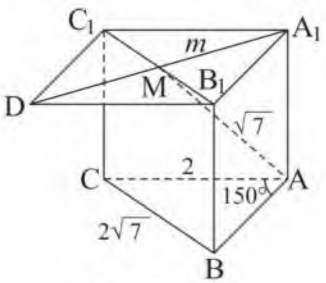


Рисунок 164

Р е ш е н и е. Так как призма прямая, то $\angle BAC$ является линейным углом двугранного угла при ребре AA_1. В ΔABC по теореме косинусов имеем:

$$(2\sqrt{7})^2 = 2^2 + AB^2 - 2 \cdot 2 \cdot AB \cdot \cos 150°,$$
$$AB^2 + 2\sqrt{3} \cdot AB - 24 = 0,$$
$$AB = -\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Для нахождения длины медианы $A_1M = m$ достроим $\Delta A_1B_1C_1$ до параллелограмма (рисунок 164) и используем соотношение между его сторонами и диагоналями: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Получим: $(2m)^2 + (2\sqrt{7})^2 = 2(2^2 + (2\sqrt{3})^2)$, $4m^2 = 32 - 28$, $m = 1$.

Из прямоугольного ΔAA_1M найдем $AA_1 = \sqrt{6}$ см. Тогда объём данной призмы равен $V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 150° \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (см^3).

О т в е т. $3\sqrt{2}$ см^3.

563. Основанием призмы является правильный шестиугольник, сторона которого равна а. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости её основания под углом α, а его ортогональная проекция на плоскость основания равна радиусу окружности, описанной около основания призмы. Найдите объём призмы.

Р е ш е н и е. Так как основание данной призмы – правильный шестиугольник, в котором радиус описанной около него окружности равен стороне, то высота призмы $A_1O = a \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Площадь основания $S_{осн} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Тогда объем данной призмы равен $V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1{,}5a^3\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

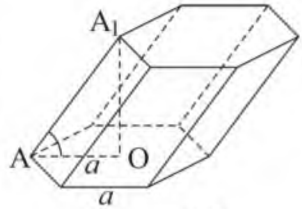


Рисунок 165

О т в е т. $1{,}5a^3\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

564. В наклонной четырехугольной призме боковое ребро равно 6 дм, а её перпендикулярным сечением является ромб с диагоналями 4 дм и 3 дм. Найдите объём призмы.

Р е ш е н и е. Объем данной призмы равен

$V = S_{MNKL} \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$ (дм^3).

О т в е т. 36 дм^3.

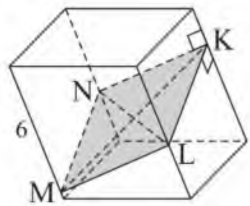


Рисунок 166

565. Из куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 9 см, вырезана треугольная пирамида C_1A_1BD. Найдите объём этой пирамиды.

Р е ш е н и е. Так как все ребра пирамиды C_1A_1BD равны диагоналям граней куба $9\sqrt{2}$ см, то эта пирамида правильная. Примем за основание пирамиды ΔA_1C_1D, тогда её высота BH, где H – точка пересечения медиан ΔA_1C_1D (рисунок 167).

$C_1H = \frac{9\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{6}$ (см),

$BH = \sqrt{162 - 54} = 6\sqrt{3}$ (см).

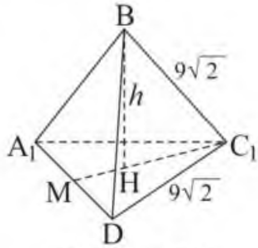


Рисунок 167

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1C_1D} \cdot BH = \frac{162\sqrt{3}}{12} \cdot 6\sqrt{3} = 243$ (см^3).
О т в е т. 243 см^3.

566. Основанием четырехугольной пирамиды $PABCD$ является параллелограмм $ABCD$, причем $AB = BP = 1$ дм, $PD = 2$ дм, $\angle ABD = \angle BPD = 90°$. Найдите объём этой пирамиды, если основание её высоты является внутренней точкой отрезка BD.

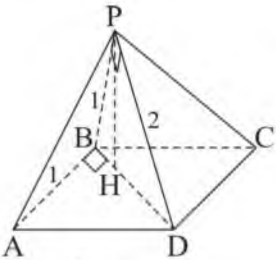


Рисунок 168

Р е ш е н и е. Пусть PH – высота данной пирамиды (рисунок 168).

$BD = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ (дм),

$S_{\Delta BPD} = 1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot PH, \quad PH = \frac{2}{\sqrt{5}}$ дм.

Объем данной пирамиды

$V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$ (дм^3).

О т в е т. $\frac{2}{3}$ дм^3.

567. Найдите объём n-угольной усеченной пирамиды, площади оснований которой равны 289 см^2 и 100 см^2, а высота пирамиды, до которой дополнена эта усеченная пирамида, равна 9 см.

