В.А. Смирнов, Е.А. Туяқов

ГЕОМЕТРИЯ

11

Умумий билим беридиған мәктәпләрниң тәбиий-математикилиқ йөнилишидики 11-синиплири үчүн дәрислик

Қазақстан Җумһурийити Билим вә пән министрлиги тәстиқлиған

Алмута "Мектеп" 2020

MyLibrary.kz

УДК 373.167.1
ББК 22.15я72
С53

Тәрҗиманлар: **А. Қурбанов, Г. Мижитова**

Шәртлик бәлгүләр:

— тәнқидий ойлаш үчүн берилгән тапшурмилар

— теориялиқ материални өз алдиға оқуп-үгиниш үчүн һаҗәтлик тапшурмилар

— теорема испатлинишиниң аяқлишиши

A — барлиқ оқуғучиларға орунлашқа тегиш тапшурмилар

B — оттура дәриҗилик тапшурмилар

C — жуқури дәриҗилик тапшурмилар

Смирнов В.А., Туяқов Е.А.
С53 **Геометрия.** Умумий билим беридиған мәктәпләрниң тәбиий-математикилиқ-йөнилишидики 11-синиплири үчүн дәрислик — Алмута: Мектеп, 2020. — 216 б., сүр.

ISBN 978—601—07—1534—9

С $\frac{4306020502—137}{404(05)—20}$ 56(1)—20

УДК 373.167.1
ББК 22.15я72

© Смирнов В.А., Туяқов Е.А., 2020
© Тәрҗиманлар: Курбанов А.З., Мижитова Г.Н., 2020
© "Мектеп" нәшрияти, бәдиий безәк, 2020
Пүткүл һоқуқлири қоғдалған, Нәширгә аит мүлкий һоқуқлар "Мектеп" нәшриятиға тәәллуқ

ISBN 978—601—07—1534—9

MyLibrary.kz

КИРИШМӘ

Дәрислик 10-синип үчүн «Геометрия» дәрислигиниң давами болуп һесаплиниду вә тәбиий-математикилиқ йөнилиштә оқуйдиған 11-синип оқуғучилириға арналған.

Дәрисликтә асасий көпяқлиқлар вә уларниң хусусийәтлири билән тонушуш, айланма җисимлар (цилиндр, конус, шар) вә уларниң хусусийәтлири билән тонушуш, бошлуқтики фигурилар бәтлириниң мәйданлири билән һәҗимлирини тепишни үгитиш көздә тутулған.

Дәрисликтә барлиқ материаллар бапларға вә параграфларға бөлүнгән. Улар теориялиқ материлларни, өз алдиға орунлашқа тапшурмиларни, пишшиқдаш соаллирини вә қийинлиғи бойичә һәр хил дәриҗидики һесапларни өз ичигә алиду.

Теорема испатлинишиниң аяқлишиши (□) бәлгүси билән бәлгүләнгән.

Дәрисликтики тапшурмилар дәриҗилиригә қарап А — барлиқ оқуғучилар орунлашқа тегишлик тапшурмилар, В — оттура дәриҗилик вә С — жуқури дәриҗилик болуп бөлүнгән.

Юлтузчә (*) билән бәлгүләнгән параграфлар оқуш программисиға кирмәйдиған илмий тонуп-билиш вә қолланма сүпитидики қошумчә материалларни тәминләйду. Уларни асасий яки қошумчә дәрисләрдә (өмәкләрдә, таллаш курслирида вә ш.о), шуниң билән бир қатарда оқуғучиларниң лаһийәлик вә тәтқиқ қилиш ишлирини уюштурушта пайдилинишқа болиду.

Һәрбир бапниң ахирида оқуш материалини өзләштүрүш сапасини тәкшүрүшкә беришланған тест тапшурмилири берилгән. Дәрисликниң ахирида һәсапларниң җаваплири кәлтүрүлгән.

Геометрияни оқуп үгиништа муваппәқийәт тиләймиз!

MyLibrary.kz

10-СИНИП ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

СТЕРЕОМЕТРИЯ БАШЛАНМИЛИРИ

1. Бошлуқта һәр бир үчи бир түзниң бойида ятмайдиған һәр түрлүк 1) үч; 2) төрт; 3) бәш; 4)* n чекитлириниң жүпи арқилиқ нәччә түз жүргүзүшкә болиду?
2. Бошлуқтики үч чекит арқилиқ нәччә тәкшилик жүргүзүшкә болиду?
3. Бошлуқтики һәр бир төрти бир тәкшиликниң бойида ятмайдиған һәр түрлүк 1) төрт; 2) бәш; 3)* n чекитләр арқилиқ нәччә тәкшилик жүргүзүшкә болиду?
4. 1) икки тәкшилик; 2) үч тәкшилик; 3)* төрт тәкшилик бошлуқни әң көп дегәндә қанчә бөләккә бөлиду?
5. Әгәр түзниң тәкшилик билән икки умумий чекити болса, у чағда түзниң мошу тәкшиликтә ятидиғинини испатлаңлар.
6. Түз вә мошу түздә ятмайдиған чекит арқилиқ пәқәт бирла тәкшилик жүргүзүшкә болидиғинини испатлаңлар.
7. Қийилишидиған икки түз арқилиқ пәқәт бирла тәкшилик жүргүзүшкә болидиғинини испатлаңлар.
8. Кубниң қанчә: 1) чоққиси; 2) қири; 3) йеқи болиду?
9. Параллелепипедниң қанчә: 1) чоққиси; 2) қири; 3) йеқи болиду?
10. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ призминиң қанчә чоққиси болиду?
11. Призминиң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 чоққиси болуши мүмкинму?
12. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ призминиң қанчә қири болиду?
13. Призминиң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 қири болуши мүмкинму?
14. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ призминиң қанчә йеқи болиду?
15. Призминиң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 йеқи болуши мүмкинму?
16. 1) 12; 2) 15; 3) 18 қири бар призминиң асаси қандақ көпбулуңлуқ болиду?
17. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ пирамидиниң қанчә чоққиси болиду?
18. Пирамидиниң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 чоққиси болуши мүмкинму?
19. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ пирамидиниң қанчә қири болиду?
20. Пирамидиниң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 қири болуши мүмкинму?
21. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ пирамидиниң қанчә йеқи болиду?
22. Пирамидиниң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 йеқи болуши мүмкинму?
23. 1) 8; 2) 10; 3) 12 қири бар пирамидиниң асаси қандақ көпбулуңлуқ болиду?

MyLibrary.kz

Бошлуқтики параллельлиқ

24. 1) Кубниң; 2) параллелепипедниң; 3) үчбулуңлуқ призминиң; 4) алтəбулуң призминиң параллель қирлириниң қанчə җүпи бар?

25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедида: 1) AB вə D_1C_1; 2) AD_1 вə BC_1 түзлири параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтəбулуңлуқ призмида: 1) AB вə E_1D_1; 2) AA_1 вə DD_1; 3) AC_1 вə FD_1 түзлири параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

27. 1) Кубниң; 2) параллелепипедниң; 3) үчбулуңлуқ пирамидиниң; 4) алтəбулуңлуқ пирамидиниң айқаш қирлириниң қанчə җүпи бар?

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң чоққилири арқилиқ өтидиған: 1) AB_1 вə BC_1; 2) AA_1 вə BD_1; 3) AC_1 вə BD_1 түзлири қандақ орунлашқан?

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтəбулуңлуқ призминиң чоққилири арқилиқ өтидиған: 1) AB_1 вə CD_1; 2) AA_1 вə BD_1; 3) AC_1 вə BF_1 түзлири қандақ орунлашқан?

30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедида: 1) AA_1 вə BD; 2) AC_1 вə BB_1 түзлири айқаш болидиғанлиғини испатлаңлар.

31. $SABCDEF$ пирамидисида SA түзи билəн: 1) BC; 2) CD түзлири айқаш болидиғанлиғини испатлаңлар.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтəбулуңлуқ призмисида: 1) AA_1 вə BC; 2) AC_1 вə BD; 3) AB вə B_1C_1 түзлири айқаш болидиғинини испатлаңлар.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтəбулуңлуқ призмисида: 1) AD; 2) AB_1 түзлиригə параллель яқлирини көрситиңлар.

34. $SABCDEF$ дурус алтəбулуңлуқ пирамидисида AB қири SDE йеқиға параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

35. 1) Кубниң; 2) параллелепипедниң; 3) үчбулуңлуқ призминиң; 4) алтəбулуңлуқ призминиң параллель яқлириниң қанчə җүпи болиду?

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтəбулуңлуқ призмисида: 1) ABB_1 вə EDD_1; 2) ACC_1 вə FDD_1 тəкшиликлири параллель болидиғинини испатлаңлар.

Бошлуқтики перпендикулярлиқ

37. 1) Дурус тетраэдрниң; 2) кубниң перпендикуляр қирлириниң қанчə җүпи болиду?

38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида: 1) AB_1 вə BC_1; 2) AC вə BD_1; 3) AB_1 вə CD_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтəбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гə тəң. 1) AA_1 вə CD_1; 2) AA_1 вə BD_1; 3) AC вə BE_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B чекитидин: 1) A_1D_1; 2) A_1C_1 түзлиригичə болған арилиқни тепиңлар.

MyLibrary.kz

41. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. Кубниң B чоққисидин: 1) AC_1; 2) A_1C_1 түзигичә болған ариliқни тепиңлар.
42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B чекитидин: 1) ACC_1; 2) ACB_1 тәкшиликлиригичә болған ариliқни тепиңлар.
43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. Униң B чоққисидин: 1) ACC_1; 2) CDD_1; 3) DEE_1; 4) DFF_1 тәкшиликлиригичә болған арилиғини тепиңлар.
44. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. 1) ABB_1 вә DEE_1; 2) ACC_1 вә FDD_1 тәкшиликлириниң арилиғини тепиңлар.
45. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 гә тәң. SB түзи билән ABC тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.
46. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң асасиниң тәрәплири 1 гә, ян қирлири 2 гә тәң. SB түзи билән ABC тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.
47. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. 1) ABB_1 вә BCC_1; 2) ABB_1 вә ACC_1; 3) ACC_1 вә CDD_1; 4) ACC_1 вә BEE_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
48. Дурус тетраэдр яқлириниң арисидики икки яқлиқ булуңниң косинусини тепиңлар.
49. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 гә тәң. Униң хошна ян яқлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

Векторлар вә уларниң хусусийәтлири

50. Параллелепипедниң қирлири һәр түрлүк қанчә векторларни тәшкил қилиду?
51. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. 1) $\overline{AC_1}$; 2) $\overline{AD_1}$ векторлириниң узунлиғини тепиңлар.
52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида: 1) $\overline{AB} + \overline{AD_1}$; 2) $\overline{AB_1} + \overline{AD_1}$ векторлириниң узунлиғини тепиңлар.
53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида $\overline{AC_1}$ векторини $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ вә $\overline{AA_1}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.
54. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. $\overline{AD_1}$ векторини $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ вә $\overline{AA_1}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.
55. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 гә тәң. $\overline{SA}$ вектори билән: 1) $\overline{BC}$; 2) $\overline{BD}$ векторлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

MyLibrary.kz

56. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куби берилгән. $\overrightarrow{AB_1}$ вектори билән: 1) $\overrightarrow{CC_1}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$; 3) $\overrightarrow{BC_1}$; 4) $\overrightarrow{BD_1}$ векторлириниң скалярлиқ көпәйтиндисини тепиңлар.

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида җисимни C чоққисидин C_1 чоққисиға $\vec{F} = \overrightarrow{BD_1}$ күчиниң тәсири билән орун алмаштурғандики орунлинидиған ишни тепиңлар.

Координатилар

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куби тик булуңлуқ координатилар системисида орунлашқан. D чоққиси координатилар башланмисида, DC, DA, DD_1 қирлири мувапиқ абсцисса, ордината, аппликата оқлирида ятиду. Кубниң барлиқ чоққилириниң координатилирини тепиңлар.

59. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң, вә A чоққиси — тикбулуңлуқ координатилар системисиниң башлинишида, AB, AE, AA_1 кесиндилири мувапиқ абсцисса, ордината, аппликата оқлирида ятса, призма чоққилириниң координатилирини тепиңлар.

60. $A(1; 2; 3)$ чекитидин: 1) Ox; 2) Oy; 3) Oz координатилар түзлиригичә болған ариliқни тепиңлар.

61. Мәркизи $A(1; 2; 2)$ чекитидә болидиған вә координатилар башлинишидин өтидиған сфериниң тәңлимисини йезиңлар.

62. $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 4 = 0$ тәңлимиси бошлуқтики сферини ениқлайдиғанлиғини испатлаңлар. Униң радиуси билән мәркизиниң координатилирини тепиңлар.

63. $\vec{a}_1(1; 2; 3)$ вә $\vec{a}_2(3; -1; 2)$ векторлириниң скаляр көпәйтиндисини тепиңлар.

64. $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ чекитлири арқилиқ өтидиған тәкшиликниң тәңлимисини йезиңлар.

MyLibrary.kz

I бап

КӨПЯҚЛИҚЛАР

§1. Көпяқлиқ чүшәнчиси. Призма вә униң элементлири, призминиң түрлири. Призминиң йейилмиси, ян бети вә толуқ бетиниң мәйданлири

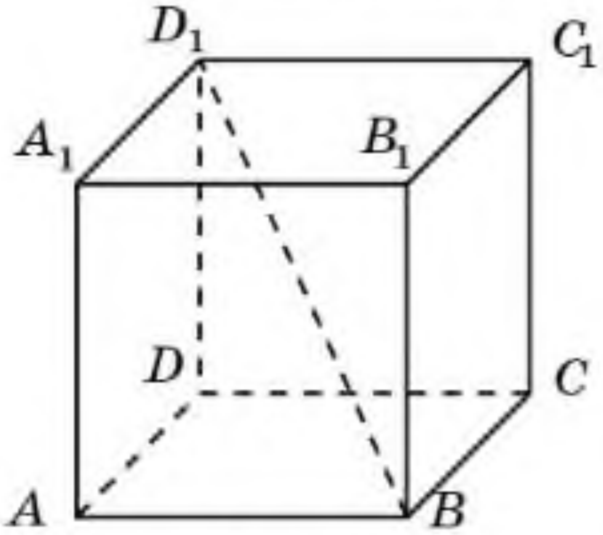
Алди билән "*геометриялиқ жисим*" чүшәнчисини киргүзәйли. Геометриялиқ жисимни көрнәклик түрдә бошлуқниң қандақту бир физикилиқ жисим елип турған вә бәт билән чәкләнгән бир бөлиги дәп чүшиниш керәк. Куб, параллелепипед, тетраэдр, шар — геометриялиқ жисимларниң мисаллиридур.

Геометрияда геометриялиқ жисимлардин башқа жисимлар қараштурулмиғанлиқтин, буниңдин кейин биз уларни пәқәт *жисимлар* дәп атаймиз.

Һәр бир жисимниң бети вә ички облуси болиду. Мәсилән, кубниң бети униң яқлири болидиған алтә квадраттин туриду. Кубниң бетидә ятмайдиған барлиқ чекитлири униң ички облусини тәшкил қилиду.

Геометриялиқ жисимларниң көпчилиги көпяқлиқлар болуп һесаплиниду.

Көпяқлиқ дәп бети көпбулуңлуқларниң чәклик санидин туридиған жисимни ейтиду. Мошу көпбулуңлуқлар көпяқлиқниң *яқлири* дәп, көпбулуңлуқниң тәрәплири билән чоққилири көпяқлиқниң мувапиқ *қирлири* билән *чоққилири* дәп атилидиғанлини есимизға чүширимиз.



1.1-сүрәт

10-синип геометрия курсида томпақ көпяқлиқлар (куб, параллелепипед, призма, пирамида вә ш.о.) қараштурулған.

Куб дәп яқлири квадрат болидиған алтәяқлиқни атайду (1.1-сүрәт). Адәттә куб униң чоққилирини көрситиш арқилиқ бәлгүлиниду, мәсилән, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Қири 1 гә тәң куб *бирлик куб* дәп атилиду.

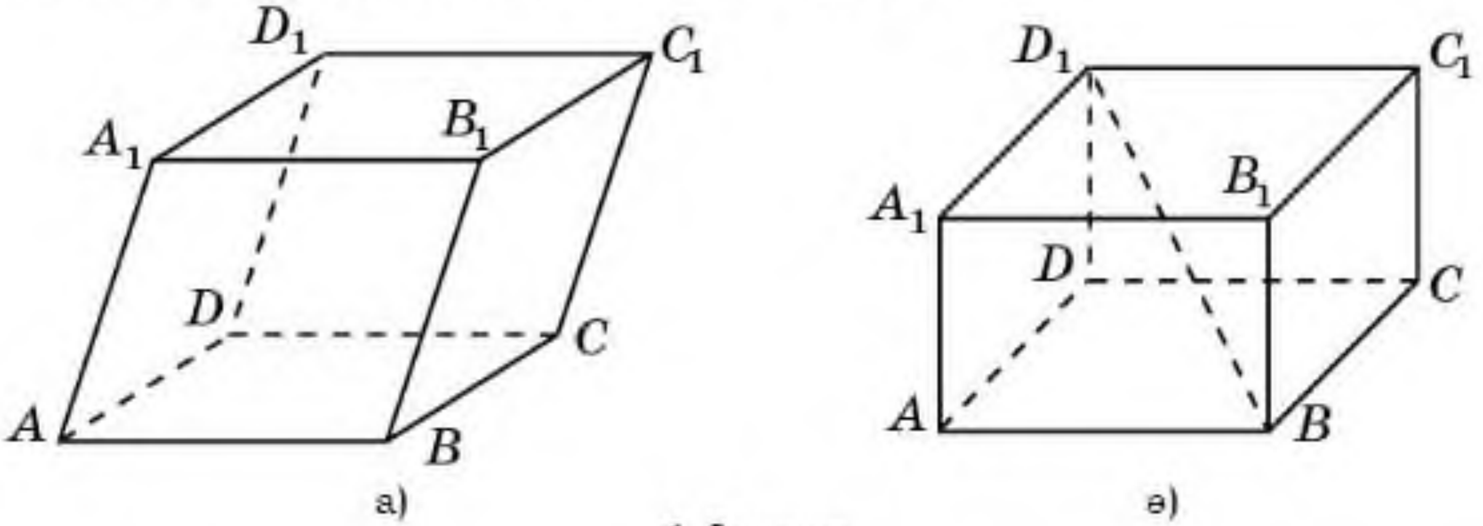
Кубниң бир йеқида ятмайдиған икки чоққисини қошудиған кесиндә *кубниң диагонали* дәп атилиду. 1.1-сүрәттә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң BD_1 диагонали тәсвирләнгән.

Параллелепипед дәп қариму-қарши яқлири жүп-жүпи билән өз ара параллель болидиған көпяқлиқни (алтәяқлиқни) атайду (1.2 *а*-сүрәт). Параллелепипедниң яқлириниң һәммиси параллелограмм болиду. Параллелепипед униң чоққилирини көрситиш арқилиқ бәлгүлиниду, мәсилән, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Әгәр параллелепипедниң ян қирлири асас тәкшилигигә перпендикуляр болса, у чағда у *тик параллелепипед* дәп атилиду. Асаслири тиктөртбулуңлуқ болидиған тик параллелепипедни тикбулуңлуқ

MyLibrary.kz

параллелепипед дәп атайду (1.2, ә-сүрәт). Әгәр параллелепипедниң ян қирлири асас тәкшилигигә перпендикуляр болмиса, у чағда *янту параллелепипед* дәп атилиду (1.2, а-сүрәт).



1.2-сүрәт

Параллелепипедниң бир йеқида ятмайдиған икки чоққисини қошидиған кесиндә — параллелепипедниң диагонали дәп атилиду. 1.2, ә-сүрәттә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик булуңлуқ параллелепипедниң BD_1 диагонали тәсвирләнгән.

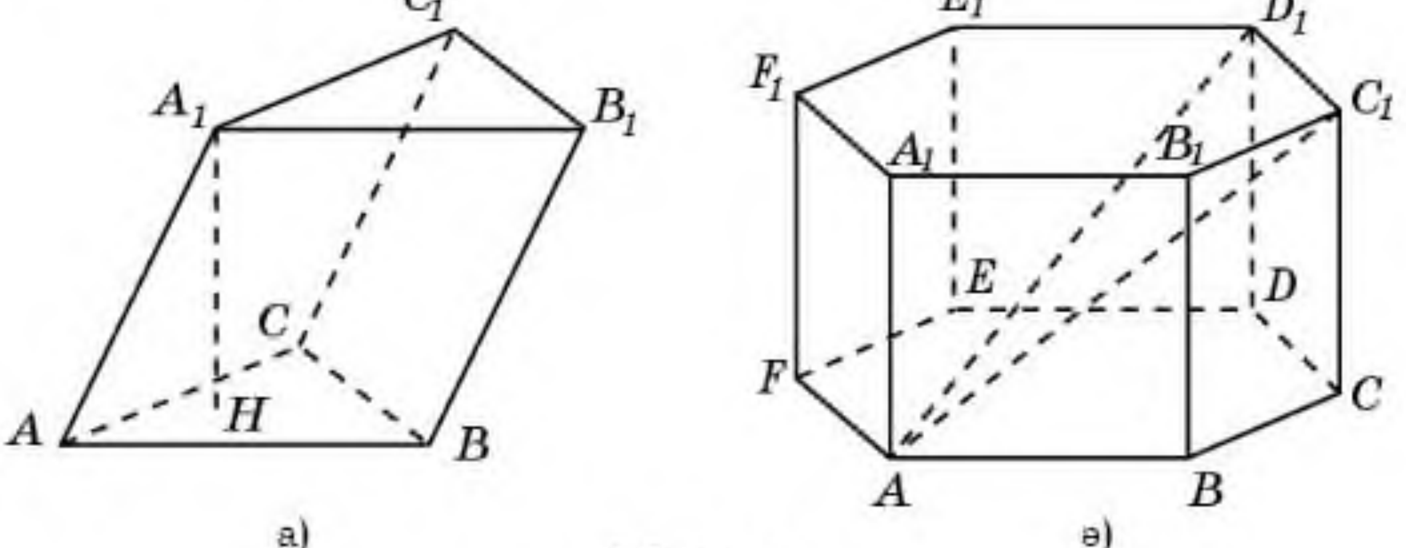
Параллелепипедниң барлиқ диагональлири бир чекиттә кийилишиду вә мошу чекиттә дәл иккигә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

Призма дәп икки йеқи параллель тәкшиликләрдә ятидиған өз ара тәң көпбулуңлуқлар, қалған яқлири параллелограмм болидиған көпяқлиқни атайду. Көпбулуңлуқлар призминиң асаслири, параллелограммлар призминиң *ян яқлири* дәп атилиду. Ян яқлиридин қурулған бәт *призминиң ян бети* дәп атилиду. Призминиң ян яқлириниң умумий қирлири униң *ян қирлири* дәп атилиду.

Призмилар асаслирида ятқан көпбулуңларға (үчбулуңлуқлар, төртбулуңлуқлар, бәшбулуңлуқлар вә ш.о.) бағлиқ мувапиқ үчбулуңлуқ, төртбулуңлуқ, бәшбулуңлуқ вә ш.о. болуп бөлүниду.

Әгәр призминиң асаси n-булуңлуқ болса, у чағда у *n-булуңлуқ призма* дәп атилиду.

Призма униң чоққилири билән бәлгүлиниду мәсилән: $ABCA_1B_1C_1$ — үчбулуңлуқ призма (1.3, а-сүрәт), $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — алтәбулуңлуқ призма (1.3, ә-сүрәт).



1.3-сүрәт

Призминиң ениқлимисидин униң келәси хусусийәтлири чиқиду:
1) ян қирлири тәң;
2) асаслири тәң вә параллель болиду.

Бу хусусийәтләрни өзәңлар испатлаңлар.

Ян қирлири асаслириға перпендикуляр болидиған призма *тик призма* дәп атилиду. Тик әмәс призма *янту призма* дәп атилиду 1.3, а-сүрәттә үчбулуңлуқ янту призма тәсвирләнгән. 1.3, ә-сүрәттә тик алтәбулуңлуқ призма тәсвирләнгән.

Қандақ ойлайсиләр, параллелепипед төртбулуңлуқ призма боламду?

Асаслири дурус көпбулуңлуқ болидиған тик призма *дурус* дәп атилиду. 1.3, ә-сүрәттә дурус алтәбулуңлуқ призма тәсвирләнгән.

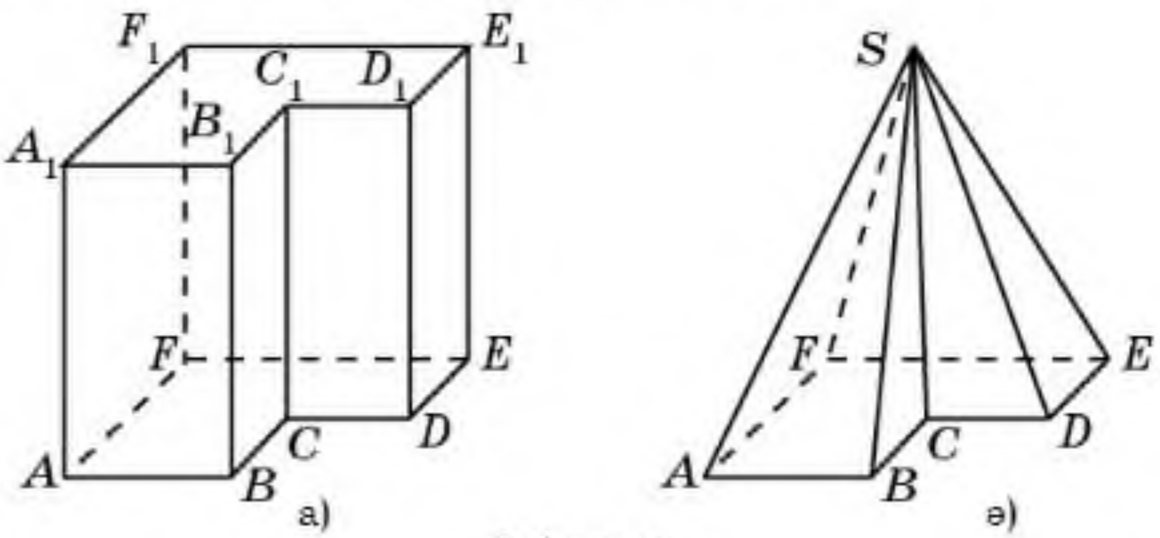
Призминиң асас тәкшиликлириниң арилиғини *призминиң егизлиги* дәп атайду, йәни призминиң бир асасиниң чекитидин иккинчи асас тәкшилигигә чүширилгән перпендикуляр униң *егизлиги* болуп һесаплиниду. 1.3, а-сүрәттә $ABCA_1B_1C_1$ призмисиниң A_1H егизлиги тәсвирләнгән.

Тик призминиң егизлиги униң ян қириниң узунлиғиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Призминиң бир тәрипидә ятмайдиған икки чоққисини қошидиған кесиндә *призминиң диагонали* дәп атилиду. 1.3, ә-сүрәттә $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмисиниң AC_1 вә AD_1 диагональлири тәсвирләнгән.

Әгәр көпяқлиқта униң һәр қандақ икки чекити билән биллә уларни қошидиған кесиндә ятидиған болса, у чағда у *көпяқлиқ томпақ көпяқлиқ* дәп атилиду.

1.3-сүрәттә томпақ көпяқлиқлар тәсвирләнгән. 1.4 *а*, *ә*-сүрәтләрдә томпақ әмәс алтәбулуңлуқ призма тәсвирләнгән.

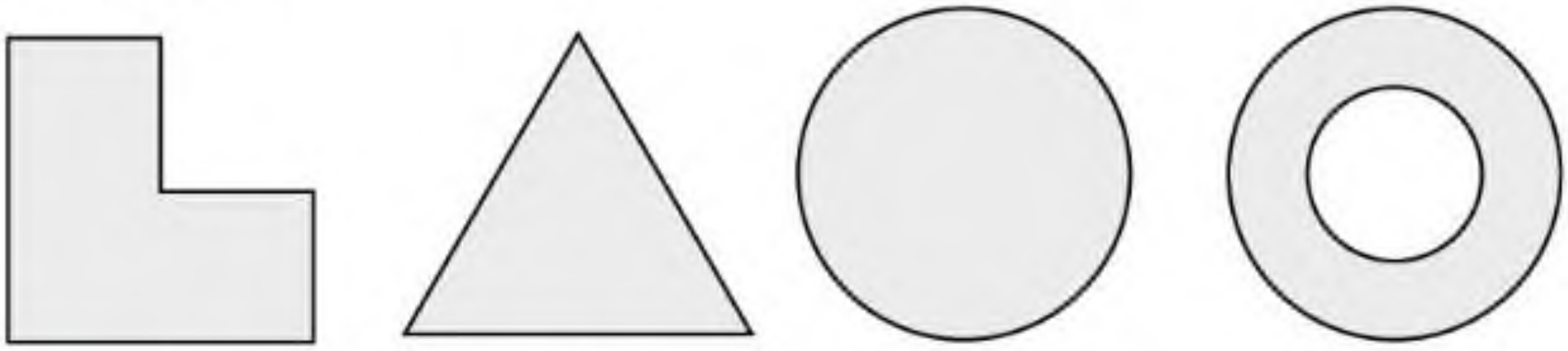


1.4-сүрәт

«Томпақлиқ» чүшәнчиси һәр қандақ фигура үчүн ениқлиниду. Әгәр фигуриниң һәр қандақ икки чекити билән биллә уларни қошидиған кесиндә ятса, у чағда у *томпақ фигура* дәп атилиду.

MyLibrary.kz

1.5-сүрәттә томпақ (ә, б) вә томпақ әмәс (а, в) тәкши фигурилар тәсвирләнгән.



1.5-сүрәт

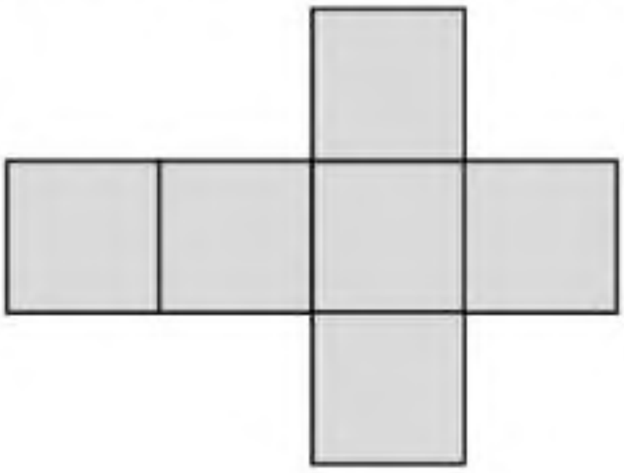
Икки томпақ фигуриниң кийилишиши (умумий бөләклири) томпақ фигура болидиғанлиғини испатлаңлар.

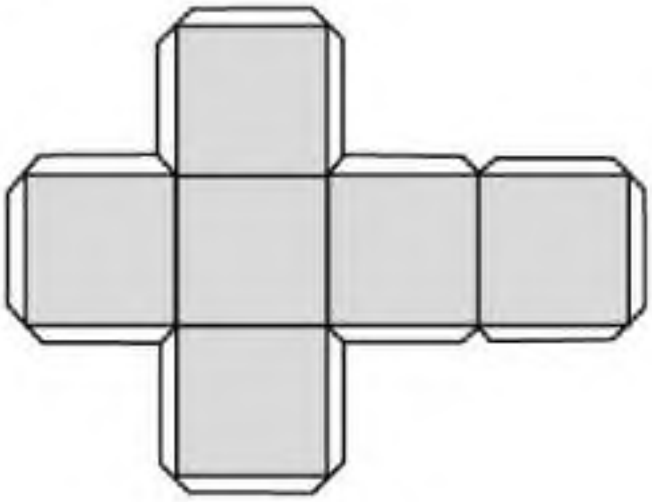
Әгәр көпяқлиқ бетини қандақту бир қириниң бойи билән кийип, уни тәкшиликкә, йәни бәтни тәшкил қилидиған барлиқ көпбулуңлуқлар берилгән тәкшиликтә ятидиған қилип йайсақ, у чағда *көпяқлиқниң йейилмиси* дәп атилидиған фигура келип чиқиду.

Мәсилән 1.6-сүрәттә кубниң йейилмиси тәсвирләнгән.

Көпяқлиқларниң модельлирини қаттиқ қәғәздин яки қандақту бир қаттиқ материалдин ясаш үчүн, алди билән униң йейилмисини тәйярлап елип, андин мувапиқ қирлирини чаплап чиқиш керәк.

Қолайлиқ болуши үчүн көпяқлиқ йейилмисини қалпақчиси билән ясиған дурус вә шулар арқилиқ чаплиниду. 1.7-сүрәттә кубниң йейилмиси қалпақчилири билән тәсвирләнгән.


1.6-сүрәт


1.7-сүрәт

Көпяқлиқларни уларниң йейилмиси бойичә қураштуруш тоғрисида толуғирақ тонушуш үчүн: Веннинджер М. Модели многогранников. — М.: Мир, 2004. — китавида көрситилгән.

Ениқлима бойичә көпяқлиқ бетиниң мәйдани мошу бәтниң тәркивидики көпбулуңлуқлар мәйданиниң қошундиси болуп һесаплиниду.

Көпяқлиқ бетиниң мәйдани, униң йейилмисиниң мәйданиға тәң болиду.

MyLibrary.kz

Призминиң ян бети дәп униң барлиқ ян яқлиридин түзүлгән бәтни атайду. Шуңлашқа призминиң ян бетиниң мәйдани униң барлиқ ян яқлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң.

Теорема. ***Тик призминиң ян бетиниң мәйдани униң асасиниң периметри билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң.***

Испатлиниши. Ениқлима бойичә $S_{\text{ян бети}} = S_1 + S_2 + ... + S_n$, бу йәрдә $S_1, S_2, ... , S_n$ — ян яқлириниң мәйданлири. Тик призминиң ян яқлири тикбулуңлуқ төртбулуңлуқлар болуп, униң асаслири призма асасиниң тәрәплири болиду вә ян қири призминиң h егизлиги болуп һесаплиниду. Демәк $S_1 = a_1h$, $S_2 = a_2h$, ... , $S_n = a_nh$, бу йәрдә $a_1, a_2, ...,$ a_n — асасиниң тәрәплириниң узунлуқлири. Шуниң билән призминиң ян бетиниң мәйдани:

$$S_{\text{ян бети}} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = (a_1 + a_2 + ... + a_n)h = Ph,$$

формулиси билән ениқлиниду. Бу йәрдә P — призма асасиниң периметри. □

Призминиң толуқ бетиниң мәйдани униң ян бети билән асаслириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң, йәни төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$S_{\text{призма}} = S_{\text{ян бети}} + 2S_{\text{асаси}}.$$

Қири a-ға тәң болидиған кубниң толуқ бетиниң мәйданини һесаплаш формулисини йезиңлар.

Бир чоққисидин чиқидиған қирлири a, b, c болидиған тикбулуңлуқ параллелепипедниң толуқ бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.

Көпяқлиқларни модельлаш үчүн http://geogebra.org сайтидин GeoGebra компьютерлик программисини қоллинишқа болиду.

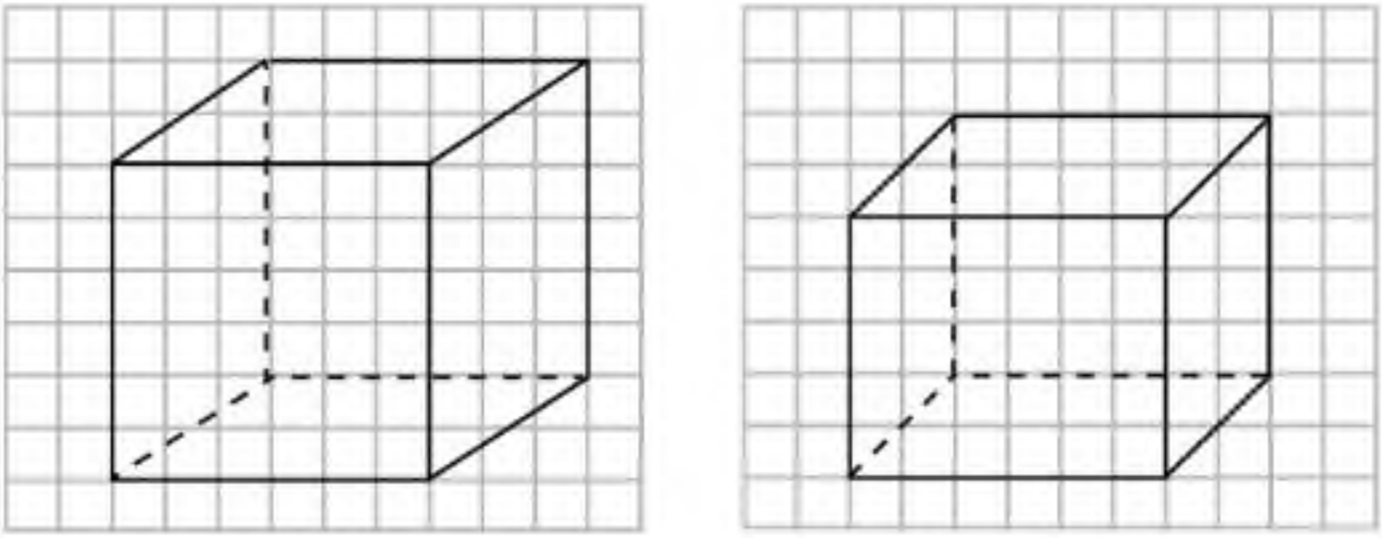
Соаллар

1. Көпяқлиқ дегинимиз немә?
2. Қандақ көпяқлиқ куб дәп атилиду?
3. Кубниң диагонали дегинимиз немә?
4. Қандақ көпяқлиқ параллелепипед дәп атилиду?
5. Параллелепипедниң диагонали дегинимиз немә?
6. Қандақ көпяқлиқ призма дәп атилиду?
7. Қандақ призма дурус призма дәп атилиду?
8. Призминиң егизлиги дегинимиз немә?
9. Призминиң диагонали дегинимиз немә?
10. Қандақ көпяқлиқ томпақ дәп атилиду?
11. Көпяқлиқниң йейилмиси дегинимиз немә?
12. Көпяқлиқ бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
13. Призминиң ян вә толуқ бетиниң мәйданлири қандақ һесаплиниду?

MyLibrary.kz

А

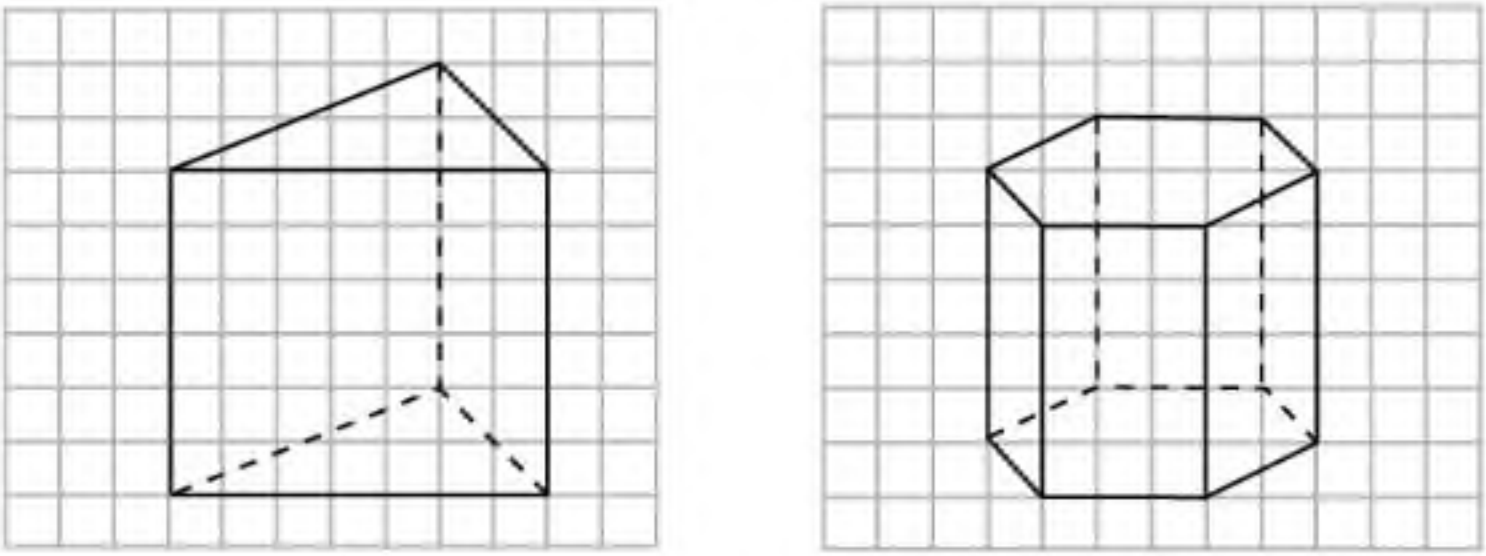
1.1. Чақмақ дәптәргә 1.8-сүрәттикигә охшаш кубни вә параллелепипедни селиңлар.



а) ә)

1.8-сүрәт

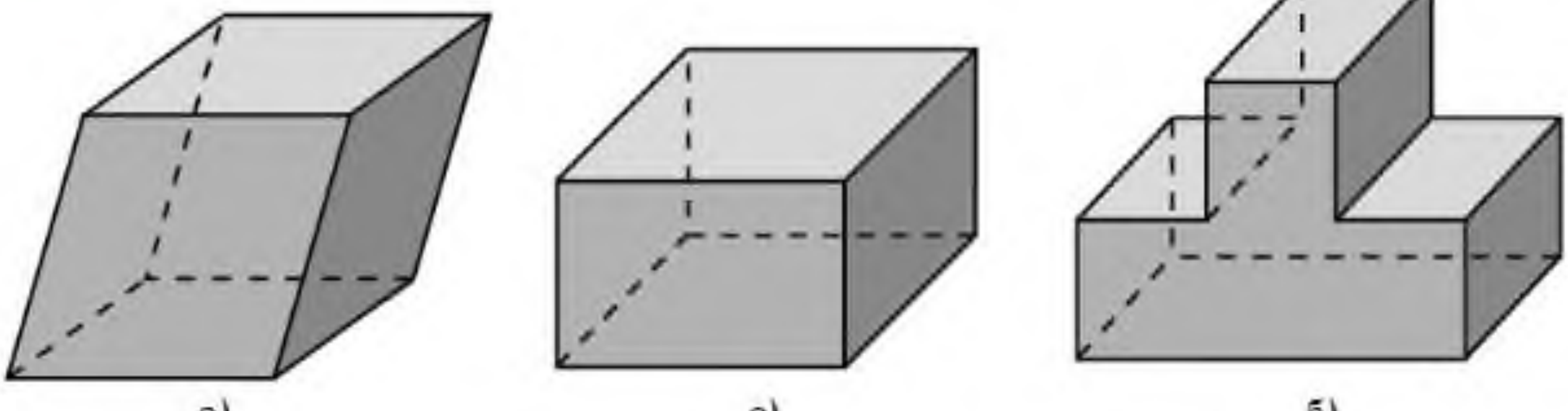
1.2. Чақмақ қәғәзгә 1.9-сүрәттикигә охшаш призмиларни селиңлар.



а) ә)

1.9-сүрәт

1.3. 1.10-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриларниң қайсиси параллелепипед болиду?

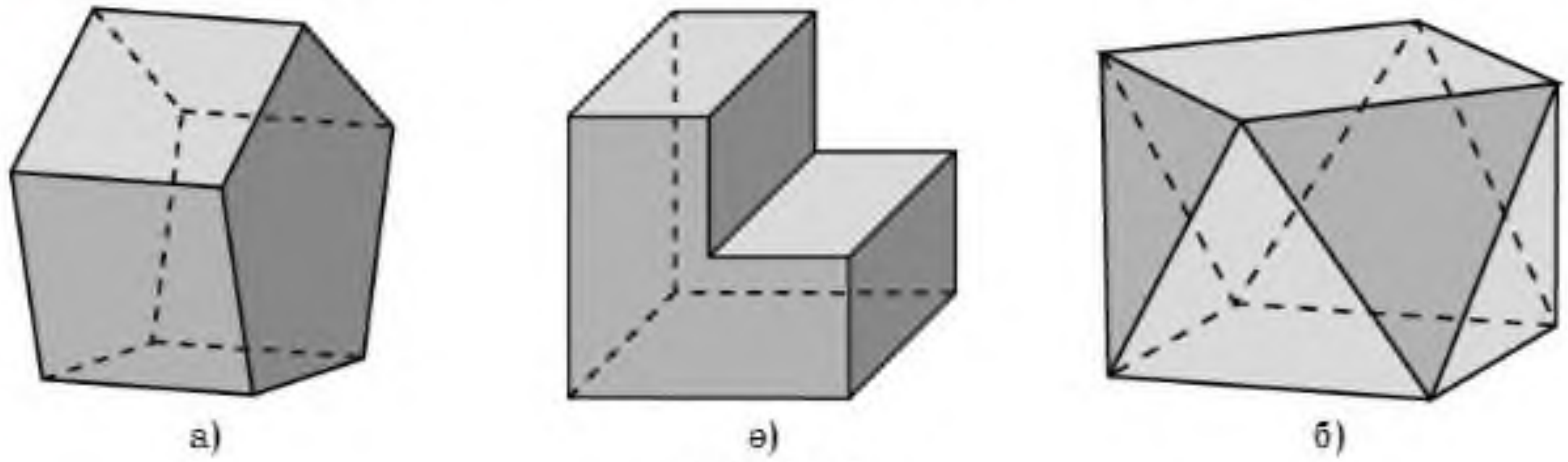


а) ә) б)

1.10-сүрәт

MyLibrary.kz

1.4. 1.11-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриларниң қайсиси призма болиду?



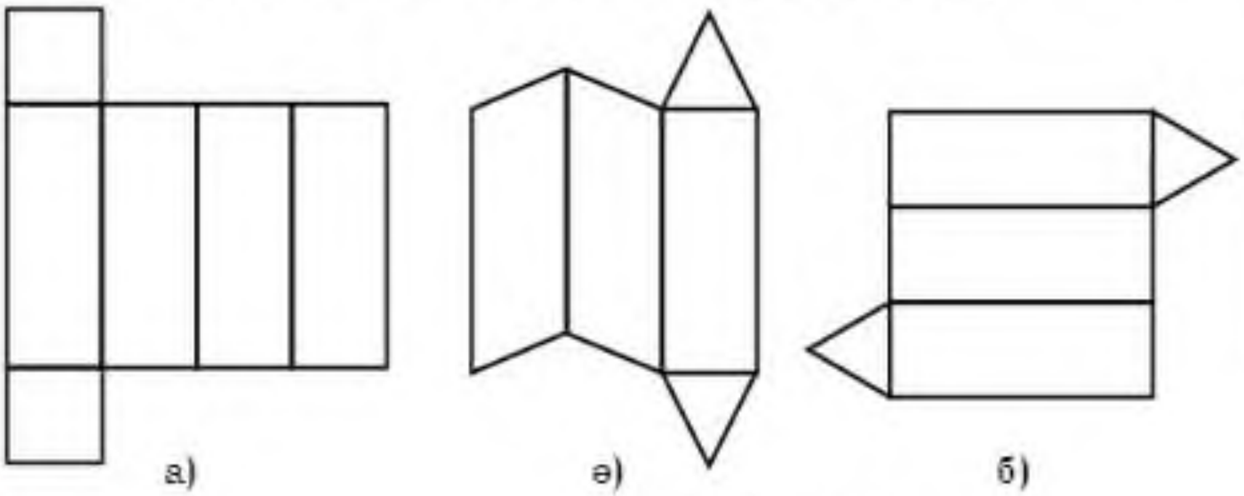
1.11-сүрәт

1.5. 1.12-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриларниң қайсиси призминиң йейилмиси болиду? Мошу призминиң түрини ениқлаңлар.

1.6. Қири 1 см-ға тәң болған кубниң диагоналини тепиңлар.

1.7. Бир чоққисидин чиқидиған қирлири 2 см, 3 см вә 4 см-ға тәң болидиған тикбулуңлуқ параллелепипедниң диагоналини тепиңлар.

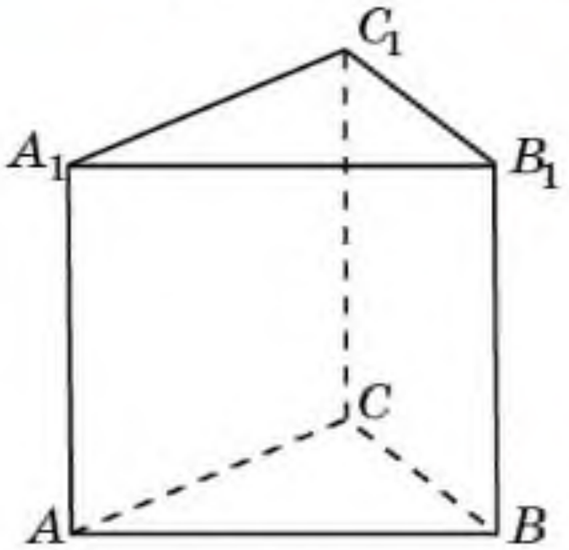
1.8. Призминиң ян қири 2 см-ға вә тәң асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Призминиң егизлигини тепиңлар.



1.12-сүрәт

1.9. Әгәр кубниң барлиқ қирлирини 3 һәссә ашурса, униң толуқ бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

1.10. Әгәр тикбулуңлуқ параллелепипедниң барлиқ қирлирин 2 һәссә кемитсә, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә кемийду?



1.13-сүрәт

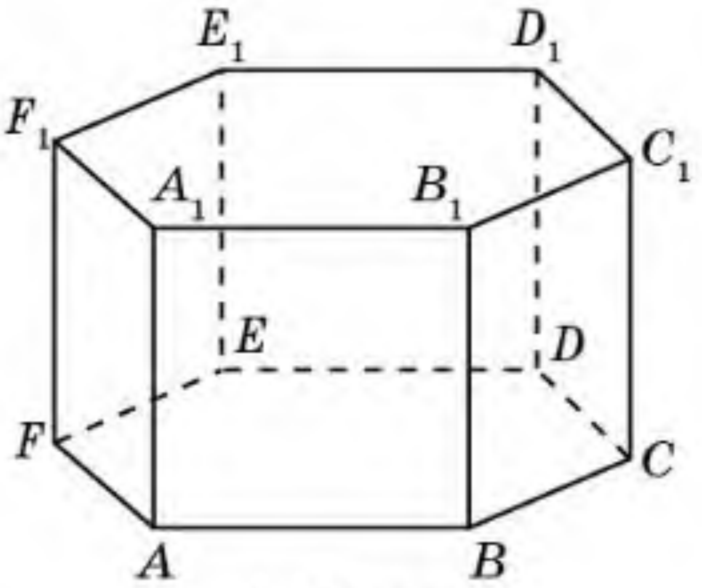
1.11. Әгәр дурус призминиң барлиқ қирлирини 2 һәссә ашурса, униң толуқ бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

1.12. Бир чоққисидин чиқидиған қирлири 5 см, 4 см, 3 см болидиған тикбулуңлуқ параллелепипедниң толуқ бетини тепиңлар.

1.13. Барлиқ қирлири 1 см-ға тәң болған дурус үчбулуңлуқ призминиң толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар (1.13-сүрәт).

MyLibrary.kz

1.14. Барлиқ қирлири 1 см-ға тәң болған дурус алтәбулуңлуқ призма бетиниң мәйданини тепиңлар (1.14-сүрәт).



1.14-сүрәт

В

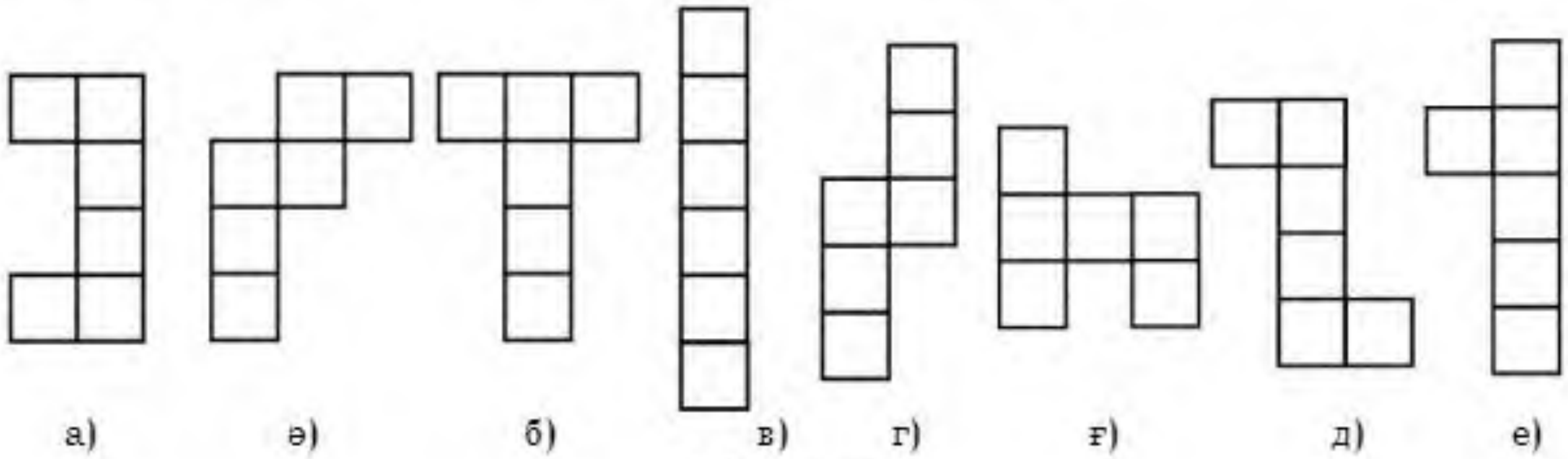
1.15. Дурус алтәбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға, униң чоң диагонали 3 см-ға тәң. Призминиң егизлигини тепиңлар.

1.16. Кубниң диагонали 1 см-ға тәң. Кубниң қирини тепиңлар.

1.17. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң йейилмисини селиңлар.

1.18. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң диагоналини тепиңлар.

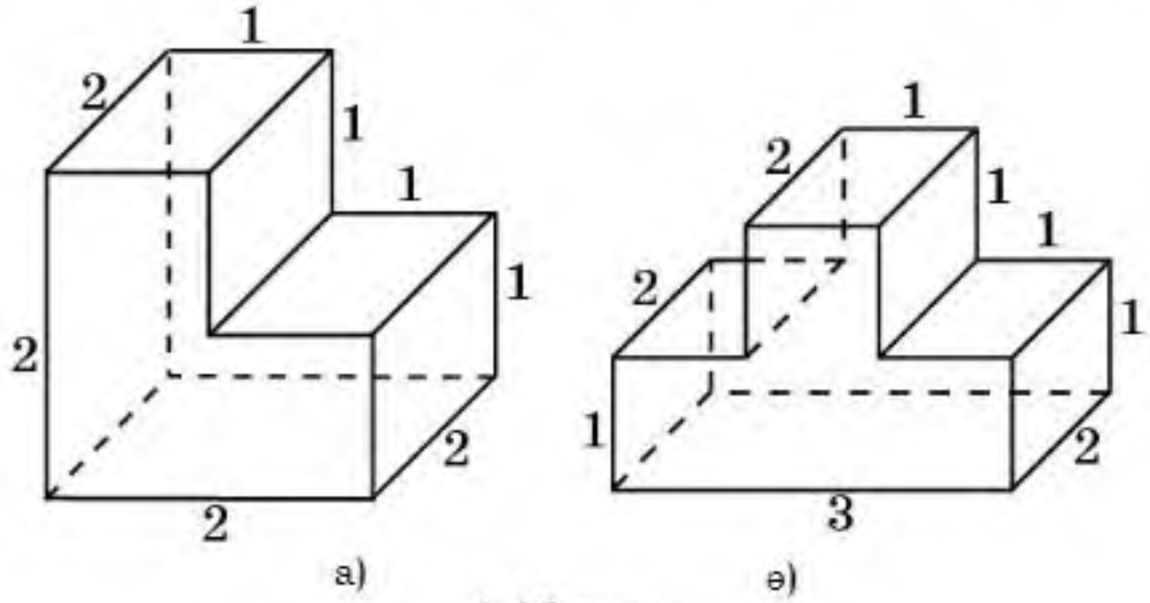
1.19. 1.15-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриларниң қайсиси кубниң йейилмиси болиду. Призминиң егизлигини тепиңлар.



1.15-сүрәт

1.20. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см-ға тәң. Параллелепипед бетиниң мәйдани 40 см^2-ға тәң болуши үчүн мошу чоққисидин чиқидиған үчинчи қири қандақ болуши керәк?

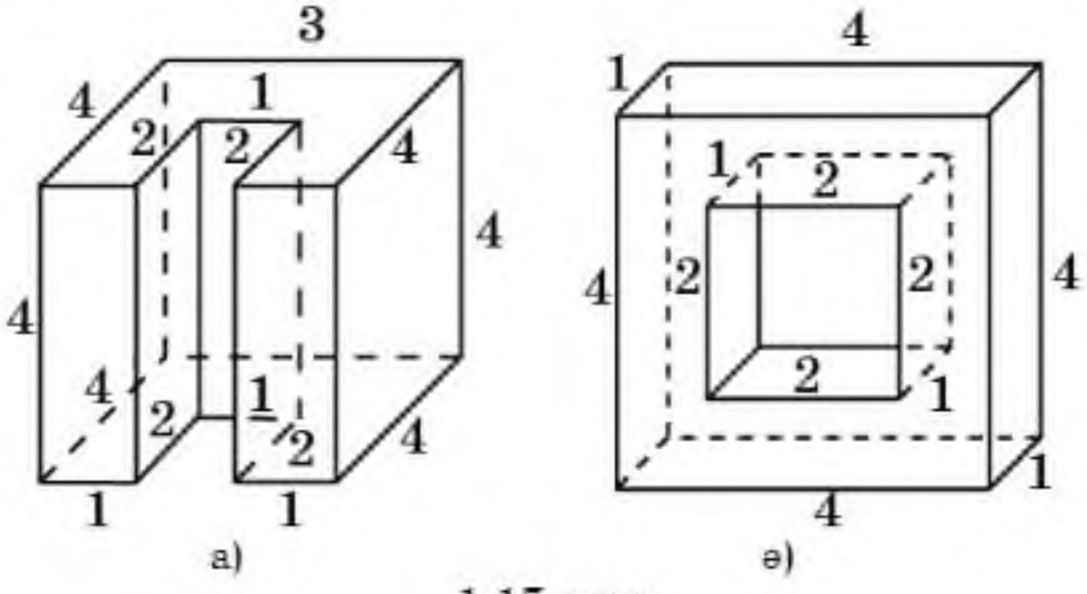
1.21. 1.16-сүрәттә берилгән тикбулуңлуқ параллелепипедлардин түзүлгән фигуриларниң толуқ бәтлириниң мәйданини тепиңлар.



1.16-сүрәт

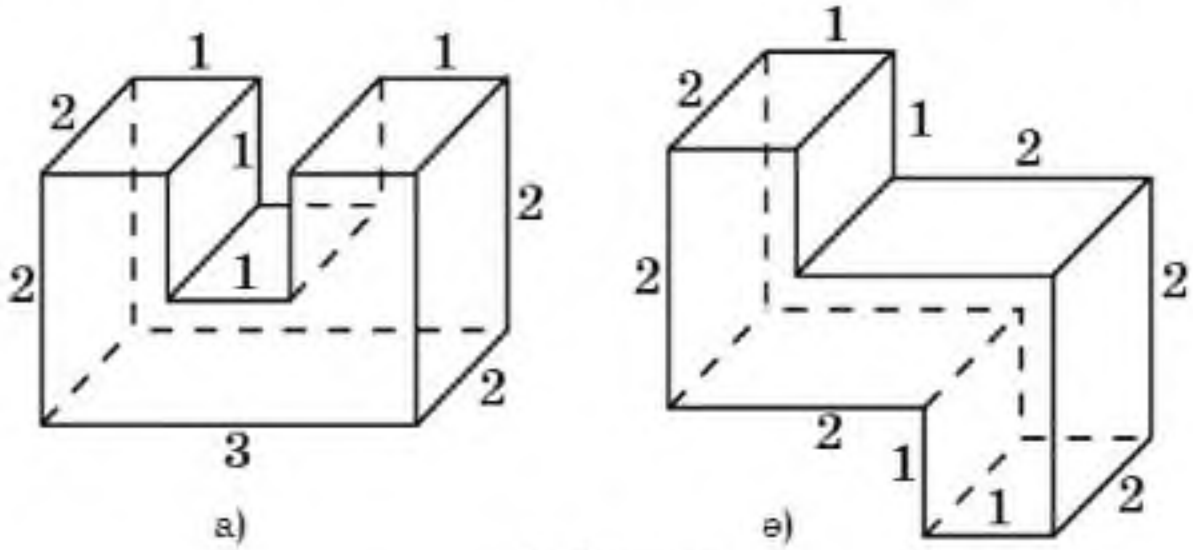
MyLibrary.kz

1.22. 1.17-сүрәттә берилгән тикбулуңлуқ параллелепипедлардин түзүлгән фигурилар бәтлириниң мәйданини тепиңлар.



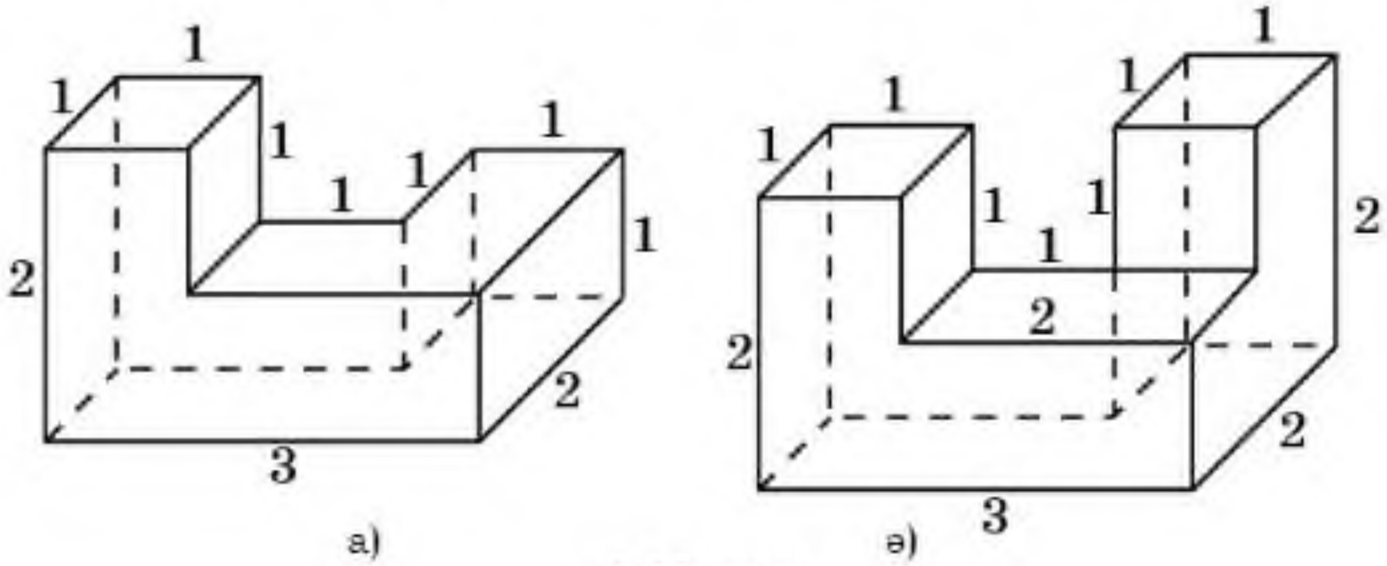
1.17-сүрәт

1.23. 1.18-сүрәттә берилгән тикбулуңлуқ параллелепипедлардин түзүлгән фигурилар бәтлириниң мәйданини тепиңлар.



1.18-сүрәт

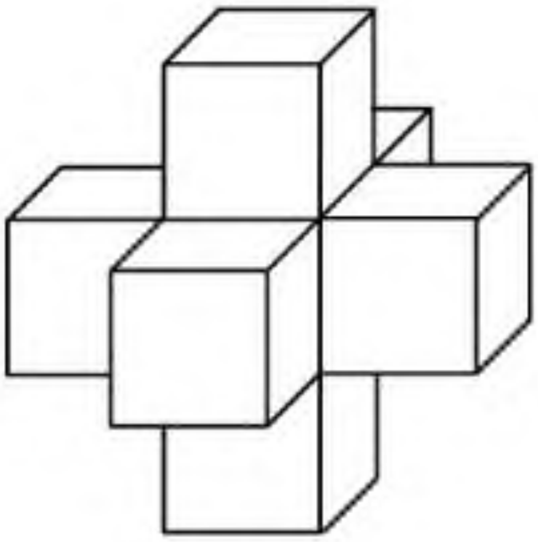
1.24. 1.19-сүрәттә берилгән тикбулуңлуқ параллелепипедлардин түзүлгән фигурилар бәтлириниң мәйданини тепиңлар.



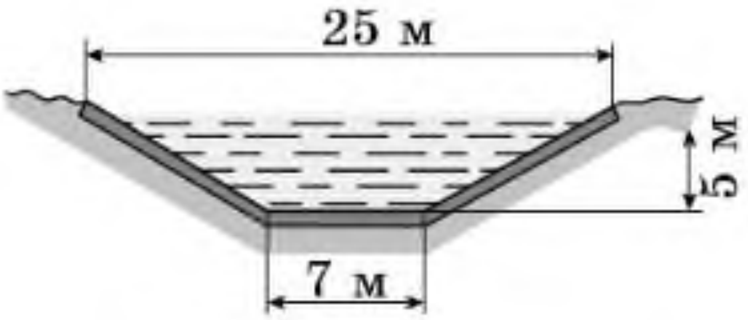
1.19-сүрәт

1.25. 1.20-сүрәттики бошлуқ җисимни тәшкил қилғучи кубларниң қирлири 1 см-ға тәң дәп қараштуруп, берилгән җисимниң бетиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz



1.20-сүрәт

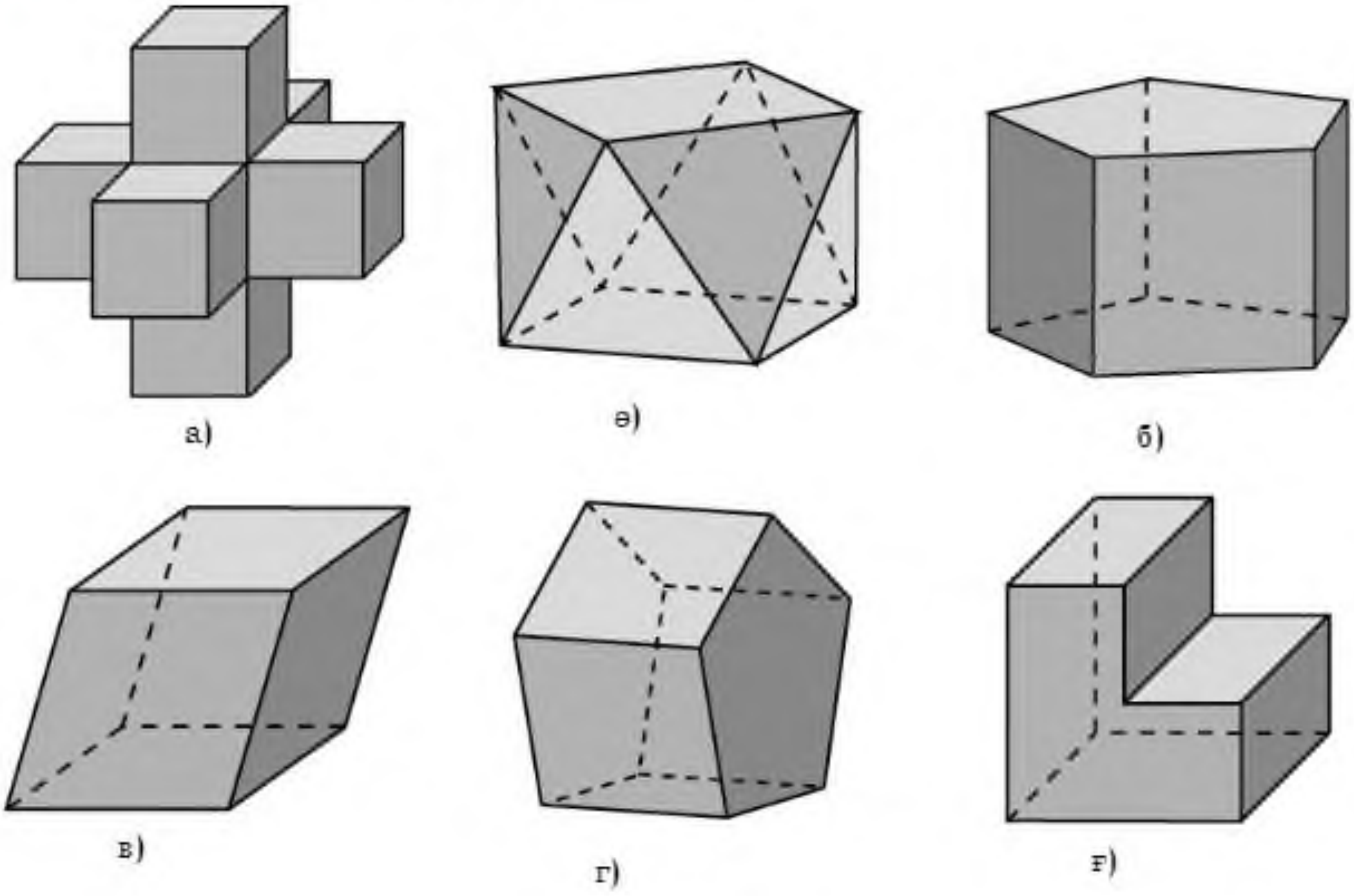


1.21-сүрәт

1.26. 1.21-сүрәттә су жүрүш каналиниң тоғра кийилмиси тәсвирләнгән. Каналниң астиңқи вә ян яқлири бетонланған. Каналниң һәр бир километрида бетонланған бәтниң мәйданини тепиңлар.

C

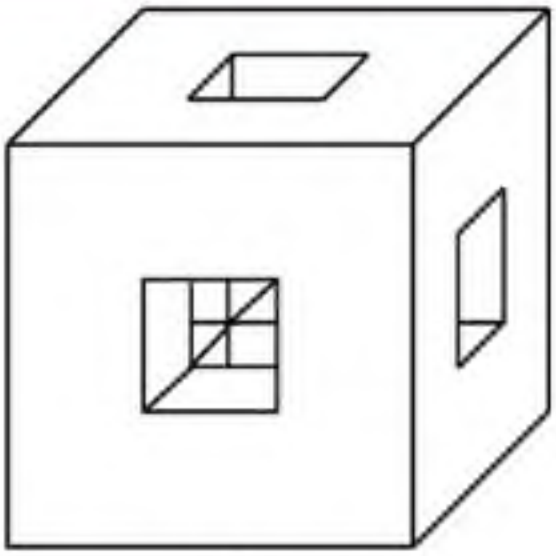
1.27. 1.22-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриларниң қайсиси томпақ вә томпақ әмәс көпяқлиқлар болиду?



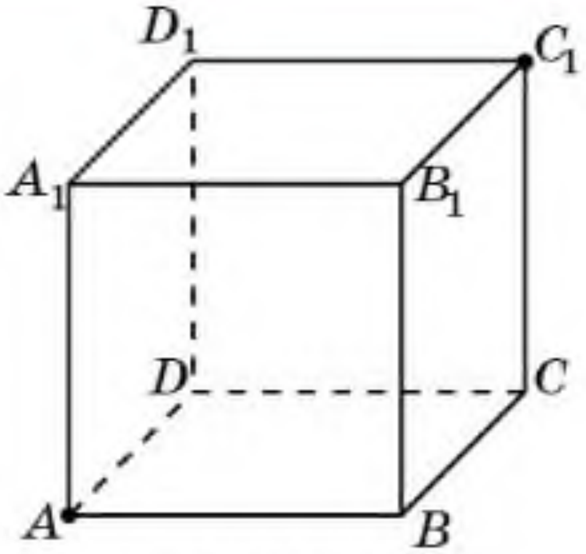
1.22-сүрәт

1.28. Қири 6 см-ға тәң болидиған кубниң һәрбир йеқидин квадрат шәклидә төшүкләр ясалди (1.23-сүрәт). Квадратниң тәрипи 2 см болса, кубниң қалған бөлигиниң бетиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz



1.23-сүрәт



1.24-сүрәт

1.29. Бирлик кубниң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә униң бетидики әң қисқа ариликни тепиңлар (1.24-сүрәт).

1.30. Томпақ әмәс көпбулуңлуқ томпақ көпяқлиқниң бир йеқи боламду?

1.31. Томпақ фигурилар бириксә, томпақ фигура пәйда боламду?

1.32. Барлиқ яқлири томпақ көпбулуңлуқ болидиған томпақ әмәс көпяқлиққа мисал кәлтүрүңлар.

1.33. Әгәр көпяқлиқниң яқлири пәқәт үчбулуңлуқлар болса, у чағда яқлириниң үч һәссиләнгән сани униң қирлириниң икки һәссиләнгән саниға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар. Әгәр көпяқлиқниң қирлириниң сани 6 гә тәң болса, у чағда униң яқлириниң сани қанчә? Мошундақ көпяқлиққа мисаллар кәлтүрүңлар.

1.34. Әгәр көпяқлиқниң яқлири пәқәт төртбулуңлуқлар болса, у чағда яқлириниң төрт һәссиләнгән сани, униң қирлириниң икки һәссиләнгән саниға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар. Әгәр көпяқлиқниң яқлириниң сани 6 гә тәң болса, у чағда униң қирлириниң сани қанчә? Мошундақ көпяқлиққа мисаллар кәлтүрүңлар.

1.35. Әгәр көпяқлиқниң һәр бир чоққисидин үч қири чиқидиған болса, у чағда чоққилириниң үч һәссиләнгән сани униң қирлириниң икки һәссиләнгән саниға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар. Әгәр көпяқлиқниң қирлириниң сани 15 кә тәң болса, униң чоққилириниң сани қанчигә тәң болиду. Мундақ көпяқлиққа мисал кәлтүрүңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

1.36. "Пирамида" чүшәнчисини ениқлап көрүңлар. Униң бети қандақ көпбулуңлуқлардин туриду?

§ 2. Пирамида вә кийиқ пирамида. Пирамидиниң, кийиқ пирамидиниң йейилмиси, ян бети вә толуқ бетиниң мәйданлири

Пирамида дәп бир йеқи һәр қандақ көпбулуңлуқтин, қалған яқлири мошу көпбулуңлуқ тәкшилигидә ятмайдиған чоққилири умумий болған үчбулуңлуқлардин түзүлгән көпяқлиқни ейтиду.

MyLibrary.kz

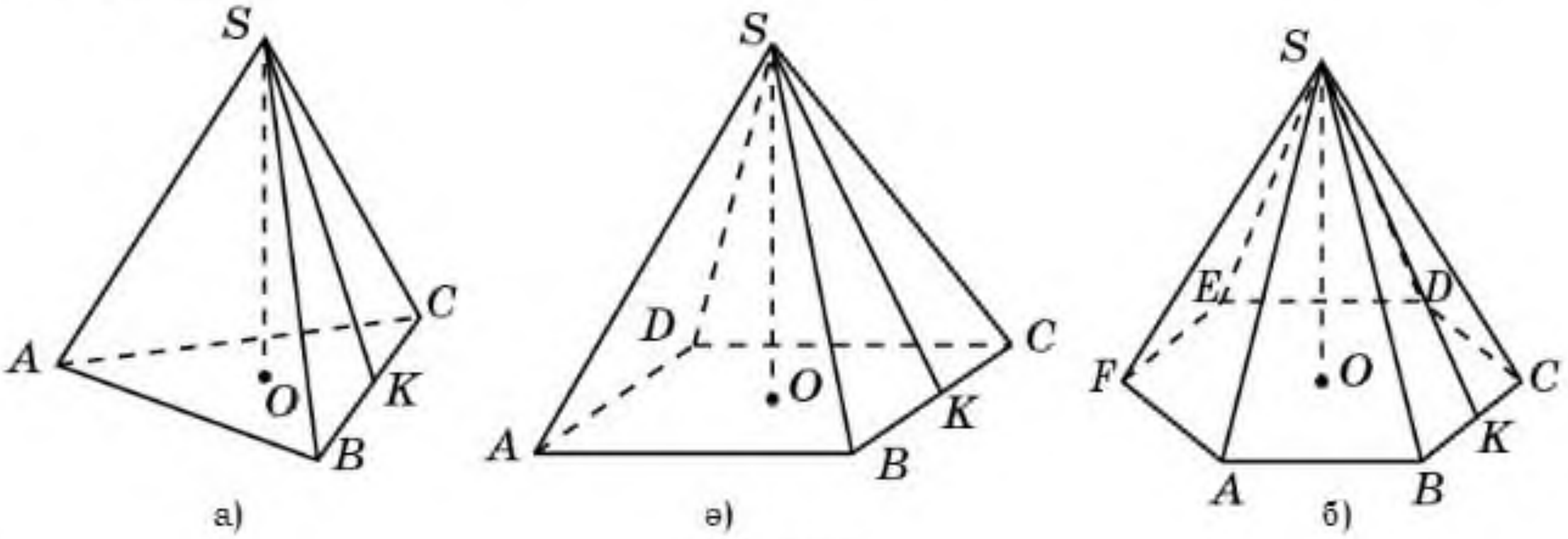
Көпбулуңлуқ пирамидиниң *асаси* дәп, үчбулуңлуқлар болса пирамидиниң *ян яқлири* дәп атилиду.

Ян яқлириниң умумий чоққиси пирамидиниң *чоққиси* дәп, чоққисидин чиқидиған қирлири пирамидиниң *ян қирлири* дәп атилиду.

Пирамидилар асасидики көпбулуңлуқларға (үчбулуңлуқ; төртбулуңлуқ; бәшбулуңлуқ вә ш.о.) бағлиқ мувапиқ үчбулуңлуқ; төртбулуңлуқ; бәшбулуңлуқ вә ш.о. пирамидилар дәп бөлүниду.

Әгәр пирамидиниң асаси n-булуңлуқ болса, у чағда *n-булуңлуқ пирамида* дәп атилиду.

2.1-сүрәттә үчбулуңлуқ, төртбулуңлуқ вә алтәбулуңлуқ пирамидилар тәсвирләнгән.



2.1-сүрәт

Пирамида униң чоққилири билән бәлгүлиниду, мәсилән: $SABC$ үчбулуңлуқ пирамида (2.1, а-сүрәт), $SABCD$ төртбулуңлуқ пирамида (2.1, ә-сүрәт), $SABCDEF$ алтәбулуңлуқ пирамида (2.1, б-сүрәт). Биринчи умумий чоққиси көрситилип йезилиду.

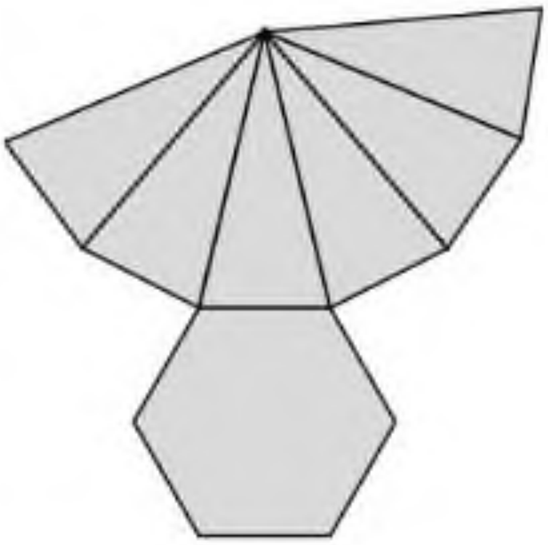
Асасида дурус көпбулуңлуқ ятидиған вә барлиқ ян қирлири өз ара тәң болидиған пирамида *дурус пирамида* дәп атилиду.

Дурус пирамидиниң чоққисидин жүргүзүлгән ян тәрипиниң егизлиги пирамидиниң *апофемиси* дәп атилиду.

Қандақ ойлайсиләр, тетраэдр үчбулуңлуқ пирамида боламду?

Пирамида чоққисидин униң асас тәкшилигигә жүргүзүлгән перпендикуляр *пирамидиниң егизлиги* дәп атилиду. 2.1-сүрәттә пирамидиниң SO егизлиги вә SK апофемиси тәсвирләнгән.

2.2-сүрәттә дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң йейилмиси тәсвирләнгән.



2.2-сүрәт

Пирамидиниң ян бети дәп мошу пирамидиниң барлиқ ян яқлиридин түзүлгән бәтни

MyLibrary.kz

ейтиду. Демәк, пирамидиниң *ян бетиниң мәйдани* униң барлиқ ян яқлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң.

Теорема. ***Дурус пирамидиниң ян бетиниң мәйдани униң асасиниң йерим периметри билән апофемисиниң көпәйтиндисигә тәң:***

$$S_{\text{ян бети}} = \frac{1}{2}Pl,$$

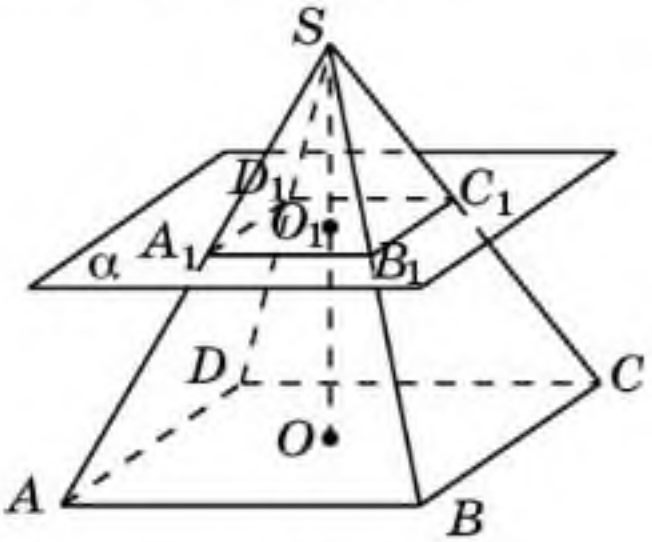
бу йәрдә l — пирамидиниң апофемиси, P — асасиниң периметри. ☐

Бу теоремини өзәңлар испатлаңлар.

Пирамидиниң толуқ бетиниң мәйдани униң ян бети билән асасиниң мәйданлириниң қошундисиға тәң, йәни төвәндики формула билән һесаплиниду:

$$S_{\text{пирамида}} = S_{\text{ян бети}} + S_{\text{асаси}}.$$

Пирамидиниң асасиға параллель вә ян қирлирини қийип өтидиған тәкшиликни қараштурайли. Мошу тәкшилик билән асас тәкшилигиниң арисидики пирамидиниң чәкләнгән бөлиги *қийиқ пирамида* дәп атилиду (2.3-сүрәт).



2.3-сүрәт

Берилгән пирамидиниң асаси вә пирамидиниң тәкшилик билән қийилмисидин һасил болған көпбулуңлуқ *қийиқ пирамидиниң асаслири* дәп атилиду.

Қийиқ пирамида униң асаслириниң чоққилири билән бәлгүлиниду, мәсилән 2.3-сүрәттә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қийиқ пирамидиси тәсвирләнгән.

Қийиқ пирамидиниң асаслириниң тәрәплири жүп-жүпи билән параллель, демәк *қийиқ пирамидиниң ян яқлири трапеция* болиду. Ян яқлиридин түзүлгән бәт *қийиқ пирамидиниң ян бети* дәп атилиду.

Қийиқ пирамидиниң ян яқлириниң умумий қирлири *ян қирлири* дәп атилиду.

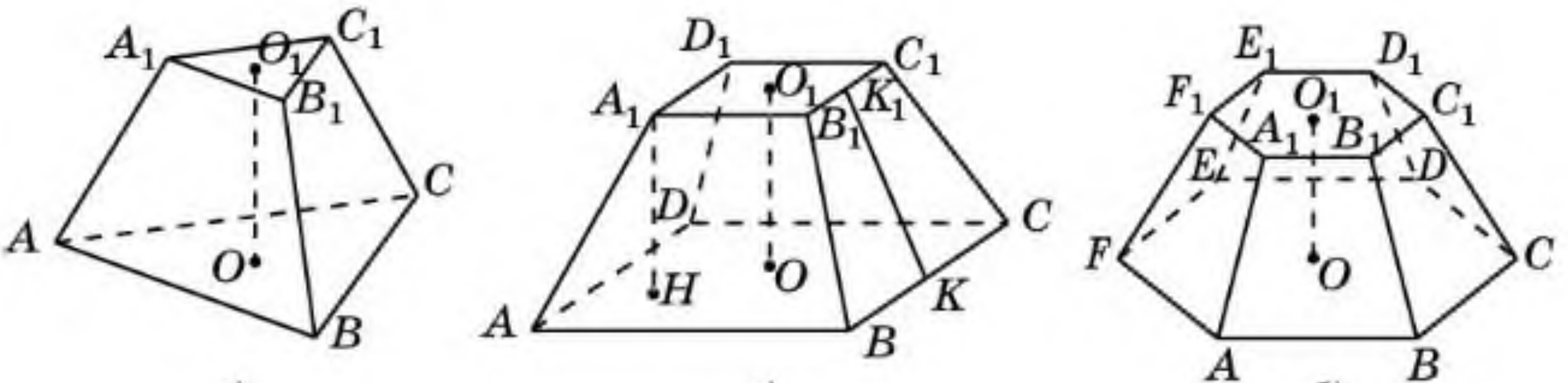
Қийиқ пирамида асасидики көпбулуңлуқларға (үчбулуңлуқлар, төртбулуңлуқлар, бәшбулуңлуқлар вә ш.о.) бағлиқ үчбулуңлуқ, төртбулуңлуқ, бәшбулуңлуқ пирамида вә ш.о. болуп бөлүниду.

2.4-сүрәттә үчбулуңлуқ қийиқ пирамида (2.4, а-сүрәт), төртбулуңлуқ қийиқ пирамида (2.4, ә-сүрәт) вә алтәбулуңлуқ қийиқ пирамида (2.4, б-сүрәт) тәсвирләнгән.

Дурус пирамидидин елинған қийиқ пирамида *дурус қийиқ пирамида* болиду.

Ян йеқиниң егизлиги дурус қийиқ пирамидиниң *апофемиси* дәп атилиду. 2.4, ә-сүрәттә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қийиқ пирамидисиниң KK_1 апофемиси тәсвирләнгән.

MyLibrary.kz



а) ә) б)

2.4-сүрәт

Бир асасиниң һәр қандақ чекитидин иккинчи асасиға жүргүзүлгән перпендикуляр *қийиқ пирамидиниң егизлиги* дәп атилиду. 2.4-сүрәттә қийиқ пирамидиниң OO_1 егизлиги тәсвирләнгән вә униң узунлиғини асаслириниң арилиғи дәп аташқиму болиду.

Қийиқ пирамидиниң йейилмиси икки охшаш көпбулуңлуқтин (қийиқ пирамидиниң асаслири) вә трапециялардин (қийиқ пирамидиниң ян яқлири) тәшкил тапқан.

Қийиқ пирамидиниң ян бети дәп мошу қийиқ пирамидиниң барлиқ ян бәтлиридин түзүлгән бәтни ейтиду. Демәк, *қийиқ пирамидиниң ян бетиниң мәйдани* униң барлиқ ян бәтлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң.

Теорема. ***Дурус қийиқ пирамидиниң ян бетиниң мәйдани униң асаслириниң периметрлириниң қошундисиниң йерими билән апофемисиниң көпәйтиндисигә тәң болиду*:**

$$S_{\text{ян бети}} = 1/2\ (P + P_1)l,$$

бу йәрдә P вә P_1 — қийиқ пирамидиниң асаслириниң периметрлири, l — апофемиси. ☐

Бу теоремини өзәңлар испатлаңлар.

Қийиқ пирамидиниң толуқ бетиниң мәйдани униң ян бети билән асаслириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду, йәни төвәндә берилгән формула билән һесаплиниду:

$$S_{\text{қийиқ пирамида}} = S_{\text{ян бети}} + S_{\text{асаси}_1} + S_{\text{асаси}_2}.$$

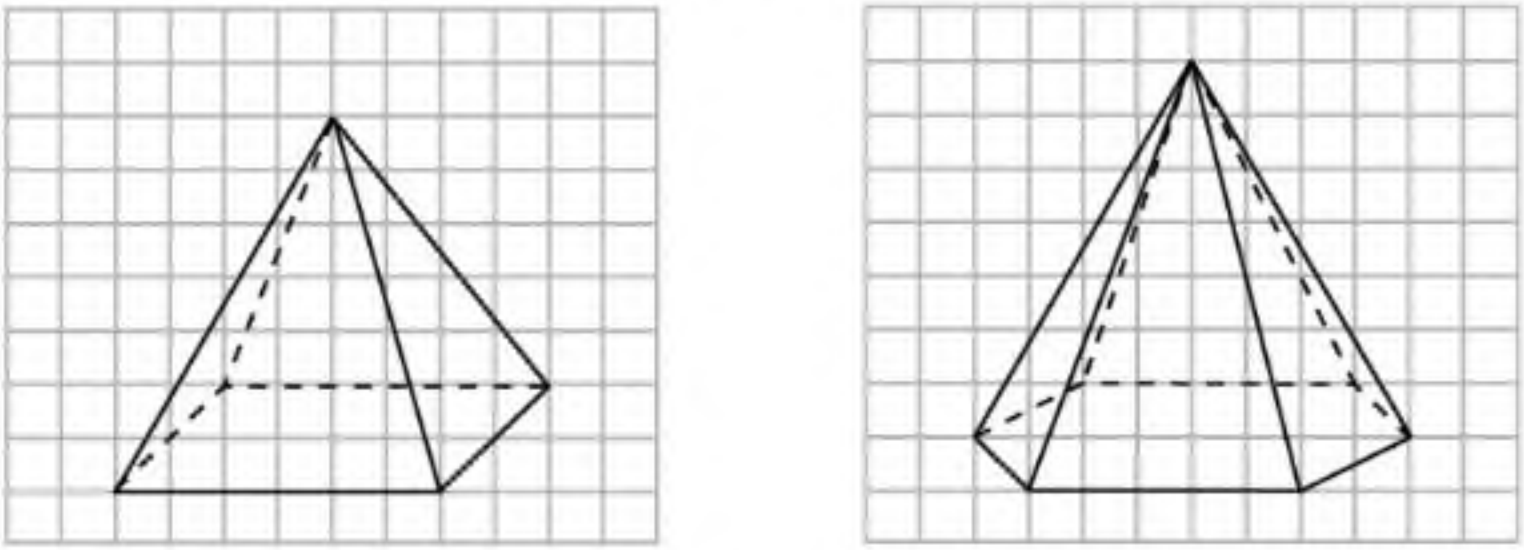
Соаллар

1. Қандақ көпяқлиқ пирамида дәп атилиду?
2. Қандақ пирамида дурус дәп атилиду?
3. Пирамидиниң егизлиги дегинимиз немә?
4. Қандақ көпяқлиқ қийиқ пирамида дәп атилиду?
5. Қандақ қийиқ пирамида дурус дәп атилиду?
6. Қийиқ пирамидиниң егизлиги дегинимиз немә?
7. Пирамида бетиниң мәйдани қандақ һесаплиниду?
8. Қийиқ пирамида бетиниң мәйдани қандақ һесаплиниду?

MyLibrary.kz

А

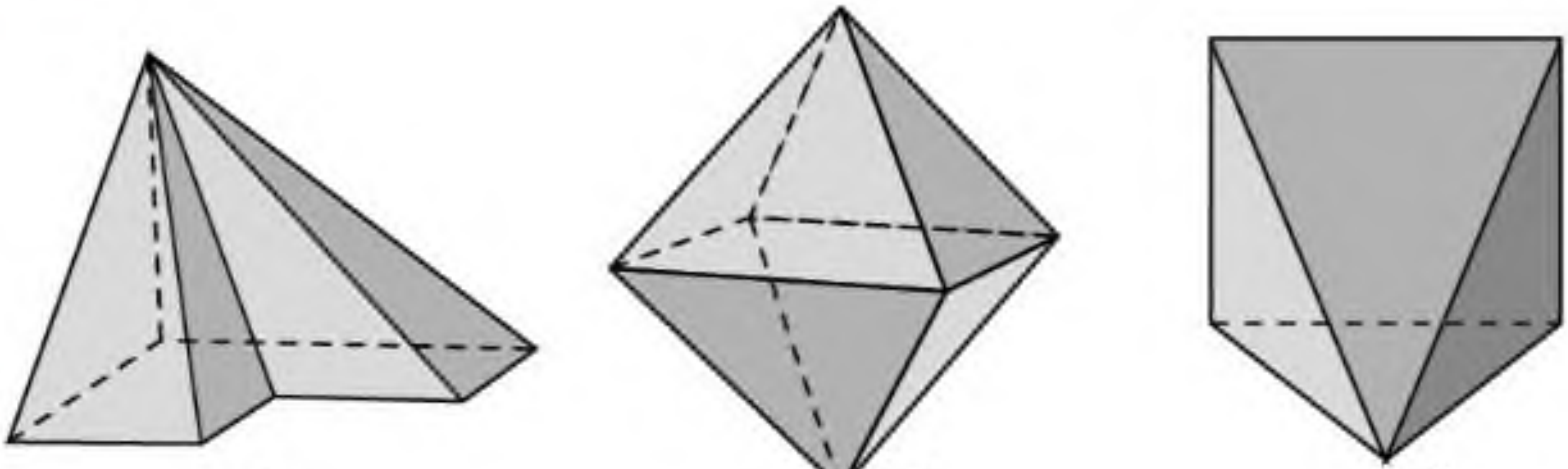
2.1. Чақмақ қәғәзгә 2.5-сүрәттә берилгән пирамидиларни селиңлар вә уларниң егизликлирини жүргүзүңлар.



а) ә)

2.5-сүрәт

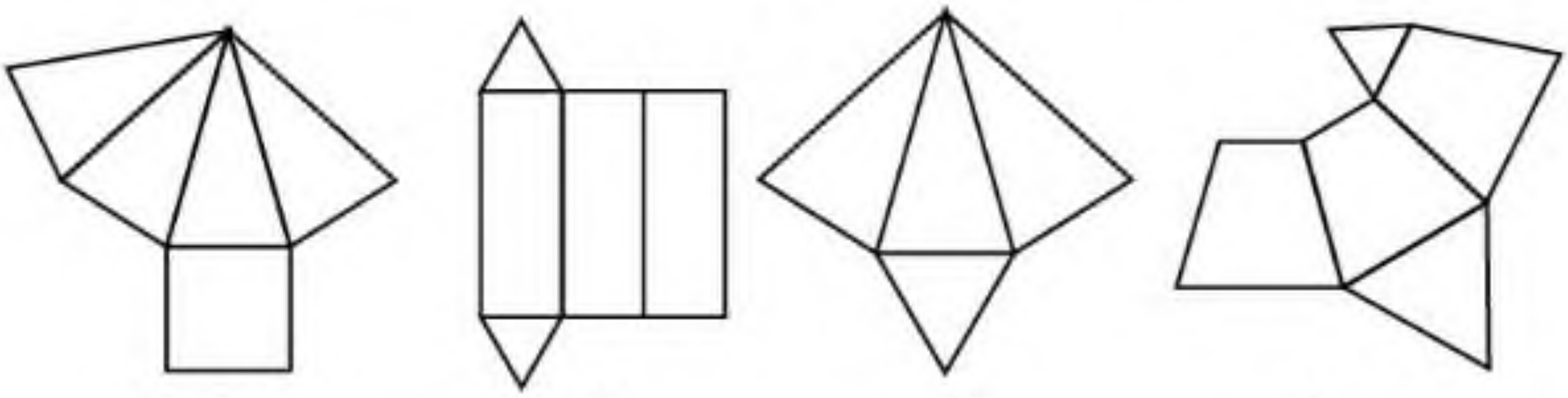
2.2. 2.6-сүрәттә тәсвирләнгән фигурилардиң қайсиси пирамида болиду?



а) ә) б)

2.6-сүрәт

2.3. 2.7-сүрәттә тәсвирләнгән фигурилардиң қайсиси пирамидиниң йейилмилири болиду? Түрлирини ениқлаңлар.

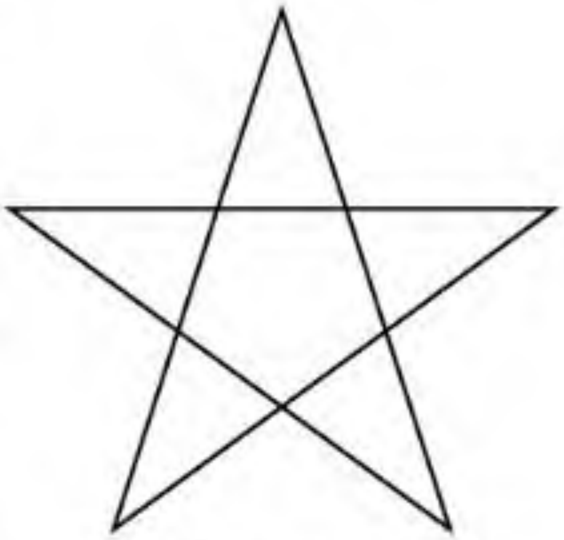


а) ә) б) в)

2.7-сүрәт

MyLibrary.kz

2.4. 2.8-сүрәттә тәсвирләнгән фигура қайсу көпяқлиқниң йейилмиси болиду?



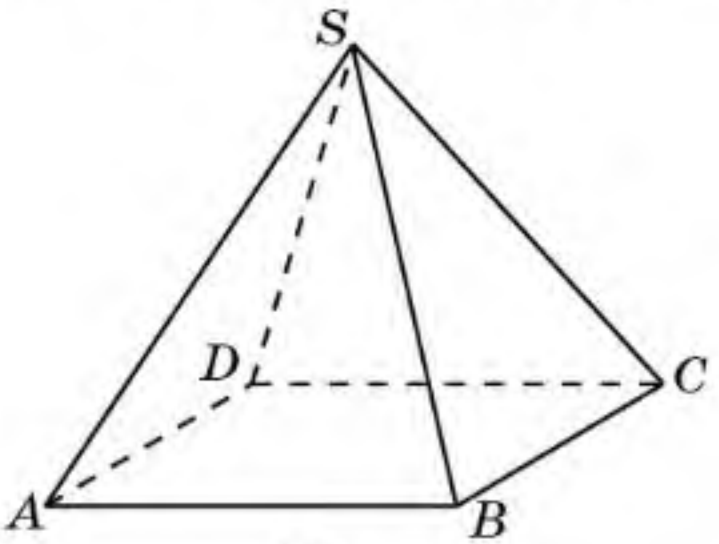
2.8-сүрәт

2.5. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң йейилмисини селиңлар.

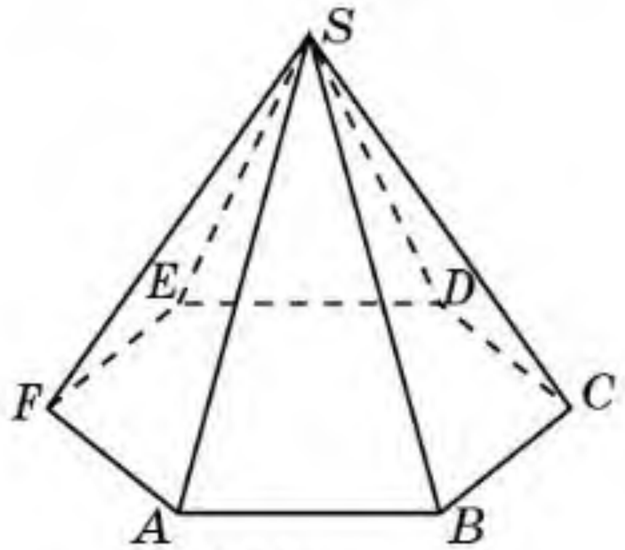
2.6. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см болса, пирамидиниң егизлигини тепиңлар.

2.7. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см. Пирамидиниң толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар (2.9-сүрәт).

2.8. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрипи 1 см, ян қирлири болса 2 см. Пирамидиниң толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар (2.10-сүрәт).



2.9-сүрәт



2.10-сүрәт

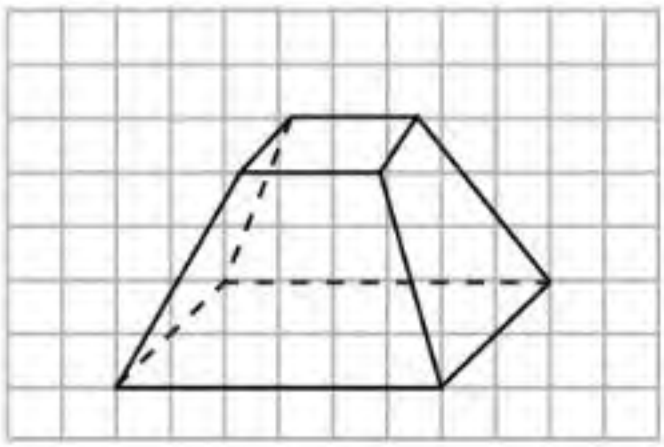
В

2.9. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрипи 1 см, ян қирлири болса 2 см. Пирамидиниң егизлигини тепиңлар.

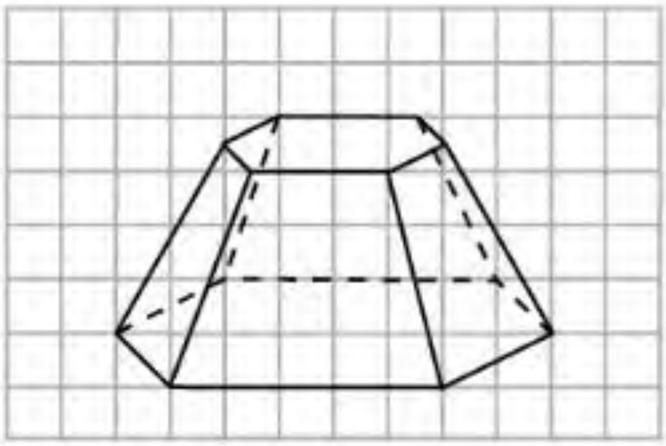
2.10. Әгәр пирамидиниң барлиқ қирлирини 2 һәссә ашурса, бетиниң мәйдани қанчә һәссә ашиду?

2.11. Әгәр пирамидиниң барлиқ қирлирини 3 һәссә кемитсә, у чағда униң бетиниң мәйдани қанчә һәссә кемийду?

2.12. Чақмақ қәғәзгә 2.11-сүрәттики охшаш қийиқ пирамидиларни селиңлар.



а)



ә)

2.11-сүрәт

MyLibrary.kz

2.13. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң йейилмисини селиңлар.

C

2.14. Дурус алтәбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң йейилмисини селиңлар.

2.15. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң асаслириниң тәрәплири 4 см вә 2 см, ян қирлири 3 см-ға тәң. Пирамидиниң егизлигини тепиңлар.

2.16. Дурус алтәбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң асаслириниң тәрәплири 2 см вә 1 см, егизлиги болса 3 см. Пирамидиниң ян қирини тепиңлар.