Р е ш е н и е. Пусть $S_1 = 289$ см^2, $S_2 = 100$ см^2, h – высота данной усеченной пирамиды, тогда $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{9}{9-h}\right)^2$. Получим $\frac{9}{9-h} = \frac{17}{10}$, $h = 9 - \frac{90}{17} = \frac{63}{17}$ (см).

Тогда объем данной усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{17}(289 + 100 + \sqrt{289 \cdot 100}) = \frac{21 \cdot 559}{17} = \frac{11739}{17} = 690\frac{9}{17} \text{ (см}^3\text{)}.$$

О т в е т. $690\frac{9}{17}$ (см^3).

568. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра, наклонена к нему под углом 60°. Эта плоскость пересекает верхнее основание цилиндра по хорде, равной 10 см, стягивающей дугу 90°. Найдите объём цилиндра.

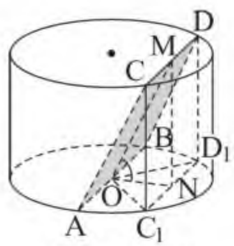


Рисунок 169

Р е ш е н и е. Пусть секущая плоскость пересекает основания цилиндра по хордам AB и CD, тогда $AB \parallel CD$ (рисунок 169). Построим хорду $C_1D_1 = CD = 10$ см и точки N и M – середины этих хорд, тогда MN – высота цилиндра, OD_1 – радиус его основания, $\angle MON = 60°$, $\angle C_1OD_1 = 90°$. Из прямоугольных треугольников C_1OD_1 и MON имеем:

$OD_1 = 5\sqrt{2}$ см, $\quad ON = ND_1 = 5$ см,

$MN = ON \cdot \operatorname{tg} 60° = 5\sqrt{3}$ см.

Тогда объём цилиндра равен:

$\pi \cdot OD_1^{\,2} \cdot MN = \pi \cdot (5\sqrt{2})^2 \cdot 5\sqrt{3} = 250\pi\sqrt{3}$ (см^3).

О т в е т. $250\pi\sqrt{3}$ см^3.

569. Из жести вырезан круговой сектор с радиусом 18 см и дугой 240°, который свернут в коническую воронку (рисунок 170). Найдите её объём.

Р е ш е н и е. $2\pi R = \frac{18\pi \cdot 240}{180}$, $R = 12$ см. Тогда высота конуса:

$h = \sqrt{324 - 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ (см),

а его объем равен $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 6\sqrt{5} = 288\pi\sqrt{5}$ (см^3).

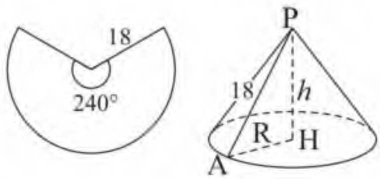


Рисунок 170

О т в е т. $288\pi\sqrt{5}$ см^3.

570. Около правильной треугольной пирамиды описан шар. Найдите его объём, если высота пирамиды равна 5,76 см, а боковое ребро – 7,2 см.

Р е ш е н и е. Пусть диаметр шара $PN = 2R$, $PH = 5{,}76$ см – высота пирамиды, $PA = 7{,}2$ см – её боковое ребро, тогда ΔAPN – прямоугольный и в нем $PA^2 = PN \cdot PH$. Получим $7{,}2^2 = 2R \cdot 5{,}76$, откуда $R = \frac{51{,}84}{11{,}52} = 4{,}5$(см).

Объём шара $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{243}{2}\pi = 121{,}5\pi$ (см^3).

О т в е т. $121{,}5\pi$ см^3.

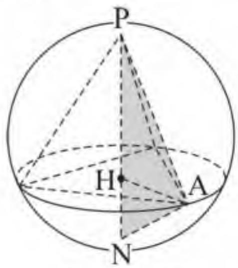


Рисунок 171

571. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = b$, $\angle A = \alpha$. Боковая грань BB_1C_1C призмы является квадратом. Найдите объём призмы.

Р е ш е н и е. Объём данной призмы:

$V = S_{\Delta ABC} \cdot CC_1$. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \sin\alpha$.

$CC_1 = BC = \sqrt{2b^2 - 2b^2 \cdot \cos\alpha} = b \cdot \sqrt{2 - 2\left(1 - 1\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = 2b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

$V = b^3\sin\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

О т в е т. $b^3\sin\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

572. Докажите, что если в сечение, перпендикулярное боковому ребру призмы, можно вписать окружность, то объем такой призмы равен половине произведения длины радиуса этой окружности на площадь боковой поверхности призмы.

Доказательство. Объём призмы $V = S_{\text{перп.сеч.}} \cdot b$, где $S_{\text{перп.сеч.}}$ – площадь сечения призмы, перпендикулярного её боковому ребру, b– длина бокового ребра. Если в указанное сечение можно вписать окружность, то его площадь равна $S_{\text{перп.сеч.}} = \frac{1}{2}P_{\text{перп.сеч.}} \cdot r$, где $P_{\text{перп. сеч.}}$ – периметр перпендикулярного сечения призмы, r – радиус окружности вписанной в это сечение.