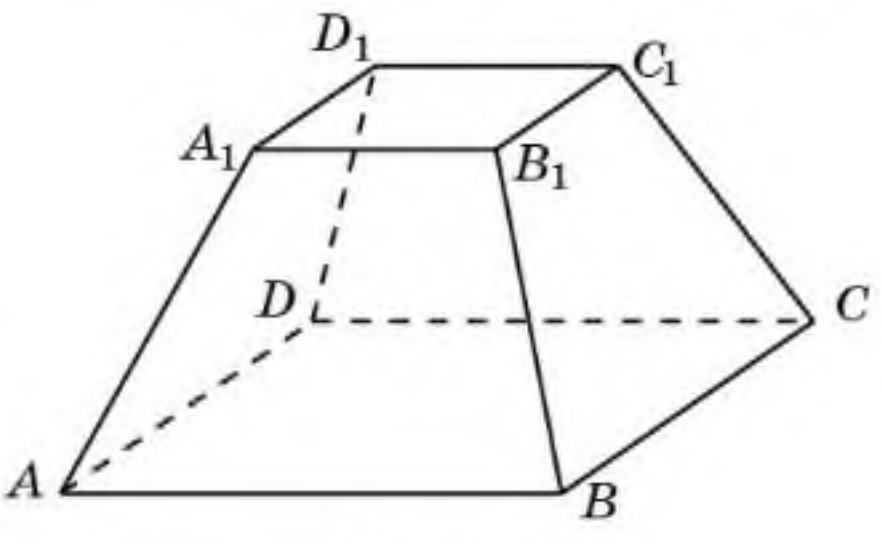
2.17. Нур-Султан шәһиридики Течлиқ вә разимәнлик сарийи дурус төртбулуңлуқ пирамида шәклидә (2.12-сүрәт). Униң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 62 м. Пирамидиниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

2.12-сүрәт

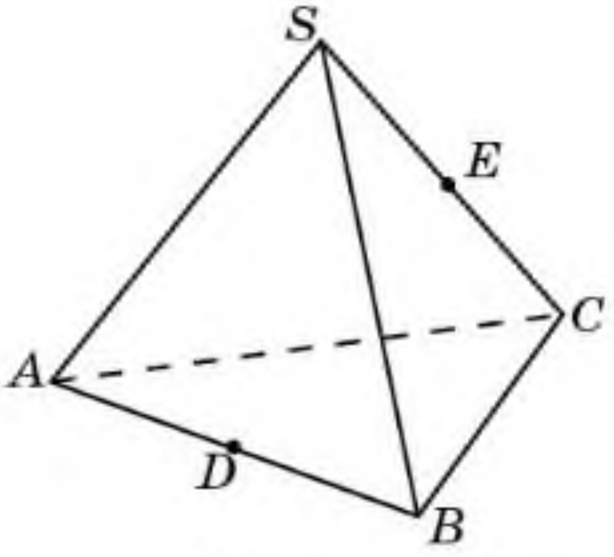
2.13-сүрәт

2.18. Қедимий Мисирдики әң чоң имарәтләрниң бири — Хеопс пирамидиси — дурус төртбулуңлуқ пирамида. Униң егизлиги тәхминән 140 м, асасиниң мәйдани 5,3 га-ға тәң (2.13-сүрәт). Мошу пирамидиниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

2.19. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң асаслириниң тәрәплири 1 см вә 2 см, ян қирлири 1 см. Пирамидиниң толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар (2.14-сүрәт).



2.14-сүрәт

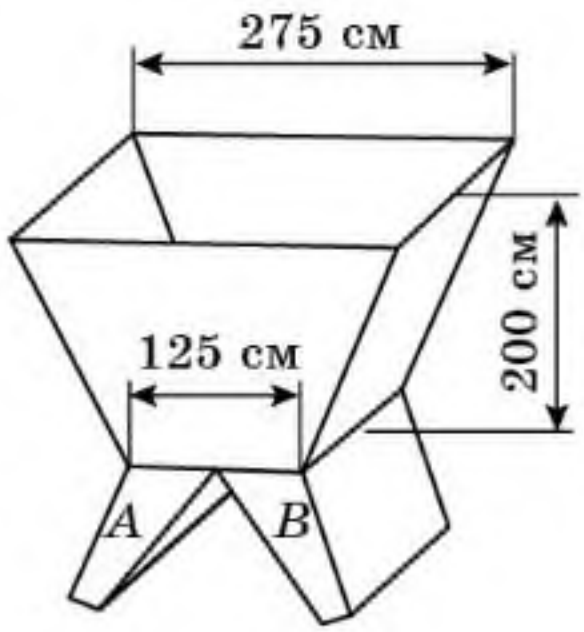


2.15-сүрәт

MyLibrary.kz

2.20. $SABC$ дурус пирамидисиниң AB вә SC қирлириниң оттурилирини қошидиған пирамида бетидики әң қисқа ариliқни тепиңлар (2.15-сүрәт).

2.21. 2.16-сүрәттә дан сақлинидиған бункер тәсвирләнгән. Униң асасий бөлигиниң бетини дурус төртбулуңлук қийиқ пирамидиниң ян бети тәшкил қилиду. Сүрәттә көрситилгән өлчәмлири бойичә бункерни ясаш үчүн қанчә квадрат дециметр қәләй керәк (A вә B-ни һесапланмиған һаләттә) екәнлигини һесаплаңлар.



2.16-сүрәт

2.22. Әгәр көпяқлиқниң һәр бир чоққисидин төрт қири чиқидиған болса, у чағда чоққилириниң төрт һәссиләнгән сани униң қирлириниң икки һәссиләнгән саниға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар. Әгәр көпяқлиқниң чоққилириниң сани 6 ға тәң болса, униң қирлириниң сани қанчә? Мошундақ көпяқлиққа мисал кәлтүрүңлар.

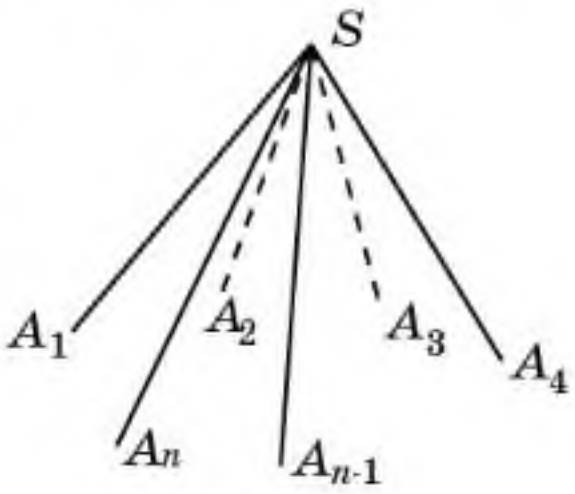
Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

2.23. Тәкшиликтики көпбулуңлуқниң ениқлимисини вә томпақ көпбулуңлуқниң булуңлириниң қошундиси тоғрилиқ теоремини қайтилаңлар.

§ 3. Көпяқлиқ булуң

"Тәкшиликтики көпбулуңлуқ" чүшәнчисигә охшаш бошлуқтики "көпяқлиқ бәт" билән "көпяқлиқ булуң" чүшәнчилирини ениқлаймиз.

Көпяқлиқ бәт дәп S умумий чоққиси бар A_1SA_2, A_2SA_3, ... , $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 тәкши булуңларниң чәклик санидин түзүлгән бәтни ейтимиз. Буниңда хошна булуңларниң умумий тәрәплириниң чекитлиридин башқа умумий чекитлири болмаслиғи вә хошна әмәс булуңларниң умумий чоққисидин башқа умумий чекитлири болмаслиғи керәк (3.1-сүрәт).



3.1-сүрәт

Көпяқлиқ бәттин вә униң билән чәкләнгән бошлуқниң бир бөлигидин түзүлгән фигура *көпяқлиқ булуң* дәп атилиду.

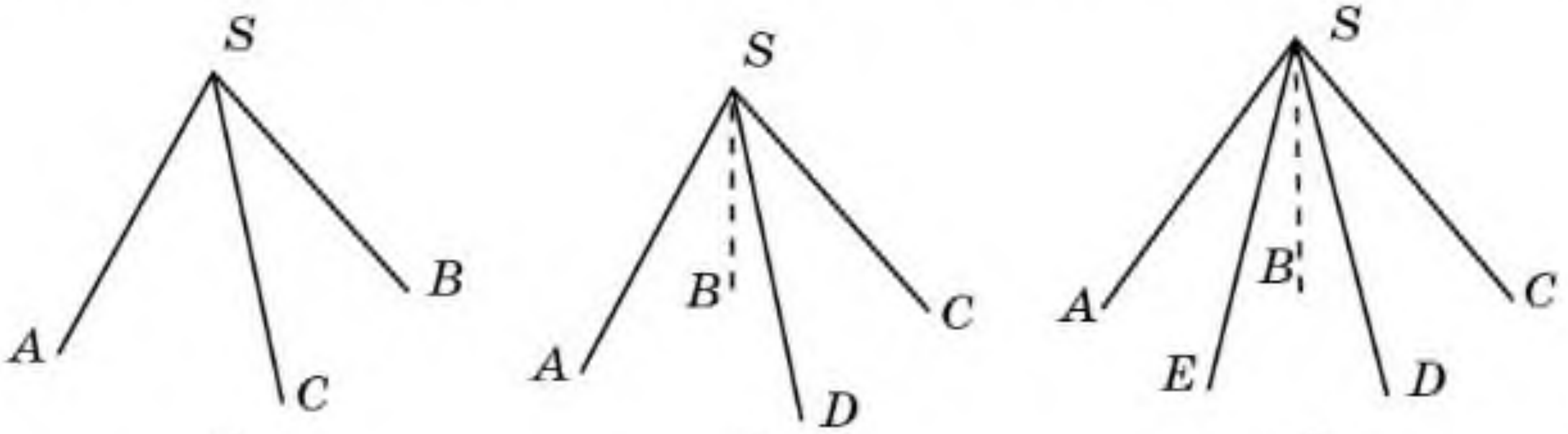
Тәкши булуңларниң S умумий чоққиси *көпяқлиқ булуңниң чоққиси* дәп атилиду. SA_1, SA_2, ... , SA_n шолилири *көпяқлиқ булуңниң қирлири*, A_1SA_2, A_2SA_3, ... , $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 тәкши булуңлири *көпяқлиқ булуңниң тәкши булуңлири* дәп атилиду.

MyLibrary.kz

Шуниң билән, көпяқлиқ булуңниң бети тәкши булуңлардин туриду. Көпяқлиқ булуңниң икки хошна яқлири иккияқлиқ булуңни тәшкил қилиду вә уни биз *көпяқлиқ булуңниң иккияқлиқ булуңи* дәп атаймиз. Көпяқлиқ булуң униң чоққисини вә қирлиридики чекитләрни көрситиш арқилиқ бәлгүлиниду: $SA_1A_2 ... A_n$.

Көпяқлиқ булуңлар униң яқлириниң саниға бағлиқ үчяқлиқ (3.2, а-сүрәт), төртяқлиқ (3.2, ә-сүрәт), бәшяқлиқ (3.2, б-сүрәт) вә ш.о. булуңларға бөлүниду.

Көпяқлиқ булуңлар томпақ вә томпақ әмәс болуп бөлүниду.

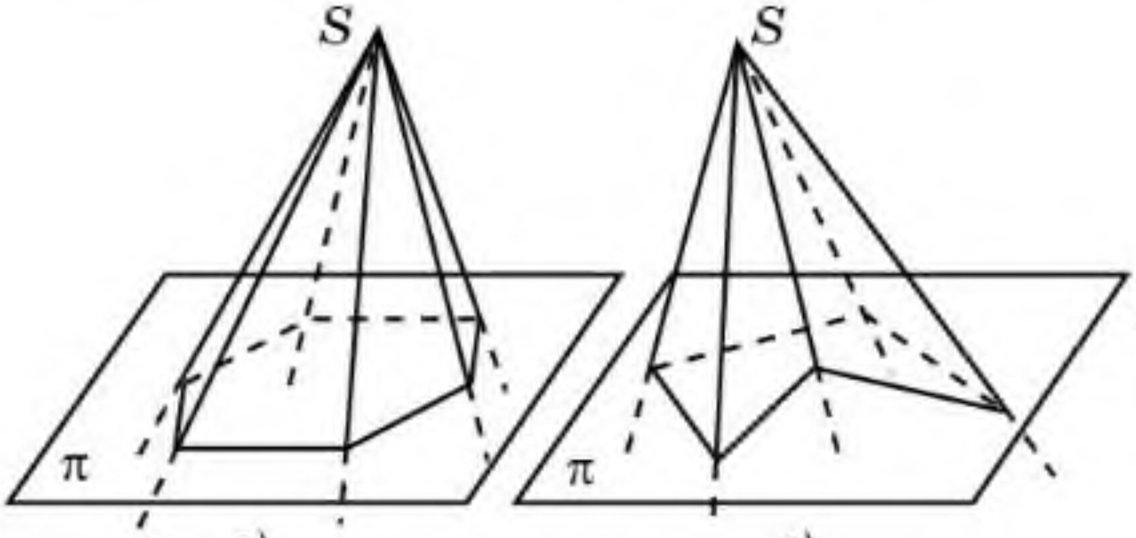


а) ә) б)

3.2-сүрәт

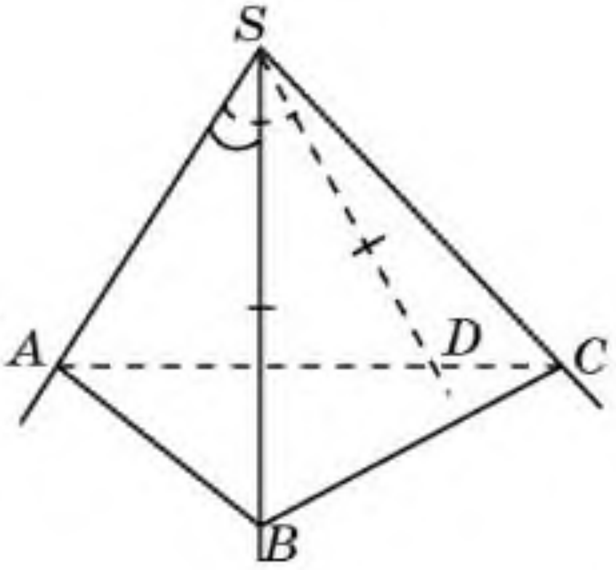
Әгәр көпяқлиқ булуң томпақ фигура болса, йәни фигурида униң һәр қандақ икки чекити билән уларни қошидиған кесиндә ятидиған болса, ундақ көпяқлиқ булуң *томпақ* дәп атилиду.

3.3-сүрәттә томпақ көпяқлиқ булуң (3.3, а-сүрәт) вә томпақ әмәс көпяқлиқ булуң (3.3, ә-сүрәт) тәсвирләнгән.



а) ә)

3.3-сүрәт



3.4-сүрәт

Биз пәқәт томпақ көпяқлиқ булуңларни караштуримиз.

Үчяқлиқ булуңниң тәкши булуңлири үчүн үчбулуңлуқ тәңсизлигигә охшаш тәңсизлик орунлиниду.

1-теорема. ***Үчяқлиқ булуңниң бир тәкши булуңиниң өлчими униң башқичә икки тәкши булуңлириниң өлчәмлириниң қошундисидин кичик болиду.***

MyLibrary.kz

Испатлиниши. $SABC$ үчяқлиқ булуңида тәкши булуңлириниң ичидики әң чоңи ASC булуңи болсун (3.4-сүрәт). Шу чағда $\angle ASB \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$; $\angle BSC \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$ тәңсизлиги орунлиниду. Шуниң билән, $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$ тәңсизлигини испатлаш керәк болиду.

ASC йеқидин ASB булуңиға тәң ASD булуңини салимиз вә $SB = SD$ болидиған D чекитини таллап алимиз. Шу чағда ASB вә ASD үчбулуңлуқлири тәң болиду (икки тәрипи вә уларниң арисидики булуңи бойичә), демәк, $AB = AD$ болиду.

ABC үчбулуңлиғини қараштуримиз вә үчбулуңлуқниң $AC < AB + BC$ тәңсизлигини пайдилинимиз. Тәңсизликниң икки яқтики бөлигидин $AD = AB$ азайтип, $DC < BC$ тәңсизлигини алимиз. DSC вә BSC үчбулуқлирида SC — умумий тәрәп, $SD = SB$ вә $DC < BC$. Бу һаләттә чоң тәрипигә қариму-қарши чоң булуңи ятиду, демәк, $\angle DSC < \angle BSC$ болиду. Мошу тәңсизликниң һәр икки тәрипигә ASB булуңиға тәң ASD булуңини қошуп, издиливатқан тәңсизликни алимиз: $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$. ◻

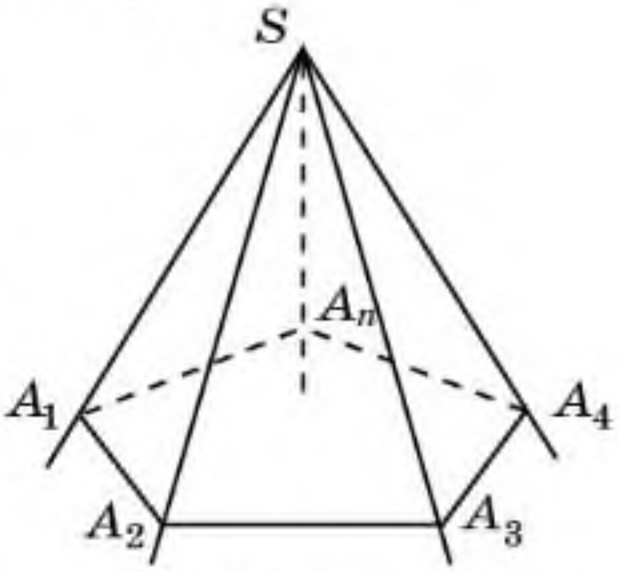
Үчяқлиқ булуңниң һәр қандақ тәкши булуңиниң өлчими униң башқичә икки тәкши булуңлири өлчәмлириниң айримисидин чоң болидиғанлиғини өзәңлар испатлаңлар.

2-теорема. ***Үчяқлиқ булуңниң барлиқ тәкши булуңлириниң өлчәмлириниң қошундиси 360°-тин кичик болиду.***

Испатлиниши. $SA_1 \dots A_n$ томпақ көпяқлиқ булуңини қараштурайли (3.5-сүрәт). Бир тәкшиликтә ятидиғандәк $A_1, \dots, A_n$ чекитлирини алимиз вә чоққилири мошу чекитләрдә болидиған үчяқлиқ булуңниң тәкши булуңлириниң қошундиси тоғрилиқ теоремини қоллинимиз. Шу чағда

$$\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2S + \angle SA_2A_3, \dots,$$
$$\angle A_nA_1A_2 < \angle A_nA_1S + \angle SA_1A_2$$

тәңсизлигини алимиз.

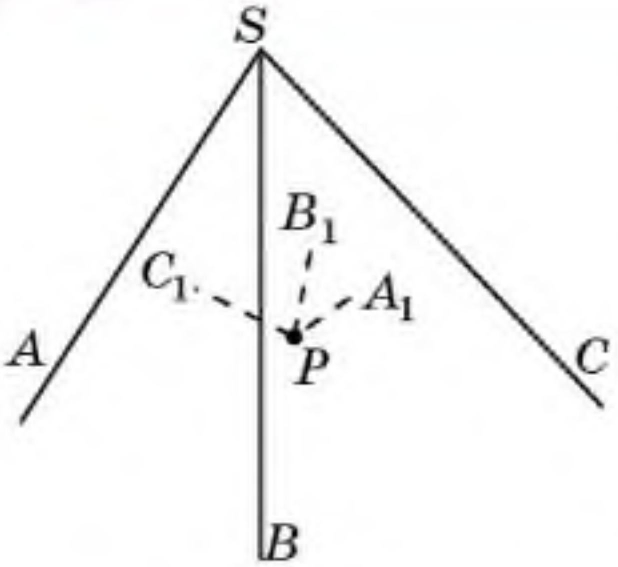


3.5-сүрәт

Бу тәңсизликләрни әзалап қошумиз. Тәңсизликниң сол тәрәп бөлигиниң мәнаси $180°(n - 2)$ гә тәң болидиған $A_1 \dots A_n$ томпақ n-булуңниң булуңлириниң қошундиси, оң яқ бөлигидә S чоққисидики булуңлиридин башқа $A_1A_2S, \dots, A_nA_1S$ n үчбулуңлуқниң булуңлириниң қошундиси болиду.

Мошу булуңларниң қошундисини $\sum$ арқилиқ бәлгүләйли. Шу чағда $180°(n - 2) < 180°n - \sum$. Ундақ болса, $\sum < 180° \cdot 2 = 360°$ болиду. ◻

Тәкши булуңлириниң қошундиси 360°-тин артуқ болидиған көпяқлиқ булуңларға мисал кәлтүрүңлар.



3.6-сүрәт

3-теорема. ***Үчяқлиқ булуңниң икки яқлиқ булуңлири өлчәмлириниң қошундиси 180°-тин чоң болиду.***

Испатлиниши. *SABC* үчяқлиқ булуң болсун. Униң ичидин қандақту бир *P* чекитини алимиз вә мошу чекиттин берилгән үчяқлиқ булуңниң яқлириға PA_1, PB_1, PC_1 перпендикулярлирини жүргүзимиз (3.6-сүрәт). B_1PC_1, A_1PC_1, A_1PB_1 тәкши булуңлири мувапиқ *SA, SB, SC* қирлири болидиған икки яқлиқ булуңларни 180°-қичә толуқтуриду. Демәк, бу иккияқлиқ булуңларниң қошундиси $540° - (\angle B_1PC_1 + \angle A_1PC_1 + \angle A_1PB_1)$ болиду.

Чоққиси *P* болидиған үчяқлиқ булуңниң барлиқ тәкши булуңлири өлчәмлириниң қошундиси 360°-тин кичик болидиғанлиғини һесапқа елип, дәсләпки үчяқлиқ булуңниң иккияқлиқ булуңлири өлчәмлириниң қошундиси 180°-тин чоң болидиғанлиғини алимиз.

Соаллар

1. Көпяқлиқ бәт дегинимиз немә?
2. Көпяқлиқ булуң дегинимиз немә?
3. Көпяқлиқ булуң қандақ бәлгүлиниду?
4. Үчяқлиқ булуңниң тәкши булуңлири тоғрилиқ теоремини ейтиңлар.
5. Қандақ фигура томпақ дәп атилиду?
6. Қандақ көпяқ томпақ дәп атилиду?
7. Томпақ көпяқлиқ булуңниң тәкши булуңлири тоғрилиқ теоремини ейтиңлар.
8. Үчяқлиқ булуңниң иккияқлиқ булуңлири тоғрилиқ теоремини ейтиңлар.

Һесаплар

A

3.1. 1) 20°, 60°, 30°; 2) 40°, 40°, 80°; 3) 60°, 45°, 30° тәкши булуңлири бар үчяқлиқ булуң боламду?

3.2. Пәқәт үчяқлиқ булуңлири бар көпяқлиққа мисал кәлтүрүңлар.

3.3. 1) Төртяқлиқ; 2) бәшяқлиқ; 3) алтәяқлиқ булуңи бар көпяқлиққа мисал кәлтүрүңлар.

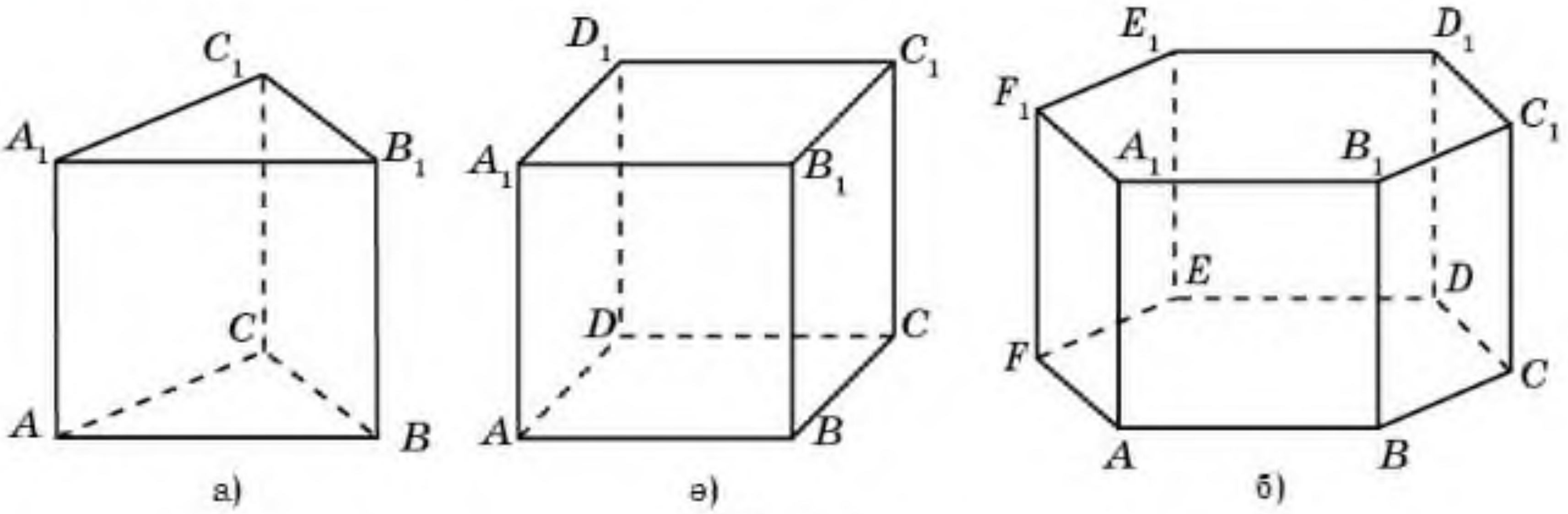
3.4. 1) *n*-булуңлуқ призминиң; 2) *n*-булуңлуқ пирамидиниң көпяқлиқ булуңиниң түрини ениқлаңлар.

B

3.5. Үчяқлиқ булуңниң икки тәкши булуңлири 70° вә 80°-қа тәң. Үчинчи тәкши булуң қандақ арилиқта ятиду?

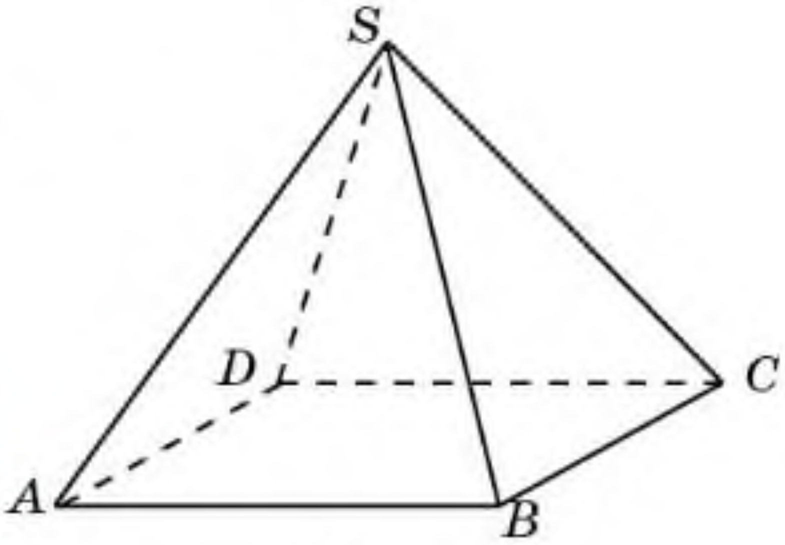
MyLibrary.kz

3.6. 3.7-сүрәттики: 1) дурус үчбулуңлуқ призминиң; 2) дурус төртбулуңлуқ призминиң; 3) дурус алтәбулуңлуқ призминиң үчяқлиқ булуңиниң тәкши булуңлириниң қошундисини тепиңлар.



3.7-сүрәт

3.7. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 гә тәң (3.8-сүрәт). Пирамидиниң: 1) үчяқлиқ булуңиниң; 2) төртяқлиқ булуңиниң тәкши булуңлириниң қошундисини тепиңлар.



3.8-сүрәт

C

3.8. Әгәр үчяқлиқ булуңниң икки тәкши булуңи тик болса, у чағда униңға қарши ятқан иккияқлиқ булуңлириму тик болидиған лиғини испатлаңлар.

3.9. Төртяқлиқ булуңниң һәр қандақ тәкши булуңи униң башқичә үч тәкши булуңиниң қошундисидин кичик болидиғанлиғини испатлаңлар.

3.10. 1) 80°, 130°, 70°, 100°; 2) 20°, 40°, 80°, 160° тәкши булуңлири бар томпақ төртяқлиқ булуң боламду?

3.11. Томпақ n-яқлиқ булуңниң иккияқлиқ булуңлириниң қошундиси $180^\circ(n-2)$ дин чоң болидиғанлиғини испатлаңлар.

3.12. 90°, 90°, 90°, 90°-қа тәң иккияқлиқ булуңлири бар томпақ төртяқлиқ булуңи боламду?

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

3.13. 1) Параллелепипед; 2) призма; 3) пирамида чоққилириниң (Ч), қирлириниң (Қ) вә яқлириниң (Я) сани үчүн Ч – Қ + Я = 2 тәңлиги орунлинидиғанлиғини тәкшүрүңлар.

MyLibrary.kz

§ 4*. Эйлер теоремиси

Бизгә бәлгүлүк көпяқлиқларни қараштуруп, уларниң чоққилирини (Ч), қирлирини(Қ), яқлирини болса (Я) сани бойичә жәдвәл толтуримиз.

1-жәдвәл

Көпяқлиқниң нами	Т	Қ	Ж
Параллелепипед	8	12	6
Үчбулуңлуқ пирамида	4	6	4
Төртбулуңлуқ пирамида	5	8	5
Үчбулуңлуқ призма	6	9	5
Төртбулуңлуқ призма	8	12	6
n-булуңлуқ пирамида	$n + 1$	$2n$	$n + 1$
n-булуңлуқ призма	$2n$	$3n$	$n + 2$

Мошу жәдвәлдә қараштурулған барлиқ көпяқлиқлар үчүн: Ч – Қ + Я = 2 тәңлиги орунлуқ екәнлигини көрүмиз. Бу тәңлик һәр қандақ томпақ көпяқлиқлар үчүн орунлуқ болиду.

Томпақ көпбулуңлуқларниң мошу хусусийитини дәсләп 1752-жили Леонард Эйлер испатлиған вә Эйлер теоремиси дегән нам берилгән.

Эйлер теоремиси. ***Һәр қандақ томпақ көпяқлиқлар үчүн төвәндики тәңлики орунлуқ болиду:***

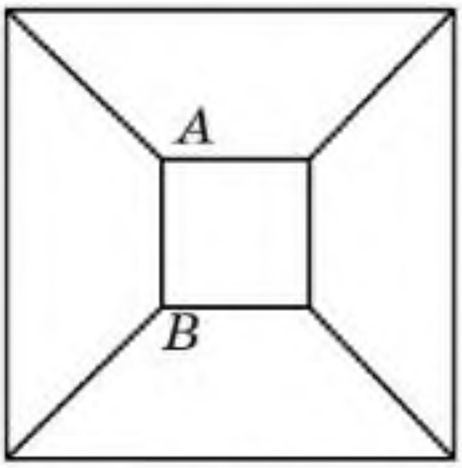
$$\text{Т} - \text{Қ} + \text{Ж} = 2,$$

бу йәрдә Ч — берилгән көпяқлиқ чоққилириниң сани, Қ — қирлириниң сани, Я — яқлириниң сани.

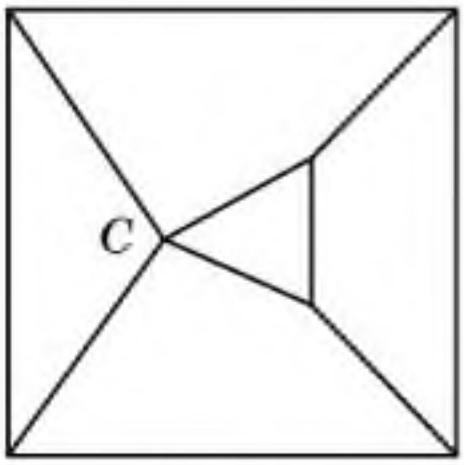
Испатлиниши. Көпяқлиқниң бетини қараштурайли. Униң бир йеқини кесип, қалған бетини тәкшиликкә яйимиз. Буниңдин Ч чоққилири, Қ қирлиридин туридиған сизмини вә сизминиң тәкшиликни бөлүдиған Я яқлирини алимиз.

Әгәр сизмидики икки чоққиси бар қандақту бир қирини униң чоққилириниң биригә мошу қириниң бойи билән қисип, жиғип чиқсақ, у сағда сизмидики Ч – Қ + Я мәнасиниң өзгәрмәйдиғинини испатлайли.

Мисал ретидә 4.1-сүрәттики кубниң сизмисини қараштурайли. Бу йәрдә Ч = 8, Қ = 12, Я = 6 болиду.



4.1-сүрәт



4.2-сүрәт

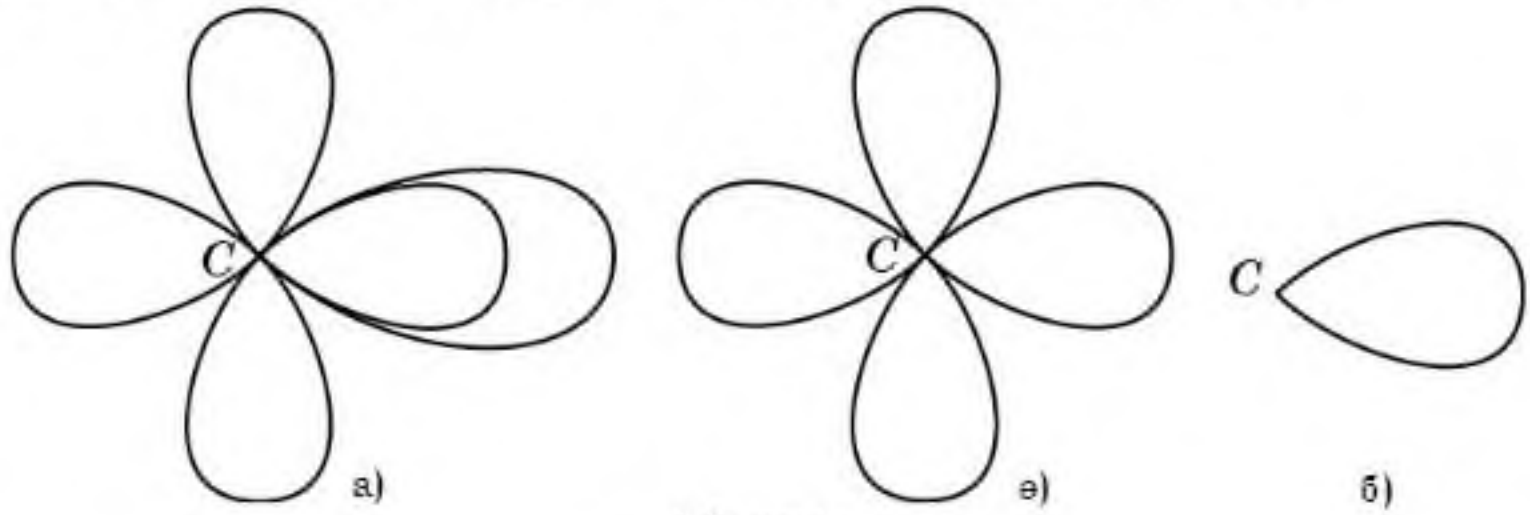
MyLibrary.kz

АВ қирини С чекитигә қисип жиққанда 4.2-сүрәттикигә охшаш сизма елиниду. Нәтиҗидә Ч чоққилириниң сани биргә азийиду. Қ қирлириниңму сани биргә азийиду, Я яқлириниң сани өзгәрмәйду. Демәк Ч – Қ + Я мәнаси өзгәрмәйду.

Мошу хусусийәтләрни пайдилинип, икки чоққиси бар барлиқ қирлирини қисип жиғимиз. Буниңдин бир чоққиси бар, қирлири болса мошу чоққиниң илмәклири болидиған сизмини алимиз (4.3, а-сүрәт).

Бу сизмидиму Ч – Қ + Я мәнаси өзгиришсиз қалидиғинини көрүшкә болиду.

Әнди һасил болған сизмидики қандақту бир илмәкни елип ташлисақ, Ч – Қ + Я мәнасиниң өзгәрмәйдиғанлиғини испатлайли.



4.3-сүрәт

Һәқиқәтәнму бу һаләттә Ч чоққилириниң сани өзгәрмәйду, у 1 гә тәң. Қ қирлириниң саниму, Я яқлириниң саниму 1 гә кемийду. (4.3, *ә*-сүрәт). демәк, Ч – Қ + Я мәнасиму өзгәрмәйдиған болиду.

Мошу хусусийәтләрни пайдилинип, биридин башқа барлиқ илмәкләрни елип ташлаймиз. Буниңдин бир чоққиси вә бир қири (чоққиси билән илмиги) бар сизмини алимиз. (4.3, б-сүрәт). Бу сизма үчүн Ч = 1, Қ = 1, Я = 2, йәни Ч – Қ + Я = 2 болиду. Демәк, бу тәңлимә дәсләпки көпяқлиқ үчүнму орунлуқ болуп һесаплиниду.

Қандақ ойлайсиләр, Эйлер тәңлиги: а) томпақ әмәс призма; ә) томпақ әмәс пирамида үчүн орунлинамду?

Мисал. Һәр қандақ томпақ үчяқлиқта үчбулуңлуқни яқ яки үчяқлиқ булуң тепилидиғанлиғини вә үчбулуңлуқ яқлириниң сани билән үчяқлиқ булуңлири саниниң қошундиси сәккиздин артуқ яки тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Йешилиши. Томпақ көпяқниң i қирлири жиғилидиған чоққилириниң санини $Ч_i$ арқилиқ бәлгүләйли. Шу чағда чоққиларниң умумий Ч сани үчүн $Ч = Ч_3 + Ч_4 + Ч_5 + ...$ тәңлиги орунлуқ болиду.

Мошуниңға охшашла томпақ көпяқлиқниң i қирлири бар яқлириниң санини $Я_i$ арқилиқ бәлгүләйли. Шу чағда яқлириниң сани Я сани үчүн $Я = Я_3 + Я_4 + Я_5 + ...$ тәңлиги орунлуқ болиду.

Буниңдин

$$3Ч_3 + 4Ч_4 + 5Ч_5 + ... = 2Қ, \quad 3Я_3 + 4Я_4 + 5Я_5 + ... = 2Қ.$$

MyLibrary.kz

Эйлер теоремиси бойичә 4Ч – 4Қ + 4Я = 8 тәңлиги орунлиниду. Ч, Қ вә Я орниға ипадиләрни қоюп, $4Ч_3 + 4Ч_4 + 4Ч_5 + ... - (3Ч_3 + 4Ч_4 + 5Ч_5 + ...) - (3Я_3 + 4Я_4 + 5Я_5 + ...) + 4Я_3 + 4Я_4 + 4Я_5 + ... = 8$ тәңлигини алимиз. Ундақ болса, $Ч_3 + Я_3 = 8 + Ч_5 + ... + Я_5 + ...$. Демәк, үчбулуңлуқ яқларниң сани билән үчяқлиқ булуңлири саниниң қошундиси сәккиздин артуқ яки тәң.

Тарихий мәлуматлар

Леонард Эйлер (1707—1783-жж.) — дунияға мәшһур швейцариялик математик. Униң әмгәклири математикиниң заманивий бөлүмлириниң тәрәққий етишигә түрткә болди.

Алимниң илмий мираси көп. Һазирқи заманда униң 800 дин ошуқ әмгәклири мәлум. Һаятиниң ахирқи 12 жилида Эйлер еғир ағриқ сәвәвидин көрүш қабилийитидин айрилиду, бирақ ағриғиға қаримастин ишини давамлаштуруп, көплигән нәтижиләргә йетишиду. Статистикилиқ һесаплашлар бойичә, Эйлер һәптисигә оттура һесапта бир йеңилиқ ечип олтарған.

Эйлер әмгәклиридә тәтқиқат қилинмиған математикилиқ мәсилиләрни тепиш қийин. Кейинки әвладниң математиклири Эйлердин билим алған. Атақлиқ француз алими П.С.Лаплас: “Эйлерни оқуңлар, у һәммимизниң устази”, — дәгән.

Математика тарихчилири Эйлер теоремисини *топологияниң дәсләпки теоремиси* дәп атиған. Топология — үзлүксиз деформация вақтида өзгәрмәйдиған, үзүлүшсиз яки қошумчә чаплашсиз созулидиған вә қисилидиған фигуриларниң хусусийитини тәтқиқ қилидиған геометрияниң бөлүми. Мундақ хусусийәтләр *топологиялиқ* дәп атилиду.

Томпақ көпяқлиқлар үчүн Ч – Қ + Я = 2 Эйлер нисбити мошу топологиялиқ хусусийәтни тәрипләйду. Көпяқлиқни деформацияләшкә болиду, униң қирлири билән чоққилири әгилиши мүмкин, бирақ уларниң сани, йәни Эйлер нисбити өзгәрмәйду.

Эйлер нисбитини испатлаш вақтида биз деформацияләшни қолландуқ, йәни көпяқлиқниң бир йеқини кесип, тәкшиликкә яйған едуқ. Қирлири билән көпбулуңлуқларниң өзлири әгилиши мүмкин, бирақ Эйлер нисбити өзгәрмәйду.

Леонард Эйлерниң һаяти билән ижадийити Тиле Р-ниң «Леонард Эйлер. Киев: Вища школа, 1983» китавида йезилған.

Соаллар

1. 1) n-булуңлуқ призминиң; 2) n-булуңлуқ пирамидиниң чоққилири, қирлири билән яқлириниң санлири қанчигә тәң?
2. Эйлер теоремисини ейтиңлар.
3. Эйлер теоремиси қачан испатланған?
4. Топология немини тәтқиқ қилиду?

MyLibrary.kz

A

4.1. Томпақ көпяқлиқниң 6 чоққиси вә 12 қири бар. Қанчә йеқи бар?

4.2. Томпақ көпяқлиқниң 8 чоққиси вә 6 йеқи бар болса, униң қанчә қири болиду?

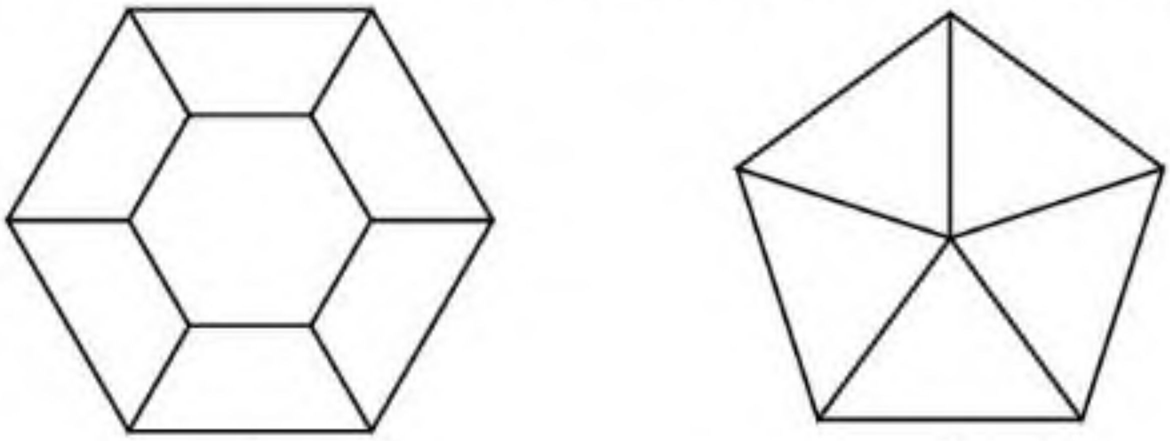
4.3. Томпақ көпяқлиқниң 9 қири вә 5 йеқи бар. Униң қанчә чоққиси бар?

B

4.4. Эластик материалдин ясалған үчбулуңлуқ призминиң бир асаси кесип елинди вә қалған қисми тәкшиликкә йейилди. Һасил болған фигуриниң сизмисини селиңлар.

4.5. Эластик материалдин ясалған төртбулуңлуқ пирамидиниң асаси кесип елинип, қалған яқлири тәкшиликкә йейилди. Һасил болған фигуриниң сизмисини селиң.

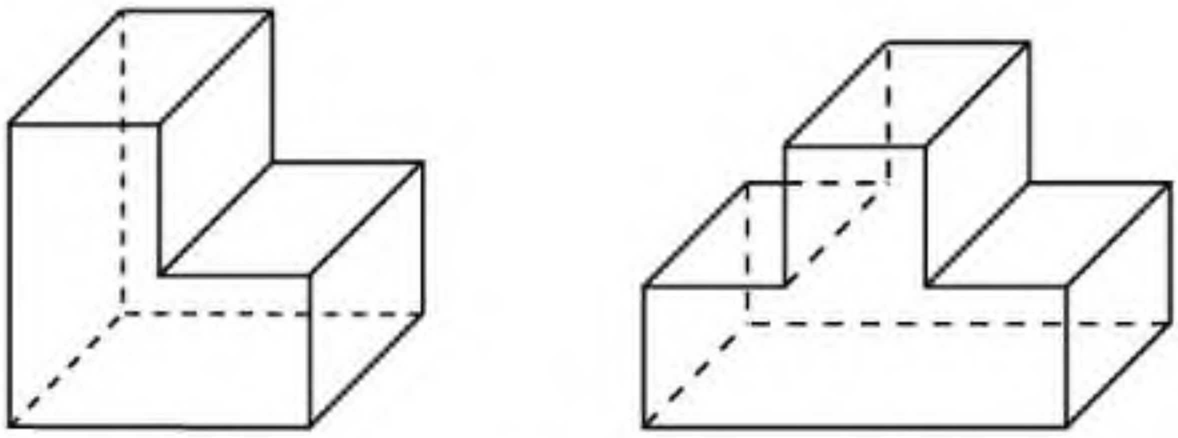
4.6. 4.4-сүрәттә тәсвирләнгән сизмиға қарап, көпяқлиқларни атаңлар.



а) ә)

4.4-сүрәт

4.7. 4.5-сүрәттики көпяқлиқлар үчүн Эйлер тәңлиги орунлинамду, тәкшүрүңлар.



а) ә)

4.5-сүрәт

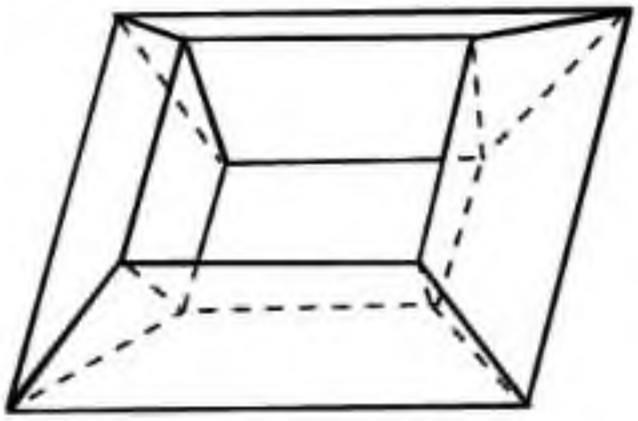
C

4.8. Томпақ әмәс призма үчүн Эйлер тәңлиги орунлинамду?

4.9. Томпақ әмәс пирамида үчүн Эйлер тәңлиги орунлинамду?

MyLibrary.kz

4.10. 4.6-сүрәттики көпяқлиқниң чоққилириниң, қирлириниң вә яқлириниң санини тепиңлар. Мошу көпяқлиқ үчүн Эйлер тәңлиги орунлинамду?



4.6-сүрәт

4.7-сүрәт

4.11. Томпақ көпбулуңлуқниң һәр бир чоққисида бир квадрат, төрт үчбулуңлуқ жиғилиду (4.7-сүрәт). Мошу көпяқлиқниң чоққилириниң (Ч), қирлириниң (Қ), яқлириниң (Я) санини тепиңлар.

4.12. Һәр қандақ көпяқлиқниң үчбулуңлуқ, төртбулуңлуқ яки бәшбулуңлуқ яқлири болидиғанлиғини испатлаңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

4.13. Дурус көпбулуңлуқ ениқлимисини тәкрарлаңлар. Дурус көпяқлиқниң ениқлимисини ейтип көрүңлар.

§ 5. Дурус көпяқлиқлар

Әгәр дурус көпяқлиқниң яқлири тәрәплириниң сани бирдәк дурус көпбулуңлуқлар болса вә һәрбир чоққисида жиғилидиған яқлириниң сани бирдәк болса, бу көпяқлиқ *дурус көпяқлиқ* дәп атилиду.

Дурус көпяқлиқниң чоққилирида қандақ вә қанчә дурус көпбулуңлуқлар жиғилидиғинини ениқлайли.

Дурус көпяқлиқларниң ичидики әң аддий түри у төрт йеқи дурус үчбулуңлуқлардин тәркип тапқан (5.1, *а*-сүрәт) вә һәрбир чоққисида үч йеқи жиғилидиған көпяқлиқ болуп һесаплиниду. Бу көпяқлиқ *дурус тетраэдр* дәп атилиду. Грек тилидин тәрҗимә қилғанда “тетраэдр” сөзи “төртяқ” (“тетра” — төрт, “эдра” — яқ) дегәнни билдүриду.

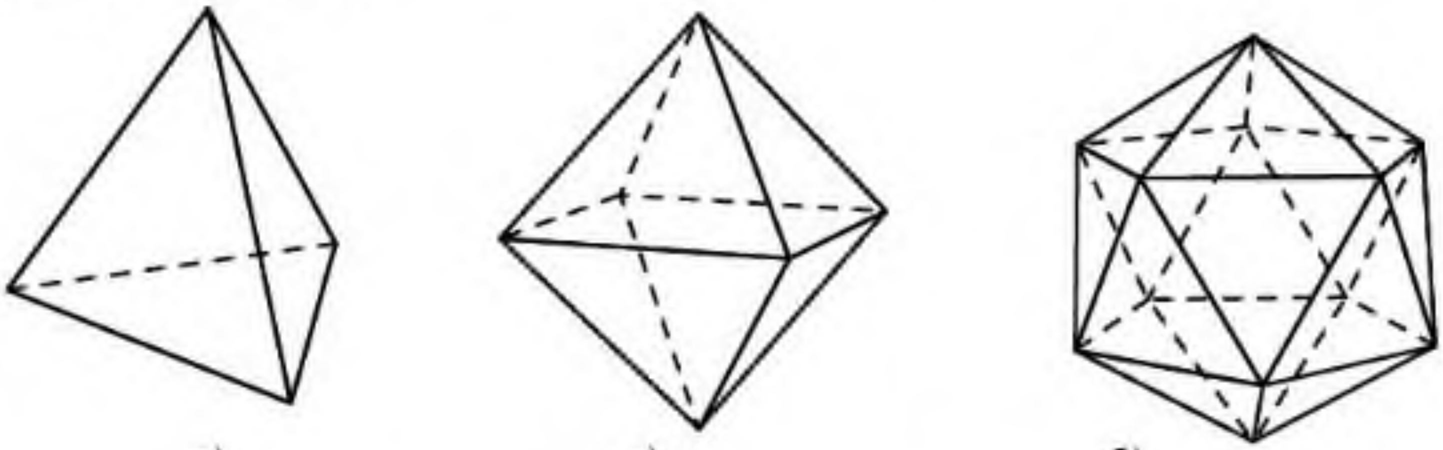
5.1, ә-сүрәттә яқлири дурус үчбулуңлуқлардин тәркип тапқан вә һәрбир чоққисида төрт йеқи жиғилидиған көпяқлиқ тәсвирләнгән. Униң бети сәккиз дурус үчбулуңлуқлардин түзүлгән, шуниң үчүн у октаэдр (“окта” — сәккиз) дәп атилиду.

5.1, б-сүрәттә һәрбир чоққисида бәш дурус үчбулуңлар жиғилидиған көпяқлиқ тәсвирләнгән. Униң бети жигирмә дурус үчбулуңлуқтин тәркип тапқан. Шуниң үчүн у *икосаэдр* (“икоси” — жигирмә) дәп атилиду.

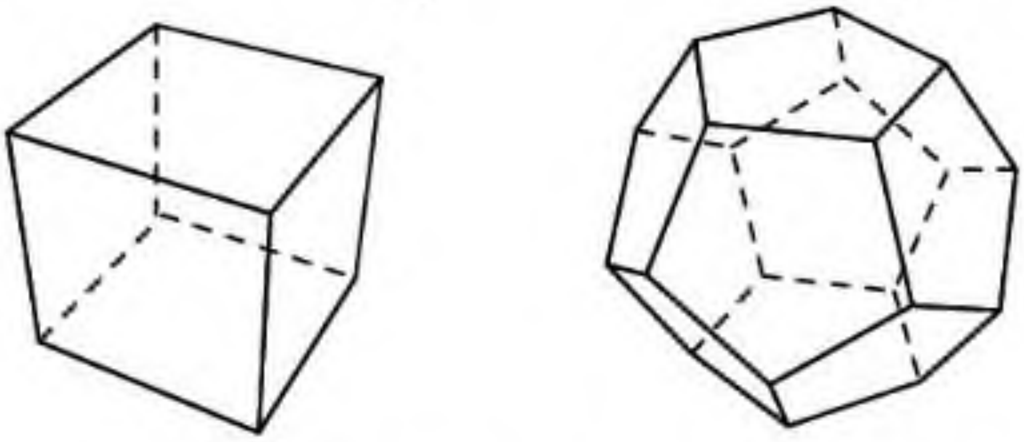
Томпақ көпяқлиқниң бир чоққисида бәштин көп әмәс дурус үчбулуңлуқларниң жиғилидиғинини байқаймиз, сәвәви әкси һаләттә,

MyLibrary.kz

бу чоққидики тәкши булуңларниң қошундиси 360°-тин ошуқ яки тәң болиду. Демәк яқлири дурус үчбулуңлуқлар болидиған башқа дурус көпяқлиқ болмайду.



а) ә) б)



в) г)

5.1-сүрәт

Мошуниңға охшаш, томпақ көпяқлиқниң чоққилирида пәқәт үч квадрат жиғилидиған болғанлиқтин, кубтин (5.1, в-сүрәт) башқа яқлири квадрат болидиған дурус көпяқлиқ болмайду. Кубниң алтә йеқи бар, шуңлашқа уни *гексаэдр* ("гекса" — алтә) дәп атайду.

5.1, г-сүрәттә яқлири дурус бәшбулуңлуқлар болған вә һәрбир чоққисида үч йеқи жиғилидиған көпяқлиқ тәсвирләнгән. Униң бети он икки дурус бәшбулуңлуқтин тәркип тапқан, шуңлашқа у *додекаэдр* ("додека" — он икки) дәп атилиду.

Томпақ көпяқлиқларниң чоққисида тәрәплириниң сани бәштин көп дурус көпбулуңлуқ жиғилмиғанлиқтин, башқа дурус көпяқлиқлар болмайду. Шуниң билән, дурус томпақ көпяқлиқниң бәш түри болиду: *дурус тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр вә икосаэдр.*

Қандақ ойлайсиләр, немә үчүн ян яқлири квадратлар болуп келидиған дурус үчбулуңлуқ призма дурус көпяқлиқ болмайду?

Томпақ көпяқлиқ булуңларниң хусусийәтлирини пайдилинип, томпақ көпяқлиқниң чоққилирида тәрәплириниң сани бәштин артуқ дурус көпбулуңларниң жиғилмайдиғанлиғини өзәңлар испатлаңлар.

Тарихий мәлуматлар

Қедимий замандин бери дурус көпяқлиқлар алимларниң, қурулушчиларниң, архитекторлар вә башқиларниңму диққитини жәлип

қилған. Уларни мошу көпяқлиқларниң гөзәллиги вә алаһидилиги вә гармонияси қизиқтурған. Пифагорлиқлар бу көпяқлиқларни алладин кәлгән мөҗүзә дәп санап, уларни дуния тоғрилиқ философиялик язмилирида қолланған. Қедимий грек алими Платон (б.э.б. 429—347) дурус көпяқлиқларниң хусусийәтлирини тәпсилий тәриплигән. Шуниң үчүнму дурус көпяқлиқлар *Платон җисимлири* дәпму атилиду.

Евклидниң «Башланмилар» намлиқ ахирқи XIII китави мошу дурус көпяқлиқларға беғишланған.

Қайта тиклиниш дәвридә (XV—XVI ә. илим билән һүнәрниң қайта өрлигән дәври) дурус көпяқлиқларға һәйкәлтарашлар, архитекторлар вә сүрәтчиләр чоң қизиқиш билдүрди. Леонардо да Винчи (1452—1519-жж.) көпяқлиқлар теорияси билән шуғулланған вә уларни өзиниң сүрәтлиридә тәсвирлигән. У өзиниң дости Лука Пачолиниң (1445—1517-жж.) "Әҗайип пропорцияләр тоғрилиқ" китавини дурус вә йерим дурус көпяқлиқларниң сүрити билән тәсвирлигән. Шундақла қайта тиклиниш дәвридә геометрия билән шуғулланған йәнә бир мәшһур рәссам Альбрехт Дюрер (1471—1528-жж.) болди.

Униң аләмгә мәлум "Меланхолия" әмгигидә алдинқи қатарда додекаэдр селинған. 1525-жили Дюрер трактат язди, униңда у бәтлири келәчәкниң яхши моделини көрситидиған бәш дурус көпяқлиқни тәвсийә қилди.

Иоганн Кеплер (1571—1630-жж.) өзиниң 1596-жили йоруқ көргән "Аләмниң сири" намлиқ әмгигидә сфериға (шу замандики бәлгүлүк планетиларниң орбитиси) сиртидин сизилған дурус көпяқлиқларни пайдилинип, Күн системисиниң моделини қураштурған.

У мәркизигә йәрниң орбитисини орунлаштурди. Кеплерниң ойичә, Күн системисиниң геометрияси: "Йәр (Йәр орбитиси) — барлиқ орбитиларниң өлчими. Униңға сиртидин додекаэдр салимиз. Додекаэдрға сиртидин сизилған сфера — Марс сфериси. Марс сферисиға сиртидин тетраэдр салимиз. Тетраэдрға сиртидин сизилған сфера Юпитерниң сфериси болуп һесаплиниду. Юпитер сферисиға сиртидин кубни салимиз. Кубқа сиртидин сизилған сфера Сатурн сфериси болуп һесаплиниду. Йәрниң сферисиға ичидин икосаэдр салимиз. Униңға ичидин сизилған сфера Чолпан сфериси болиду. Чолпан сферисиға ичидин октаэдр салимиз. Униңға ичидин сизилған сфера Меркурий сфериси болиду. Шу заманда башқа планетилар техи ечилмиған еди".

Күн системисиниң бу моделини Кеплер "Каинатлиқ куб" дәп атиди.

Соаллар

1. Қандақ томпақ көпяқлиқ дурус дәп атилиду?
2. Қандақ көпяқлиқ: а) дурус тетраэдр; ә) октаэдр; б) икосаэдр; в) гексаэдр; г) додекаэдр дәп атилиду?
3. Кимләр көпяқлиқларни тәтқиқ қилиш билән шуғулланған?

MyLibrary.kz

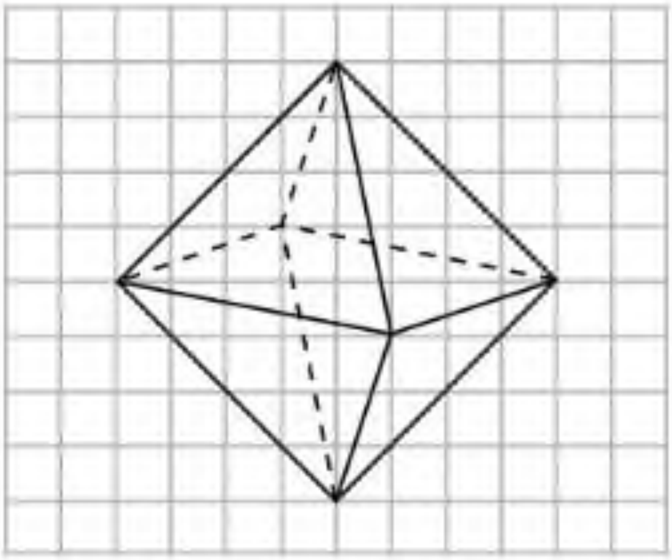
А

5.1. 1) Дурус тетраэдрниң; 2) кубниң; 3) октаэдрниң; 4) икосаэдрниң; 5) додекаэдрниң қанчә чоққиси, қири вә йеқи болиду?

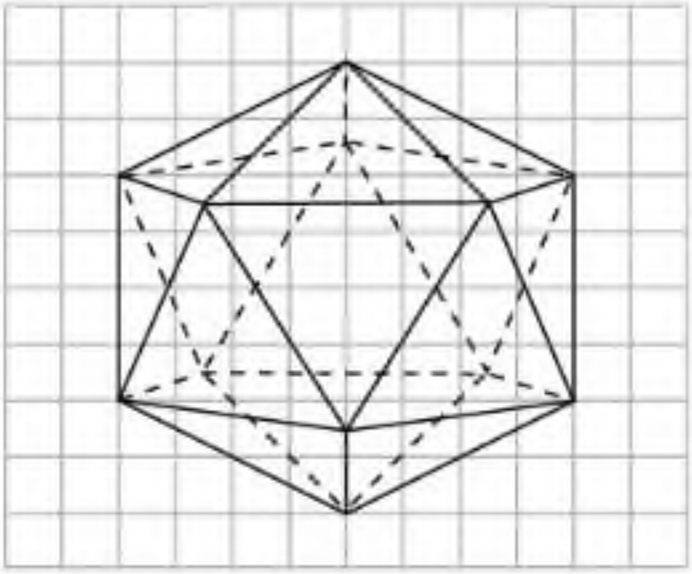
5.2. Үчбулуңлуқ бипирамида икки дурус тетраэдрниң бәтлирини бәтләштүрүп қураштурулиду. ("би" қошумчиси иккиләнгән, һәссиләнгән дегәнни билдүриду). Пәйда болған көпяқлиқ дурус боламду? Немә үчүн?

5.3. Төртбулуңлуқ бипирамида ян яқлири дурус үчбулуңлуқлар болидиған икки төртбулуңлуқ пирамидиниң асаслирини бәтләштүрүп қураштурулиду. Пәйда болған көпяқлиқ дурус боламду?

5.4. Чақмақ қәғәзгә 4.2-сүрәттикигә охшаш октаэдрни селиңлар.



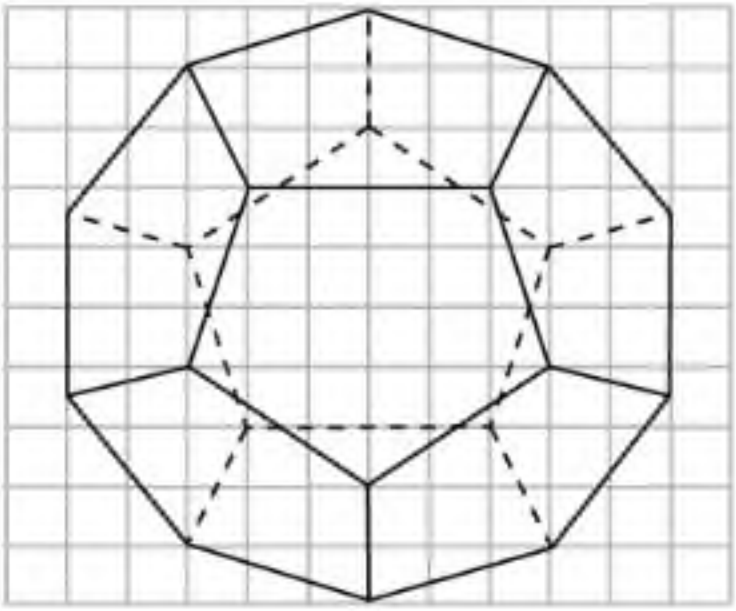
5.2-сүрәт



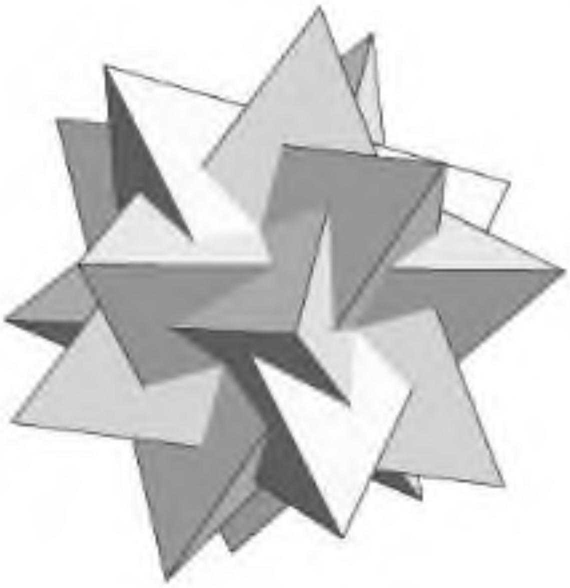
5.3-сүрәт

5.5. Чақмақ қәғәзгә 5.3-сүрәттикигә охшаш икосаэдрни селиңлар.

5.6. Чақмақ қәғәзгә 5.4-сүрәттикигә охшаш додекаэдрни селиңлар.



5.4-сүрәт



5.5-сүрәт

5.7. 5.5-сүрәттә нәччә тетраэдр тәсвирләнгән?

5.8. 5.6-сүрәттә нәччә октаэдр тәсвирләнгән?

MyLibrary.kz

5.6-сүрәт

5.7-сүрәт

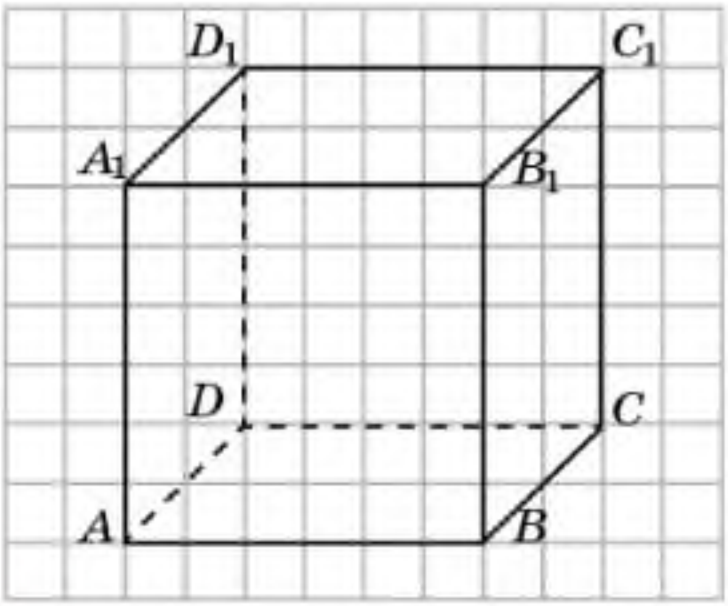
5.8-сүрәт

5.9. 5.7-сүрәттики көпяқлиқ қандақ икки көпяқлиқни бириктүрүш арқилиқ селинған?

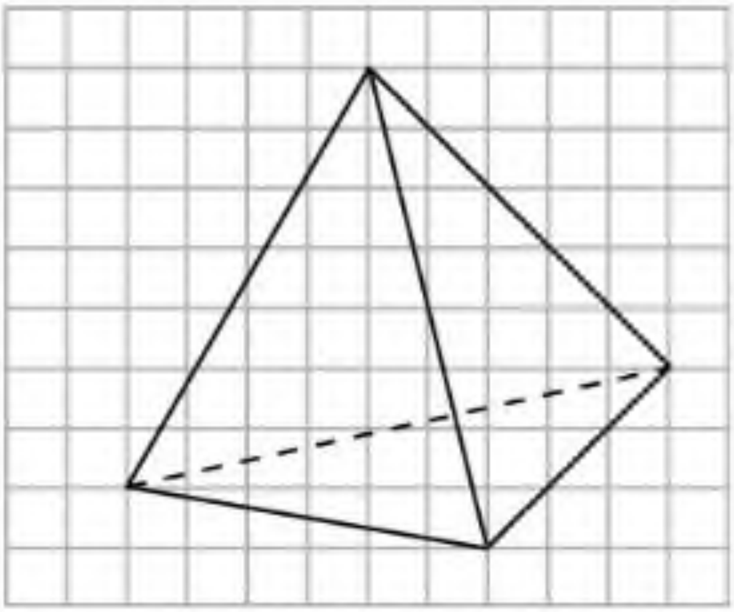
5.10. 5.8-сүрәттики көпяқлиқ қандақ икки көпяқлиқни бириктүрүш арқилиқ селинған?

B

5.11. 5.9-сүрәттикигә охшаш кубни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Кубниң A, C, B_1, D_1 чоққилири қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән кубниң қири 1 гә тәң дәп елип, һасил болған көпяқлиқ қириниң узунлиғини тепиңлар.



5.9-сүрәт



5.10-сүрәт

5.12. 5.9-сүрәттикигә охшаш кубни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Куб яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән кубниң қири 1 гә тәң дәп елип, пәйда болған көпяқлиқ қириниң узунлиғини тепиңлар.

5.13. 5.10-сүрәттики охшаш тетраэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Тетраэдр қирлириниң оттурилирини бәлгүләңлар. Улар қандақ

MyLibrary.kz

көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән тетраэдрниң қири 1 гә тәң дәп елип, пәйда болған көпяқлиқ қирини тепиңлар.

5.14. Қири 2 см-ға тәң тетраэдрниң һәр бир чоққисидин қири 1 см-ға тәң тетраэдр қийилип елинса, қалған бөлиги қандақ көпяқлиқ болиду? Униң қирини тепиңлар.

5.15. Октаэдрниң қири 1 гә тәң. Униң қариму-қарши ятқан чоққилириниң арилиғини тепиңлар.

5.16. Бирлик октаэдрниң қирлири арқилиқ униң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә узунлиғи 2 гә тәң нәччә йол болиду?

5.17. Бирлик октаэдрниң қирлири арқилиқ униң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә узунлиғи 3 кә тәң нәччә йол болиду?

C

5.18. 5.10-сүрәттикигә охшаш тетраэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Тетраэдр яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән тетраэдрниң қири 1 гә тәң дәп елип, пәйда болған көпяқлиқниң қирини тепиңлар.

5.19. 5.2-сүрәттикигә охшаш октаэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Октаэдр яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән октаэдрниң қири 1 гә тәң дәп елип, пәйда болған көпяқлиқниң қирини тепиңлар.

5.20. 5.3-сүрәттикигә охшаш икосаэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Икосаэдрниң яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду?

5.21. 5.4-сүрәттикигә охшаш додекаэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Додекаэдр яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду?

5.22. Бирлик икосаэдрниң қирлири арқилиқ униң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә узунлиғи 3 кә тәң нәччә йол болиду?

5.23. Бирлик додекаэдрниң қирлири арқилиқ униң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә узунлиғи 5 кә тәң нәччә йол болиду?

5.24. 1) Дурус тетраэдрниң; 2) октаэдрниң; 3) икосаэдрниң хошна яқлириниң арисидики иккияқлиқ булуңиниң косинусини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

5.25. Куб, параллелепипед, призма вә пирамидиниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

5.26. Бошлуқтики түзләр билән тәкшиликләрниң параллельлиғи билән перпендикулярлиғиниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

MyLibrary.kz

§6. Көпяқлиқларниң тәкшилик билән қийилмилири

10-синип геометрия курсида кубниң, призминиң, пирамидиниң тәкшилик билән қийилмилири вә уларни селиш мәсилилири қошумчә материал ретидә қараштурулған.

Әгәр көпяқлиқниң чекитлири берилгән тәкшиликкә мувапиқ икки йеқида орунлашқан болса, у чағда мундақ тәкшилик *қийғучи тәкшилик* дәп атилиду.

Көпяқлиқ билән қийғучи тәкшиликниң умумий бөлиги (қийилишиши) болидиған көпбулуңлуқ көпяқлиқниң *тәкшилик билән қийилмиси* дәп атилиду. Униң тәрәплири қийғучи тәкшиликниң көпяқлиқниң яқлирини қийип өтидиған кесиндиләр болиду. Мошу кесиндиләр билән чәкләнгән көпбулуңлуқ фигуриниң қийилмиси болуп һесаплиниду.

Тетраэдрниң төрт йеқи болғанлиқтин, униң қийилмиси үчбулуңлуқ яки төртбулуңлуқ болуши мүмкин. Параллелепипедниң алтә йеқи бар. Шуңлашқа униң қийилмиси үчбулуңлуқ, төртбулуңлуқ, бәшбулуңлуқ вә алтәбулуңлуқ болуши мүмкин.

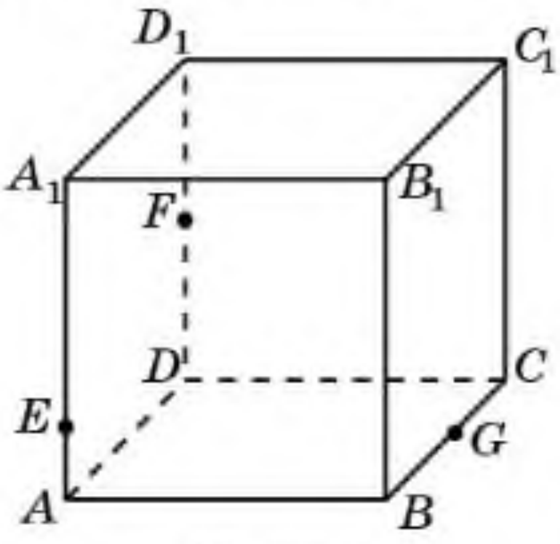
? Томпақ көпяқлиқниң қийилмиси томпақ көпбулуңлуқ болидиғанлиғи дурусму?

Көпяқлиқларниң тәкшилик билән қийилмилирини селиш дәл ениқланған аддий селишларни орунлаштин ибарәт: бир тәкшиликтә ятқан икки чекит арқилиқ түз сизиқ жүргүзүш; икки түзниң қийилишиш чекитини ениқлаш; түз билән тәкшиликниң қийилишиш чекитини ениқлаш; икки тәкшиликниң қийилишиш сизиғини жүргүзүш.

Параллелепипедниң қийилмисини салғанда төвәндики қаидини естә сақлаш керәк: әгәр қийғучи тәкшилик униң қариму-қарши яқлирини қандақту бир кесиндиләр билән қийип өтсә, у чағда бу кесиндиләр өз ара параллель болиду.

Қийилмини селиш үчүн қийғучи тәкшилик билән көпяқлиқ қирлириниң қийилишиш чекитлирини тапсақ йетәрлик болиду. Андин бир йеқида ятқан икки чекитни кесиндә билән қошуш арқилиқ қийилмини салимиз.

Көпяқлиқниң тәкшилик билән қийилмисини селишқа мисаллар қараштурайли.



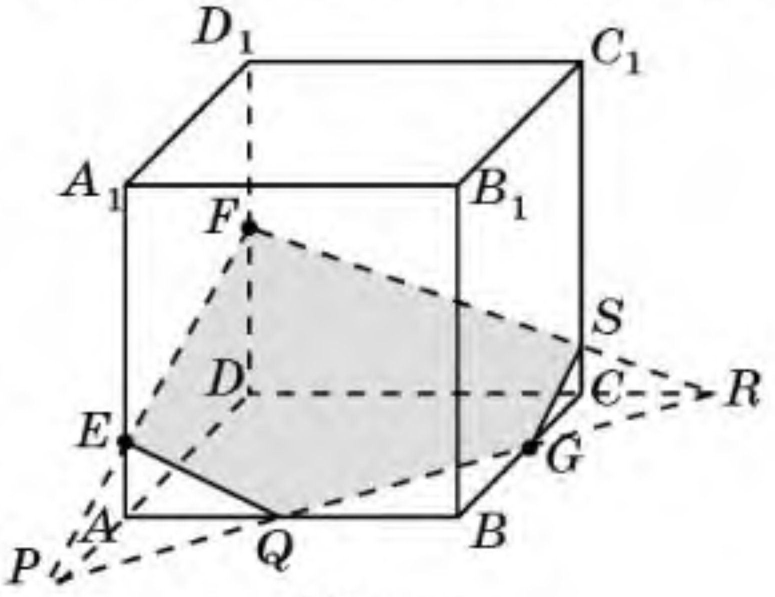
6.1-сүрәт

1-мисал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң қирлирида ятидиған E, F, G чекитлири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.1-сүрәт).

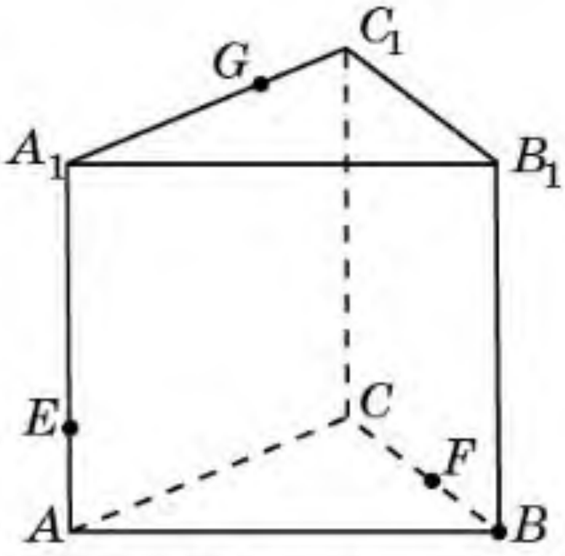
Селиш. E вә F чекитлири кубниң ADD_1A_1 йеқиға тәәллуқ болғанлиқтин, мошу чекитләр арқилиқ EF түзини жүргүзимиз. EF кесидиси қийилма тәкшилигигә вә кубниң мошу йеқиға умумий болиду. EF кесиндисини вә AD қирини уларниң қийилишиш чекити P-ғичә созумиз.

P вә G чекитлири кубниң $ABCD$ йеқи арқилиқ өтидиған тәкшиликкә тәәллуқ болғанлиқтин, мошу чекитләр арқилиқ PG түзини жүргүзимиз вә униң AB вә DC түзлири билән қийилишиш чекитлирини мувапиқ Q вә R дәп бәлгүләйли.

R вә F чекитлири кубниң DCC_1D_1 йеқи арқилиқ өтидиған тәкшиликккә тәәллуқ болғанлиқтин, мошу чекитләр арқилиқ RF түзини жүргүзимиз вә униң CC_1 қири билән қийилишиш чекитини S дәп бәлгүләймиз. E вә Q, G вә S чекитлирини қошимиз. Шу чағда қийғучи тәкшилик кубни EQ, QG, GS, SF вә FE кесиндилири бойи билән қийиду. Пәйда болған $EFSGQ$ бәшбулуңи издиливатқан қийилма болиду (6.2-сүрәт).



6.2-сүрәт



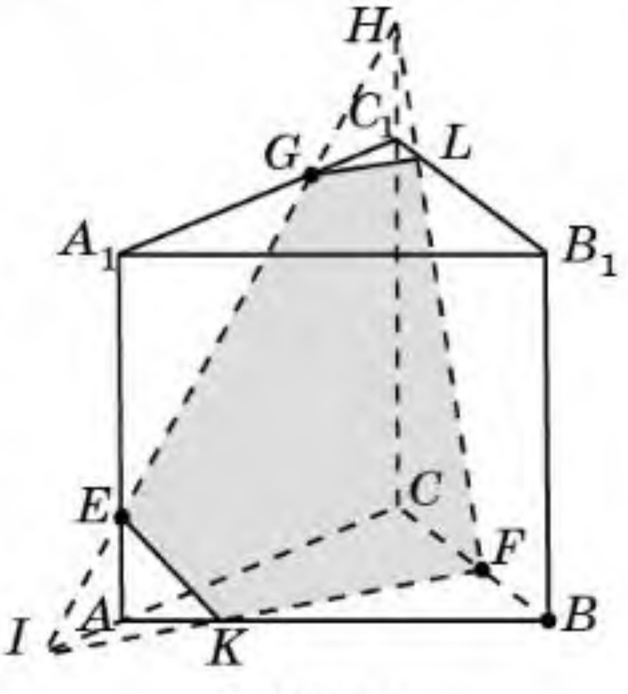
6.3-сүрәт

2-мисал. $ABCA_1B_1C_1$ призминиң қирлирида ятқан E, F, G чекитлири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.3-сүрәт).

Селиш. E вә G чекитлири призминиң ACC_1A_1 йеқиға тәәллуқ болғанлиқтин, мошу чекитләр арқилиқ EG түзини жүргүзимиз. EG кесиндиси қийилма тәкшилигигә вә призминиң мошу йеқиғиму умумий болиду. EG түзи билән призминиң CC_1 вә AC түзлири билән қийилишиш чекитлирини мувапиқ H вә I дәп бәлгүләймиз.

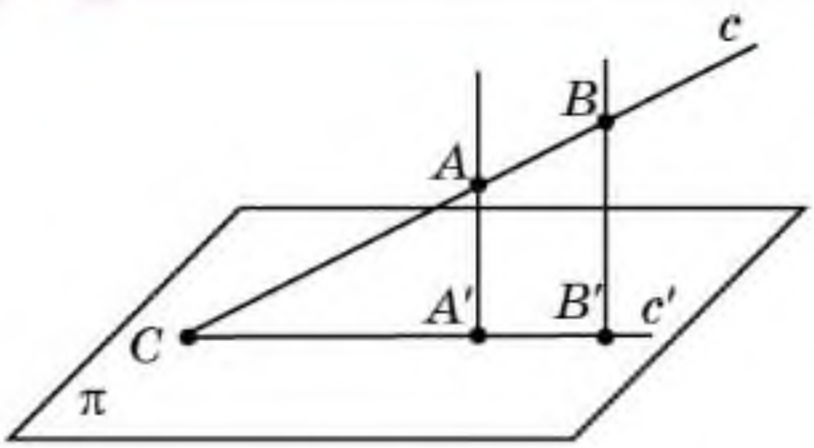
I вә F чекитлири призминиң ABC асаси арқилиқ өтидиған тәкшиликкә тәәллуқ болғанлиқтин, мошу чекитләр арқилиқ IF түзини жүргүзүп, униң AB қири билән қийилишиш чекитини K дәп бәлгүләймиз.

F вә H чекитлири призминиң BCC_1B_1 йеқи арқилиқ өтидиған тәкшиликкә тәәллуқ болғанлиқтин, мошу чекитләр арқилиқ FH түзини жүргүзип, униң B_1C_1 қири билән қийилишиш чекитини L дәп бәлгүләймиз. E, K, G вә L чекитлирини қошимиз. Шу чағда қийғучи тәкшилик призмини EK, KF, FL, GL вә EG кесиндилири бойи билән қийиду. Пәйда болған $EKFLG$ бәшбулуңлуқлиғи издиливатқан қийилма болиду (6.4-сүрәт).



6.4-сүрәт

MyLibrary.kz



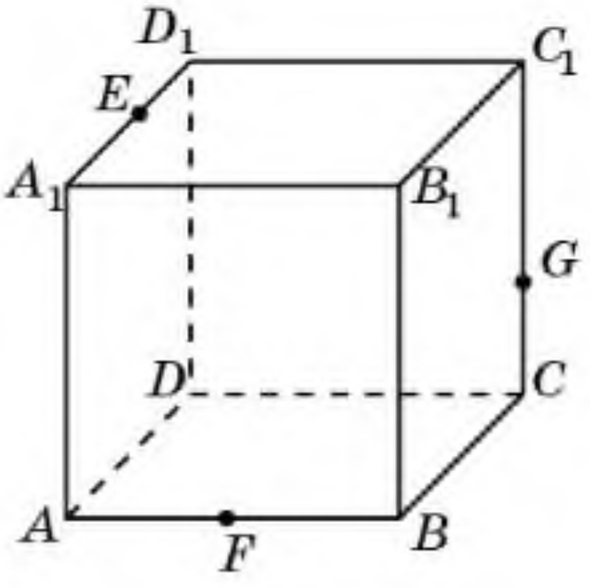
6.5-сүрәт

Буниңдин кийин кийилмиларни селиш үчүн түзниң бойида ятқан икки чекит билән уларниң тәкшиликтики параллель проекциялири арқилиқ түз билән тәкшиликниң қийилишиш чекитини селишқа мүмкинчилик беридиған *излар усулини* қоллинидиған болимиз.

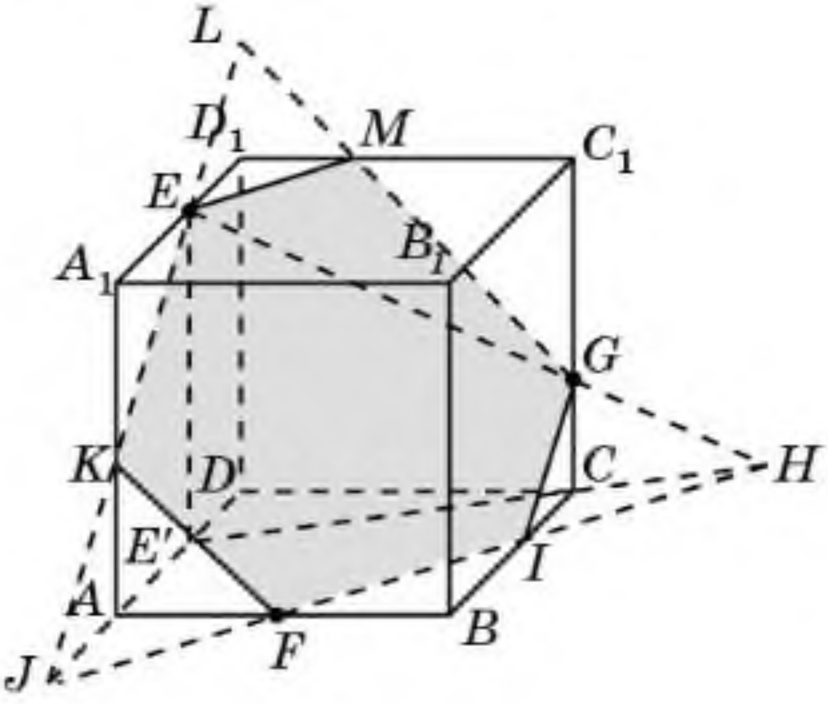
c түзи A, B чекитлири арқилиқ өтсун вә мошу чекитләрниң π тәкшилигидики A', B' параллель проекциялири бәлгүлүк болсун. Шу чағда c түзи билән A', B' чекитлири арқилиқ өтидиған c' түзиниң C қийилишиш чекити c түзи билән π тәкшилигиниң издиливатқан қийилишиш чекити болиду (6.5-сүрәт).

Излар усулиниң мәнаси — алди билән тәкшиликниң көпяқлиқниң асас тәкшилигидики изини селиш, кейин көпяқлиқниң ян қирлири вә яқлири билән қийилишиш чекитлирини, түзлирини селиш. Бу усулни көпяқлиқниң бир йеқида ятидиған икки чекит тепилмиған һаләттә қоллиниду, йәни қийилмини берилгән чекитләрдин өтидиған түзниң мошу чекитләрниң проекциялири ятқан тәкшилик билән қийилишиш чекитлирини тепиш арқилиқ селишқа мүмкинчилик бериду.

3-мисал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң жүп-жүпи билән айқаш қирлирида ятидиған E, F, G чекитлири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.6-сүрәт).



6.6-сүрәт



6.7-сүрәт

Селиш. EG түзи билән ABC тәкшилигиниң қийилишишини тапайли. Униң үчүн E чекити арқилиқ D_1D түзигә параллель түз жүргүзимиз вә униң AD қири билән қийилишиш чекитини E' дәп бәлгүләймиз. $E'C$ билән EG түзлирини жүргүзимиз вә уларниң қийилишиш чекитини H дәп бәлгүләймиз. HF түзини жүргүзимиз вә униң BC вә AD қирлири

MyLibrary.kz

билән қийилишиши чекитлирини мувапиқ I, J дәп бәлгүләймиз. JE түзини жүргүзимиз вә униң AA_1 вә DD_1 түзлири билән қийилишиш чекитлирини мувапиқ K, L дәп бәлгүләймиз. LG түзини жүргүзимиз вә униң C_1D_1 қири билән қийилишиш чекитини M дәп бәлгүләймиз. E вә M, F вә K, G вә I чекитлирини қошимиз. Пәйда болған $FIGMEK$ алтәбулуңлуғи издиливатқан қийилма болиду (6.7-сүрәт).

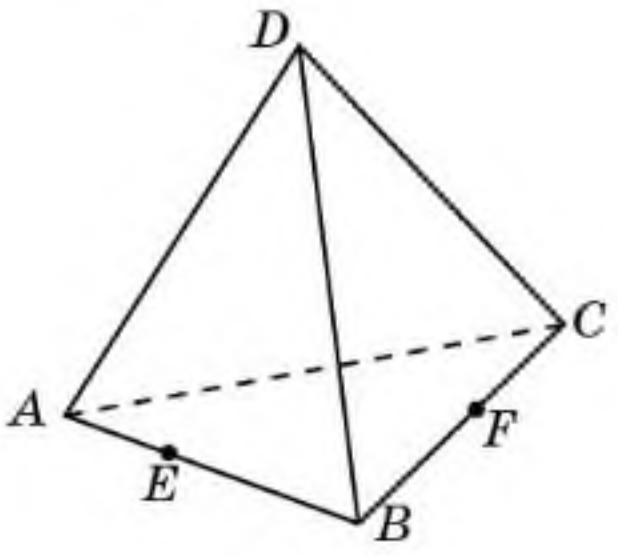
Соаллар

1. Қийғучи тәкшилик дегинимиз немә?
2. Көпяқлиқниң тәкшилик билән қийилмиси дегән немә?
3. Қийғучи тәкшиликниң изи дегинимиз немә?
4. Излар усулиниң мәнаси немидә?

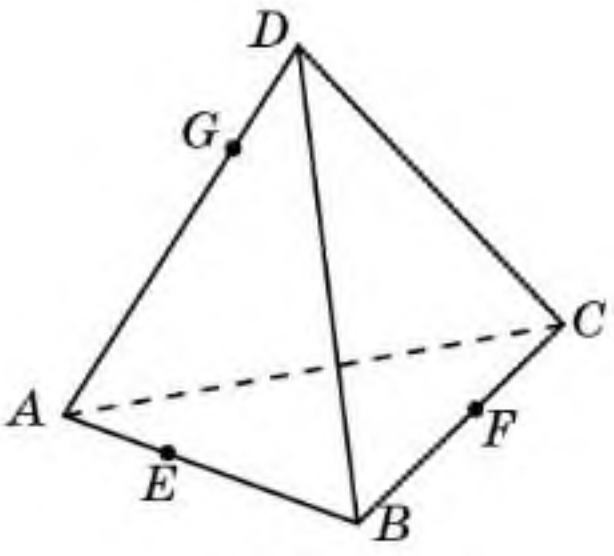
Һесаплар

A

6.1. $ABCD$ тетраэдрниң E, F чекитлири арқилиқ өтидиған вә BD қириға параллель тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.8-сүрәт).



6.8-сүрәт

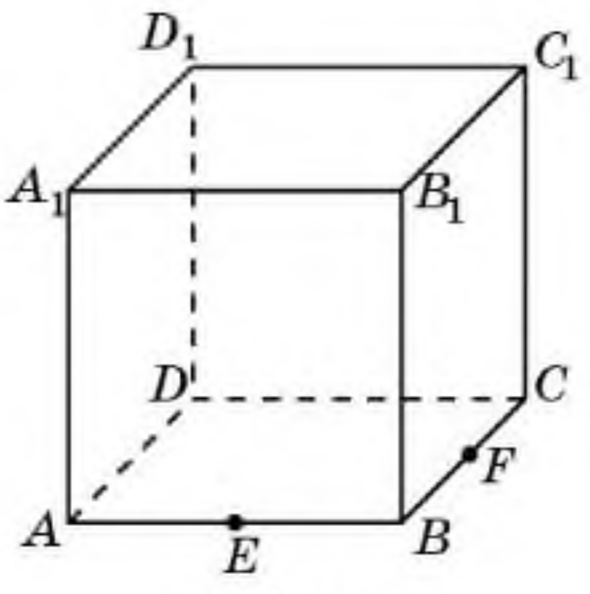


6.9-сүрәт

6.2. $ABCD$ тетраэдрниң E, F, G чекитлири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.9-сүрәт).

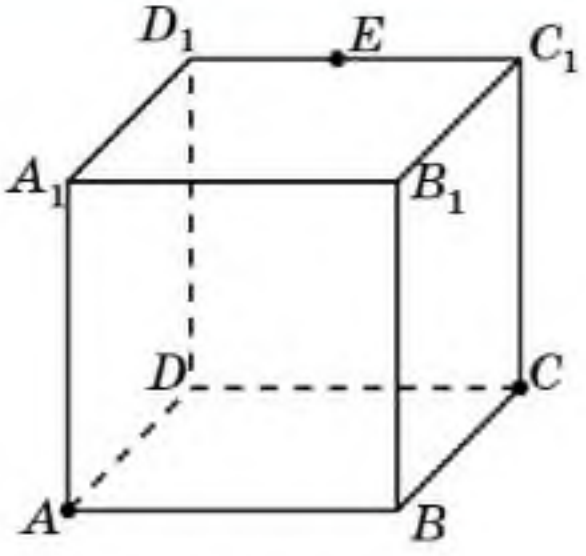
6.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң AB, BC қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған вә CC_1 қириға параллель болидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.10-сүрәт).

6.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң A, C чоққилири вә C_1D_1 қириниң оттуриси E чекити арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.11-сүрәт).

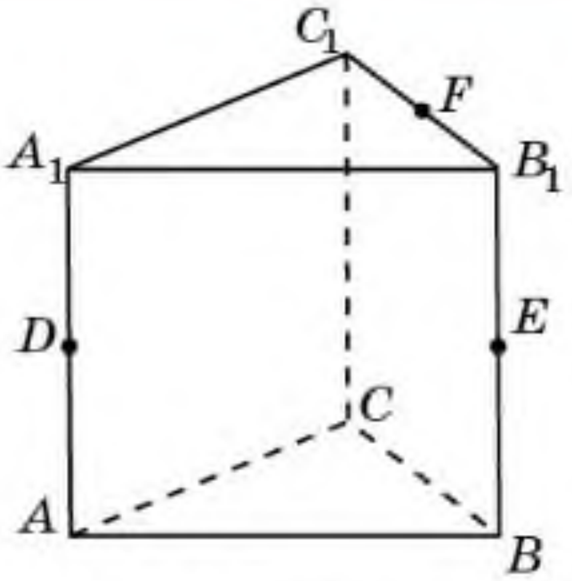


6.10-сүрәт

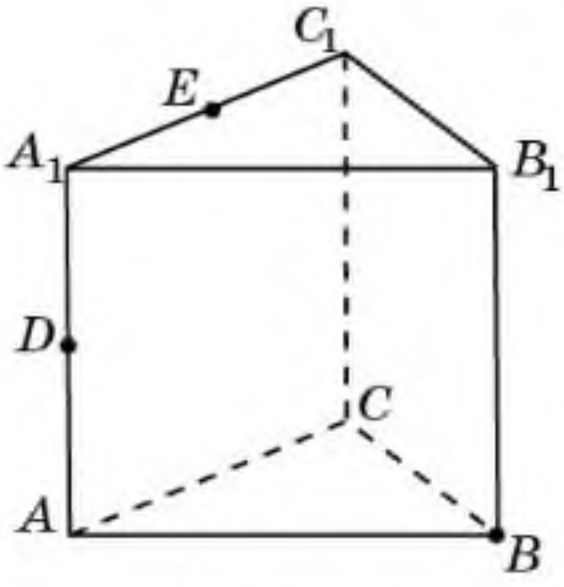
MyLibrary.kz



6.11-сүрәт



6.12-сүрәт



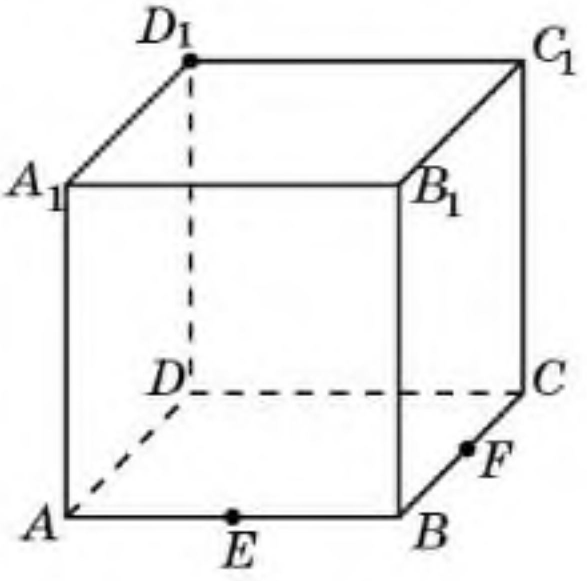
6.13-сүрәт

6.5. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң AA_1, BB_1, B_1C_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.12-сүрәт).

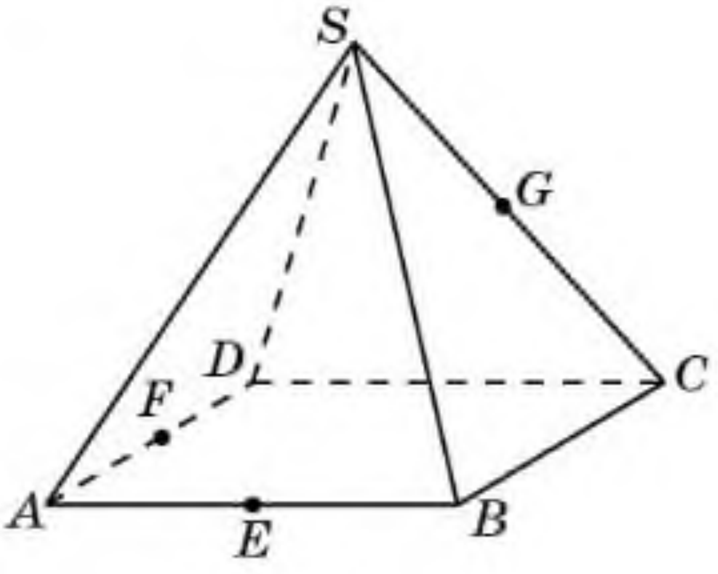
6.6. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң B чоққиси вә AA_1 билән A_1C_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.13-сүрәт).

B

6.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң AB билән BC қирлириниң оттурилири вә D_1 чоққиси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.14-сүрәт).



6.14-сүрәт

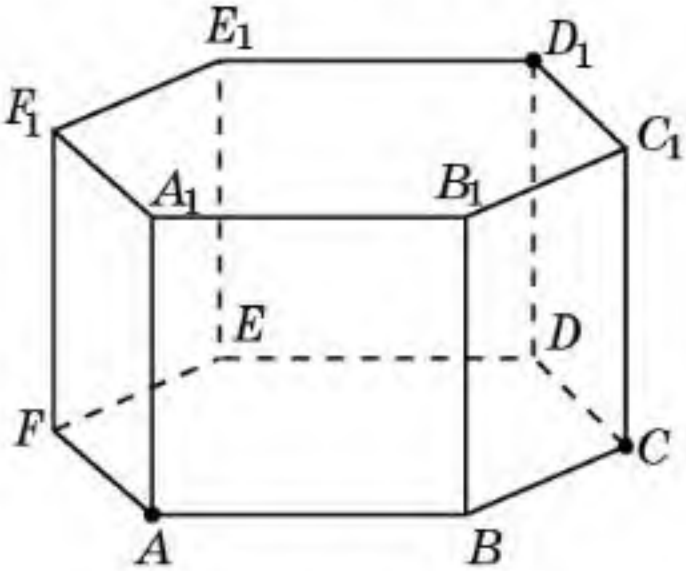


6.15-сүрәт

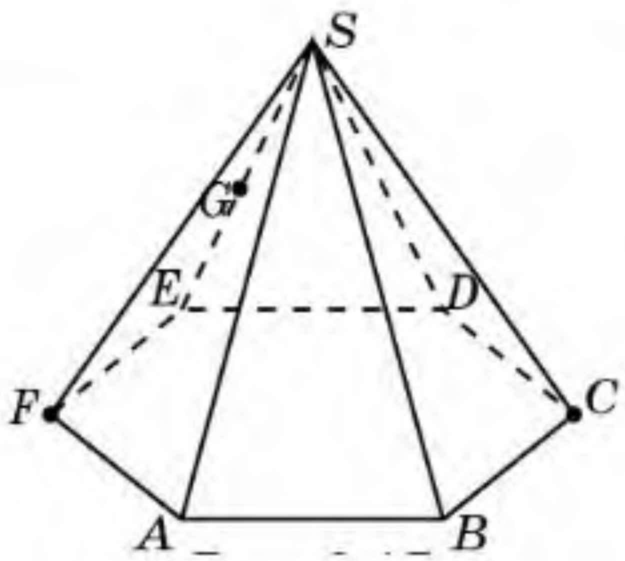
6.8. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң AB, AD вә SC қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.15-сүрәт).

MyLibrary.kz

6.9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң A, C вә D_1 чоққилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.16-сүрәт).



6.16-сүрәт

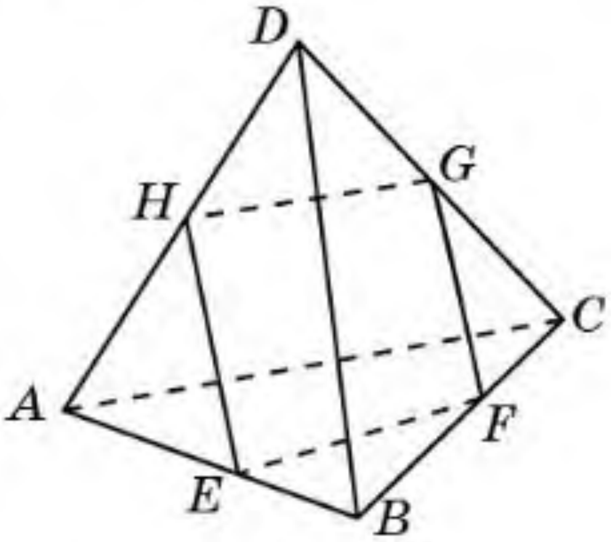


6.17-сүрәт

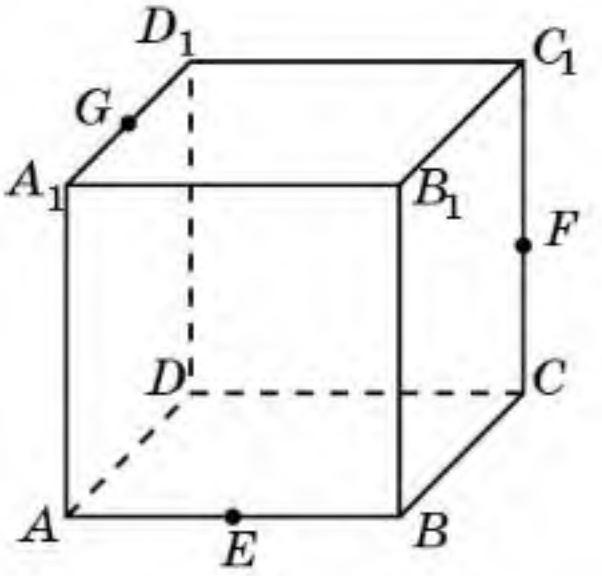
6.10. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң F, C чоққилири вә SE қириниң G оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.17-сүрәт).