Получили $V = \frac{1}{2}P_{\text{перп.сеч.}} \cdot r \cdot b$. Так как $S_{\text{бок.}} = P_{\text{перп. сеч.}} \cdot b$, то $V = \frac{1}{2}S_{\text{бок.}} \cdot r$. Что и требовалось доказать.

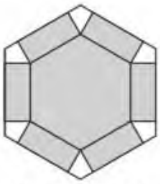


Рисунок 172

573. Требуется изготовить открытую коробку формы правильной шестиугольной призмы объёмом 9 дм^3 из правильного шестиугольника со стороной 3 дм, вырезав из его углов равные четырехугольники, как показано на рисунке 172. Какую высоту будет иметь такая коробка?

Решение. Основание коробки – правильный шестиугольник, обозначим его сторону $OA = a$, высоту коробки $AC = h$, тогда отрезок $AB = 3 - a$ (рисунок 173).

В ΔABC $\angle B = 60°$, $h = (3 - a) \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}(3 - a)$.

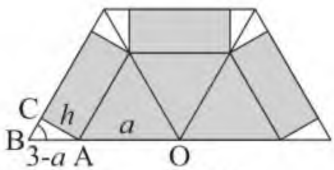


Рисунок 173

Объём коробки $V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 9$, откуда $\frac{9}{4}a^2(3 - a) = 9$, $a^3 - 3a^2 + 4 = 0$. Найдем целый корень уравнения $a_1 = 2$ и запишем его в виде $(a - 2)(a^2 - a - 2) = 0$, тогда $a_2 = 2$, $a_3 = -1$ (не подходит по условию задачи).

Таким образом, при $a = 2$ высота коробки $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ дм.

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дм.

574. Цистерна вместимостью 50 м^3 имеет форму тела, состоящего из цилиндра и двух равных шаровых сегментов. Найдите, с точностью до 0,01 м, длину образующей цилиндра, если диаметр его основания равен 3 м, а высота сегмента 0,57 м.

Р е ш е н и е. Объем данной цистерны равен $V = \pi r^2 l + 2\pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$, где $r = 1{,}5$ м, l – образующая цилиндра, $h = 0{,}57$ м, R – радиус шара. Радиус шара найдем из равенства $R^2 = 1{,}5^2 + (R - 0{,}57)^2$, $R \approx 2{,}26$ м.

Зная вместимость цистерны, получим уравнение:

$50 = \pi(2{,}25l + 0{,}6498 \cdot 2{,}07)$, откуда найдем $l \approx 6{,}48$ м.

О т в е т. $\approx 6{,}48$ м.

575. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 10$ см, $BC = 24$ см, $AC = 26$ см, а площадь ΔAB_1C_1 равна 180 см^2. Найдите объём пирамиды $B_1A_1ACC_1$.

Р е ш е н и е. Объём V пирамиды $B_1A_1ACC_1$ (рисунок 174) равна разности объемов данной призмы и пирамиды B_1ABC:

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot BB_1 - \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot BB_1 = \frac{2}{3}S_{\Delta ABC} \cdot BB_1.$$

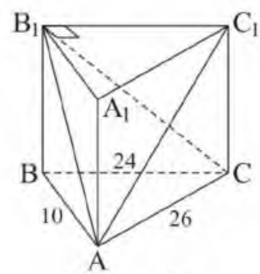


Рисунок 174

Основания данной призмы прямоугольный ΔABC, так как $26^2 = 24^2 + 10^2$. Следовательно, ΔAC_1B_1 также прямоугольный, так как $C_1B_1 \perp (ABB_1)$, значит $C_1B_1 \perp AB_1$. Зная его площадь найдем AB_1:

$180 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot AB_1$, $AB_1 = 15$см. Тогда $BB_1 = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5}$ (см),

$V = \frac{2}{3} \cdot 120 \cdot 5\sqrt{5} = 400\sqrt{5}$ (см^3).

О т в е т. $400\sqrt{5}$ см^3.

576. Дана правильная четырехугольная пирамида. Найдите: а) наименьшую площадь её боковой поверхности, если объём пирамиды равен 4 дм^3; б) её наибольший объём, если площадь боковой поверхности пирамиды равна 36 см^2.

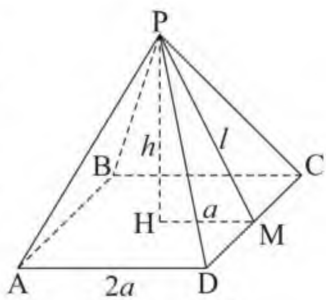


Рисунок 175

Р е ш е н и е. Пусть дана правильная пирамида $PABCD$, обозначим сторону её основания $2a$, апофему l, высоту h (рисунок 175).

а) Тогда $S_{бок.} = 4al$. Зная объём пирамиды, выразим l через a:

$$4 = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot \sqrt{l^2 - a^2}, \quad \frac{3}{a^2} = \sqrt{l^2 - a^2}, \quad l^2 = \frac{9}{a^4} + a^2, \quad l = \sqrt{\frac{9}{a^4} + a^2}.$$

Тогда $S_{бок.} = 4a \cdot \sqrt{\frac{9}{a^2} + a^4} = 4 \cdot \sqrt{\frac{9}{a^2} + a^4}$. Исследуем функцию $f(a) = a^4 + \frac{9}{a^2}$ на наименьшее значение. Имеем $f'(a) = 4a^3 - \frac{18}{a^3}$, $f'(a) = 0$, $\frac{4a^6 - 18}{a^3} = 0$, если $a^6 = \frac{9}{2}$, $a = \sqrt[6]{\frac{9}{2}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}}$. В окрестности этой точки производная меняет знак с «–» на «+», значит функция $f(a)$, а вместе с ней и $S_{бок.}$ имеет наименьшее значение при $a = \sqrt[6]{\frac{9}{2}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}}$. При этом

$$l = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}} + \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} + \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{\frac{3^{\frac{2}{3}}(2+1)}{2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}} = \frac{3^{\frac{5}{6}}}{2^{\frac{1}{6}}},$$

$$S_{бок.} = 4 \cdot \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{3^{\frac{5}{6}}}{2^{\frac{1}{6}}} = \frac{4 \cdot 3^{\frac{7}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 6\sqrt[6]{48} \text{ (дм}^2\text{)}.$$

б) Объём данной пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot h$. Зная площадь боковой поверхности, выразим l, а затем h через a. Имеем:

$$36 = 4al, \quad l = \frac{9}{a}, \quad h = \sqrt{\frac{81}{a^2} - a^2} = \sqrt{\frac{81 - a^4}{a^2}} = \frac{\sqrt{81 - a^4}}{a}.$$

Тогда $V = \frac{4}{3}\sqrt{81a^2 - a^6}$. Исследуем функцию $f(a) = 81a^2 - a^6$ на наибольшее значение на промежутке (0; 3). Имеем $f'(a) = 162a - 6a^5$, $f'(a) = 0$, $6a(27 - a^4) = 0$ при $a = \sqrt[4]{27}$. В окрестности этой точки производная меняет знак с «+» на «–», значит функция $f(a)$, а вместе с ней и объем принимает наибольшее значение при $a = 3^{\frac{3}{4}}$.

$$V = \frac{4}{3}\sqrt{3^4 \cdot 3^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{9}{2}}} = \frac{4}{3}\sqrt{3^5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 3^4 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{4 \cdot 9}{3}\sqrt{3^{\frac{1}{2}}(3-1)} =$$

$$=12\sqrt{2\sqrt{3}} = 12\sqrt[4]{12} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ. а) $6\sqrt[6]{48}$ дм^2; б) $12\sqrt[4]{12}$ см^3.

577. Докажите, что объёмы цилиндра, конуса и усеченного конуса, описанных около шара, равны одной трети произведений площадей их поверхностей на радиус шара.

Доказательство.

1) $V_ц = \pi R^2 h$ (рисунок 176, *а*).

$\frac{1}{3}(2\pi Rh + 2\pi R^2)R = \pi R^2 \cdot \frac{2}{3}(h + R) = V_ц$, так как $h = 2R$, $\frac{2}{3}(h + R) = 2R = h$.

2) $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (рисунок 176, *б*).

$\frac{1}{3}(\pi R^2 + \pi Rl) \cdot r = \frac{1}{3}\pi R(R + l) \cdot r = V_к$, так как $(R + l) \cdot r = Rh = S_{\Delta ABC}$.

3) $V_{ус.к} = \frac{1}{3}\pi h(R_1{}^2 + R_2{}^2 + R_1R_2)$ (рисунок 176, *в*).

$\frac{1}{3}(\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi l(R_1 + R_2)) \cdot r = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + (R_1 + R_2)(R_1 + R_2)) \cdot \frac{1}{2} = V_{ус.к}$,

так как $r = \frac{h}{2}$ и $l = R_1 + R_2$.

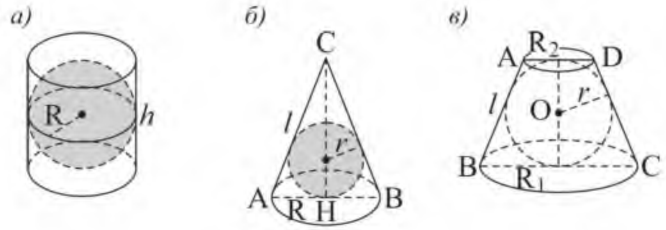


Рисунок 176

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10–11 КЛАССОВ

611. Основание наклонной призмы – прямоугольный треугольник с катетами, равными 5 см и 12 см. Боковая грань, содержащая гипотенузу, перпендикулярна основанию и имеет площадь 130 см^2. Найдите объём призмы.