C

6.11. 6.18-сүрәттә тәсвирләнгән $EFGH$ төртбулуңлуқ тетраэдрға қийилма боламду?



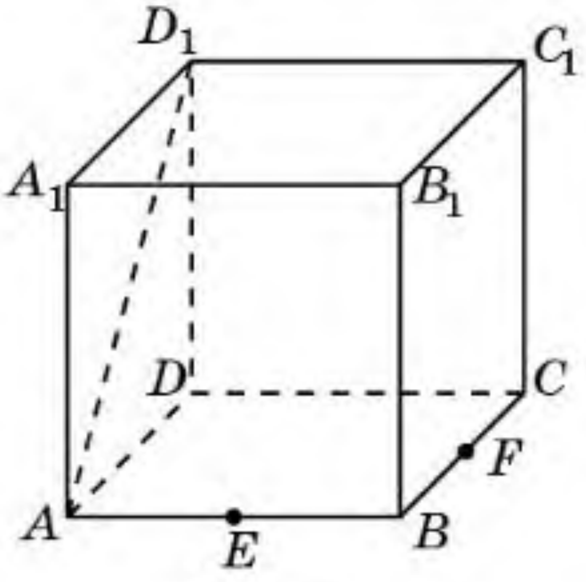
6.18-сүрәт



6.19-сүрәт

6.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң E, F, G чекитлири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.19-сүрәт).

6.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң AB билән BC қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған вә AD_1 түзигә параллель болидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.20-сүрәт).

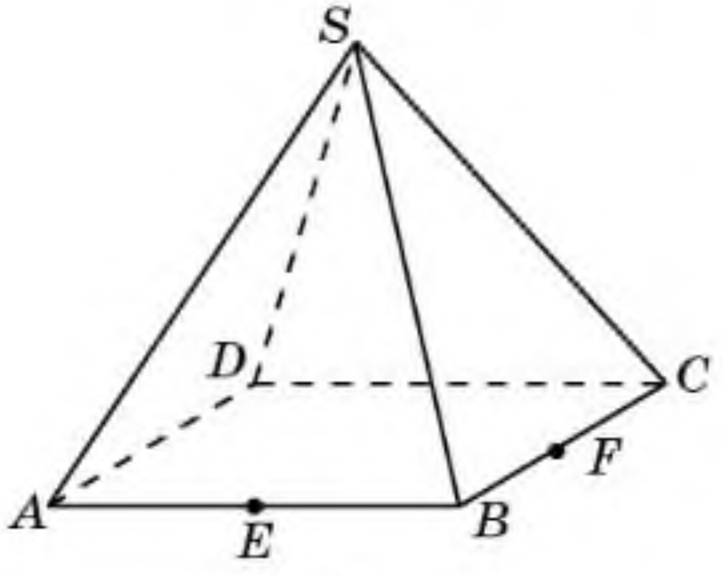


6.20-сүрәт

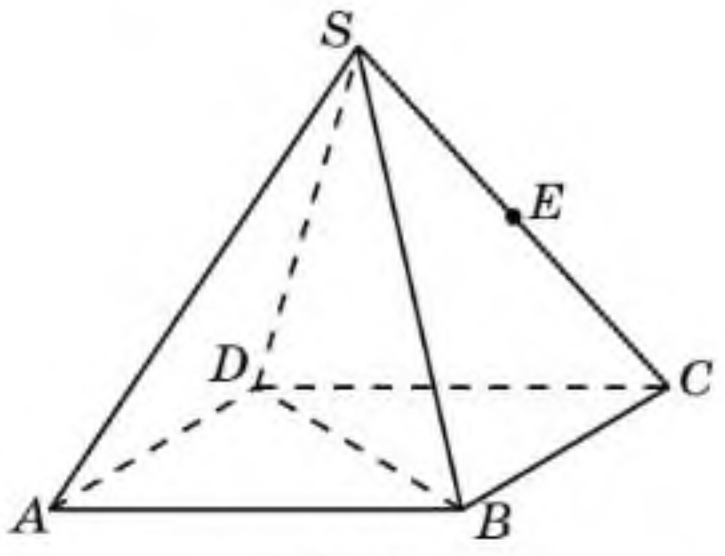
6.14. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң AB билән BC қирлириниң

MyLibrary.kz

оттурилири арқилиқ өтидиған вә SB түзигә параллель болидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.21-сүрәт).



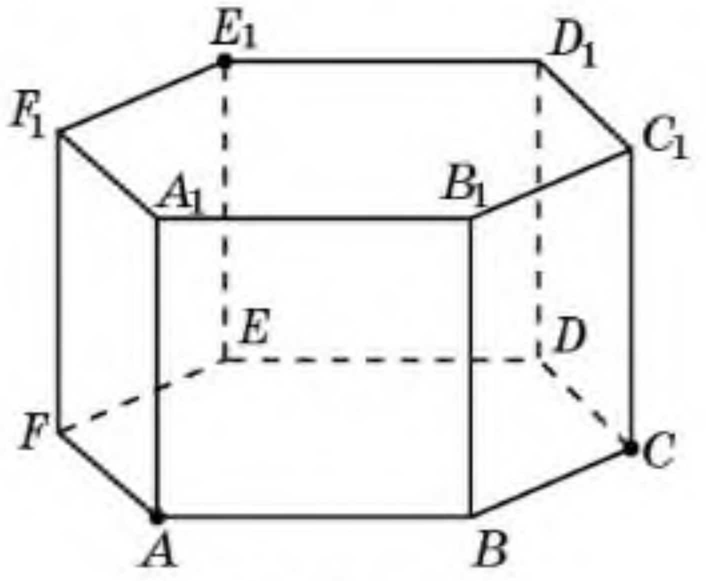
6.21-сүрәт



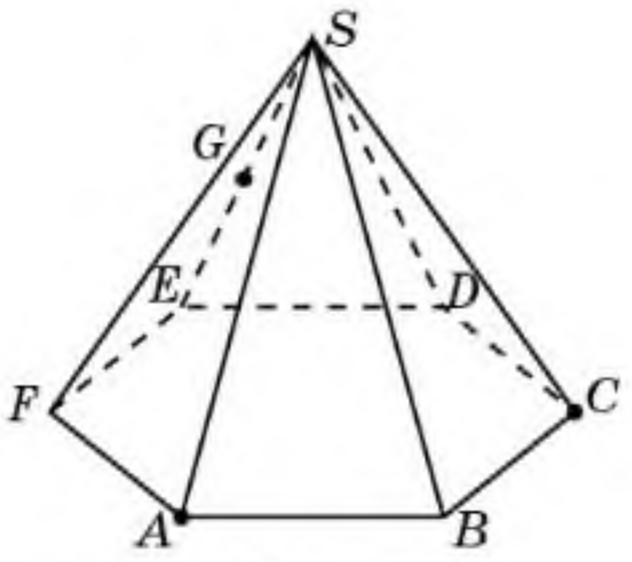
6.22-сүрәт

6.15. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң A чоққиси билән SC қириниң E оттуриси арқилиқ өтидиған вә BD түзигә параллель болидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.22-сүрәт).

6.16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң A, C вә E_1 чоққилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.23-сүрәт).



6.23-сүрәт



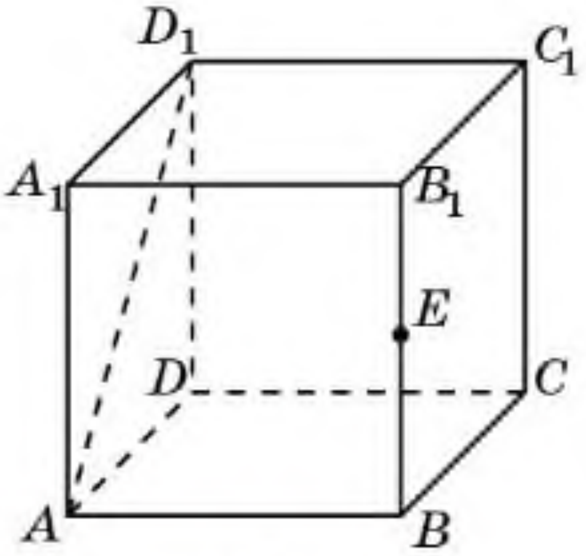
6.24-сүрәт

6.17. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң A, C чоққилири вә SE қириниң G оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.24-сүрәт).

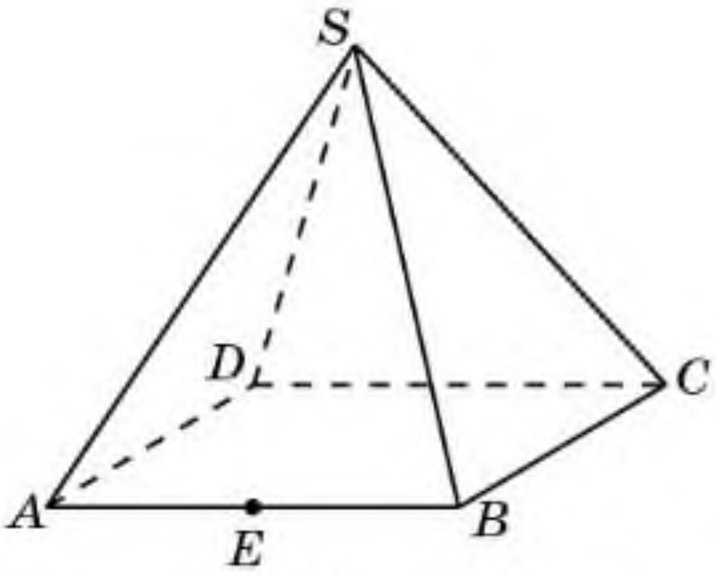
6.18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң BB_1 қириниң E оттуриси арқилиқ өтидиған вә AD_1 түзигә перпендикуляр болидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.25-сүрәт).

6.19. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 гә тәң. Униң AB қириниң E оттуриси арқилиқ өтидиған вә SD түзигә перпендикуляр болидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар (6.26-сүрәт).

MyLibrary.kz



6.25-сүрәт



6.26-сүрәт

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

6.20. Тәкшиликтики мәркизий симметрия билән оқлук симметрия ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

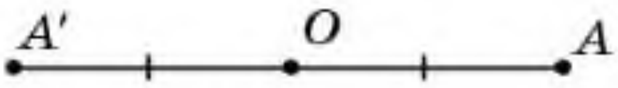
§7*. Көпяқлиқларниң симметрияси

“Тәкшиликтики фигурiларниң симметрияси” чүшәнчисини планиметрия бөлүмидә оқуп үгәнгән. “Мәркизий вә оқлук симметрия” чүшәнчисини үгәндуқ. “Бошлуқтики фигурилар үчүн симметрия” чүшәнчиси мошуниңға охшаш ениқлиниду.

Немис математиги Г.Вейльниң (1885—1955-жж.) ейтишичә: “Симметрия — адәмләрниң әсирләр бойи тәртипни, гөзәллик билән мужәссәмликни чүшинишкә вә ясашқа тиришқан идеялири.

Симметрияниң чирайлиқ тәсвирлири һүнәр әсәрлирини — архитектура, бәдиийсүрәтләрни, һәйкәлләрни вә башқиларни тәсвирләйду.

Әгәр бошлуқтики O чекити AA' кесиндисиниң оттуриси болса, A вә A' чекитлири *O чекитигә нисбәтән симметриялик* дәп атилиду (7.1-сүрәт). O чекити өзигә-өзи симметриялик болиду.



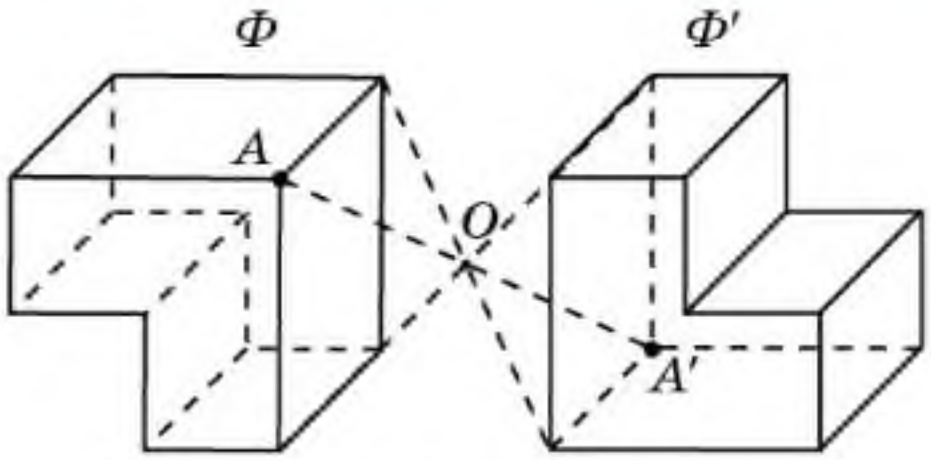
7.1-сүрәт

Бошлуқниң һәрбир A чекитини берилгән O чекитигә нисбәтән симметриялик A' чекитигә тәсвирләйдиған бошлуқтики түрләндүрүш *мәркизий симметрия* дәп атилиду. O чекити *симметрия мәркизи* дәп атилиду.

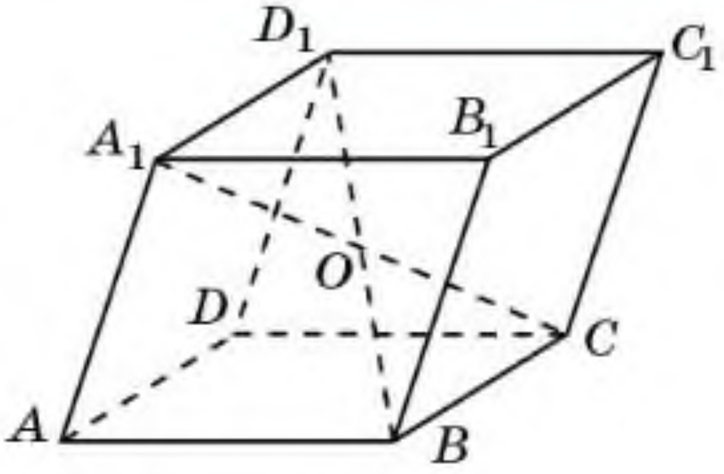
Әгәр бошлуқтики O чекитигә нисбәтән Φ фигурисиниң һәрбир A чекити иккинчи Φ' фигурисиниң қандақту бир A' чекитигә симметриялик болса, у чағда Φ вә Φ' фигурилири O мәркизигә нисбәтән *мәркизий симметриялик* дәп атилиду (7.2-сүрәт).

Әгәр бошлуқтики O чекитигә нисбәтән Φ фигуриси өзигә-өзи мәркизий симметриялик болса, у чағда Φ фигуриси O мәркизигә нисбәтән *мәркизий симметриялик* дәп атилиду.

MyLibrary.kz



7.2-сүрәт



7.3-сүрәт

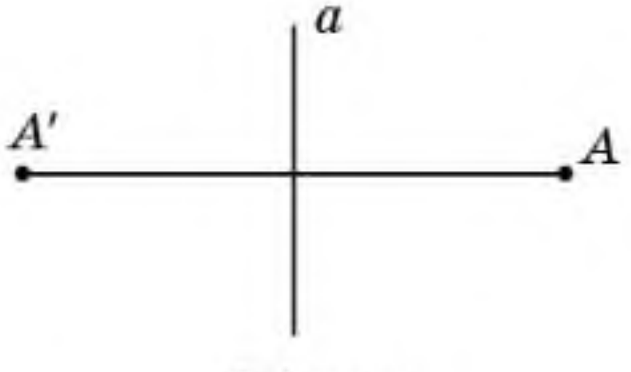
Мәсилән, параллелепипед өзиниң диагональлириниң қийилишиши O чекитигә нисбәтән *мәркизий симметриялик* болиду (7.3-сүрәт).

Қандақ ойлайсиләр, фигурида бирнәччә симметрия мәркизи болуши мумкинму?

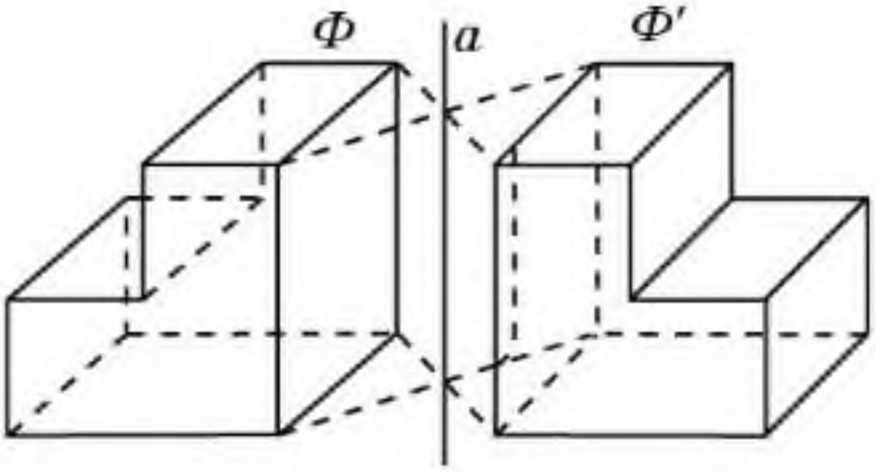
Әгәр бошлуқтики a түзи AA' кесиндисигә перпендикуляр вә униң оттурси арқилиқ өтсә, у чағда A вә A' чекитлири *a түзигә нисбәтән симметриялик* дәп атилиду (7.4-сүрәт). a түзиниң һәр бир чекити өзигә-өзи симметриялик болиду.

Бошлуқниң һәрбир A чекитини берилгән a түзигә нисбәтән A' чекитигә тәсвирләйдиған бошлуқтики түрләндүрүш *оқлуқ симметрия* дәп атилиду. a түзи *симметрия оқи* дәп атилиду.

Әгәр бошлуқтики a түзигә нисбәтән Φ фигурисиниң һәрбир A чекити иккинчи Φ' фигурисиниң қандақту бир A' чекитигә симметриялик болса, у чағда Φ вә Φ' фигурилири a оқиға нисбәтән *симметриялик фигурилар* дәп атилиду (7.5-сүрәт).



7.4-сүрәт



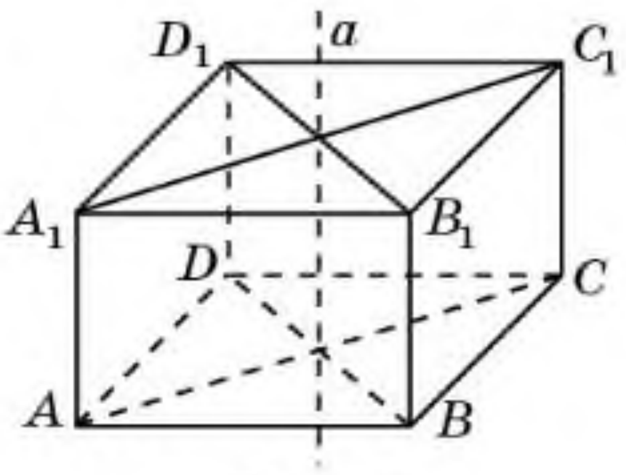
7.5-сүрәт

Әгәр бошлуқтики a түзигә нисбәтән Φ фигуриси өзигә-өзи симметриялик болса, у чағда Φ фигуриси *a оқиға нисбәтән симметриялик* дәп атилиду.

Мәсилән, тикбулуңлуқ параллелепипед өзиниң қариму-қарши ятқан яқлириниң диагональлириниң қийилишиш чекитлири арқилиқ өтидиған түзгә нисбәтән *оқлуқ симметриялик* болиду (7.6-сүрәт).

MyLibrary.kz

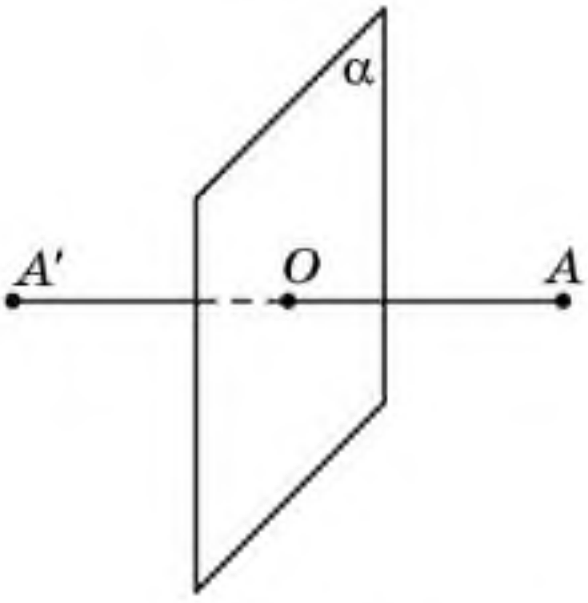
Қандақ ойлайсиләр, фигурида бирнәччә симметрия оқлири болуши мүмкинму?



7.6-сүрәт

Әгәр бошлуқтики α тәкшилиги AA' кесиндисигә перпендикуляр вә униң оттуриси арқилиқ өтсә, у чағда A вә A' чекитлири α *тәкшилигигә нисбәтән симметриялик* дәп атилиду (7.7-сүрәт). α тәкшилигиниң һәрбир чекити өзигә-өзи симметриялик болиду.

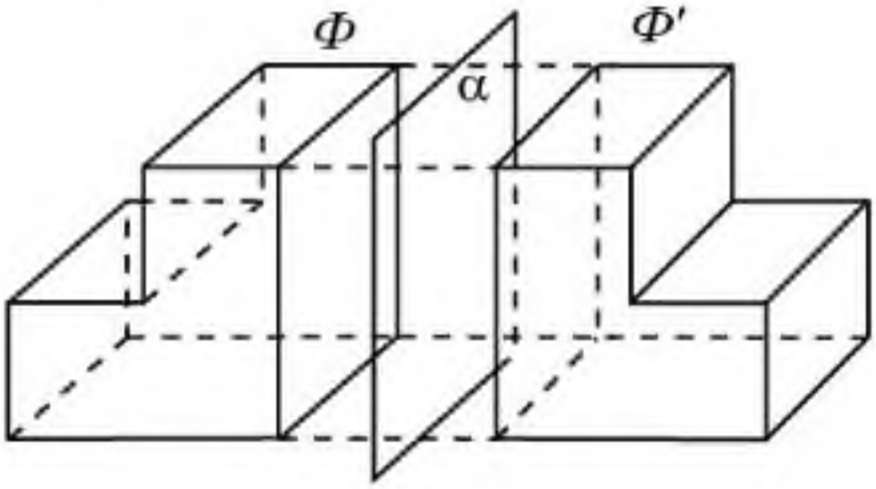
Бошлуқниң һәрбир A чекитини берилгән α тәкшилигигә нисбәтән A' чекитигә тәсвирләйдиған бошлуқтики түрләндүрүш α *тәкшилигигә нисбәтән симметриялик* дәп атилиду. α тәкшилиги *симметрия тәкшилиги* дәп атилиду.



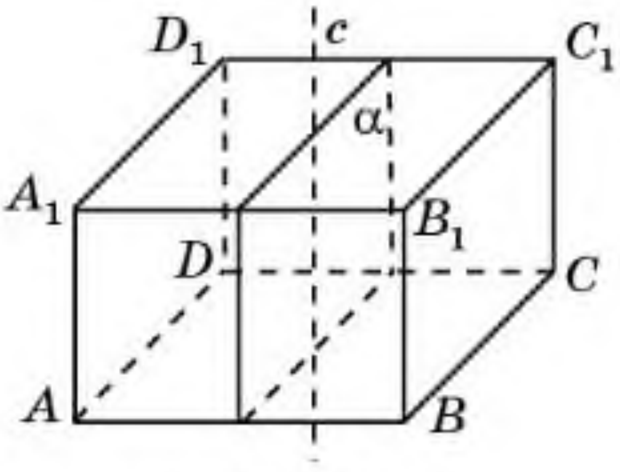
7.7-сүрәт

Тәкшиликкә нисбәтән симметрия *әйнәклик симметрия* дәп атилиду.

Әгәр бошлуқтики α тәкшилигигә нисбәтән Φ фигурисиниң һәрбир A чекити иккинчи Φ' фигурисиниң қандақту бир A' чекитигә әйнәклик симметрия болса, у чағда Φ вә Φ' фигурилири α тәкшилигигә нисбәтән *әйнәклик симметриялик фигурилар* дәп атилиду (7.8-сүрәт).



7.8-сүрәт



7.9-сүрәт

Әгәр бошлуқтики α тәкшилигигә нисбәтән Φ фигуриси өзигә-өзи әйнәклик симметриялик болса, у чағда Φ фигуриси α тәкшилигигә нисбәтән *әйнәклик симметриялик* дәп атилиду.

Мәсилән, тикбулуңлуқ параллелепипед өзиниң симметриялик оқи арқилиқ өтидиған вә қариму-қарши ятқан яқлириниң биригә параллель болидиған тәкшиликкә нисбәтән әйнәклик симметриялик болиду (7.9-сүрәт).

MyLibrary.kz

Қандақ ойлайсиләр, фигуриниң бирнәччә симметрия тәкшиликлири боламду?

Кристаллар — тәбиий көпяқлиқлар

Көпяқлиқларниң көплигән шәкиллирини адәмләрниң өзлири ойлап тапқини йоқ. Улар тәбиий кристаллар түридә түзүлгән. Аш тузиниң кристаллири куб шәклидә (7.10-сүрәт), музниң вә кварцниң кристаллири икки яқлиқ учланған қериндашниң училириға охшап келиду, йәни асаслирида алтәбулуңлуқ пирамидилар ятидиған алтәбулуңлуқ призма шәклидә болиду (7.11-сүрәт).

7.10-сүрәт

7.11-сүрәт

Алмаз көпинчә октаэдр шәклидә учришиду (5.12-сүрәт). Тәсвирини иккигә бөлидиған исландлиқ шпат янту параллелепипед шәклидә болуп келиду (7.13-сүрәт).

7.12-сүрәт

7.13-сүрәт

Кристалларниң сиртқи шәкли — пәқәт уларниң физикилиқ вә химиялик хусусийәтлириниң көрүнүшила. Уларниң һәммиси кристалларниң геометриялиқ түзүлүминиң алаһидилиги билән, мәсилән кристаллиқ торда атомларниң симметриялик орунлишиши арқилиқ чүшәндүрилиду.

MyLibrary.kz

Кристалларға башқиму мисаллар кәлтүрүп, уларниң шәкиллирини көрситиңлар.

Кристаллар билән чоңқурирақ тонушуш үчүн Қазақстан Җумһурийити Геологиялиқ мирасгаһиниң вә А.Е.Ферсман намидики Минералогиялиқ мирасгаһиниң сайтлириға кирип көрсәңлар болиду.

Соаллар

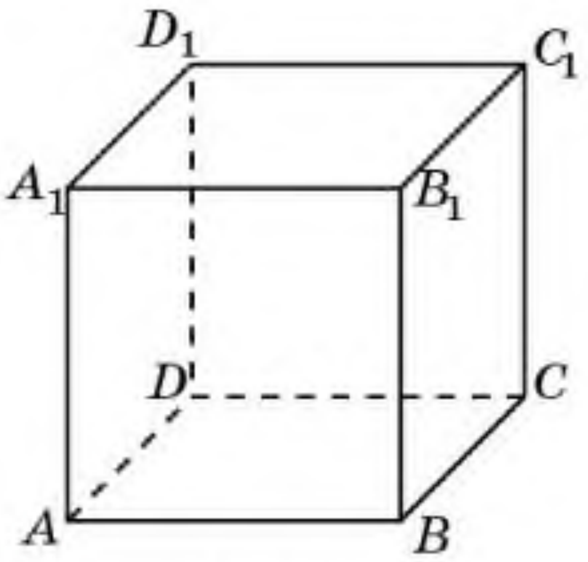
1. Бошлуқниң қандақ чекитлири мәркәзлик симметриялиқ дәп атилиду?
2. Бошлуқтики қандақ түрләндүрүш мәркәзлик симметрия дәп атилиду?
3. Бошлуқтики қандақ икки фигура симметрия мәркизи бар фигурилар дәп атилиду?
4. Бошлуқтики қандақ фигура симметрия мәркизи бар фигурилар дәп атилиду?
5. Қандақ чекитләр түзгә нисбәтән симметриялиқ дәп атилиду?
6. Бошлуқтики қандақ түрләндүрүш түзгә симметрия дәп атилиду?
7. Бошлуқтики қандақ икки фигура түзгә нисбәтән симметриялиқ дәп атилиду?
8. Бошлуқтики қандақ фигура түзгә нисбәтән симметриялиқ дәп атилиду?
9. Бошлуқтики қандақ чекитләр тәкшиликкә нисбәтән симметриялиқ дәп атилиду?
10. Бошлуқтики қандақ түрләндүрүш әйнәклик симметрия дәп атилиду?
11. Бошлуқтики қандақ икки фигура әйнәклик симметриялиқ дәп атилиду?
12. Бошлуқтики қандақ фигура әйнәклик симметриялиқ дәп атилиду?
13. Аш тузиниң кристаллири қандақ көпяқлиқниң шәклини бериду?
14. Кварц кристаллири қандақ көпяқлиқниң шәклини бериду?
15. Алмаз кристаллири көпинчә қандақ көпяқлиқниң шәклини бериду?
16. Исландлиқ шпат кристаллири қандақ көпяқлиқниң шәклини бериду?

Һесаплар

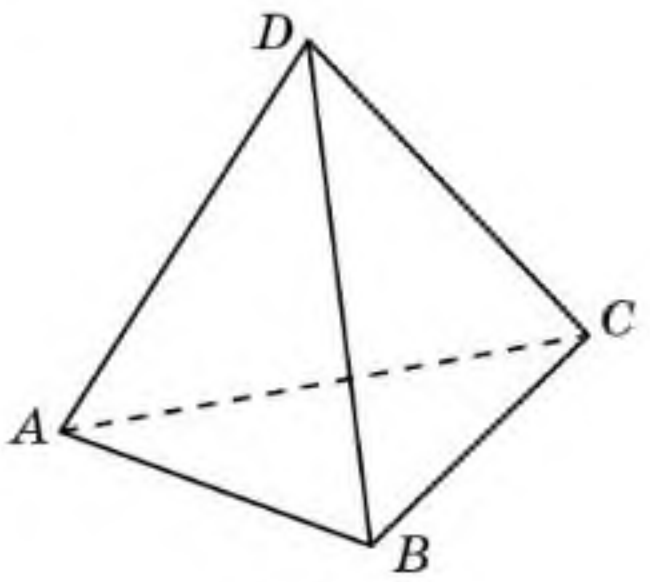
A

7.1. Бошлуқтики мәркәзлик симметриялиқ вә мәркәзлик симметриялиқ әмәс фигуриларға мисаллар кәлтүрүңлар.

7.2. 7.14-сүрәттики кубниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?



7.14-сүрәт

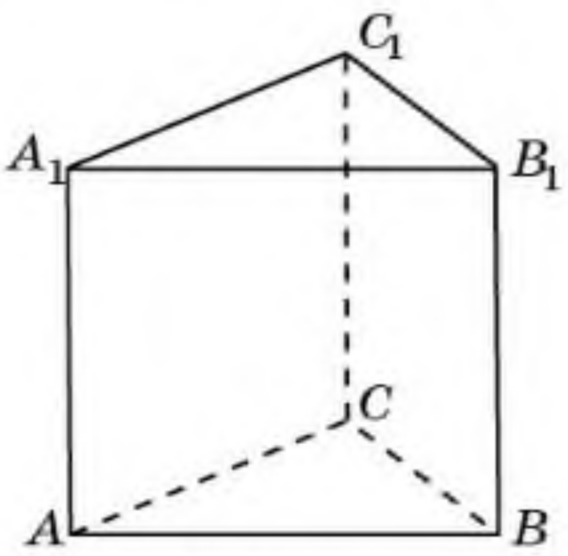


7.15-сүрәт

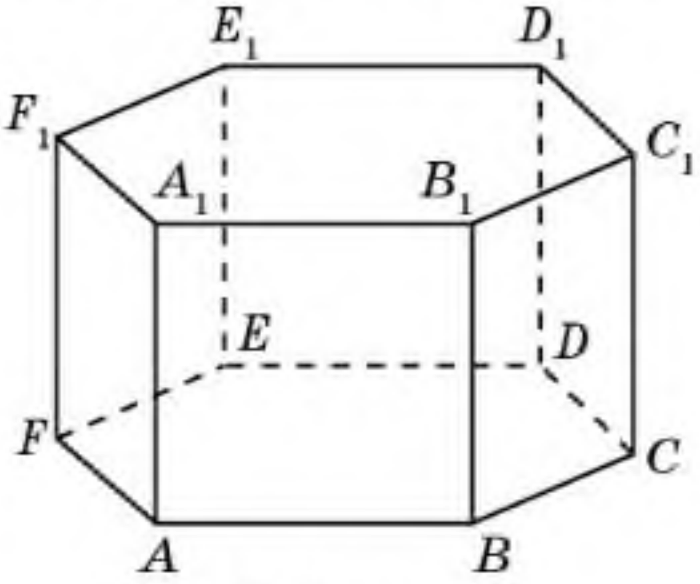
7.3. 7.15-сүрәттики дурус тетраэдрниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

MyLibrary.kz

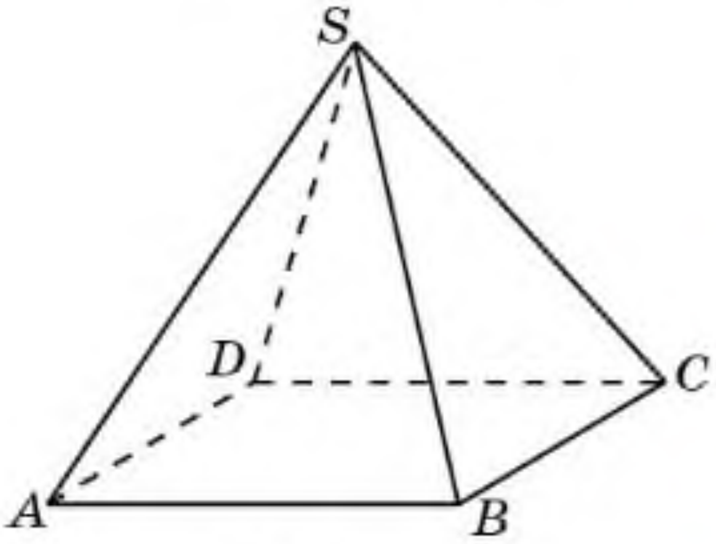
7.4. 7.16-сүрәттики дурус үчбулуңлуқ призминиң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?



7.16-сүрәт



7.17-сүрәт

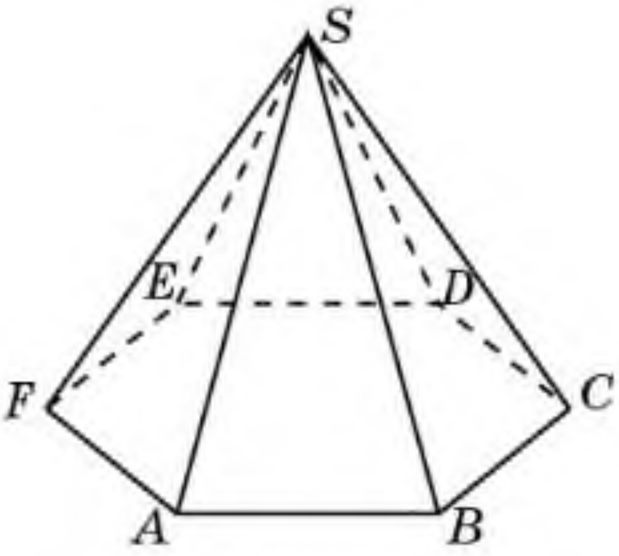


7.18-сүрәт

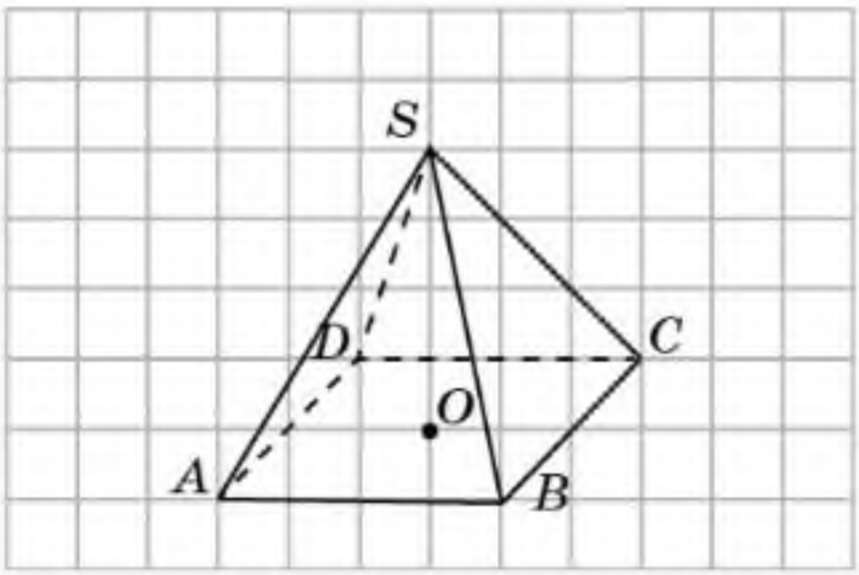
7.5. 7.17-сүрәттики дурус алтәбулуңлуқ призминиң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

7.6. 7.18-сүрәттики дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

7.7. 7.19-сүрәттики дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?



7.19-сүрәт



7.20-сүрәт

7.8. Чақмақ қәғәзгә 7.20-сүрәттики *O* чекитигә нисбәтән *SABCD* пирамидисиға симметриялиқ пирамидини селиңлар.

B

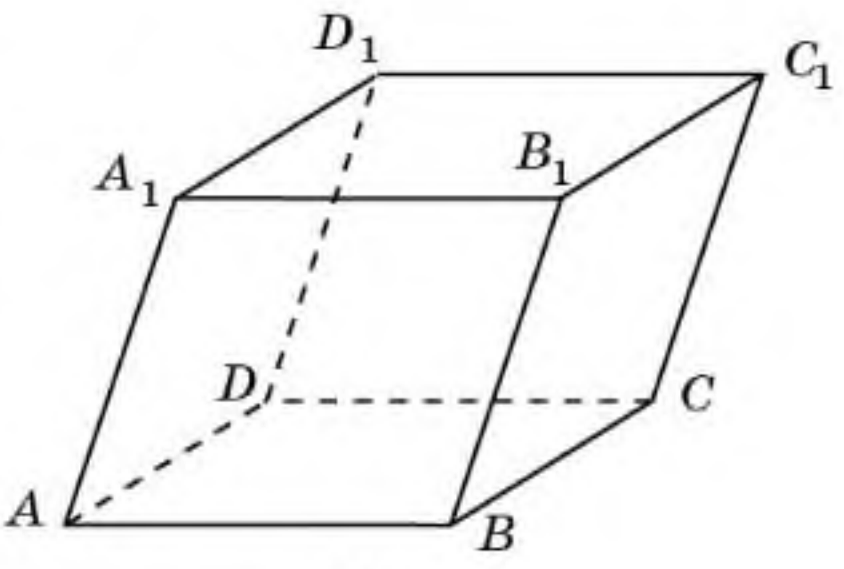
7.9. Параллель икки түздин туридиған фигуриларниң симметрия мәркизини көрситиңлар.

MyLibrary.kz

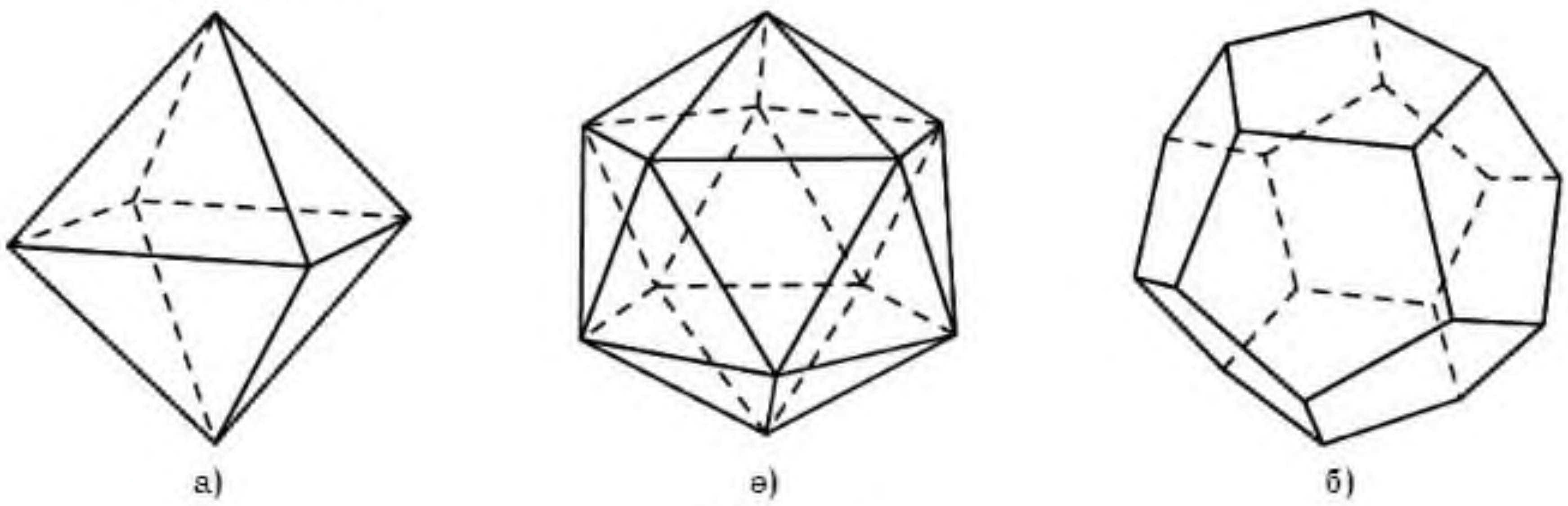
7.10. 1) Қийилишқан икки тәкшиликтин; 2) паралель икки тәкшиликтин туридиған фигурилиарниң симметрия мәркизини көрситиңлар.

7.11. Янту параллелепипедниң симметрия мәркизи боламду (7.21-сүрәт)?

7.12. 1) Октаэдрниң; 2) икосаэдрниң; 3) додекаэдрниң симметрия мәркизи боламду (7.22-сүрәт)?



7.21-сүрәт



7.22-сүрәт

7.13. Дурус: 1) үчбулуңлуқ призминиң (7.16-сүрәт); 2) алтәбулуңлуқ призминиң нәччә симметрия оқи болиду (7.17-сүрәт)?

7.14. Дурус: 1) үчбулуңлуқ призминиң (7.16-сүрәт); 2) алтәбулуңлуқ призминиң нәччә симметрия тәкшилиги болиду (7.17-сүрәт)?

7.15. Дурус: 1) төртбулуңлуқ пирамидиниң (7.18-сүрәт); 2) алтәбулуңлуқ пирамидиниң нәччә симметрия оқи болиду (7.19-сүрәт)?

7.16. Дурус: 1) төртбулуңлуқ пирамидиниң (7.18-сүрәт); 2) алтәбулуңлуқ пирамидиниң нәччә симметрия тәкшилиги болиду (7.19-сүрәт)?

C

7.17. Дурус: 1) n-булуңлуқ призминиң; 2) n-булуңлуқ пирамидиниң нәччә симметрия оқи болиду?

7.18. Дурус: 1) n-булуңлуқ призминиң; 2) n-булуңлуқ пирамидиниң нәччә симметрия тәкшилиги болиду?

7.19. 1) Октаэдрниң; 2) икосаэдрниң; 3) додекаэдрниң нәччә симметрия оқи болиду (7.22-сүрәт)?

7.20. 1) Октаэдрниң; 2) икосаэдрниң; 3) додекаэдрниң нәччә симметрия тәкшилиги болиду (7.22-сүрәт)?

7.21. Бошлуқтики фигуриниң симметрия мәркизи мошу фигуриға тегишлик болмиши мүмкинму? Мисал кәлтүрүңлар.

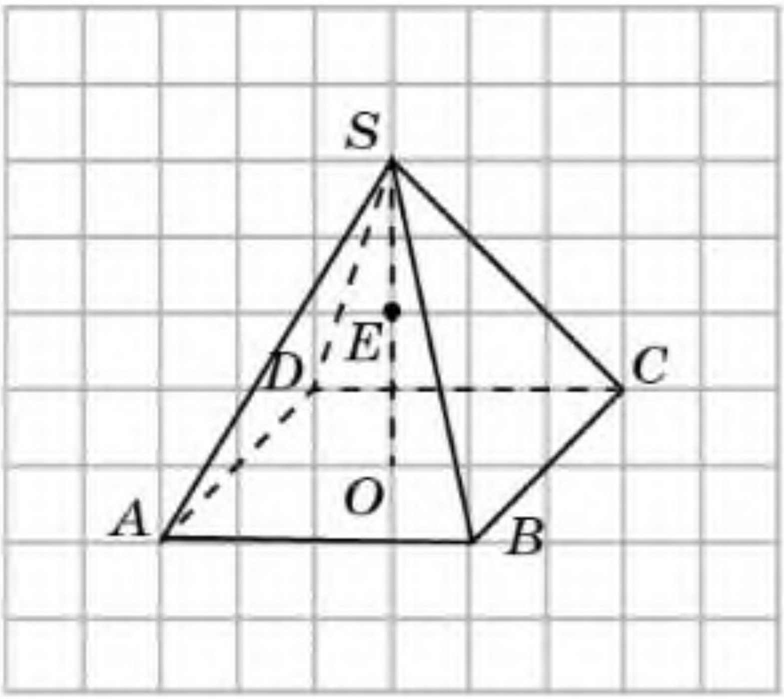
MyLibrary.kz

7.22. Бошлуқтики: 1) симметрия мәркизи бар, бирақ симметрия оқи йоқ; 2) симметрия оқи бар, бирақ симметрия мәркизи йоқ фигуриларға мисал кәлтүрүңлар.

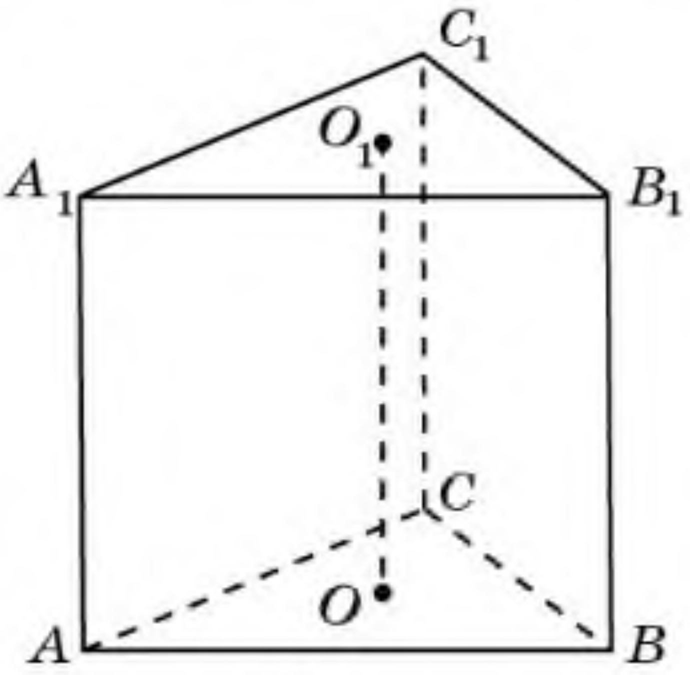
7.23. Бошлуқтики: 1) симметрия мәркизи бар, бирақ симметрия тәкшилиги йоқ; 2) симметрия оқи бар, бирақ симметрия тәкшилиги йоқ фигуриларға мисал кәлтүрүңлар.

7.24. Бошлуқтики: 1) симметрия тәкшилиги бар, бирақ симметрия мәркизи йоқ; 2) симметрия тәкшилиги бар, бирақ симметрия оқи йоқ фигуриларға мисал кәлтүрүңлар.

7.25. Чақмақ қәғәзгә 7.23-сүрәттики $SABCD$ пирамидисиниң SO егизлигиниң E оттурисиға қариғанда мошу пирамидиға симметриялиқ пирамидини селиңлар. Пирамида қирлирини тәң дәп һесаплап, дәсләпки пирамида вә униңға мәркәзлик симметриялиқ пирамидиниң умумий бөлиги болидиған көпяқлиқниң намини атаңлар.



7.23-сүрәт



7.24-сүрәт

7.26. Дурус үчбулуңлуқ призма асаслириниң O вә O_1 мәркәзлири арқилиқ өтидиған түзгә қариғанда мошу призмиға симметриялик призмини селиңлар (7.24-сүрәт). Дәсләпки призма билән униңға симметриялик призминиң умумий бөлиги қандақ фигура болиду?

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

7.27. Тәкшиликтики түзниң аналитикилиқ берилишини тәкрарлаңлар. Тәкшиликтики түзниң аналитикилиқ берилишини көрситиңлар .

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. Томпақ көпяқлиқниң һәрбир чоққисидин үч қири чиқиду. Әгәр униң 12 чоққиси бар болса, у чағда униң нәччә қири болиду:

A) 12; B) 16; C) 18; D) 24?

MyLibrary.kz

2. Томпақ көпяқлиқниң һәрбир чоққисида үч үчбулуңлуқниң яқлири жиғилиду. Әгәр униң 4 йеқи бар болса, у чағда униң нәччә чоққиси болиду:

A) 4; B) 6; C) 9; D) 12?

3. Томпақ көпяқлиқниң яқлири — үчбулуңлуқлар. Әгәр униң 12 қири бар болса, у чағда униң нәччә йеқи болиду:

A) 6; B) 8; C) 9; D) 12?

4. Үчяқлиқ булуңниң икки тәкши булуңи мувапиқ 60° вә 90°-қа тәң. Үчинчи тәкши булуңи қандақ ариliқта ятиду:

A) 60°-тин чоң вә 90°-тин кичик;
B) 90°-тин чоң вә 150°-тин кичик;
C) 30°-тин чоң вә 90°-тин кичик;
D) 30°-тин чоң вә 150°-тин кичик?

5. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң үчяқлиқ булуңиниң тәкши булуңлириниң қошундисини тепиңлар:

A) 90°; B) 180°; C) 270°; D) 360°.

6. Томпақ көпяқлиқниң 10 чоққиси билән 15 қири бар. Униң нәччә йеқи болиду:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

7. Томпақ көпяқлиқниң 6 чоққиси билән 5 йеқи бар. Униң нәччә қири болиду:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

8. Томпақ көпяқлиқниң 12 қири билән 8 йеқи бар. Униң нәччә чоққиси болиду:

A) 6; B) 7; C) 8; D) 9?

9. Икосаэдрниң нәччә йеқи болиду:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

10. Додекаэдрниң нәччә чоққиси болиду:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

11. Дурус тетраэдр яқлириниң оттурилири қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду:

A) тетраэдр; B) куб;
C) октаэдр; D) икосаэдр?

12. Куб яқлириниң оттурилири қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду:

A) тетраэдр; B) куб;
C) октаэдр; D) икосаэдр?

MyLibrary.kz

13. Додекаэдр йейилмисида нәччә бәшбулуңлуқ болиду:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

14. Дурус тетраэдрниң қирлири 2 см-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) $\sqrt{3}$; B) $2\sqrt{3}$; C) $3\sqrt{3}$; D) $4\sqrt{3}$.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң AB, BC вә AA_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмиси қандақ көпбулуңлуқ болиду:

A) үчбулуң; B) төртбулуң;
C) бәшбулуң; D) алтәбулуң?

16. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң AB, BC вә SD қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик қийилмиси қандақ көпбулуңлуқ болиду:

A) үчбулуң; B) төртбулуң;
C) бәшбулуң; D) алтәбулуң?

17. Кубниң нәччә симметрия оқи болиду:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

18. Дурус бәшбулуңлуқ призминиң нәччә симметрия оқи болиду:

A) 5; B) 6; C) 8; D) 9?

19. Дурус тетраэдрниң нәччә симметрия тәкшилиги болиду:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

20. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң нәччә симметрия тәкшилиги болиду:

A) 3; B) 5; C) 7; D) 9?

MyLibrary.kz

II бап

БОШЛУҚТИКИ ТҮЗ БИЛӘН ТӘКШИЛИК ТӘҢЛИМИЛИРИНИҢ ҚОЛЛИНИЛИШИ

§ 8. Бошлуқтики түзләр арисидики булуңни тепиш

10-синип геометрия курсида бошлуқтики түз билән тәкшиликниң өз ара орунлишиши, бошлуқтики түзниң параметрлик вә канонлиқ тәңлимилири қараштурулуп өткән.

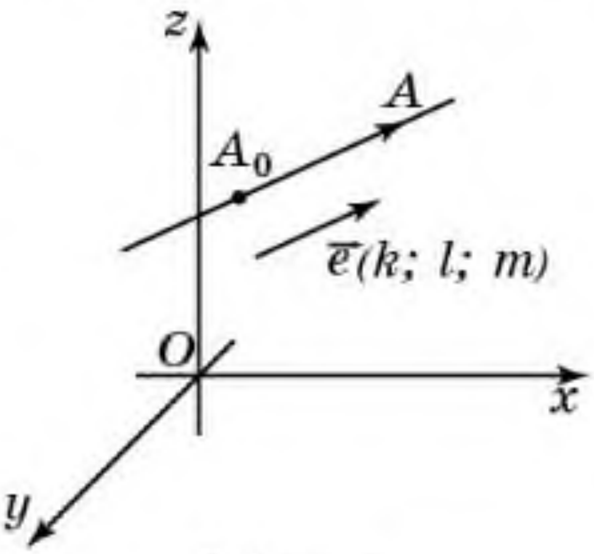
Бошлуқтики *түзниң параметрлик тәңлимиси* төвәндики түрдә берилидиғинини есимизгә чүширәйли:

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt, \end{cases}$$

бу йәрдә $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $A(x;\ y;\ z)$, — мошу түздә ятидиған чекитләр, $\vec{e}(k;\ l;\ m)$ — йөнәлдүргүчи вектори, йәни мошу түзгә параллель яки мошу түздә ятидиған вектор (8.1-сүрәт).

Әгәр түзү $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ чекитлири арқилиқ берилсә, у чағда йөнәлдүргүчи вектор ретидә координатилири $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ болидиған $\overline{A_1A_2}$ векторини, әнди A_0 чекити ретидә A_1 чекитини елип, түзниң төвәндики тәңлимисини алимиз:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases}$$



8.1-сүрәт

Бошлуқтики икки түзниң арисидики φ булуңни уларниң $\vec{e}_1(k_1;\ l_1;\ m_1)$, $\vec{e}_2(k_2;\ l_2;\ m_2)$ йөнәлдүргүчи векторлириниң скалярлиқ көпәйтиндисиниң формулисини пайдилинип тепишқа болиду:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2|}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2|} = \frac{|k_1 \cdot k_2 + l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2|}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}}.$$

Айрим һаләттә, әгәр икки түзниң $\vec{e}_1(k_1;\ l_1;\ m_1)$, $\vec{e}_2(k_2;\ l_2;\ m_2)$ йөнәлдүргүчи векторлириниң скаляр көпәйтиндиси нольға тәң болса, йәни

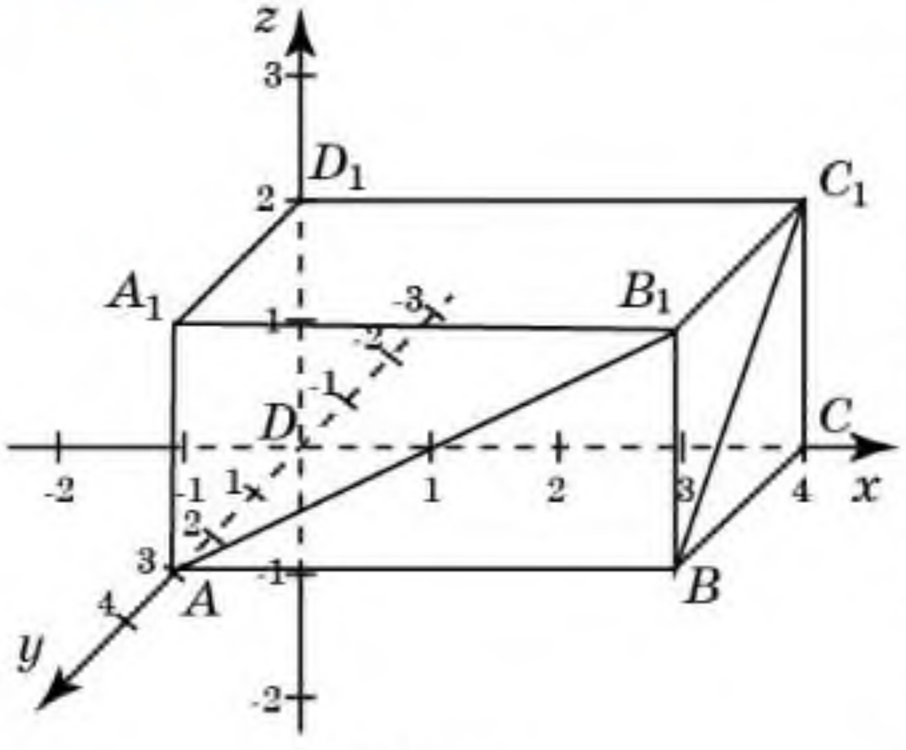
$$k_1 \cdot k_2 + l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0$$

тәңлиги орунланса, у чағда түзләр өз ара перпендикуляр болиду.

? $\begin{cases} x = x_1 + k_1t, \\ y = y_1 + l_1t, \\ z = z_1 + m_1t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_2 + k_2t, \\ y = y_2 + l_2t, \\ z = z_2 + m_2t \end{cases}$ тәңлимилири билән берилгән икки түз қандақ һаләттә өз ара параллель болиду?

MyLibrary.kz

1) Ox; 2) Oy; 3) Oz оқиға параллель болидиған вә $D(a; b; c)$ чекити арқилиқ өтидиған түзниң параметрлик тәңлимисини йезиңлар.



8.2-сүрәт

Икки түзниң арисидики булуңни тепишқа мисаллар қараштурайли.

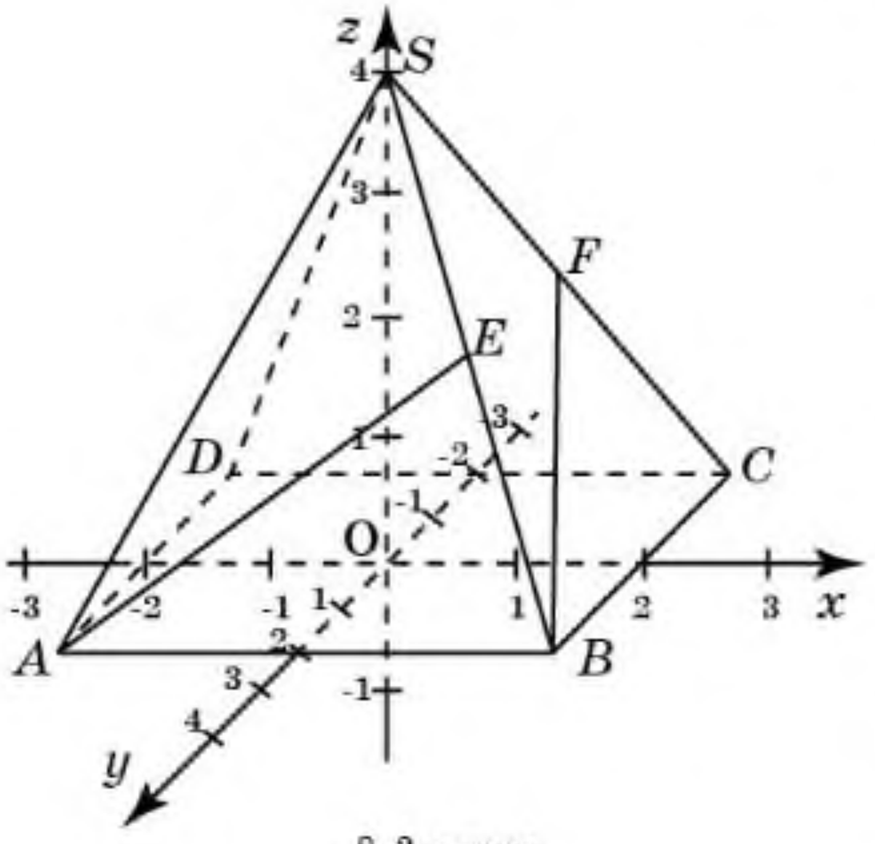
1-мисал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$. AB_1 вә BC_1 түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

Йешилиши. D чекити координатилар башланмиси болидиған вә DC, DA, DD_1 қирлири мувапиқ абсцисса, ордината, аппликата оқлирида ятидиған координатилар системисини қараштурайли (8.2-сүрәт).

A чекитиниң координатилири $(0; 3; 0)$, B_1 чекитиниң координатилири $(4; 3; 2)$ болиду. Демәк, AB_1 түзиниң йөнәлдүргүчи векториниң координатилири $(4; 0; 2)$ болиду. Мошуниңға охшаш B чекитиниң координатилири $(4; 3; 0)$, C_1 чекитиниң координатилири $(4; 0; 2)$ болиду. Демәк, BC_1 түзиниң йөнәлдүргүчи векториниң координатилири $(0; -3; 2)$ болиду.

Йөнәлдүргүчи векторларниң координатилирини икки түзниң арисидики булуңниң косинусини һесаплаш формулисиға қоюп, издиливатқан φ булуңиниң косинусини тапимиз:

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{65}}{65}.$$



8.3-сүрәт

2-мисал. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрипи билән егизлиги 4 см-ға тәң. E вә F чекитлири — пирамидиниң мувапиқ SB вә SC қирлириниң оттурилири. AE вә BF түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

Йешилиши. Пирамида асасиниң O мәркизи координатилар башланмиси, абсцисса, ордината оқлири пирамида асасиниң тәреплиригә параллель болидиған координатилар системисини қараштуримиз (8.3-сүрәт).

MyLibrary.kz

A чекитиниң координатилири (−2; 2; 0), E чекитиниң координатилири болса (1; 1; 2) болиду. Демәк, AE түзиниң йөнәлдүргүчи векториниң координатилири (3; −1; 2) болиду. Мошуниңға охшаш B чекитиниң координатилири (2; 2; 0), F чекитиниң координатилири (1; −1; 2) болиду. Демәк, BF түзиниң йөнәлдүргүчи векториниң координатилири (−1; −3; 2) болиду.

Йөнәлдүргүчи векториниң координатилирини икки түзниң арисидики булуңниң косинусини тепишқа арналған формулиға қоюп, издиливатқан φ булуңиниң косинусини тапимиз:

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{2}{7}.$$

Соаллар

1. Бошлуқтики түзни қандақ түрдә беришкә болиду?
2. Қандақ вектор түзниң йөнәлдүргүчи вектори дәп атилиду?
3. Берилгән икки чекит арқилиқ өтидиған түз қандақ параметрлиқ тәңлимә билән берилиду?
4. Параметрлиқ тәңлимә билән берилгән икки түзниң арисидики булуңниң косинусини қандақ тепишқа болиду?
5. Қандақ һаләттә параметрлиқ тәңлимә билән берилгән икки түз өз ара перпендикуляр болиду?

Һесаплар

A

8.1. $A(1; 2; -3)$ чекити арқилиқ өтидиған вә йөнәлдүргүчи вектори $\vec{e}(-2; 3; 1)$ болидиған түзниң параметрлиқ тәңлимисини йезиңлар.

8.2. $A_1(-2; 1; 3)$, $A_2(3; 4; -1)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түзниң параметрлиқ тәңлимисини йезиңлар.

8.3. Төвәндики тәңлимиләр билән берилгән l вә m түзлириниң өз ара орунлишишини ениқлаңлар:

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases} \quad m: \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = t, \\ z = 4 - 3t. \end{cases}$$

8.4. Параметрлиқ тәңлимиләр билән берилгән l вә m түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар:

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 - t; \end{cases} \quad m: \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -2t, \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$$

MyLibrary.kz

B

8.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 4$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. DB_1 вә AC түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

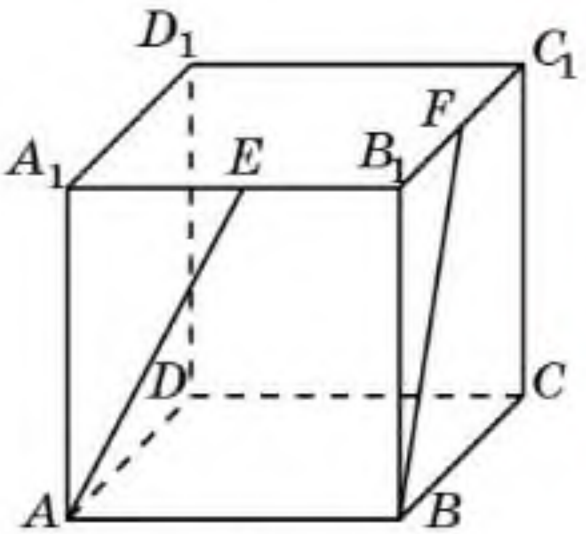
8.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 4$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. BD вә AB_1 түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

8.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 4$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. AB_1 вә BC_1 түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

8.8. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 4 см-ға тәң. E чекити — SB қириниң оттуриси. AE вә SC түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

8.9. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 4 см-ға тәң. E чекити — SB қириниң оттуриси. AE вә SD түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

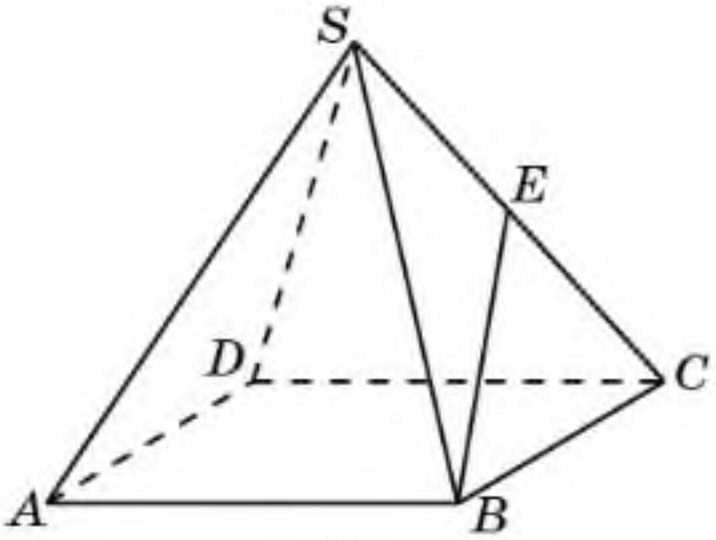
C



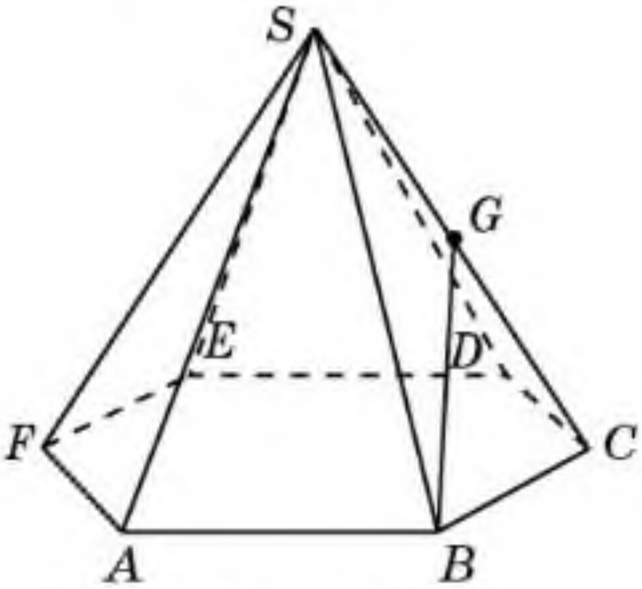
8.4-сүрәт

8.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң қирлири 2 см-ға тәң. E вә F чекитлири мувапиқ A_1B_1 вә B_1C_1 қирлириниң оттурилири (8.4-сүрәт). AE вә BF түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

8.11. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 2 см-ға тәң. E чекити — SC қириниң оттуриси (8.5-сүрәт). SA вә BE түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.



8.5-сүрәт



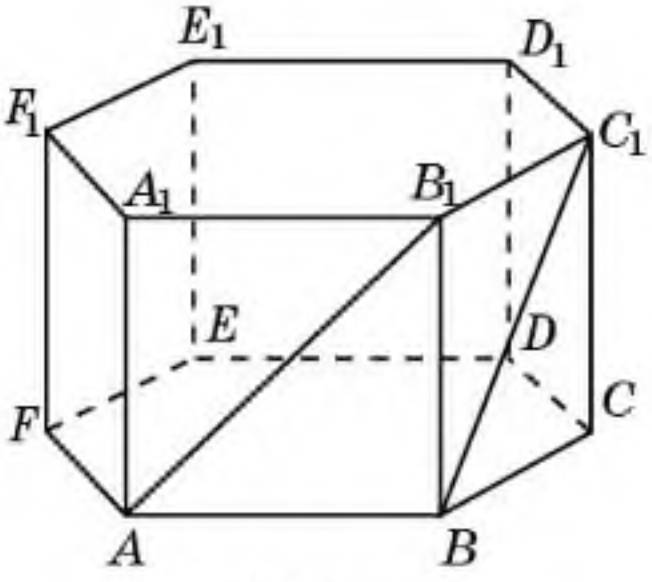
8.6-сүрәт

8.12. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см, егизлиги болса 4 см-ға тәң. G чекити — SC қириниң оттуриси

MyLibrary.kz

(8.6-сүрәт). SA вә BG түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

8.13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 2 см-ға тәң (8.7-сүрәт). AB_1 вә BC_1 түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.



8.7-сүрәт

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

8.14. Тәкшиликләрниң арисидики булуң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

8.15. Бошлуқтики тәкшиликниң тәңлимисиниң берилиш усуллирини тәкрарлаңлар.

§ 9. Икки тәкшиликниң арисидики булуңни тепиш

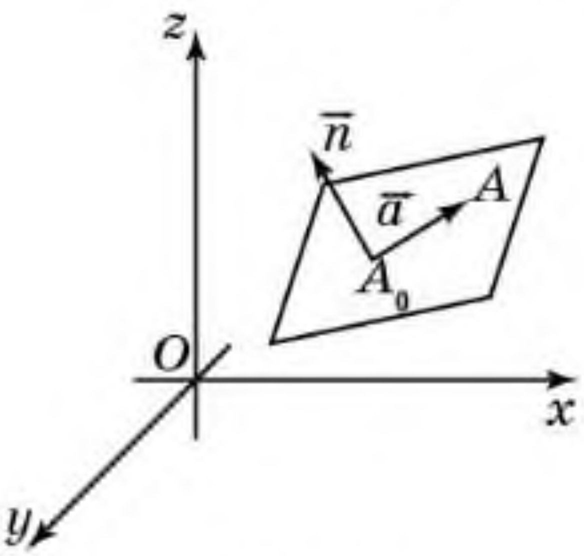
Бошлуқтики *тәкшиликниң тәңлимиси* төвәндикичә берилидиғанлиғини есимизға чүширәйли:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

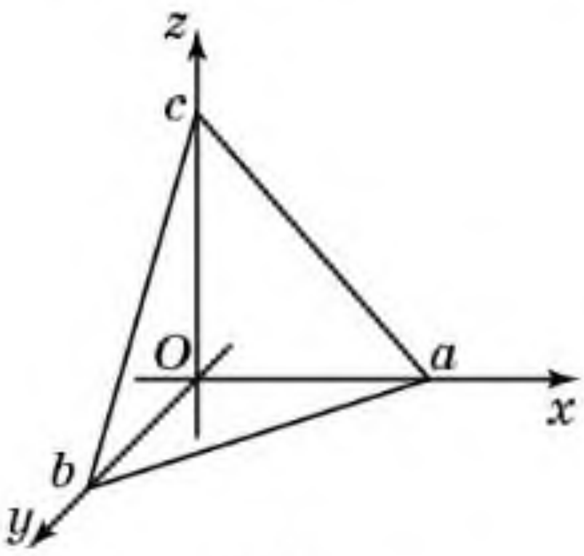
бу йәрдә a, b, c, d — һәқиқий санлар. a, b, c санлири бир вақитта нөлгә тәң әмәс вә улар мошу тәкшиликкә перпендикуляр $\vec{n}$ векториниң координатилири болиду. Мошу вектор *нормаль вектор* дәп атилиду.

$A_0(x_0; y_0; z_0)$ чекити арқилиқ өтидиған вә $\vec{n}(a; b; c)$ нормаль вектори берилгән тәкшиликниң тәңлимиси төвәндики түрдә берилиду (9.1-сүрәт):

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$



9.1-сүрәт



9.2-сүрәт

$A_0(a; 0; 0)$, $B_0(0; b; 0)$, $C_0(0; 0; c)$ чекитлири арқилиқ өтидиған тәкшиликниң тәңлимиси төвәндики түрдә берилиду:

MyLibrary.kz

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

бу йәрдә a, b, c — бир вақитта нөлға тәң әмәс һәқиқий санлар (9.2-сүрәт).

$A_0(a;\ 0;\ 0)$, $B_0(0;\ b;\ 0)$ чекитлири арқилиқ өтидиған вә Oz оқиға параллель болидиған тәкшиликниң тәңлимисини йезиңлар, бу йәрдә a, b — бир вақитта нөлға тәң әмәс һәқиқий санлар.

$A_0(a;\ 0;\ 0)$, $C_0(0;\ 0;\ c)$ чекитлири арқилиқ өтидиған вә Oy оқиға параллель болидиған тәкшиликниң тәңлимисини йезиңлар, бу йәрдә a, c — бир вақитта нөлға тәң әмәс һәқиқий санлар.

$B_0(0;\ b;\ 0)$, $C_0(0;\ 0;\ c)$ чекитлири арқилиқ өтидиған вә Ox оқиға параллель болидиған тәкшиликниң тәңлимисини йезиңлар, бу йәрдә b, c — бир вақитта нөлға тәң әмәс һәқиқий санлар.

Бошлуқтики икки тәкшиликниң $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормаль векторлири коллинеар болса, у чағда улар параллель болиду. Шуниң үчүн қандақту бир t сани үчүн төвәндики тәңлик орунлиниду:

$$\vec{n}_2 = t\vec{n}_1.$$

Әнди,

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \qquad (*)$$

тәңлимилири билән берилгән тәкшиликләрниң нормаль векторлири $\vec{n}_1(a_1;\ b_1;\ c_1)$ вә $\vec{n}_2(a_2;\ b_2;\ c_2)$ болиду. Әгәр мошу нормаль векторлар коллинеар болса, қандақту бир t сани үчүн $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$ тәңликлири орунланса, у чағда бу тәкшиликләр параллель болиду.

Шуниң билән биллә, әгәр $d_2 = td_1$ болса, у чағда (*) тәңлимилири бир тәкшиликни ениқлайду. Әгәр $d_2 \neq td_1$ болса, у чағда бу тәңлимиләр параллель икки тәкшиликни ениқлайду.

Әгәр тәкшиликләр параллель болмиса, у чағда улар түзниң бойи билән қийилишиду вә мошу *тәкшиликләрниң арисидики булуңни* уларниң нормаль векторлириниң арисидики булуң арқилиқ төвәндики формула билән һесаплашқа болиду:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Айрим һаләтләрдә, әгәр икки тәкшиликниң $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормаль векторлириниң скаляр көпәйтиндиси нөлгә тәң болса, йәни

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

тәңлиги орунланса, у чағда бу тәкшиликләр өз ара перпендикуляр болиду.

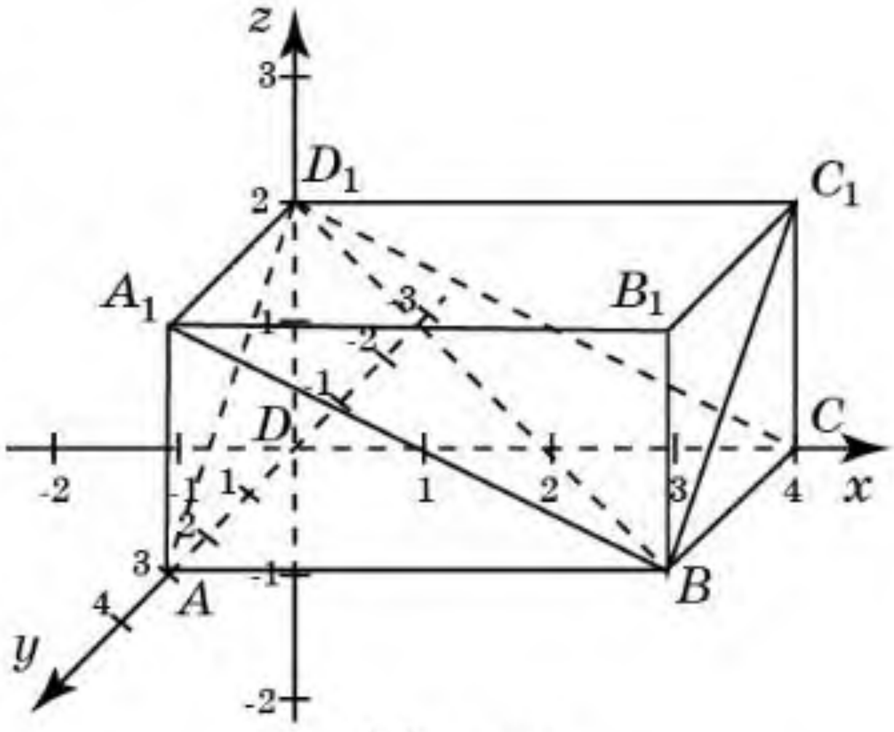
Икки координатилиқ тәкшиликләрниң арисидики булуң немигә тәң?

Икки тәкшиликниң арисидики булуңни тепишқа мисаллар қараштурайли.

1-мисал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$. ABC_1 вә BCD_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

Йешилиши. D чекити координатилар башланмиси болидиған DC, DA, DD_1 қирлири мувапиқ абсцисса, ордината, аппликата оқлирида ятидиған координатилар системисини қараштуримиз (9.3-сүрәт).



9.3-сүрәт

ABC_1 тәкшилиги $\frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ тәңлимиси билән берилиду вә у $2y + 3z = 6$ тәңлимисигә мәнадаш болиду. $\vec{n}_1$ нормаль векториниң координатилири (0; 2; 3) болиду.

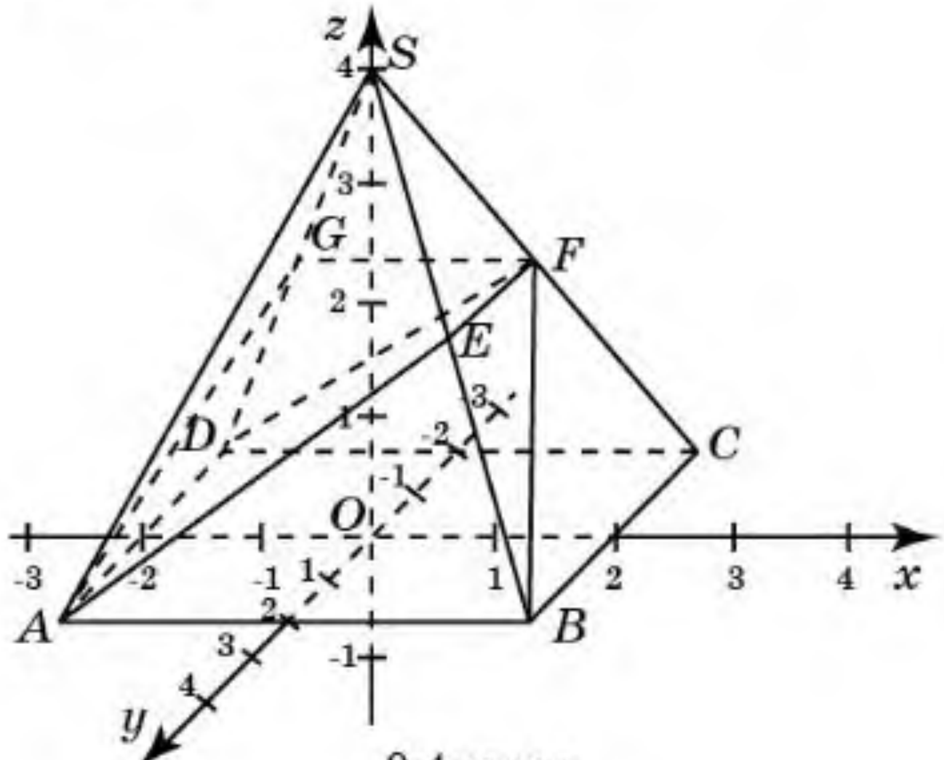
BCD_1 тәкшилиги $\frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1$ тәңлимиси билән берилиду вә у $x + 2z = 4$ тәңлимисигә мәнадаш болиду. $\vec{n}_2$ нормаль векториниң координатилири (1; 0; 2) болиду.

Мошу нормаль векторларниң координатилирини икки тәкшиликниң арисидики булуңниң косинусини тепишқа арналған формулиға қоюп, издиливатқан φ булуңиниң косинусини тапимиз:

$$\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{65}}{65}.$$

2-мисал. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 4 см-ға тәң. F чекити — пирамидиниң SC қириниң оттуриси. ABF вә ADF тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

Йешилиши. Пирамидиниң асасиниң O мәркизи координатилар башланмиси, абсцисса, ордината оқлири болса пирамида асасиниң тәрәплиригә параллель болидиған координатилар системисини қараштуримиз (9.4-сүрәт).



9.4-сүрәт

MyLibrary.kz

F чекитиниң координатилири (1; –1; 2) болиду. ABF тәкшилиги Oz оқини ACS үчбулуңлиғиниң SO вә AF медианилириниң H қийилишиш чекитидә қийип өтиду. Демәк, H чекитиниң координатилири $(0; 0; \frac{4}{3})$ болиду. Бу тәкшилик $\frac{y}{2} + \frac{3z}{4} = 1$ тәңлимиси билән берилиду вә у $2y + 3z = 4$ тәңлимисигә мәнадаш болиду. $\vec{n}_1$ нормаль векториниң координатилири (0; 2; 3) болиду.

ADF тәкшилигиму Oz оқини координатилири $(0; 0; \frac{4}{3})$ болидиған чекиттә қийип өтиду. Бу тәкшилик $\frac{x}{-2} + \frac{3z}{4} = 1$ тәңлимиси билән берилиду вә у $2x - 3z = -4$ тәңлимисигә мәнадаш болиду. $\vec{n}_2$ нормаль векториниң координатилири (2; 0; –3) болиду.

Мошу нормаль векторларниң координатилирини икки тәкшиликниң арисидики булуңниң косинусини тепишқа арналған формулиға қоюп, издиливатқан φ булуңиниң косинусини тапимиз:

$$\cos \varphi = \frac{9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{9}{13}.$$

Соаллар

1. Бошлуқтики тәкшилик қандақ тәңлимә билән берилиду?
2. Қандақ вектор тәкшиликниң нормаль вектори дәп атилиду?
3. Қандақ һаләттә икки тәңлимә параллель тәкшиликләрни ениқлайду?
4. Тәңлимиләр билән берилгән икки тәкшиликниң арисидики булуңниң косинусини қандақ тепишқа болиду?
5. Қандақ һаләтләрдә тәңлимиләр билән берилгән икки тәкшилик өз ара перпендикуляр болиду?
6. Қандақ һаләттә икки тәңлимә бир тәкшиликни ениқлайду?

Һесаплар

A

9.1. $A_0(-1; 2; 3)$ чекити арқилиқ өтидиған вә $\vec{n}(0; -3; 2)$ нормаль вектори берилгән тәкшиликниң тәңлимисини йезиңлар.

9.2. $A_0(-1; 0; 0)$, $B_0(0; 2; 0)$, $C_0(0; 0; 3)$ чекитлири арқилиқ өтидиған тәкшиликниң тәңлимисини йезиңлар.

9.3. $A_0(1; -2; 3)$ чекити арқилиқ өтидиған вә: 1) Oxy; 2) Oxz; 3) Oyz координатилиқ тәкшилигигә параллель болидиған тәкшиликниң тәңлимисини йезиңлар.

9.4. Төвәндики тәкшиликләрниң қайсиси өз ара параллель болидиғанлиғини ениқлаңлар:

1) $x + 2y + z - 1 = 0$, $x + 2y + z + 1 = 0$;
2) $x + y + 3z - 2 = 0$, $x + y - 3z - 2 = 0$;
3) $-3x + y + 2z = 0$, $3x - y - 2z - 1 = 0$;
4) $2x + 4y + 6z - 10 = 0$, $-x - 2y - 3z + 5 = 0$.

MyLibrary.kz

9.5. Төвәндики тәкшиликләр өз ара перпендикуляр боламду:

1) $y + z + 2 = 0$ вә $y - z + 3 = 0$;

2) $2x - 5y - z + 4 = 0$ вә $3x + 2y - 4z - 5 = 0$;

3) $x - y + 3 = 0$ вә $y + z - 3 = 0$?

9.6. 1) $x + y + z - 1 = 0$, $x - y + z + 1 = 0$; 2) $2x - 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z + 7 = 0$ теңлимилири билән берилгән тәкшиликләрниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

9.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 3$. 1) ABC_1; 2) ADC_1 тәкшилиги билән ABC тәкшилигиниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

B

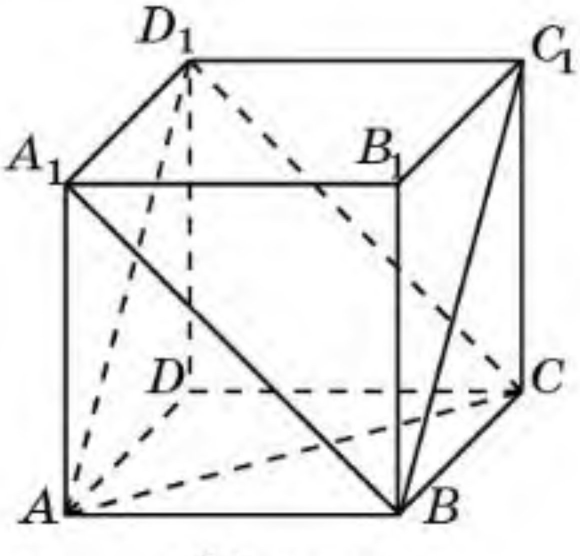
9.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 3$. BCD_1 вә ADC_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

9.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. 1) ABC; 2) ADD_1; 3) CDD_1 тәкшилиги билән ACD_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

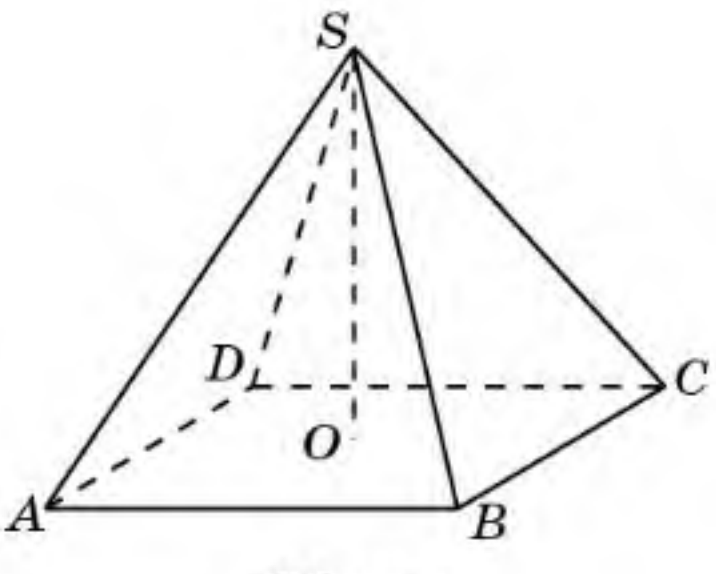
9.10. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 4 см-ға тәң. 1) ABC; 2) SBC; 3) SCD тәкшилиги билән SAB тәкшилигиниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

C

9.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң қирлири 1 см-ға тәң (9.5-сүрәт). ABC_1 вә BCD_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.



9.5-сүрәт



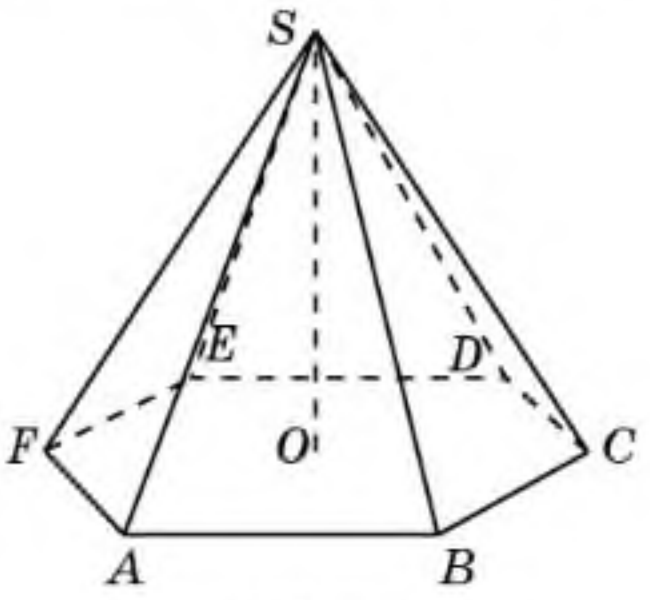
9.6-сүрәт

9.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң қирлири 1 см-ға тәң (9.5-сүрәт). ACD_1 вә ABC_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

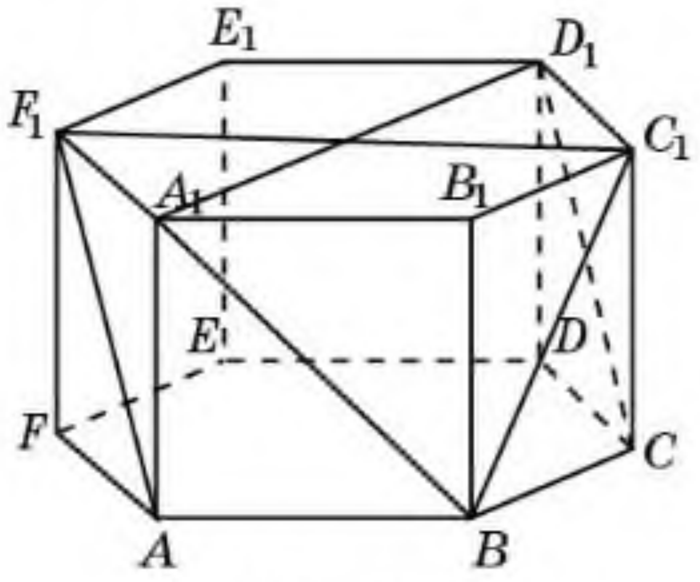
MyLibrary.kz

9.13. *SABCD* дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 2 см-ға тәң (9.6-сүрәт). *SAD* вә *SBC* тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

9.14. *SABCDEF* дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға вә егизлиги 4 см-ға тәң (9.7-сүрәт). *SAB* вә *SDE* тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.



9.7-сүрәт



9.8-сүрәт

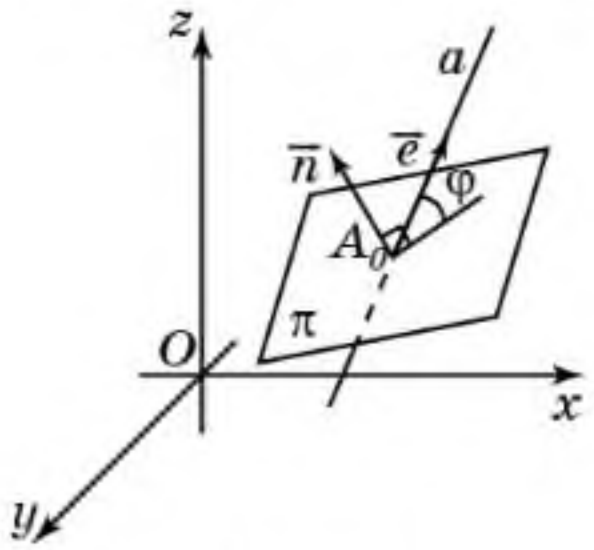
9.15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 2 см-ға тәң (9.8-сүрәт). ABC_1 вә BCD_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

9.16. Түз билән тәкшиликниң арисидики булуңниң ениқлимисини тәкрарлаңлар.

§ 10. Түз билән тәкшилик арисидики булуңни тепиш

a түзи билән π тәкшилигиниң арисидики булуңни түзниң $\vec{e}$ йөнәлдүргүчи вектори билән тәкшиликниң $\vec{n}$ нормаль векториниң скаляр көпәйтиндисиниң формулисини пайдилинип тепишқа болиду. Мошу $\vec{e}$ вә $\vec{n}$ векторлириниң арисидики булуңниң косинуси берилгән түз билән тәкшиликниң арисидики φ булуңиниң синусиға тәң болиду:



10.1-сүрәт

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{e}\cdot\vec{n}|}{|\vec{e}|\cdot|\vec{n}|},$$

бу йәрдә $\vec{e}$ — берилгән түзниң йөнәлдүргүчи вектори, $\vec{n}$ — берилгән тәкшиликниң нормаль вектори (10.1-сүрәт).

Әгәр түзниң $\vec{e}$ йөнәлдүргүчи векториниң координатилири $(k;\ l;\ m)$, тәкшиликниң

MyLibrary.kz

$\vec{n}$ нормаль векторининң координатилири $(a;\ b;\ c)$ болса, у чағда бу формулини төвәндики түрдә йезишқа болиду:

$$\sin\varphi = \frac{|k\cdot a + l\cdot b + m\cdot c|}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Әгәр түзниң $\vec{e}$ йөнәлдүргүчи вектори тәкшиликниң $\vec{n}$ нормаль векториға коллинеар болса, йәни қандақту бир t сани үчүн $a = tk$, $b = tl$, $c = tm$ тәңликлири орунланса, у чағда берилгән түз тәкшиликкә перпендикуляр болиду.

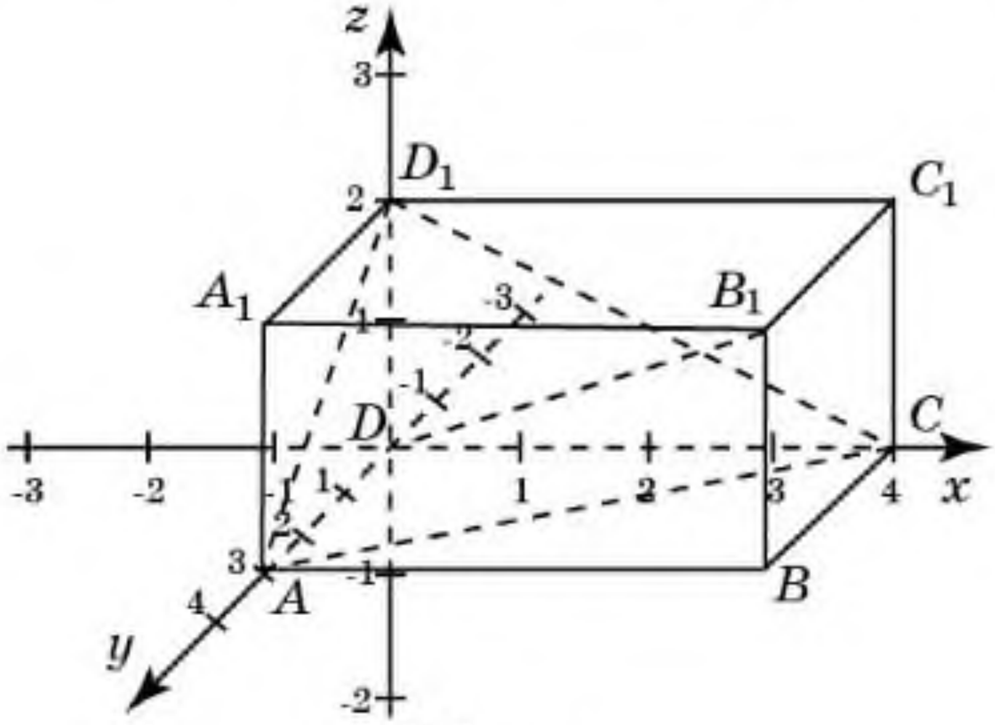
Ox оқи билән yOz тәкшилиги қандақ булуң ясайду?

Берилгән түзниң тәкшиликкә параллель болуши яки тәкшиликкә тәәллуқ болуш шәртини тепиңлар.

Түз билән тәкшиликниң арисидики булуңни тепишқа мисаллар қараштурайли.

1-мисал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$. DB_1 түзи билән ACD_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

Йешилиши. D чекити координатилар башланмиси болидиған DC, DA, DD_1 қирлири болса мувапиқ абсцисса, ордината, аппликата оқлирида ятидиған координатилар системисини қараштуримиз (10.2-сүрәт).



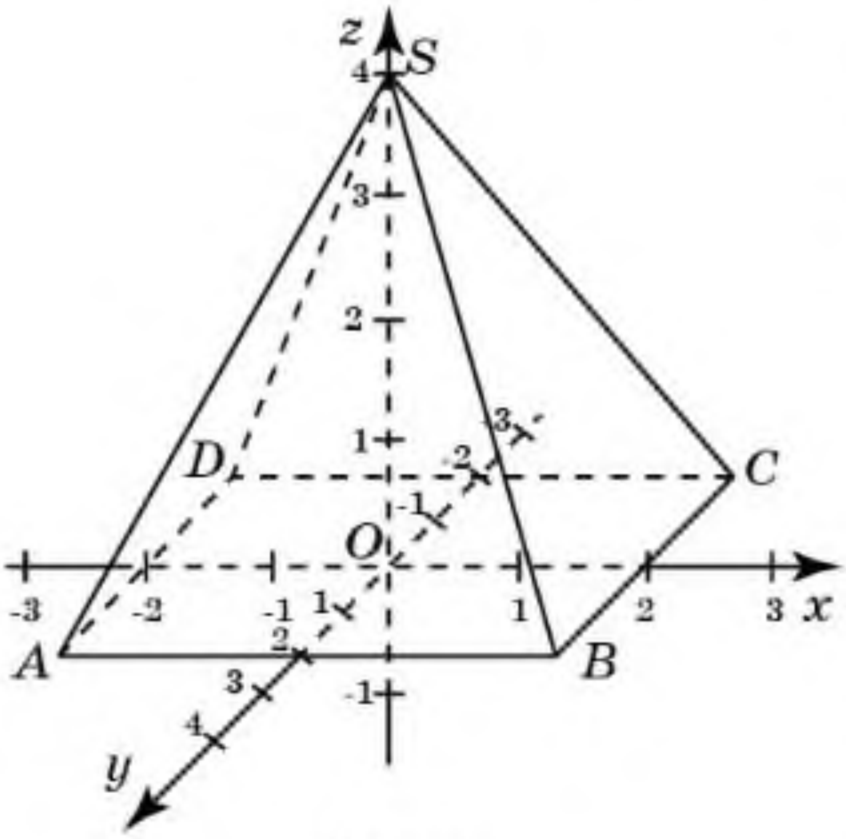
10.2-сүрәт

DB_1 түзининң йөнәлдүргүчи векторининң координатилири $(4;\ 3;\ 2)$ болиду. ACD_1 тәкшилиги $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ тәңлимиси билән берилиду вә у $3x + 4y + 6z = 12$ тәңлимисигә мәнадаш болиду. Тәкшиликниң $\vec{n}$ нормаль векторининң координатилири $(3;\ 4;\ 6)$ болиду.

MyLibrary.kz

Мошу векторларниң координатилирини икки тәкшиликниң арисидики булуңниң синусини тепиш формулисиға қоюп, издиливатқан φ булуңиниң синусини тапимиз:

$$\sin\varphi = \frac{36}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{61}} = \frac{36\sqrt{1769}}{1769}.$$



10.3-сүрәт

2-мисал. *SABCD* дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 4 см-ға тәң. *SA* түзи билән *SBC* тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

Йешилиши. Пирамида асасиниң *O* мәркизи координатилар башланмиси, абсцисса, ордината оқлири пирамида тәрәплиригә параллель болидиған координатилар системисини қараштуримиз (10.3-сүрәт).

SA түзиниң йөнәлдүргүчи векториниң координатилири (−2; 2; −4) болиду. *SBC* тәкшилиги $\frac{x}{2} + \frac{z}{4} = 1$ тәңлимиси билән берилиду вә $2x + z = 4$ тәңлимисигә мәнадаш. У чағда $\vec{n}$ нормаль векториниң координатилири (2; 0; 1) болиду.

Мошу векторларниң координатилирини икки тәкшиликниң арисидики булуңниң синусини тепишқа беғишланған формулиға қоюп, издиливатқан φ булуңиниң синусини тапимиз:

$$\sin\varphi = \frac{8}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

Соаллар

1. Тәңлимилири билән берилгән түз билән тәкшиликниң арисидики булуңниң синусини қандақ тепишқа болиду?
2. Қандақ һаләттә тәңлимилири билән берилгән түз билән тәкшилик өз ара перпендикуляр болиду?

Һесаплар

A

10.1. Түзниң йөнәлдүргүчи векториниң координатилири (1; 2; 2) вә тәкшиликниң нормаль векториниң координатилири (−2; 1; 2). Мошу түз билән тәкшиликниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

10.2. $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 - t \end{cases}$

тәңлимилири билән берилгән түз билән $x + 2y - 2z + 1 = 0$ тәңлимиси билән берилгән тәкшиликниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

10.3. $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - 6t, \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

тәңлимилири билән берилгән түз билән төвәндики тәңлимә билән берилгән тәкшиликниң өз ара орунлишишини ениқлаңлар:
1) $x + 3y - 2z + 4 = 0$; 2) $3x - y + 1 = 0$; 3) $2x + z - 3 = 0$.

B

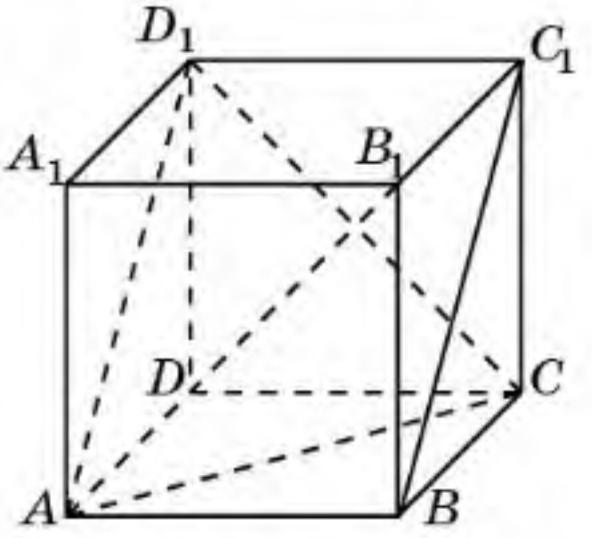
10.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. 1) ABC; 2) ADD_1; 3) CDD_1 тәкшилиги билән DB_1 түзи арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

10.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. 1) DB; 2) DA_1; 3) DC_1 түзи билән ACD_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

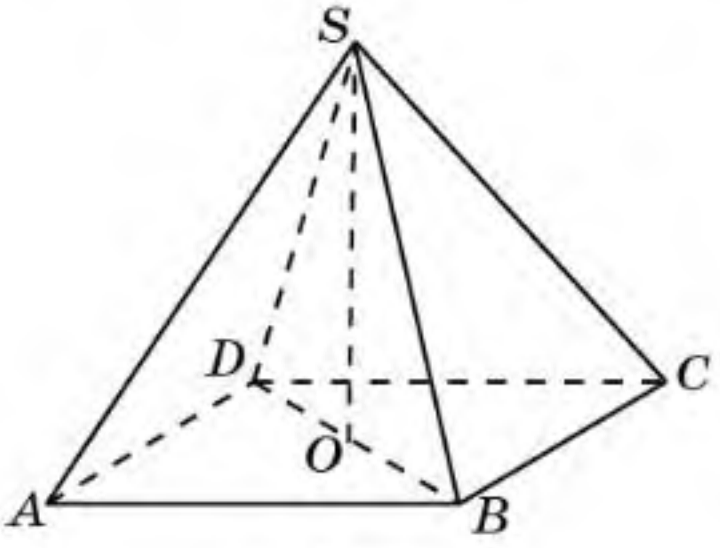
10.6. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 4 см-ға тәң. 1) BC; 2) AC; 3) SC түзи билән SAB тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

C

10.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң қирлири 1 см-ға тәң (10.4-сүрәт). 1) ABC_1; 2) ACD_1 тәкшилиги билән DB_1 түзи арисидики булуңниң синусини тепиңлар.