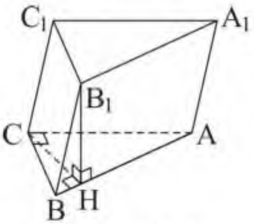


Рисунок 177

Р е ш е н и е. Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, основание которой прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и катетами $BC = 5$ см, $AC = 12$ см (рисунок 177). Гипотенуза $AB = 13$ см.

Так как боковая грань BB_1A_1A перпендикулярна основанию призмы, то высота B_1H этого параллелограмма является высотой призмы, причем $B_1H =$ $= 130 : 13 = 10$ (см).

Следовательно, объём призмы $V = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 \cdot 10 = 300$ (см^3).

О т в е т. 300 см^3.

618. В шар вписан конус, радиус основания которого равен r, а высота h. Найти радиус R шара.

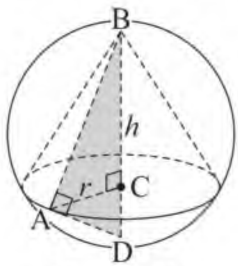


Рисунок 178

Р е ш е н и е. Пусть AB – образующая конуса, $AC = r$ – радиус основания конуса, $BC = h$ – его высота, причем отрезок BC принадлежит диаметру шара $BD = 2R$ (рисунок 178). Так как ΔABD – прямоугольный, AC – его высота, проведенная к гипотенузе, то $AC^2 = BC \cdot CD$, то есть $r^2 = h(2R - h)$, откуда $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$.

О т в е т. $\frac{r^2 + h^2}{2h}$

626. Основание пирамиды $DABC$ – ΔABC, в котором $AB = AC = 25$ см, $BC = 40$ см. Грань BCD перпендикулярна основанию. Расстояние от основания высоты DM пирамиды, где M – середина BC, до грани ACD равно $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Р е ш е н и е. Угол DMA является линейным углом двугранного угла при ребре BC пирамиды, по условию $\angle DMA = 90°$, причем M – середина BC (рисунок 179). Так как $\Delta ADC = \Delta ADB$, то площадь боковой поверхности пирамиды равна: $S_{бок} = S_{\Delta CBD} + 2S_{\Delta ABD} = 20 \cdot DM + 25 \cdot DH$, где $DH \perp AB$.

Отрезок MH высота прямоугольного ΔABM, в котором $AM = 15$ см, $MH = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$ (см). Расстояние от точки M до грани ABD и до грани ABD пирамиды равно это высоте MN ΔDMH, так как $MN \perp DH$ и $MN \perp AB$, $MN = 6\sqrt{2}$ см.

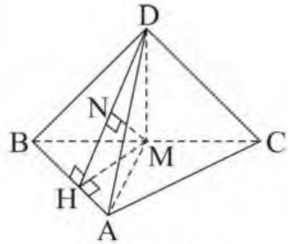


Рисунок 179

Тогда $\sin\angle MHN = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle MHN = 45°$, а ΔDMH – равнобедренный, в нем $DM = MH = 12$ см, $DH = 12\sqrt{2}$ см. Следовательно, искомая площадь равна $(240 + 300\sqrt{2})$ см^2.

О т в е т. $(240 + 300\sqrt{2})$ см^2.

627. Расстояние от центра сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, до её основания в 2 раза меньше радиуса сферы (рисунок 180).Найдите угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

Р е ш е н и е. Так как высота PH пирамиды принадлежит диаметру сферы $PD = 2R$, то искомый угол CPH найдем из прямоугольного ΔCPD.

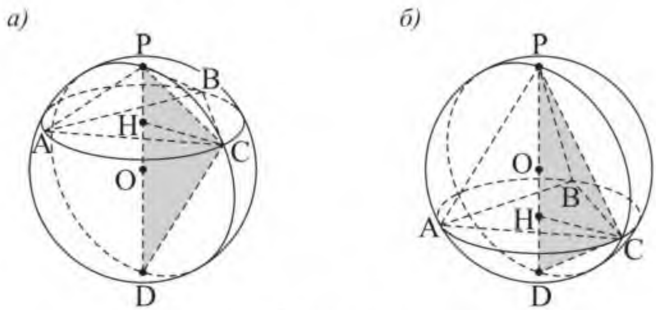


Рисунок 180

В ΔCPD $PH = \frac{R}{2}$ (рисунок 181, *а*) или $PH = \frac{3R}{2}$ (рисунок 181, *б*). Тогда $PC = \sqrt{PH \cdot PD} = R$ или $PC = R\sqrt{3}$, $\cos\angle CPH = \frac{PH}{PC} = \frac{1}{2}$ или $\cos\angle CPH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\angle CPH = 60°$ или $\angle CPH = 30°$.