10.4-сүрәт

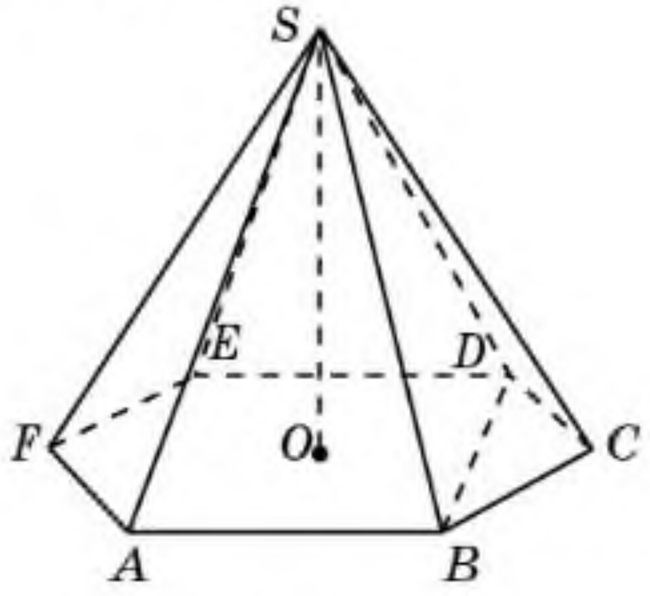


10.5-сүрәт

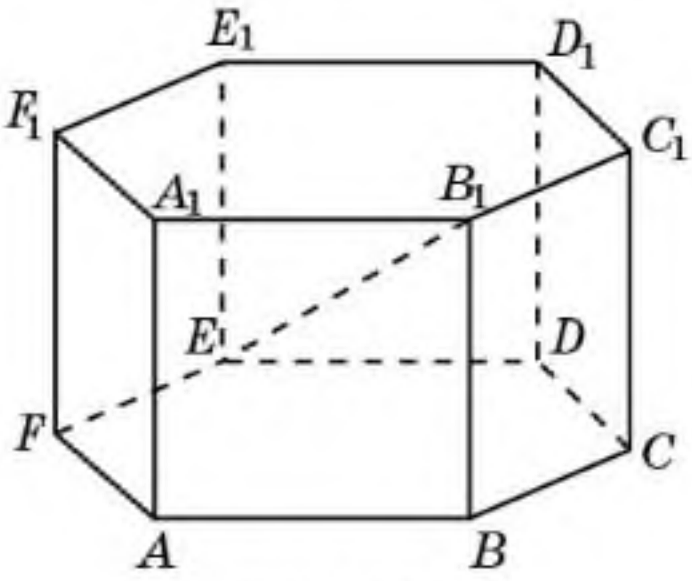
10.8. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 2 см-ға тәң (10.5-сүрәт). 1) BD; 2) SC түзи билән SAB тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

10.9. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см, егизлиги 4 см-ға тәң (10.6-сүрәт). 1) BD; 2) SC түзи билән SAB тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.



10.6-сүрәт



10.7-сүрәт

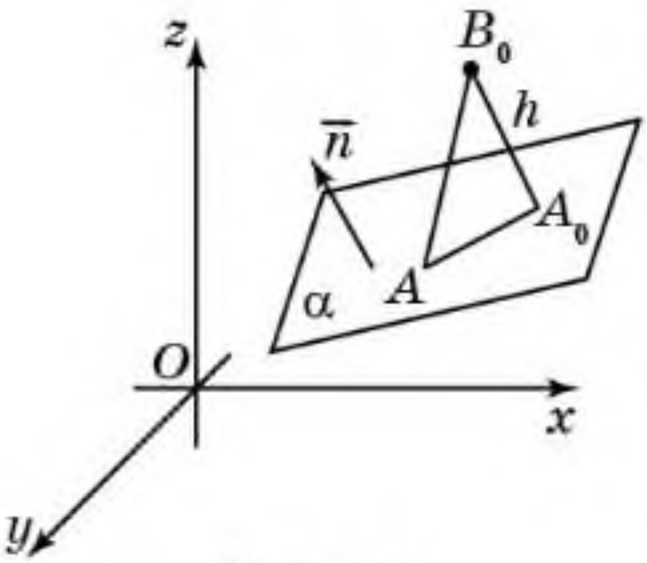
10.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 2 см-ға тәң (10.7-сүрәт). EB_1 түзи билән ABD_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

10.11. Чекиттин тәкшиликкичә болған ариліқниң ениқлимисини тәкрарлаңлар.

§ 11. Бошлуқтики чекиттин тәкшиликкичә болған арилиқ

Бошлуқтики $B_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ чекитидин $ax + by + cz + d = 0$ тәңлимиси билән берилгән α тәкшилигигичә болған арилиқни тепишқа беғишланған формулини чиқирайли.



11.1-сүрәт

B_0 чекитидин α тәкшилигигичә болған арилиқ дәп берилгән чекиттин мошу тәкшиликкә чүширилгән B_0A_0 перпендикуляриниң узунлиғини атайдиғанлиғини есимизға чүширәйли.

$\overline{A_0B_0}$ вектори берилгән тәкшиликниң $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ нормаль векториға коллинеар екәнлигини байқаймиз (11.1-сүрәт).

$A(x;\ y;\ z)$ чекити α тәкшилигиниң қандақту бир чекити болсун. Шу чағда

$$\cos\angle AB_0A_0 = \frac{|\vec{n}\cdot\overline{B_0A}|}{|\vec{n}|\cdot|\overline{B_0A}|} = \frac{|a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot|\overline{B_0A}|}.$$

MyLibrary.kz

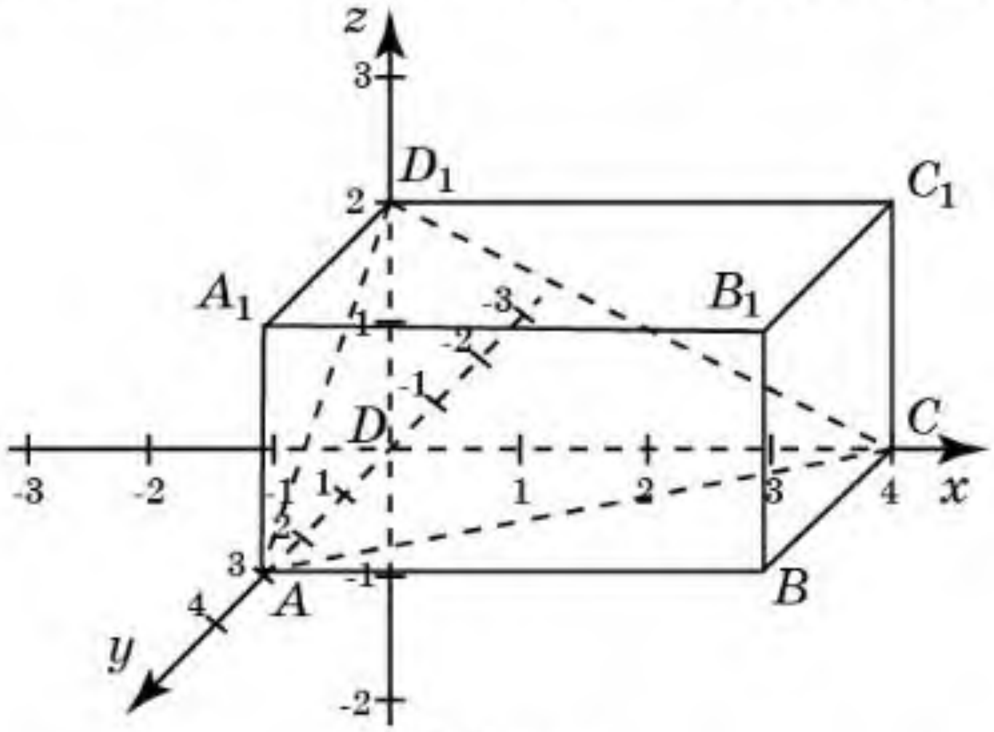
$-ax - by - cz = d$ екәнлигини вә издиливатқан $h = |\overline{B_0A}| \cdot \cos\angle AB_0A$ тәң болидиғанлиғини һесапқа елип, *чекиттин тәкшиликкичә болған арилиқни* тепиш формулисини алимиз:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Берилгән чекиттин тәкшиликкичә болған арилиқни тепишқа арналған мисалларни қараштурайли.

1-мисал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$. B_1 чекитидин ACD_1 тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

Йешилиши. D чекити координатилар башланмиси болидиған, DC, DA, DD_1 қирлири мувапиқ абсцисса, ордината, аппликата оқлирида ятидиған координатилар системисини қараштуримиз (11.2-сүрәт).



11.2-сүрәт

B_1 чекитиниң координатилири (4; 3; 2) болиду. ACD_1 тәкшилиги $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ тәңлимиси билән берилиду вә у $3x + 4y + 6z - 12 = 0$ тәңлимисигә мәнадаш болиду.

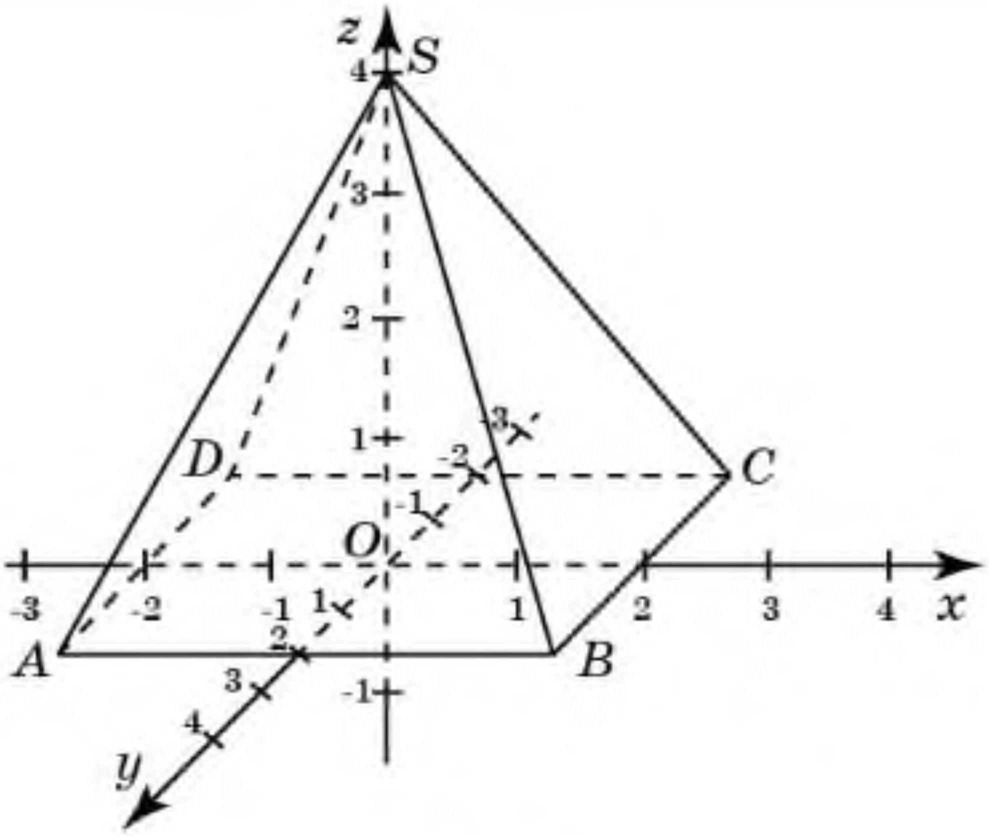
Тепилған мәналарни чекиттин тәкшиликкичә арилиқни тепишқа арналған формулиға қоюп, издиливатқан h арилиқни тапимиз:

$$h = \frac{24\sqrt{61}}{61}.$$

2-мисал. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 4 см-ға тәң. A чекитидин SBC тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

Йешилиши. Пирамида асасиниң O мәркизи координатилар башланмиси, абсцисса, ордината оқлири болса пирамида асасиниң тәрәплиригә параллель болидиған координатилар системисини қараштуримиз (11.3-сүрәт).

MyLibrary.kz



11.3-сүрәт

A чекитиниң координатилири $(-2;\ 2;\ 0)$ болиду. SBC тәкшилиги $\frac{x}{2} + \frac{z}{4} = 1$ тәңлимиси билән берилиду вә у $2x + z = 4$ тәңлимисигә мәнадаш болиду. Мошу мәналарни чекиттин тәкшиликкичә ариliқни тепишқа арналған формулиға қоюп, издиливатқан h ариliқни тапимиз:

$$h = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Соаллар

1. Чекиттин тәкшиликкичә болған арилиқ дегинимиз немә?
2. Координатилири берилгән чекиттин тәңлимиси берилгән тәкшиликкичә болған арилиқни қандақ тепишқа болиду?

Һесаплар

А

11.1. 1) $x + y = 1$; 2) $x + y + z = 1$ тәңлимиси билән берилгән тәкшиликтин $B_0(1;\ 1;\ 1)$ чекитигичә болған арилиқни тепиңлар.

11.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида A_1 чекитидин ABC_1 тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

11.3. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 1 см-ға тәң. B чекитидин SAC тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

11.4. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см, егизлиги 1 см-ға тәң. Пирамида асасиниң O мәркизидин SBC тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

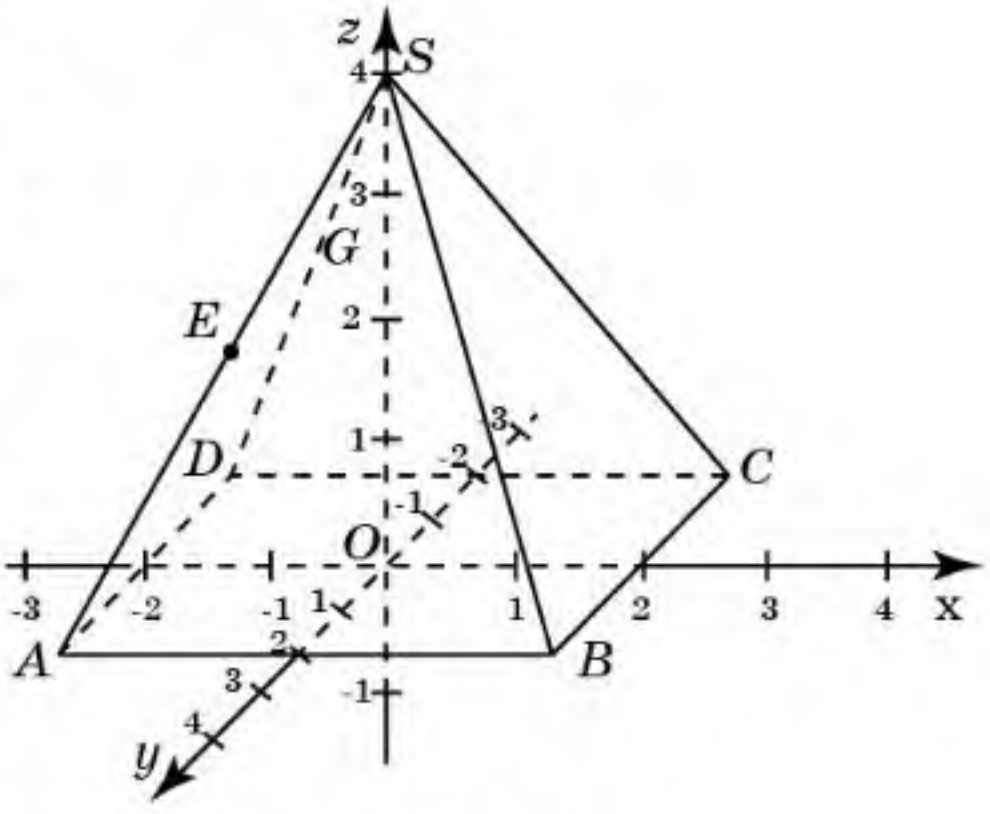
MyLibrary.kz

B

11.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. A_1 чекитидин ABC_1 тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

11.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. C_1 чекитидин BCD_1 тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

11.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. 1) B; 2) A_1; 3) C_1 чекитидин ACD_1 тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

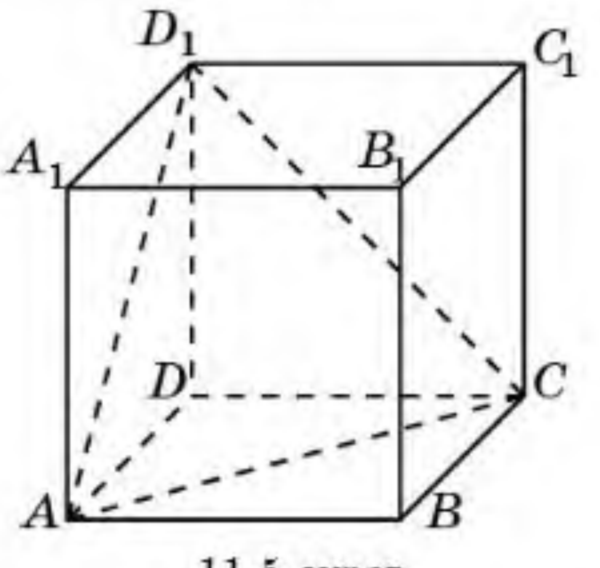


11.4-сүрәт

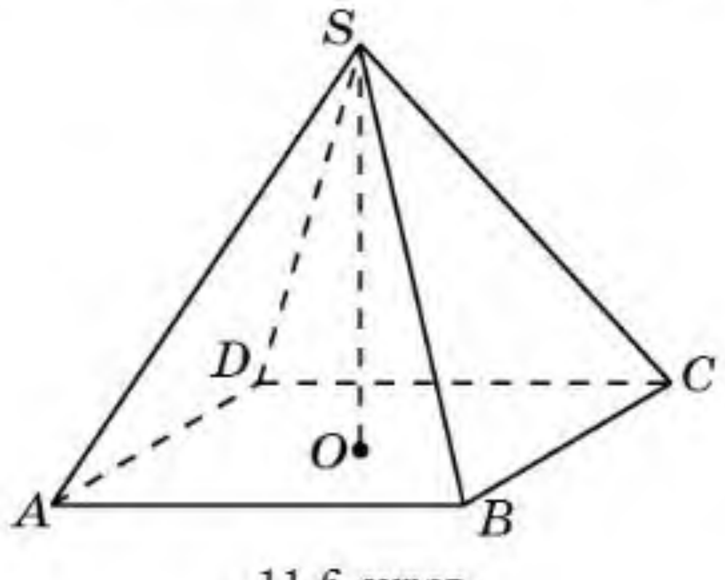
11.8. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 4 см-ға тәң. E чекити — SA қирриниң оттуриси (11.4-сүрәт). E чекитидин SBC тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

C

11.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң қиррлири 1 см-ға тәң (11.5-сүрәт). B_1 чекитидин ACD_1 тәкшилигигичә болған арилиғини тепиңлар.



11.5-сүрәт

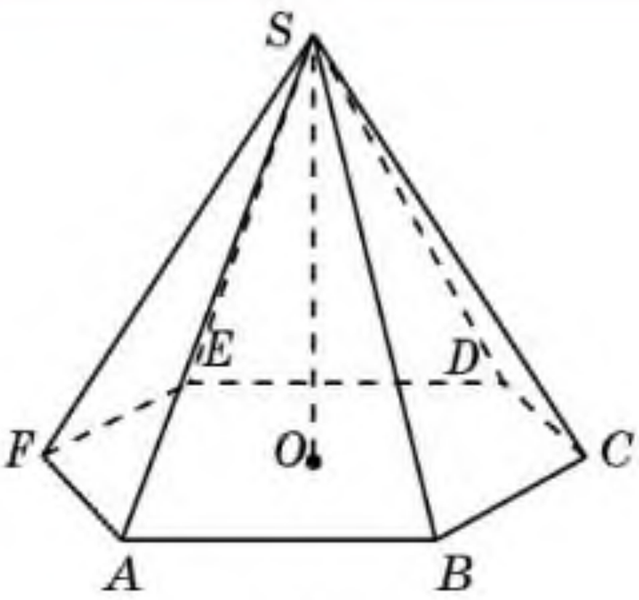


11.6-сүрәт

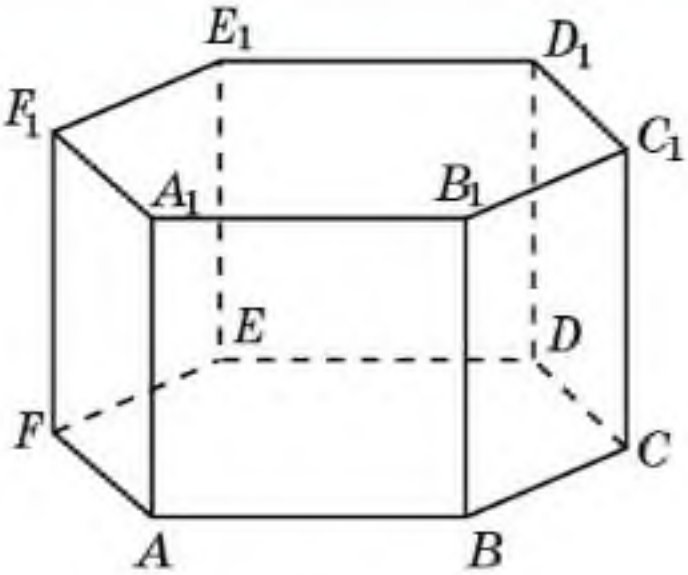
11.10. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири вә егизлиги 2 см-ға тәң (11.6-сүрәт). A чекитидин SBC тәкшилиги-гичә болған арилиқни тепиңлар.

11.11. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см, егизлиги 4 см-ға тәң (11.7-сүрәт). A чекитидин SBC тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

MyLibrary.kz



11.7-сүрәт



11.8-сүрәт

11.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 2 см-ға тәң (11.8-сүрәт). A_1 чекитидин BCE_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

11.13. Тәкшиликтики бурашниң ениқлимисини тәкрарлаңлар.

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. DB_1 вә AC түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар:

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. BB_1 вә DB_1 түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{6}$.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. AB_1 вә BC_1 түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{6}$.

4. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги болса 2 см-ға тәң. SA вә BD түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар:

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°.

5. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги 2 см-ға тәң. SA вә BC түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар:

MyLibrary.kz

A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; C) $\frac{1}{6}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги 2 см-ға тәң. SA вә BC түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. ABC_1 вә BCD_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар:

A) $\frac{1}{5}$; B) $\frac{2}{5}$; C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{4}{5}$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. ABC_1 вә ACD_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{30}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{20}}{6}$; C) $\frac{\sqrt{10}}{6}$; D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

9. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги 2 см-ға тәң. SAB вә ABC тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{15}}{15}$; B) $\frac{\sqrt{17}}{17}$; C) $\frac{\sqrt{19}}{19}$; D) $\frac{\sqrt{21}}{21}$.

10. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги 2 см-ға тәң. SAB вә SBC тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар:

A) $\frac{1}{11}$; B) $\frac{1}{13}$; C) $\frac{1}{15}$; D) $\frac{1}{17}$.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. DB_1 түзи билән ABC тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{6}$.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. DB_1 түзи билән ABC_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{5}}{15}$; B) $\frac{2\sqrt{5}}{15}$; C) $\frac{3\sqrt{5}}{15}$; D) $\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. DB_1 түзи билән ACD_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар:

MyLibrary.kz

A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

14. *SABCD* дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги 2 см-ға тәң. *SA* түзи билән *ABC* тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

15. *SABCDEF* дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги 2 см-ға тәң. *SC* түзи билән *ABC* тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. Униң A_1 чоққисидин ABC_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. Униң A_1 чоққисидин ACD_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. Униң B_1 чоққисидин ACD_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

19. *SABCD* дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги 2 см-ға тәң. Пирамида асасиниң *O* мәркизидин *SBC* тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар:

A) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ см; B) $\frac{\sqrt{17}}{17}$ см; C) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ см; D) $\frac{\sqrt{15}}{15}$ см.

20. *SABCDEF* дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги 2 см-ға тәң. Униң *C* чоққисидин *SAB* тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар:

A) $\sqrt{\frac{6}{11}}$ см; B) $\sqrt{\frac{6}{13}}$ см; C) $\sqrt{\frac{6}{19}}$ см; D) $\sqrt{\frac{12}{19}}$ см.

MyLibrary.kz

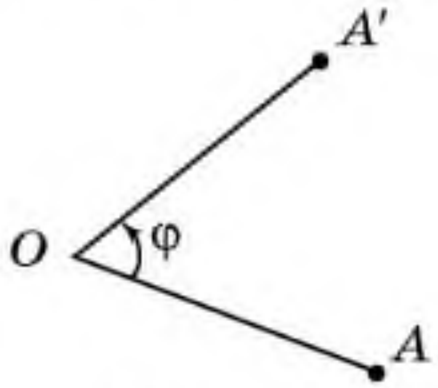
III бап

АЙЛИНИШ ҖИСИМЛИРИ ВӘ УЛАРНИҢ ЭЛЕМЕНТЛИРИ

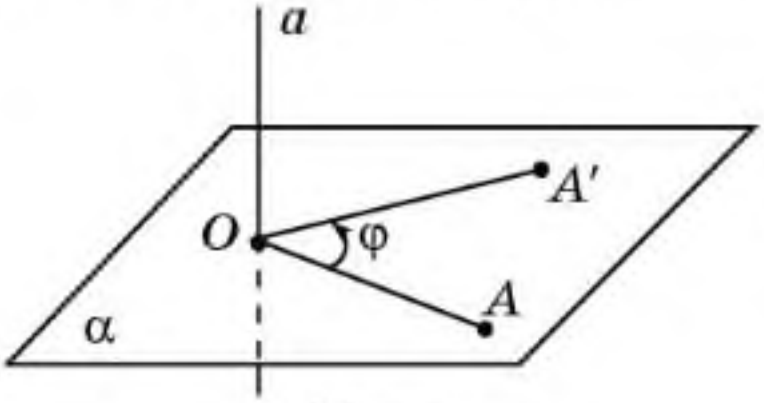
§ 12. Цилиндр вә униң элементлири. Цилиндрниң йейилмиси, ян вә толуқ бетиниң мәйданлири

Бошлуқтики фигуриларниң ичидә көпяқлиқлардин башқа *айлиниш җисимлири* дәп атилидиған фигурилар алаһидә орунни егиләйду.

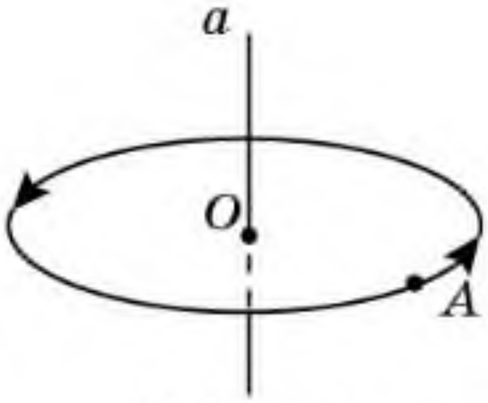
Әгәр $OA' = OA$ вә $\angle A'OA = \varphi$ болса, у чағда тәкшиликтики A' чекити A чекитин O чекитидин φ булуңға айландуруп буриған вақтида һасил болидиғанлиғини әскә салайли (12.1-сүрәт).



12.1-сүрәт



12.2-сүрәт



12.3-сүрәт

Бошлуқта a түзи вә мошу түзниң бойида ятмайдиған A чекити берилсун (12.2-сүрәт). A чекити арқилиқ a түзигә перпендикуляр α тәкшилигини жүргүзимиз вә a түзи билән α тәкшилигиниң қийилишиш чекитин O дәп бәлгүләйли. Әгәр α тәкшилигидә A' чекити A чекитини O чекитини айландуруп φ булуңға буриғанда пәйда болса, у чағда бошлуқтики A' чекити A чекитини O чекитидин айландуруп, φ булуңға бураш арқилиқ елинди дәп ейтиду.

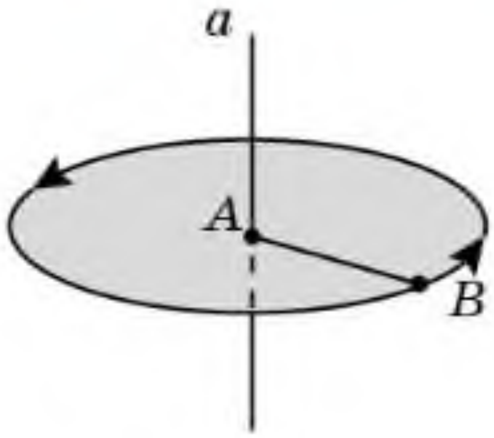
a түзиниң чекитлири орнида келип, қалған барлиқ чекитләр мошу түздин айлинип бирдәк йөнилиштә бәлгүлүк φ булуңға бурилидиған бошлуқтики түрләндүрүш a түзидин айландуруп *бураш* яки *айлиниш* дәп атилиду. a түзи *айлиниш оқи* дәп атилиду.

Әгәр бошлуқтики Φ фигурисиниң барлиқ чекитлири F фигурисиниң чекитлирини a оқидин айландуруп, бирдәк йөнилиштә бураш вақтида пәйда болса, у чағда Φ фигуриси F фигурисиниң a оқидин айлиниш арқилиқ елинди дәп атайду. Φ фигуриси *айлиниш җисими* дәп атилиду.

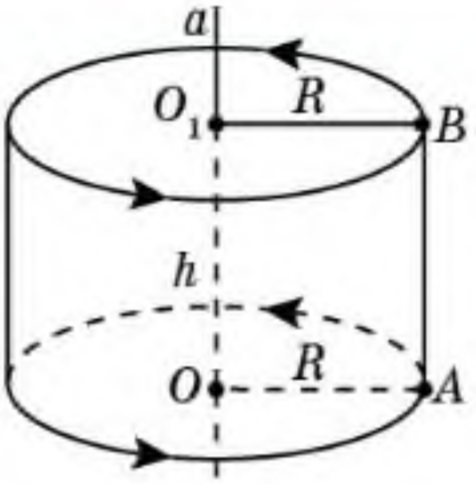
Мәсилән, a түзидә ятмайдиған A чекитиниң мошу түзни айлиниш вақтида мәркизи O чекити болидиған чәмбәр пәйда болиду. O чекити A чекити арқилиқ өтидиған вә a түзигә перпендикуляр тәкшиликниң мошу a түзи билән қийилишиш чекити болиду (12.3-сүрәт).

Кесиндиниң униңға перпендикуляр вә униң бир учи арқилиқ өтидиған түзни айлиниш вақтида радиуси мошу кесиндигә тәң дүгләк пәйда болиду (12.4-сүрәт).

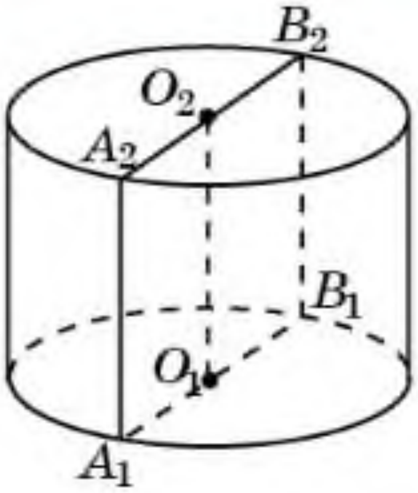
MyLibrary.kz



12.4-сүрәт



12.5-сүрәт



12.6-сүрәт

Цилиндр дәп тиктөртбулуңлуқни униң бир тәрипи ятқан түздин айландурғанда пәйда болидиған фигурини (җисимни) атайду.

12.5-сүрәттә AOO_1B тиктөртбулуңини OO_1 тәрипи ятқан a түзидин айландурғанда чиққан цилиндр тәсвирләнгән. Тиктөртбулуңлуқниң OO_1 тәрипи *цилиндрниң оқи* дәп атилиду.

Тиктөртбулуңлуқниң OO_1 тәрипигә перпендикуляр болидиған OA вә O_1B тәрәплириниң айлиниши вақтида елинған дүгләкләр *цилиндрниң асаслири*, уларниң радиуси *цилиндрниң радиуси* дәп атилиду.

12.5-сүрәттә цилиндрниң OA радиуси тәсвирләнгән.

Тиктөртбулуңлуқниң OO_1 тәрипигә параллель болидиған AB тәрипиниң айлинишидин елинған бәт *цилиндрниң ян бети* дәп атилиду.

Цилиндрниң толуқ бети асаслири билән ян бетидин туриду.

Тиктөртбулуңлуқниң OO_1 тәрипигә параллель болидиған AB тәрипиниң айлинишидин елинған кесиндиләр *цилиндрниң ясиғучиси* дәп атилиду.

12.5-сүрәттә цилиндрниң AB ясиғучиси тәсвирләнгән.

Цилиндрниң асас тәкшиликлириниң арилиғини *цилиндрниң егизлиги* деп атайды.

12.5-сүрәттә цилиндрниң OO_1 егизлиги тәсвирләнгән.

Цилиндрниң егизлиги униң оқиға вә ясиғучисиниң узунлиғиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Цилиндрниң оқи арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмиси *цилиндрниң оқлуқ қийилмиси* дәп атилиду (12.6-сүрәт).

Оқлуқ қийилминиң тәрәплири цилиндрниң асаслириниң диаметрлири вә икки ясиғучиси болуп һесаплиниду. 12.6-сүрәттә $A_1A_2B_2B_1$ оқлуқ қийилмиси тәсвирләнгән.

Цилиндрниң оқлуқ қийилмиси тиктөртбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

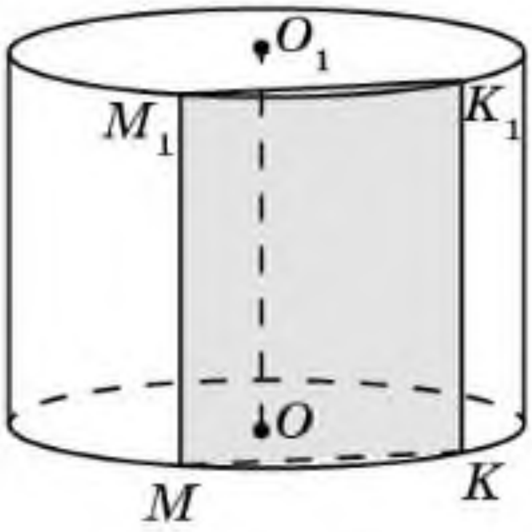
Цилиндрни мошу тиктөртбулуңлуқни, униң қариму-қарши икки тәрипиниң оттуриси арқилиқ өтидиған түздин айландуруш арқилиқ елишқиму болиду.

MyLibrary.kz

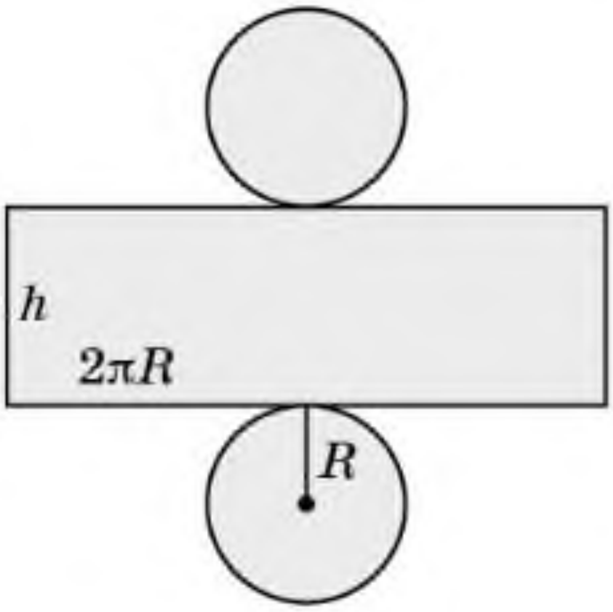
Цилиндрни тиктөртбулуңлуқтин башқа тәкши фигуриларни айландуруш арқилиқ елишқа боламду?

Шундақла, қийилмини цилиндрниң оқиға параллель жүргүзүшкә болиду (12.7-сүрәт). Сүрәттә MM_1K_1K қийилмиси OO_1 оқиға параллель жүргүзүлгән. Бу қийилма цилиндр билән униң икки ясиғучиси арқилиқ өтидиған тәкшиликниң қийилишишидин һасил болиду.

Мошу қийилминиңму тиктөртбулуңлуқ болидиғинини испатлаңлар.



12.7-сүрәт



12.8-сүрәт

Әгәр цилиндрниң ян бетини ясиғучиси бойи билән кесип, тәкшиликкә яйсақ вә униңға асаслирини қошсақ, у чағда *цилиндрниң йейилмиси* дәп атилидиған фигура һасил болиду (12.8-сүрәт).

Цилиндрниң толуқ бетиниң яки *бетиниң мәйдани* дәп униң йейилмисиниң мәйданини ейтиду.

Цилиндрниң ян бетиниң мәйдани дәп униң ян бетиниң йейилмисиниң мәйданини ейтиду.

Цилиндрниң ян бетиниң мәйдани униң асас чәмбириниң узунлиғи билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду, йәни төвәндики формула билән һесаплиниду:

$$S_{\text{ян бети}} = 2\pi Rh,$$

бу йәрдә R — цилиндр асасиниң радиуси, h — егизлиги.

Цилиндниң толуқ бетиниң мәйдани униң ян бети билән асаслириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң, йәни:

$$S_{\text{толуқ}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R),$$

бу йәрдә R — цилиндр асасиниң радиуси, h — егизлиги.

"Янту цилиндр" чүшәнчисини ениқлап көрүңлар.

MyLibrary.kz

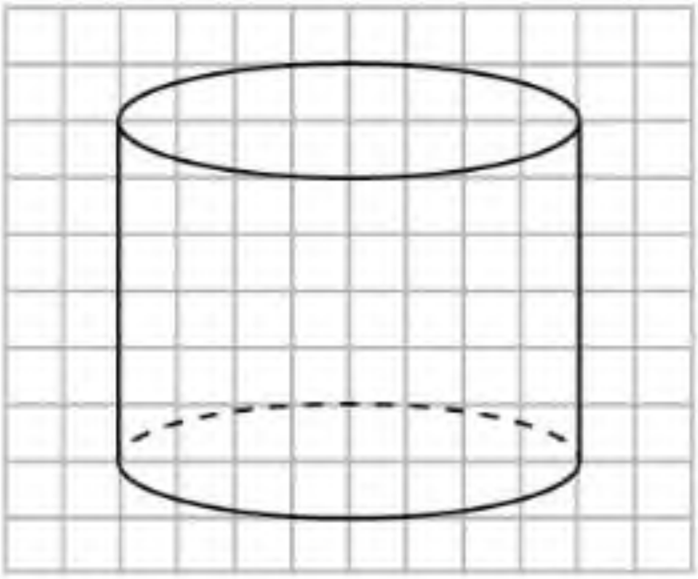
Соаллар

1. Тәкшиликтики қандақ түрләндүрүш түздин айландуруп бураш дәп атилиду?
2. Қандақ фигура айлиниш фигуриси дәп атилиду?
3. Қандақ фигура цилиндр дәп атилиду?
4. Цилиндр оқи дегинимиз немә?
5. Цилиндрниң асаслири дегинимиз немә?
6. Қандақ фигура цилиндрниң ян бети дәп атилиду?
7. Қандақ кесиндиләр цилиндрниң ясиғучилири дәп атилиду?
8. Цилиндрниң егизлиги дегинимиз немә?
9. Цилиндрниң оқлуқ кийилмиси дегинимиз немә?
10. Цилиндрниң йейилмиси дегинимиз немә?
11. Цилиндр бетиниң мәйдани дегигиниз немә?
12. Цилиндрниң ян бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
13. Цилиндрниң ян бетини һесаплаш формулисини йезиңлар.
14. Цилиндрниң толуқ бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.

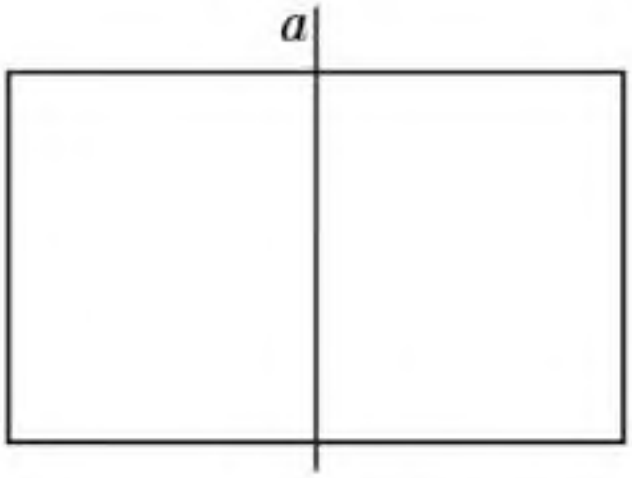
Һесаплар

A

12.1. Чақмақ қәғәзгә 12.9-сүрәттикигә охшаш цилиндр селиңлар. Цилиндрниң оқлуқ кийилмисини тәсвирләңлар.



12.9-сүрәт



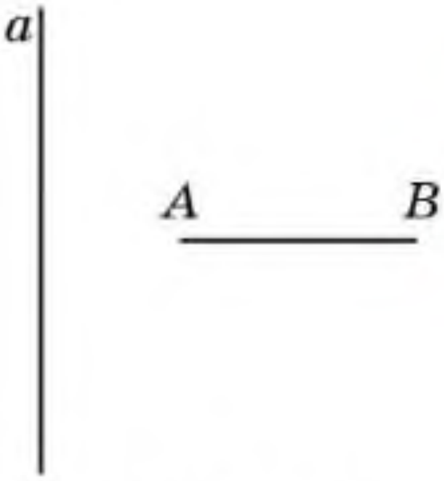
12.10-сүрәт

12.2. Цилиндрниң қанчә ясиғучиси болиду?

12.3. Цилиндрниң асаслириға параллель тәкшилик билән кийилмиси қандақ фигура болиду?

12.4. Тиктөртбулуңлуқни униң қариму-қарши ятқан тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түзи билән айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (12.10-сүрәт)?

12.5. AB кесиндисини мошу кесиндә билән бир тәкшиликтә ятидиған, умумий чекитлири болмайдиған вә униңға перпендикуляр түзидин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (12.11-сүрәт)?



12.11-сүрәт

MyLibrary.kz

12.6. Цилиндрниң егизлиги 3 см, асасиниң радиуси 2 см-ға тəң. Униң оқлуқ кийилмисиниң диагоналини тепиңлар.

12.7. Цилиндрниң ян бетиниң йейилмиси — тəрипи 1 см-ға тəң квадрат. Асасиниң радиусини тепиңлар.

12.8. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см, ясиғучиси 2 см болса: 1) ян бетиниң; 2) толуқ бетиниң мəйданини тепиңлар.

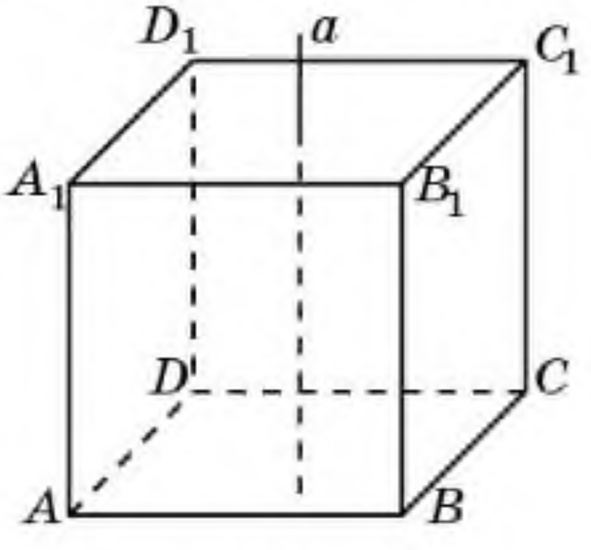
B

12.9. Чақмақ қəғəзгə 12.9-сүрəттикигə охшаш цилиндр селиңлар. Униң асаслириға параллель тəкшилик билəн кийилмисини тəсвирлəңлар.

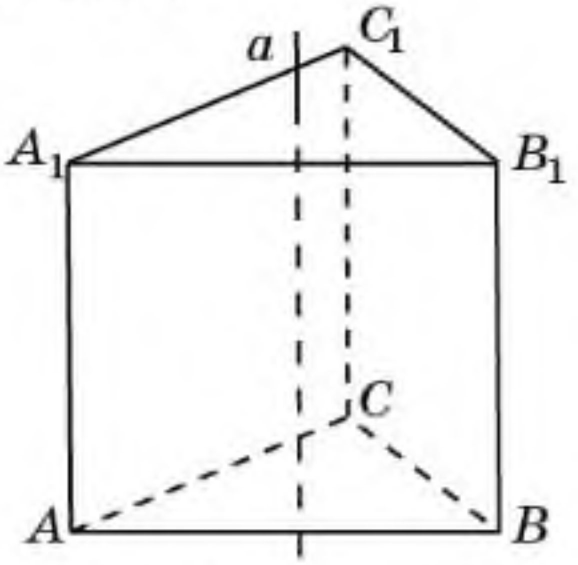
12.10. Чақмақ қəғəзгə 12.9-сүрəттикигə охшаш цилиндр селиңлар. Мошу цилиндрниң оқиға параллель тəкшилик билəн кийилмисини тəсвирлəңлар. У қандақ фигура болиду?

12.11. Цилиндрниң: 1) симметрия мəркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тəкшилиги боламду?

12.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубини: 1) AA_1 түзидин; 2) қариму-қарши яқлириниң мəркəзлирини қошидиған түзидин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (12.12-сүрəт)?



12.12-сүрəт



12.13-сүрəт

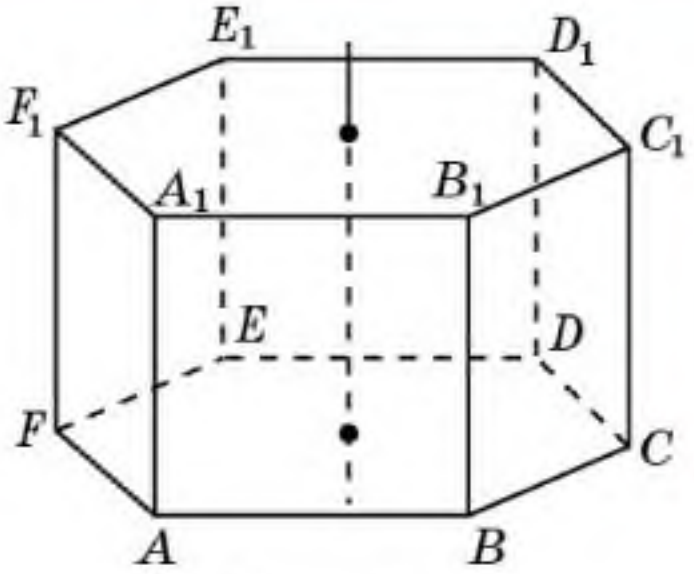
12.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубни: 1) AA_1 түзидин; 2) қариму-қарши яқлириниң мəркəзлирини қошудиған түзидин айландурғанда һасил болған цилиндрниң ян бетиниң мəйданини тепиңлар.

12.14. Дурус үчбулуңлуқ призмини униң: 1) ян қири арқилиқ өтидиған түзидин; 2) асаслириниң мəркəзлири арқилиқ өтидиған түзидин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (12.13-сүрəт)?

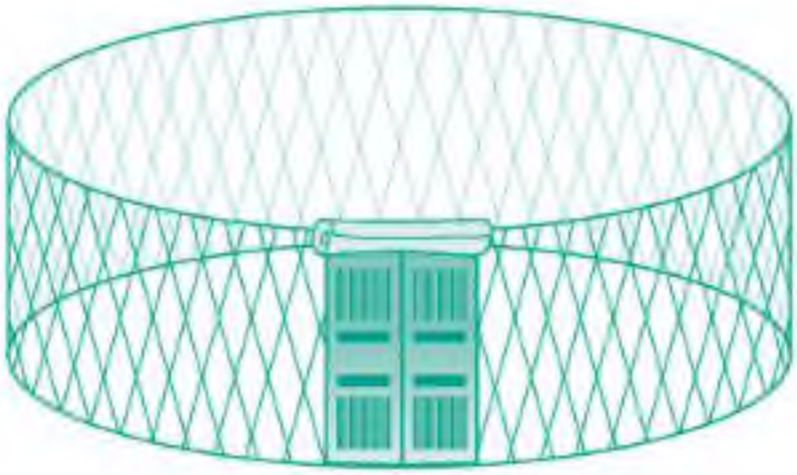
12.15. Дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тəң. Мошу призмини: 1) ян қирлири арқилиқ өтидиған түздин; 2) асаслириниң мəркəзлиридин өтидиған түздин айландурғанда һасил болидиған цилиндрниң ян бетиниң мəйданини тепиңлар (12.13-сүрəт).

12.16. Дурус алтəбулуңлуқ призмини униң: 1) ян қири ятидиған түздин; 2) асаслириниң мəркəзлири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (12.14-сүрəт)?

MyLibrary.kz



12.14-сүрәт



12.15-сүрәт

12.17. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см. Мошу призмини: 1) ян қири ятқан түздин; 2) асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда һасил болған цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар (12.14-сүрәт).

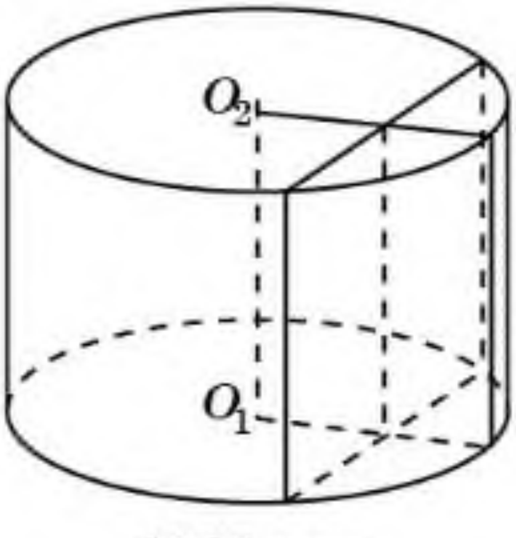
12.18. Кигиз өй — көчмәнләрниң қедимий замандин келиватқан туридиған өйи (12.15-сүрәт). Егизлиги 2 м, асас диаметри 5 м болидиған кигиз өйниң ян бетиниң (керегеси) мәйданини тепиңлар.

12.19. Цилиндрниң радиуси 6 см, егизлиги 5 см. Цилиндрниң оқиға параллель вә асаси чәмбиридин 60° доғини қийип чүширидиған тәкшилик билән қийғанда пәйда болған қийилминиң мәйданини тепиңлар.

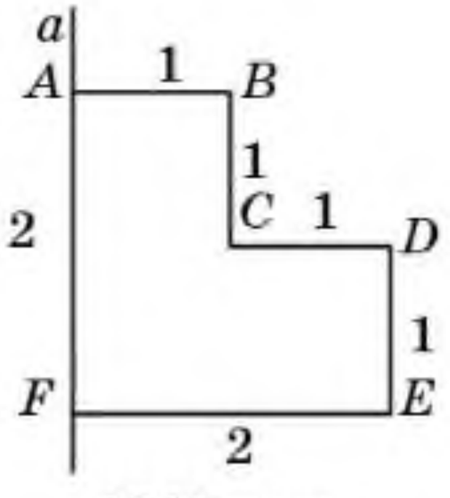
12.20. Цилиндрниң бир ясиғучиси арқилиқ өз ара перпендикуляр икки қийилмиси жүргүзүлгән вә уларниң мәйданлири 10 $см^2$ вә 24 $см^2$. Цилиндрниң оқлуқ қийилмисиниң мәйданини тепиңлар.

C

12.21. Цилиндрниң егизлиги 8 дм-ға, асасиниң радиуси болса 5 дм-ға тәң. Униң оқиға параллель тәкшилик билән қийилмиси — квадрат (12.16-сүрәт). Цилиндрниң оқидин мошу қийилмиғичә болған арилиқни тепиңлар.



12.16-сүрәт

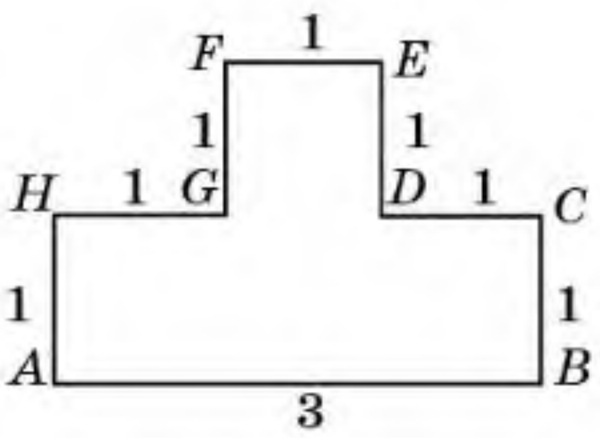


12.17-сүрәт

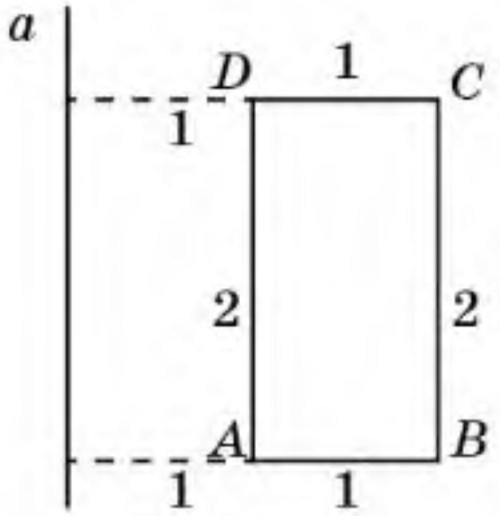
12.22. 12.17-сүрәттики хошна тәрәплири тикбулуң ясайдиған *ABCDEF* көпбулуңлуғини *AF* түзидин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду? Мошу фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

12.23. 12.18-сүрәттики хошна тәрәплири тикбулуң ясайдиған $ABCDEFGH$ көпбулуңлиғини AB түзидин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду? Мошу фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.



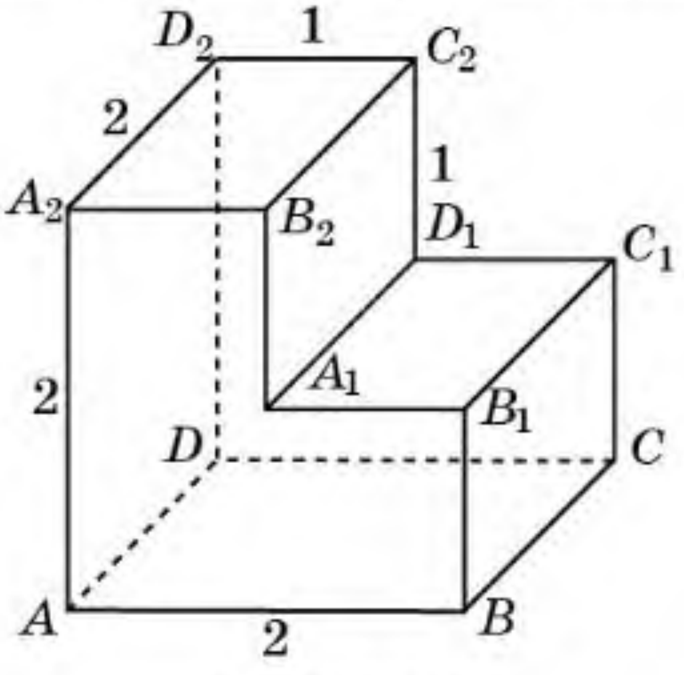
12.18-сүрәт



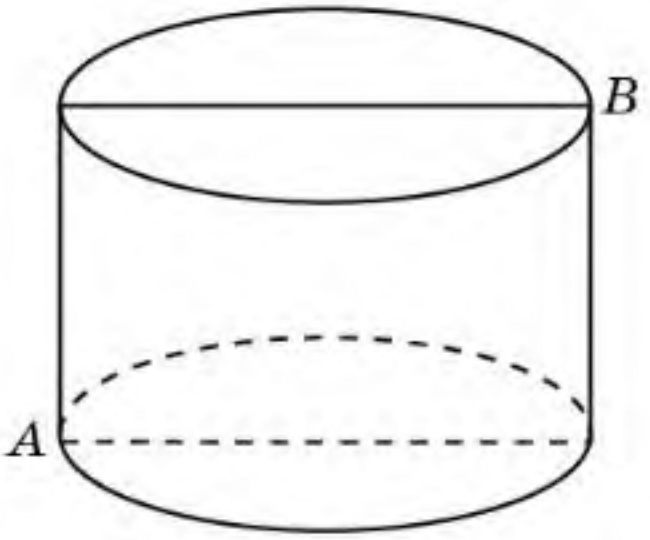
12.19-сүрәт

12.24. 12.19-сүрәттики $ABCD$ тикбулуңлиғини униң тәрәплиригә параллель a түзидин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду? Мошу фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

12.25. 12.20-сүрәттики барлиқ иккияқлиқ булуңлири тик болидиған көпяқлиқни AA_2 түзидин айландурғанда, қандақ фигура һасил болиду? Мошу фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.



12.20-сүрәт

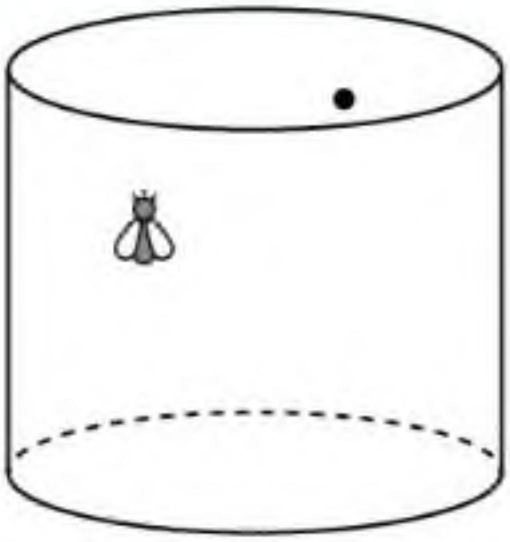


12.21-сүрәт

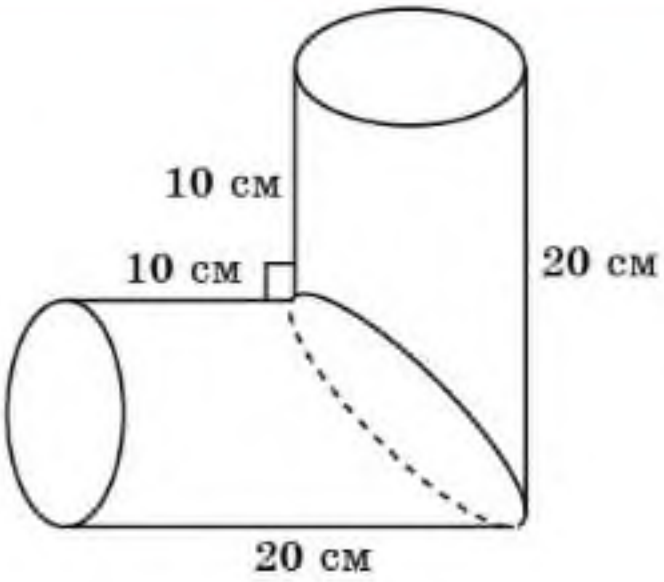
12.26. Цилиндр асасиниң радиуси 2 см-ға, ясиғучиси болса 3 см-ға тәң. Униң оқлуқ қийилмисиниң A чоққисидин униңға қарши ятқан B чоққисиғичә ян бетиниң бойи билән әң қисқа арилиқни тепиңлар (12.21-сүрәт).

12.27. Асасидики чәмбәрниң узунлиғи 24 см болидиған цилиндр шәклидики қачиниң ички тәрәплиридә жуқарқи сизиғидин 2,5 см йәрдә бир тамчә бал йепишип туриду, униңға диаметрлик қариму-қарши сиртқи тәрипидә чивин олтуриду (12.22-сүрәт). Чивин балға силҗип баралайдиғандәк әң қисқа йолниң узунлиғини тепиңлар.

MyLibrary.kz



12.22-сүрәт



12.23-сүрәт

12.28. 12.23-сүрәттики 90° булуң ясайдиған цилиндрларниң икки тәң бөлигидин туридиған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

12.29. Цилиндрниң оқиға параллель вә асас чәмбиридин α-доғини қийип өтидиған тәкшилик жүргүзүлгән. Һасил болған қийилминиң диагонали билән цилиндрниң ясиғучиси арисидики булуни β-ға тәң. Цилиндр радиуси R-ға тәң болса, қийилминиң мәйданини тепиңлар.

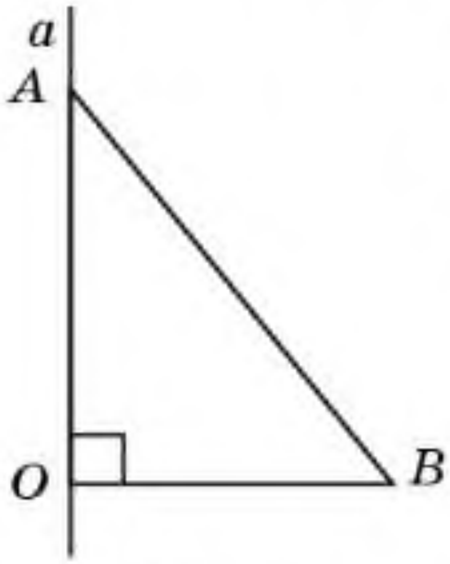
Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

12.30. Тәңянлиқ үчбулуңлуқниң вә дүгләк секториниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§ 13. Конус вә униң элементлири. Конусниң йейилмиси, ян вә толуқ бетиниң мәйданлири

Конус дәп тик үчбулуңлуқни униң бир катети ятқан түздин айландурғанда һасил болидиған фигурини (җисимни) атайду.

Бизгә ABO тикбулуңлуқ үчбулуңлиғи берилсун (13.1-сүрәт). Әгәр мошу тикбулуңлуқ үчбулуңлуқни униң AO катети арқилиқ өтидиған a түзи арқилиқ айландурсақ, нәтиҗисидә айлиниш җисими — конусни алимиз. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң AO катети *конусниң оқи* дәп атилиду.



13.1-сүрәт

AO катетиға перпендикуляр болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң BO тәрипииниң айлиниши нәтиҗисидә елинған дүгләк *конусниң асаси*, униң радиуси болса *конусниң радиуси* дәп атилиду.

13.2-сүрәттә конусниң OB радиуси тәсвирләнгән.

Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң AB гипотенузисиниң айлиниши вақтида пәйда болидиған бәт *конусниң ян бети* дәп атилиду.

Конусниң толуқ бети асаси билән ян бетидин туриду.

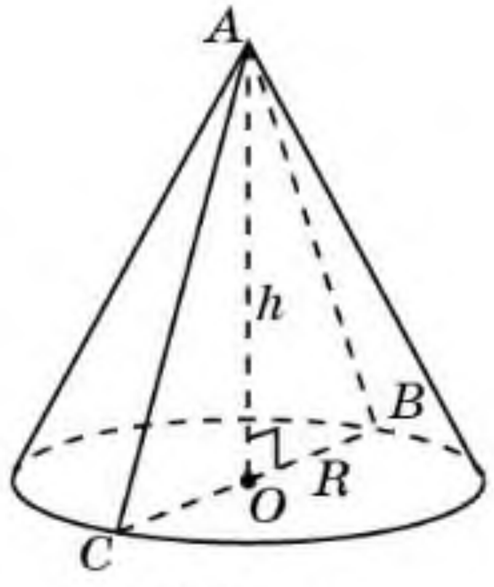
MyLibrary.kz

Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң AB гипотенизусиниң AO катетидин айлиниш вақтида елинған кесиндиләр *конусниң ясиғучиси* дәп атилиду.

13.2-сүрәттә конусниң AB вә AC ясиғучилири тәсвирләнгән.

Конусниң оқи арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмиси *конусниң оқлуқ қийилмиси* дәп атилиду (13.2-сүрәт).

Оқлуқ қийилминиң тәрәплири конусниң асасиниң диаметри вә икки ясиғучиси болуп һесаплиниду. 13.2-сүрәттә CAB оқлуқ қийилмиси тәсвирләнгән.

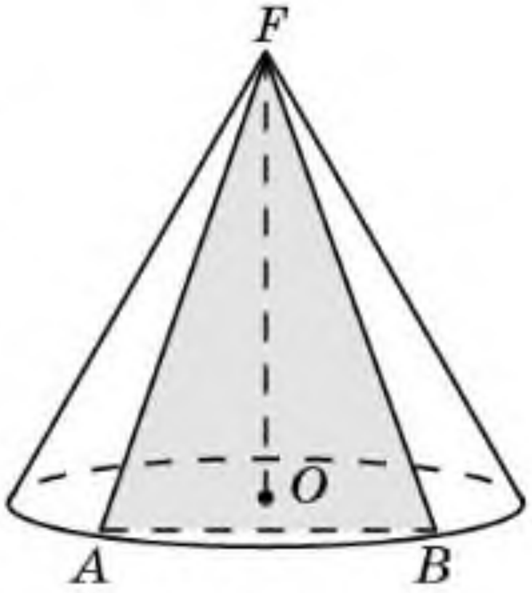


13.2-сүрәт

Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңянлиқ үчбулуңлуқ, униң асаси конус асасиниң диаметри болидиғанлиғини испатлаңлар.

Конусни мошу тәңянлиқ үчбулуңлуқниң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландуруш арқилиқ елишқа болиду. Тәңянлиқ үчбулуңлуқниң асасиға қарши ятқан чоққиси *конусниң чоққиси* дәп атилиду.

Конусниң чоққисидин униң асас тәкшилигигә чүширилгән перпендикулярниң узунлиғи *конусниң егизлиги* дәп атилиду.



13.3-сүрәт

13.2-сүрәттә конусниң AO егизлиги тәсвирләнгән.

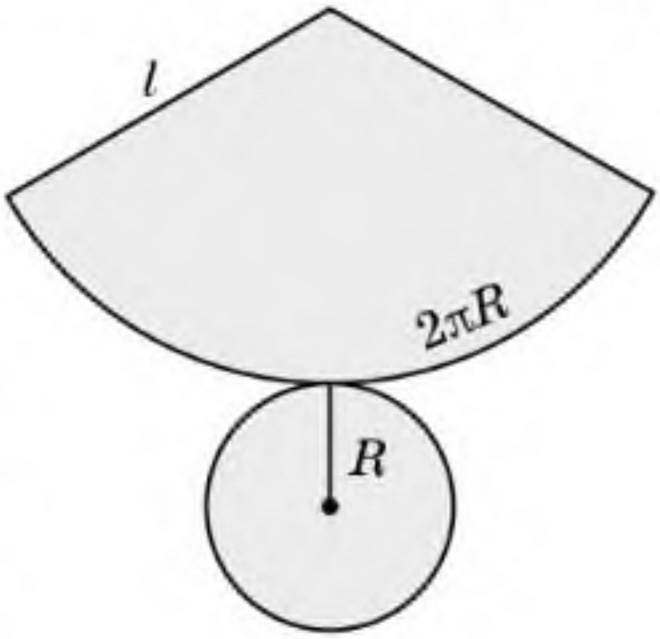
Қандақ ойлайсиләр, конусни тикбулуңлуқ әмәс вә тәңянлиқ әмәс үчбулуңлуқни айландуруш арқилиқ елишқа боламду?

Шундақла қийилмини конусниң чоққиси вә асасиниң хордиси арқилиқму жүргүзүшкә болиду (13.3-сүрәт). Сүрәттә AFB қийилмиси конусниң F чоққиси вә асасиниң AB хордиси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилишидин елинған. Йәни, тәкшилик конус асасини хординиң бойи билән, ян бетини болса икки ясиғучиси бойи билән қийип өтиду.

Мошу қийилминиңму тәңянлиқ үчбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

Әгәр конусниң ян бетиниң ясиғучиси бойидин кесип, тәкшиликкә яйидиған болсақ вә униңға асасини қошсақ, у чағда *конусниң йейилмиси* дәп атилидиған фигура пәйда болиду (13.4-сүрәт).

Конусниң толуқ бетиниң мәйдани дәп униң йейилмисиниң мәйданини атайду.



13.4-сүрәт

MyLibrary.kz

Конусниң ян бетиниң мәйдани дәп униң ян бетиниң йейилмисиниң мәйданини атайду.

Конусниң ян бетиниң мәйдани униң асасидики чәмбәрниң узунлиғи билән ясиғучисиниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду, йәни төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$S_{\text{ян бети}} = \pi Rl,$$

бу йәрдә R — конус асасиниң радиуси, l — ясиғучиси.

Конусниң толуқ бетиниң мәйдани униң ян бети билән асасиниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду, төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$S_{\text{толуқ}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R),$$

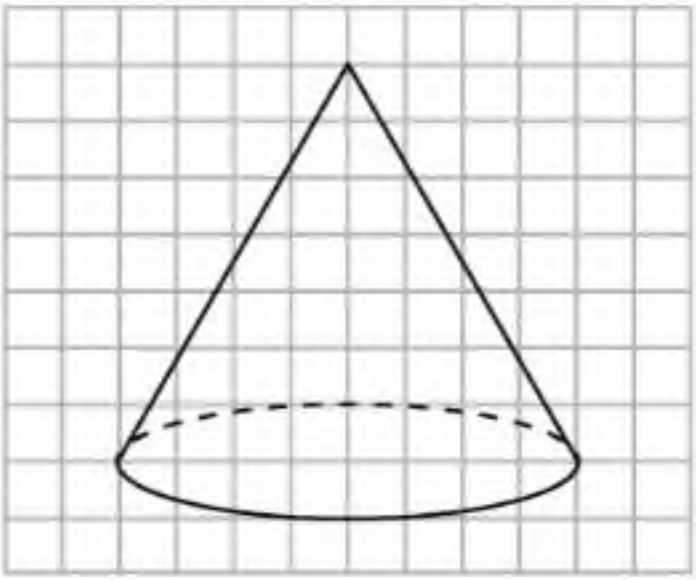
бу йәрдә R — конус асасиниң радиуси, l — ясиғучиси.

Соаллар

1. Қандақ фигура конус дәп атилиду?
2. Конусниң оқи дегинимиз немә?
3. Конусниң асаси дегинимиз немә?
4. Қандақ фигура конусниң ян бети дәп атилиду?
5. Қандақ кесиндиләр конусниң ясиғучилири дәп атилиду?
6. Конусниң оқлуқ кийилмиси дегинимиз немә?
7. Конусниң чоққиси дегинимиз немә?
8. Конусниң егизлиги дегинимиз немә?
9. Қандақ фигура конусниң йейилмиси дәп атилиду?
10. Конус бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
11. Конусниң ян бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
12. Конусниң ян бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.
13. Конусниң толуқ бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.

Һесаплар

A



13.5-сүрәт

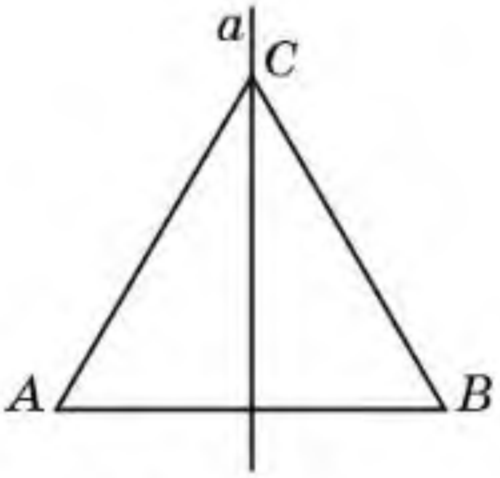
13.1. Чақмақ қәғәзгә 13.5-сүрәттикигә охшаш конусни селиңлар. Конусниң оқлуқ кийилмисини тәсвирләңлар.

13.2. Конусниң қанчә ясиғучиси болиду?

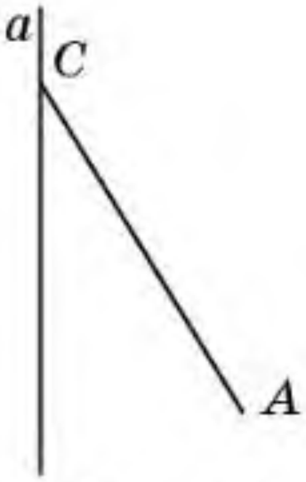
13.3. Конусниң асасиға параллель тәкшилик билән кийилмиси қандақ фигура болиду?

13.4. Тәңянлиқ үчбулуңлуқни униң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (13.6-сүрәт)?

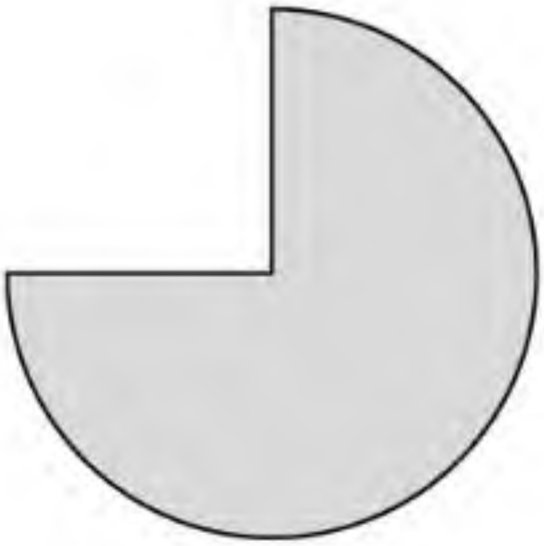
MyLibrary.kz



13.6-сүрәт



13.7-сүрәт



13.8-сүрәт

13.5. *AC* кесиндисини *C* чекити арқилиқ өтидиған вә униңға перпендикуляр әмәс түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (13.7-сүрәт)?

13.6. Конус асасиниң радиуси 3 см-ға, егизлиги 4 см-ға тәң. Конусниң ясиғучисини тепиңлар.

13.7. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәрәплири 10 см болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Конусниң: 1) асасиниң радиусини; 2) егизлигини тепиңлар.

13.8. Конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясап янтийиду. Конусниң егизлигини тепиңлар.

13.9. Конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилигиги билән 60° булуң ясап янтийиду. Конус асасиниң радиусини тепиңлар.

13.10. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Конус бетиниң мәйданини тепиңлар.

13.11. 13.8-сүрәттики дүгләкниң бөлиги конусниң ян бетиниң йейилмиси боламду?

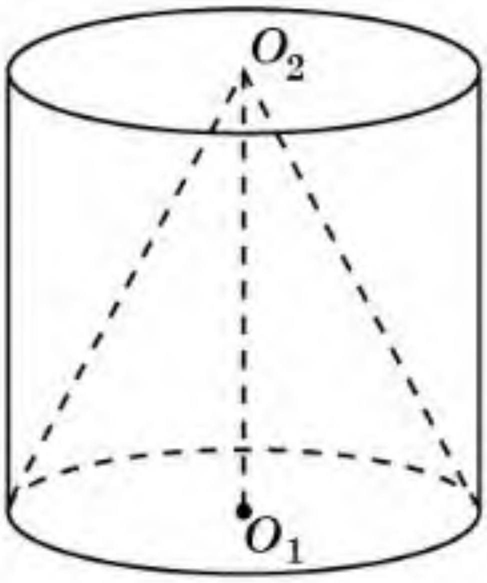
B

13.12. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Конус егизлигиниң оттуриси арқилиқ өтидиған вә асас тәкшилигигә параллель тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданини тепиңлар.

13.13. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Асаси цилиндрниң бир асаси, чоққиси болса, цилиндрниң иккинчи асасиниң мәркизи болидиған конусниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар (13.9-сүрәт).

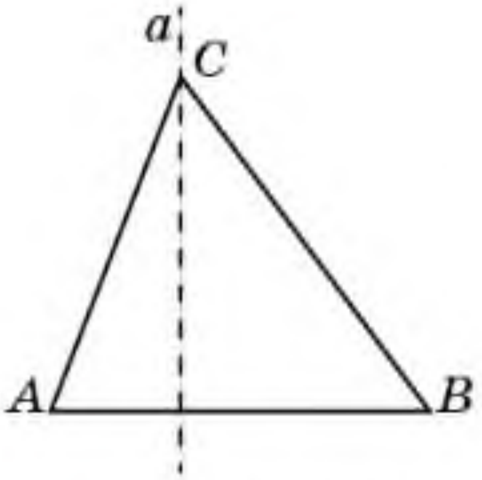
13.14. Конусниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

13.15. Тарбулуңлуқ тәңянлиқ әмәс үчбулуңлуқни униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (13.10-сүрәт)?

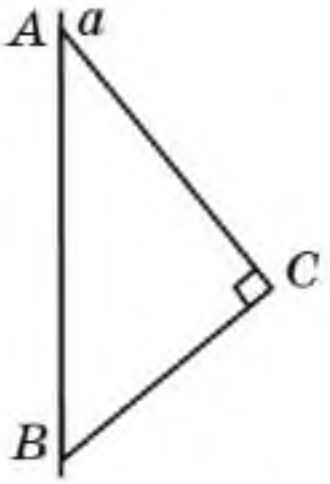


13.9-сүрәт

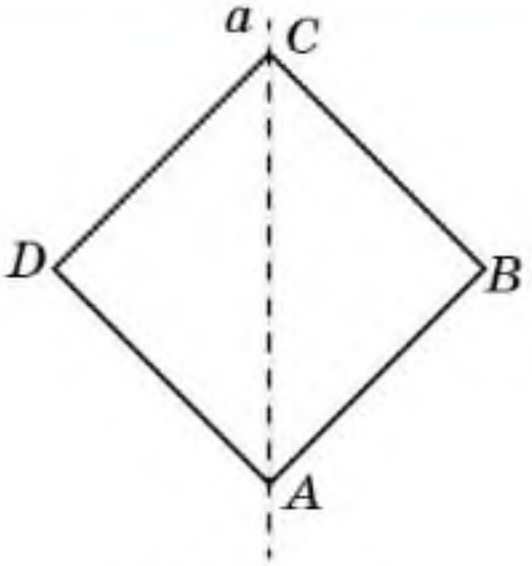
MyLibrary.kz



13.10-сүрәт



13.11-сүрәт



13.12-сүрәт

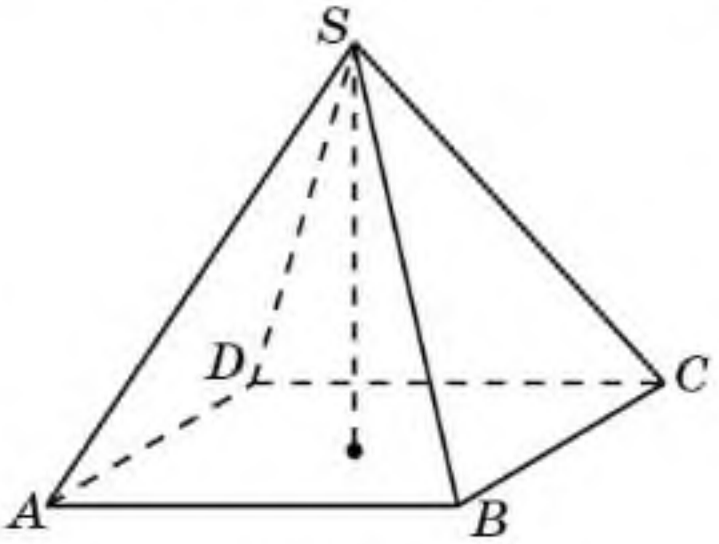
13.16. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқни униң гипотенузиси ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (13.11-сүрәт)?

13.17. Бирлик квадратни униң диагонали ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (13.11-сүрәт)? Фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

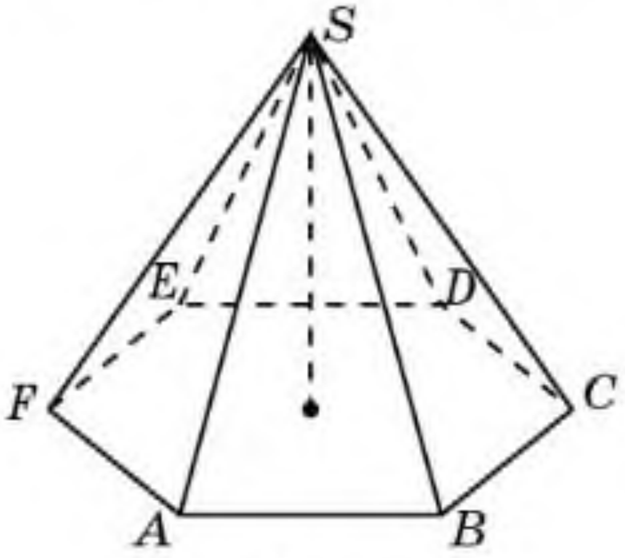
13.18. Дурус төртбулуңлуқ пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (13.13-сүрәт)?

13.19. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда пәйда болидиған конус бетиниң мәйданини тепиңлар (13.13-сүрәт).

13.20. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (13.14-сүрәт)?



13.13-сүрәт



13.14-сүрәт

13.21. Асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири 2 см-ға тәң дурус алтәбулуңлуқ пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда пәйда болидиған конус бетиниң мәйданини тепиңлар (13.14-сүрәт).

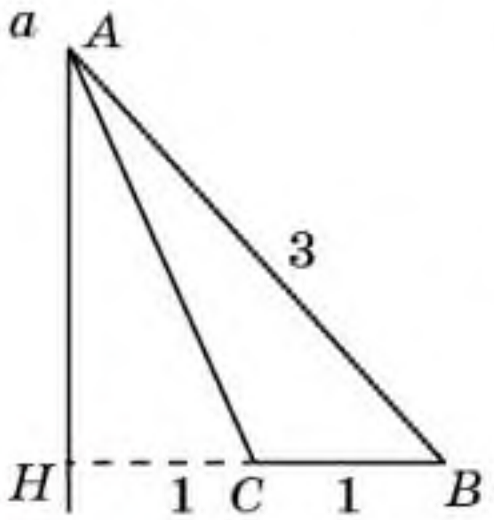
13.22. Конусниң егизлиги 4 см, асас чәмбириниң хордиси 6 см-ға тәң вә у 90° доғини керийду. Конусниң чоққиси вә мошу хорда арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

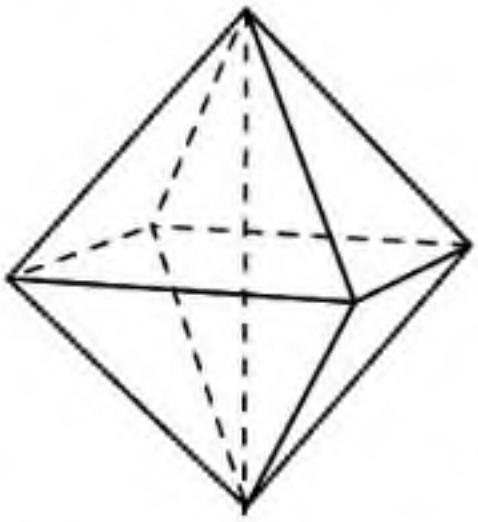
13.23. Конусниң егизлиги h-қа тәң, униң егизлиги билән ясиғучисиниң арасидики булуң 60°. Конусниң өз ара перпендикуляр икки ясиғучиси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданини тепиңлар.

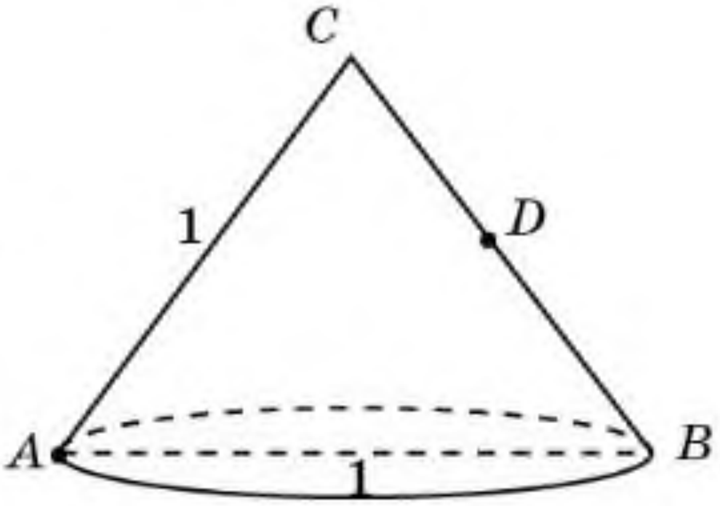
C

13.24. ABC кәңбулуңлуқ үчбулуңлуқни униң AH егизлиги ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (13.15-сүрәт)? Мошу фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.



13.15-сүрәт


13.16-сүрәт



13.17-сүрәт

13.25. Октаэдрни униң қариму-қарши ятқан чоққилирини қошидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (13.16-сүрәт)? Октаэдрниң қири 1 см-ға тәң дәп елип, пәйда болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

13.26. Конусни вә униң егизлигиниң оттурисиға нисбәтән мәркәзлик симметрилиқ конусни селиңлар. Бу конусларниң умумий бөлиги қандақ фигура болиду? Дәсләпки конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң дәп елип, һасил болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

13.27. Конусниң ян бетиниң йейилмиси — радиуси 1 см-ға тәң йерим дүгләк. Конус асасиниң радиусини тепиңлар.

13.28. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 3 см-ға тәң. Конусниң ян бетиниң йейилмисиниң мәркәзлик булуңини тепиңлар.

13.29. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәрипи 1 см болидиған ABC тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Униң оқлуқ қийилмисиниң A чекитидин BC тәрипиниң оттуриси D чекитигичә, ян бети бойи билән әң қисқа ариliқни тепиңлар (13.17-сүрәт).

13.30. Конус шәклидә жиғилған чөп догисини төмүр тахтиси билән йепиш керәк. Униң егизлиги 2 м-ға, асасиниң диаметри 6 м-ға тәң. Әгәр барлиқ төмүр тахтиси бетиниң 10%-и уларни чаплашқа кетидиған болса, у чағда чөпни йепиш үчүн 0,7 м · 1,4 м өлчимидә қанчә төмүр тахтиси керәк болиду? ($\pi \approx 3$).

MyLibrary.kz

13.31. Қурулуш мәйданидики конус шәклидики дога қумниң асас чәмбириниң узунлиғини метрлиқ лента билән өлчигәндә 21,6 м болди (13.18-сүрәт). Метрлиқ лентиниң догиниң чоққиси арқилиқ ташлап өлчигәндә, униң икки ясиғучисиниң узунлиғи 7,8 м екәнлиги ениқлиниду. Дога қум бетиниң мәйданини тепиңлар ($\pi \approx 3$).

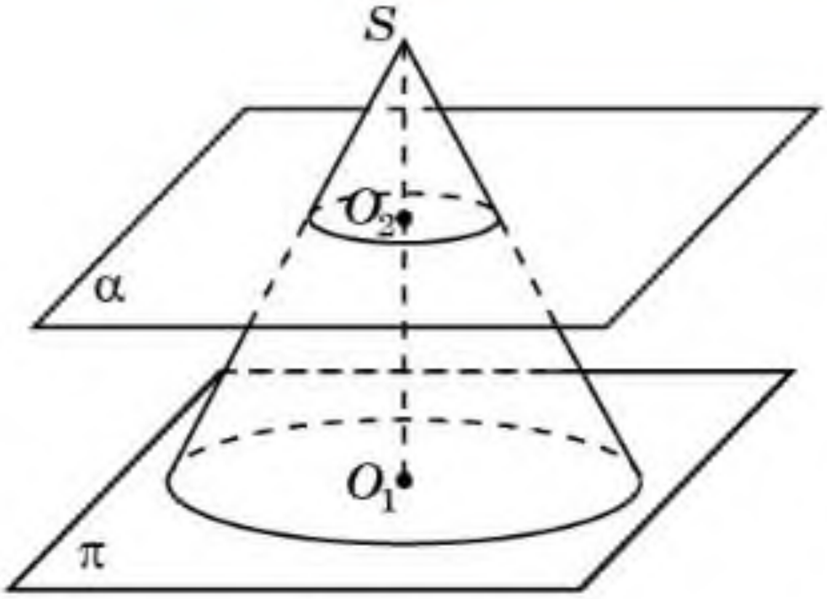
13.18-сүрәт

13.32. Асийәм туғулған күнигә бағлиқ қәғәздин егизлиги 8 см, асасиниң радиуси 6 см болидиған конусниң ян бети охшаш 8 тал баш кийим тәйярлимақчи болди. Униңға баш кийимләрни тәйярлаш үчүн қанчә қәғәз ($см^2$ билән) керәк екәнлигини тепиңлар ($\pi \approx 3$).

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

13.33. Дүгләк тәңгиниң ениқлимисини вә униң мәйданини тепиш формулисини қайтилаңлар.

§ 14. Кийиқ конус вә униң элементлири. Кийиқ конусниң йейилмиси, ян вә толуқ бәтлириниң мәйданлири



14.1-сүрәт

Әгәр конусни асас тәкшилигигә параллель тәкшилик билән кийип өтсә, у чағда конусниң мошу тәкшилик билән асас тәкшилигиниң арисидики чәкләнгән бөлиги *кийиқ конус* дәп атилиду (14.1-сүрәт).

Конусниң асас тәкшилигигә параллель тәкшилик кийилмисиму *кийиқ конусниң асаси* дәп атилиду. Шуниң билән, кийиқ конусни чәкләйдиған дүгләкләрни униң *асаслири* дәп атайду.

MyLibrary.kz

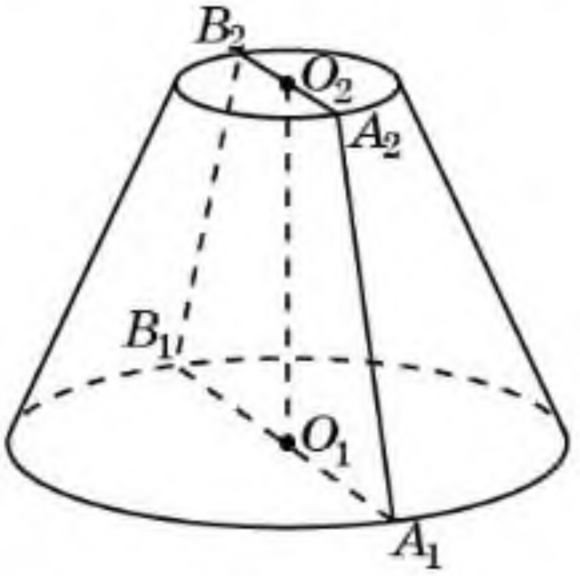
Конусниң оқи *қийиқ конусниң оқи* дәп атилиду.

Қийиқ конус асаслириниң арисидики чәкләнгән конусниң ян бетиниң бөлиги *қийиқ конусниң ян бети* дәп атилиду.

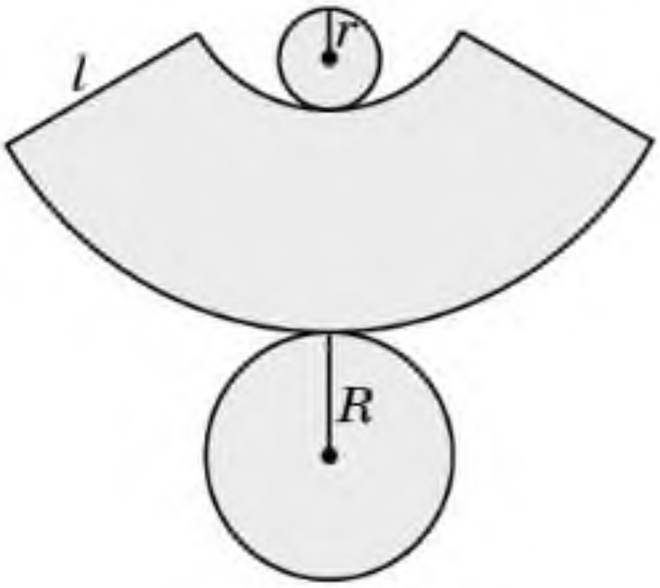
Қийиқ конус асаслириниң арисида чәкләнгән конус ясиғучиларниң кесиндилири *қийиқ конус ясиғучилири* дәп атилиду.

Қийиқ конусниң асас тәкшиликлириниң арисидики арилиқ *қийиқ конусниң егизлиги* дәп атилиду.

Қийиқ конусниң оқи арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмиси *қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси* дәп атилиду (14.2-сүрәт).



14.2-сүрәт



14.3-сүрәт

Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси тәңянлиқ трапеция болидиғанлиғини испатлаңлар.

Қийиқ конусни мошу тәңянлиқ трапецияни униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландуруш арқилиқ елишқа болиду.

Қийиқ конусни тәңянлиқ әмәс трапецияни айландуруш арқилиқ елишқа боламду?

Әгәр қийиқ конусниң ян бетини ясиғучиси бойи билән кесип, тәкшиликккә яйидиған болсақ вә униңға асаслирини қошсақ, у чағда қийиқ конусниң йейилмиси дәп атилидиған фигура һасил болиду (14.3-сүрәт).

Қийиқ конус бетиниң мәйдани дәп униң йейилмисиниң мәйданини атайду.

Қийиқ конусниң ян бетиниң мәйдани дәп униң ян бетиниң йейилмисиниң мәйданини атайду.

Әгәр қийиқ конус асаслириниң радиуслири R вә r, ясиғучиси l-ға тәң болса, у чағда қийиқ конусниң ян бетиниң мәйдани төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$S_{\text{ян}} = \pi(R + r)l.$$

Қийиқ конусниң толуқ бетиниң мәйданини тепиш үчүн униң ян бетиниң мәйданини асаслириниң мәйданлириға қошуш керәк:

$$S_{\text{толуқ}} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$

MyLibrary.kz

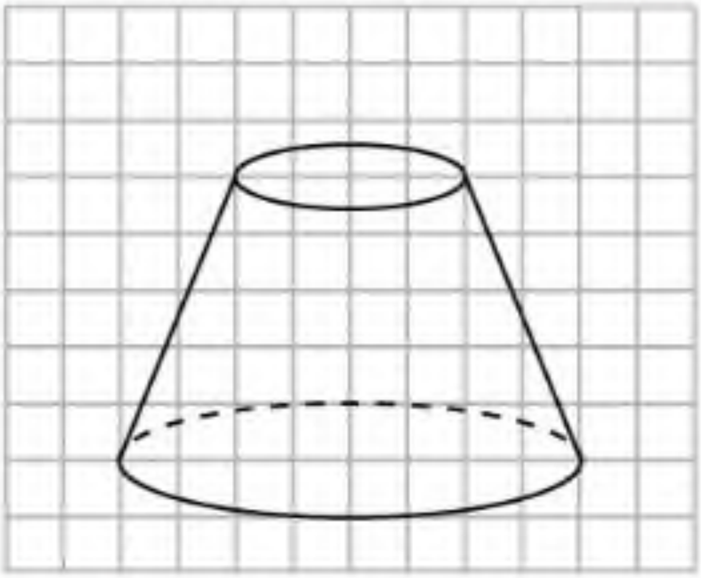
Соаллар

1. Қандақ фигура қийиқ конус дәп атилиду?
2. Қийиқ конусниң асаслири дегинимиз немә?
3. Қийиқ конусниң егизлиги дегинимиз немә?
4. Қийиқ конусниң оқи дегинимиз немә?
5. Қийиқ конусниң оқлуқ кийилмиси дегинимиз немә?
6. Қандақ фигура қийиқ конусниң йейилмиси дәп атилиду?
7. Қийиқ конус бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
8. Қийиқ конусниң ян бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
9. Қийиқ конусниң ян бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.
10. Қийиқ конусниң толуқ бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.

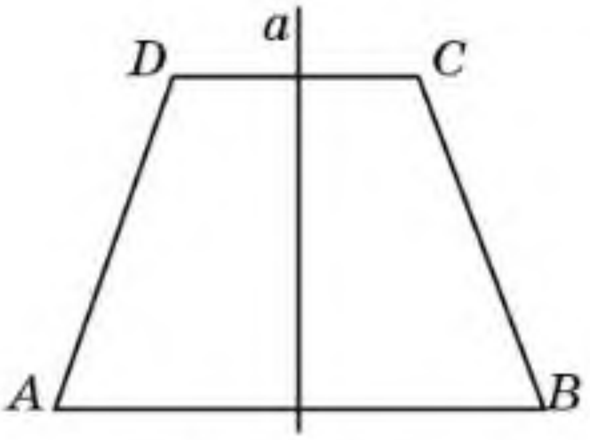
Һесаплар

А

14.1. Чақмақ қәғәзгә 14.4-сүрәттикигә охшаш қийиқ конусни селиңлар. Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмисини тәсвирләңлар.



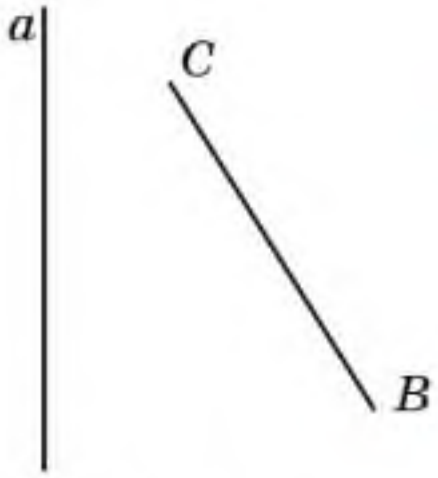
14.4-сүрәт



14.5-сүрәт

14.2. Қийиқ конусниң қанчә ясиғучиси болиду?

14.3. Қийиқ конусниң асасиға параллель тәкшилик билән қийилмиси қандақ фигура болиду?



14.6-сүрәт

14.4. Тәңянлиқ трапецияни униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (14.5-сүрәт)?

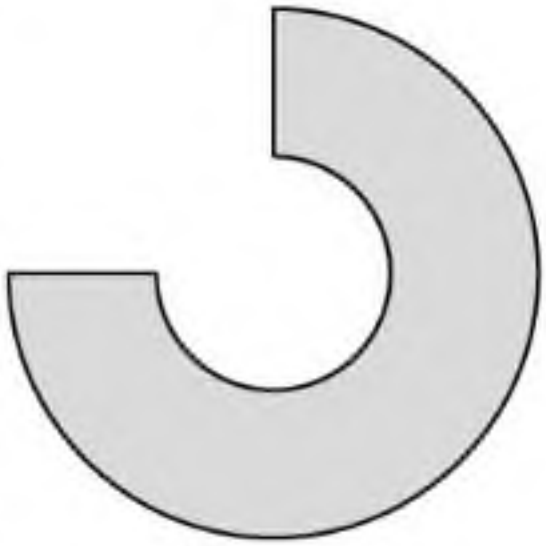
14.5. *BC* кесиндисини мошу кесиндә билән бир тәкшиликтә ятидиған, умумий чекити болмайдиған вә униңға параллельму һәм перпендиклярму әмәс түздин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (14.6-сүрәт)?

14.6. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 6 см вә 2 см, егизлиги болса 3 см-ға тәң. Қийиқ конусниң ясиғучисини тепиңлар.

MyLibrary.kz

14.7. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 6 см вә 2 см, ясиғучиси 5 см-ға тәң. Қийиқ конус бетиниң мәйданини тепиңлар.

14.8. 14.7-сүрәттики дүгләкниң бөлиги қийиқ конусниң ян бетиниң йейилмиси боламду?



14.7-сүрәт

B

14.9. Чақмақ қәғәзгә 14.4-сүрәттикигә охшаш қийиқ конусни селиңлар. Мошу конусниң оқиға параллель болидиған вә асаслири билән қийилишидиған тәкшилик билән қийилмисини тәсвирләңлар.

14.10. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 2 см вә 4 см. Қийиқ конус егизлигиниң оттуриси арқилиқ асас тәкшилигигә параллель тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданини тепиңлар.

14.11. Қийиқ конусниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

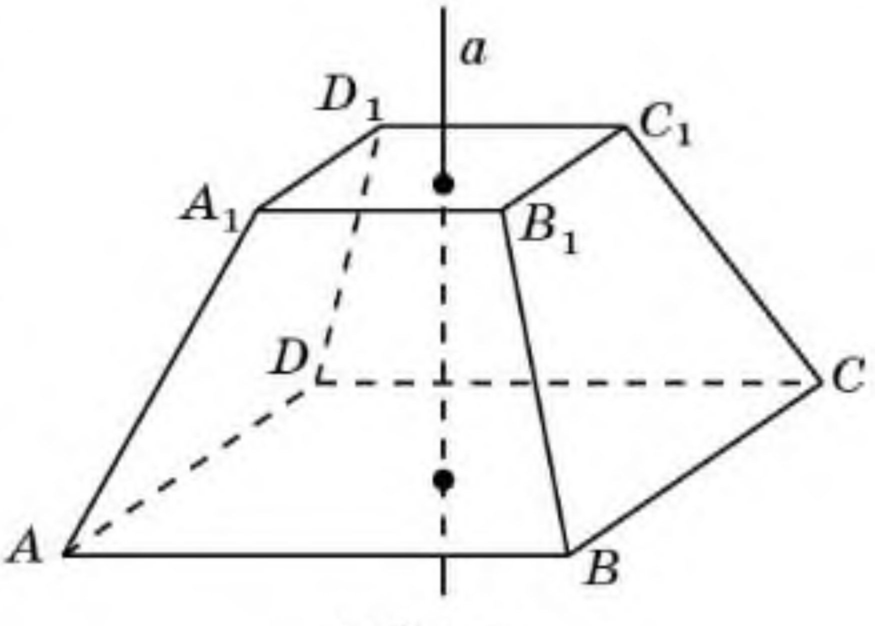
14.12. Қийиқ конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясап қийсийиду. Қийиқ конусниң егизлигини тепиңлар.

14.13. Қийиқ конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә асас тәкшилиги билән 60° булуң ясап қийсийиду. Қийиқ конусниң кичик асасиниң радиуси 1 см-ға тәң болса, чоң асасиниң радиусини тепиңлар.

14.14. Тәңянлиқ трапецияниң асаслири 1 см вә 2 см, ян тәрәплири болса 2 см. Мошу трапецияни униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда һасил болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

14.15. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидини униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда, қандақ фигура һасил болиду (14.8-сүрәт)?

14.16. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамида асаслириниң тәрәплири 4 см вә 2 см, ян қирлири болса 3 см-ға тәң. Мошу пирамидини униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда һасил болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар (14.8-сүрәт).