О т в е т. 60° или 30°.

628. Найдите площадь сферы, вписанной в конус, образующая которого равна 9 см и наклонена к основанию под углом 30°.

Р е ш е н и е. В конус с образующей AB и центром основания C вписана сфера с центром O и радиусом $OC = OK = r$ см (рисунок 181). По условию $\angle BAC = 30°$, тогда $\angle OBK = 60°$, $BC = \frac{9}{2}$ см.

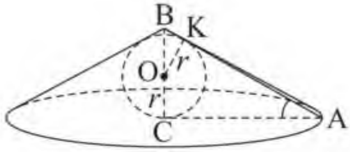


Рисунок 181

В ΔBKO $BO = \frac{9}{2} - r$, тогда $\sin 60° = \frac{r}{\frac{9}{2} - r}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{9 - 2r}$,

$4r = 9\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot r$, $\quad r(4 + 2\sqrt{3}) = 9\sqrt{3}$, $\quad r = \frac{9\sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{9\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}$.

Следовательно, площадь сферы $S = 4\pi r^2 = 243\pi(7 - 4\sqrt{3})$(см^2).

О т в е т. $243\pi(7 - 4\sqrt{3})$ см^2.

629. В правильную четырехугольную пирамиду, объём которой равен 96 см^3, вписан шар. Найдите высоту и сторону основания пирамиды, если радиус шара равен 2 см.

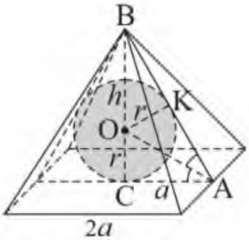


Рисунок 182

Р е ш е н и е. Пусть в правильную пирамиду вписан шар с центром O и радиусом $r = 2$ см, который касается основания в точке C, а боковой грани в точке K, причем $K \in BA$ (рисунок 182). Обозначим сторону основания пирамиды $2a$ см, высоту пирамиды $BC = h$, $\angle OAC = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$.

Из треугольников AOC и ABC имеем: $a = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}$,

$h = a \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a \cdot 2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$. Объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}(2a)^2 h = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)} = 96.$$

Пусть $\operatorname{tg}^2 \alpha = x$, тогда получим уравнение $9x(1 - x) = 2$, $9x^2 - 9x + 2 = 0$, откуда $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Тогда $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{2}{3}$ или $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3}$. Учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha > 0$, получим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $2a = \frac{4}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$ (см) или $2a = 4\sqrt{3}$ см, $h = \frac{4}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = 12$ (см) или $h = 6$ см.

О т в е т. 12 см и $2\sqrt{6}$ см или 6 см и $4\sqrt{3}$ см.

630. В треугольной пирамиде все плоские углы при её вершине – прямые, а боковые ребра равны $2\sqrt{2}$ см, 3 см и $\sqrt{10}$ см. Найдите площадь поверхности и объём описанного около этой пирамиды шара.

Р е ш е н и е. Пусть около пирамиды $PABC$ описан шар с центром O и радиусом R (рисунок 183). По условию $\angle APB = \angle APC = \angle CPB = 90°$, $PA = 2\sqrt{2}$ см, $PB = 3$ см, $PC = \sqrt{10}$ см. В прямоугольном ΔAPC гипотенуза $AC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (см). Отрезки $AC = PD$ – диаметры окружности, описанной около ΔAPC. Так как $BP \perp (APC)$, то $BP \perp PD$. Диаметр шара, перпендикулярный плоскости APC, проходит через точку M и пересекает отрезок BD в его середине, эта точка и является центром шара. Следовательно, $BD = 2R$ и $(2R)^2 = BP^2 + PD^2$, то есть $4R^2 = 9 + 18$, $R^2 = \frac{27}{4}$, $R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. Тогда площадь поверхности шара равна 27π см^2, а его объем равен $\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$ см^3.

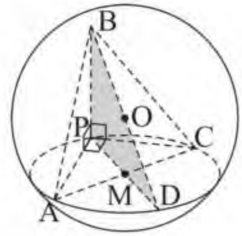


Рисунок 183

О т в е т. 27π см^2 и $\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$ см^3.

631. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите отношение объема тетраэдра B_1ACD_1 к объему этого параллелепипеда.

Р е ш е н и е. Объём тетраэдра B_1ACD_1 равен разности объёмов данного параллелепипеда и четырех равновеликих тетраэдров D_1ACD, B_1CAB, $CD_1B_1C_1$, $AB_1D_1A_1$ (рисунок 184).

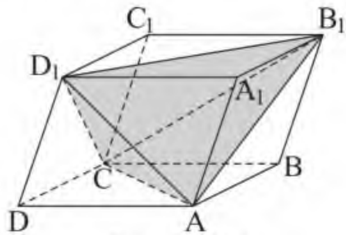


Рисунок 184

Эти тетраэдры равновелики потому, что площади их оснований равны половине площади основания параллелепипеда: $S_{\Delta ACD} = S_{\Delta CAB} = S_{\Delta D_1B_1C_1} = S_{\Delta B_1D_1A_1} = \frac{1}{2}S_{\text{осн.}}$, а высоты равны высоте h данного параллелепипеда, то есть расстоянию между параллельными плоскостями его оснований.

Таким образом, объем каждого из четырех указанных тетраэдров равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{6} V$, где V – объём параллелепипеда. Тогда $V_{B_1ACD_1} = V - \frac{4}{6} V = \frac{1}{3} V$. Следовательно, отношение объема тетраэдра B_1ACD_1 к объему параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\frac{1}{3}$.

О т в е т. $\frac{1}{3}$.

632. Основания усеченной пирамиды – равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны m и n ($m>n$). Две её боковые грани перпендикулярны плоскостям оснований, а третья наклонена к плоскости нижнего основания под углом φ. Найдите объём этой пирамиды. Рассмотрите возможные случаи расположения высоты пирамиды (рисунок 185).

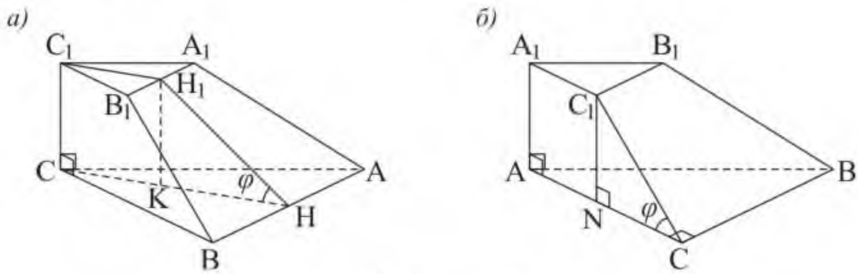


Рисунок 185

Р е ш е н и е. Пусть дана усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$, в которой основания ABC и $A_1B_1C_1$ равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузами $AB = m$ и $A_1B_1 = n$. Общее ребро боковых граней, перпендикулярных основанию, является высотой пирамиды. По условию задачи основанием высоты может быть вершина прямого или острого угла указанного равнобедренного треугольника (рисунок 185, *а*, *б*). Пусть CH – высота и медиана треугольника ABC, тогда площадь $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} m \cdot \frac{m}{2} = \frac{m^2}{4}$, аналогично $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{n^2}{4}$.

Искомый объём V равен: $V = \frac{1}{3} h\left(\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + \sqrt{\frac{m^2n^2}{16}}\right) = \frac{h}{12}(m^2 + mn + n^2)$.

В первом случае $h = CC_1 = H_1K = KH \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}(m - n) \cdot \operatorname{tg}\varphi$, тогда $V = \frac{1}{24}(m^3 - n^3) \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

Во втором случае:

$$h = AA_1 = C_1N = NC \cdot \operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{n}{\sqrt{2}}\right) \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}(m-n) \cdot \operatorname{tg}\varphi,$$

тогда $V = \frac{\sqrt{2}}{24}(m^3 - n^3) \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

О т в е т. $\frac{1}{24}(m^3 - n^3) \cdot \operatorname{tg}\varphi$ или $\frac{\sqrt{2}}{24}(m^3 - n^3) \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

633. а) В конус с высотой 0,5 м и радиусом основания 1 м, вписан цилиндр с радиусом основания r м. Найдите объём цилиндра и установите, при каком значении r объём цилиндра наибольший.

б) В шар радиуса 3 дм вписан конус, высота которого равна h дм. Найдите объём конуса и установите, при каком значении h объём будет наибольшим.

Р е ш е н и е. а) В конус с радиусом основания $OA = 1$ м и высотой $BO = 0{,}5$ м вписан цилиндр с радиусом основания $CK = OL = r$ м (рисунок 186).Пусть высота цилиндра $CO = h$ м, тогда его объём $V = \pi r^2 h$. Из ΔAKL выразим $h = KL = LA \cdot \operatorname{tg}\angle LAK = (1 - r) \cdot 0{,}5$. Тогда $V = 0{,}5\pi(r^2 - r^3)$. Установим, при каком значении r объём цилиндра наибольший. Для этого исследуем функцию $V(r) = 0{,}5\pi(r^2 - r^3)$ на наибольшее значение на промежутке (0; 1).

$V'(r) = 0{,}5\pi(2r - 3r^2)$, $V'(r) = 0$ при $r = \frac{2}{3}$. В окрестности этой точки производная меняет знак с «+» на «–». Следовательно, функция $V(r)$ достигает наибольшего значения при $r = \frac{2}{3}$.

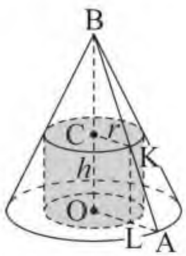


Рисунок 186

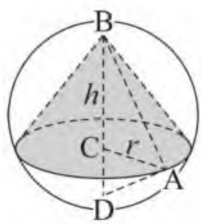


Рисунок 187

б) В шар, диаметр которого $BD = 6$ дм, вписан конус с высотой $BC = h$ дм (рисунок 187). Пусть радиус основания конуса $CA = r$ дм, тогда его объем $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Из прямоугольного ΔABD выразим $r^2 = h(6 - h)$. Тогда

$V = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$. Установим, при каком значении h объём будет наибольшим. Для этого исследуем функцию $V(h) = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$ на наибольшее значение на промежутке (0; 6).

$V'(h) = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = \pi h(4 - h)$, $V'(h) = 0$ при $h = 4$. Так как в окрестности этой точки производная меняет знак с «+» на «–», то функция $V(r)$ имеет наибольшее значение при $h = 4$.

О т в е т. а) $0{,}5\pi(r^2 - r^3)$ м^3, при $r = \frac{2}{3}$ м; б) $\frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$ дм^3, $h = 4$ дм.

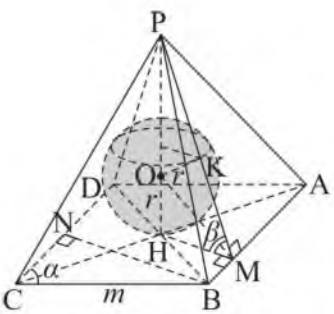


Рисунок 188

634. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна m, а острый угол – α. Каждый двугранный угол пирамиды при стороне её основания равен β (рисунок 188). Докажите, что в эту пирамиду можно вписать шар и найдите его радиус.

Р е ш е н и е. Пусть дана пирамида $PABCD$. В её основание $ABCD$ можно вписать окружность с центром в точке H пересечения диагоналей ромба. Поскольку каждая из боковых граней пирамиды наклонена к основанию под одним и тем же углом, то её высота – отрезок PH. Следовательно, существует точка, равноудаленная от основания и боковых граней пирамиды, поэтому в неё можно вписать шар.

В этой точке пересекаются высота PH и биссектриса MO угла PMH, который является линейным углом двугранного угла при ребре AB. Отрезок $OH = OK$ – искомый радиус.

Из ΔOMH имеем: $OH = HM \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Так как, $HM = \frac{1}{2}BN$, где BN – высота ромба, то $HM = \frac{1}{2}m \cdot \sin\alpha$, тогда $OH = \frac{1}{2}m \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

О т в е т. $\frac{1}{2}m \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

654. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковые грани AA_1B_1B и AA_1C_1C перпендикулярны и каждая из них – квадрат со стороной a. Найти расстояние между прямыми AC_1 и BA_1.

Р е ш е н и е. Поместим данную призму в прямоугольную систему координат как показано на рисунке 189 и достроим её до куба. Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми AC_1 и BA_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями AC_1D и BA_1D_1.

Первый способ. Диагональ B_1C перпендикулярна этим плоскостям и делится ими на три равные части: $B_1K = KL = LC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

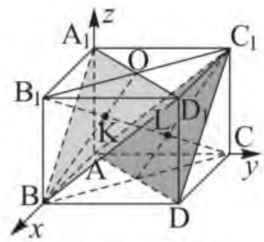


Рисунок 189

Второй способ. Пусть $a = 4$. Искомое расстояние равно расстоянию от точки $B(0; 0; 4)$ до плоскости AC_1D. Составим уравнение этой плоскости. Подставим в общее уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ координаты точек $A(0; 0; 0)$, $D(4; 4; 0)$, $C_1(0; 4; 4)$, получим $d = 0$, $a = c = 1$, $b = -1$. Уравнение плоскости AC_1D имеет вид $x - y + z = 0$, тогда искомое расстояние $l = \frac{|4 - 0 + 0|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Учитывая, что $4 = a$, получим $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна
АЛИБЕКОВ Саят Шарипович

УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Пособие для учащихся 11 класса общеобразовательной школы

Редактор	С. Ш. Алибеков
Художник	Е. Е. Велькер
Технический редактор	И. Н. Лебедев,
	И. С. Миронова
Корректор	

Подписано в печать 00.00.0000 г.
Формат 70×100 $^1/_{16}$. Объем 00,0 усл. печ. л.
Заказ № 000000. Тираж 0000 экз.

Код 000000

ТОО «Келешек-2030»
Республика Казахстан,
020000, г. Кокшетау.
Офис издательства: ул. Абая, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (приемная),
8 (7162) 44-18-64, +7 708 444 18 64,
моб. тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz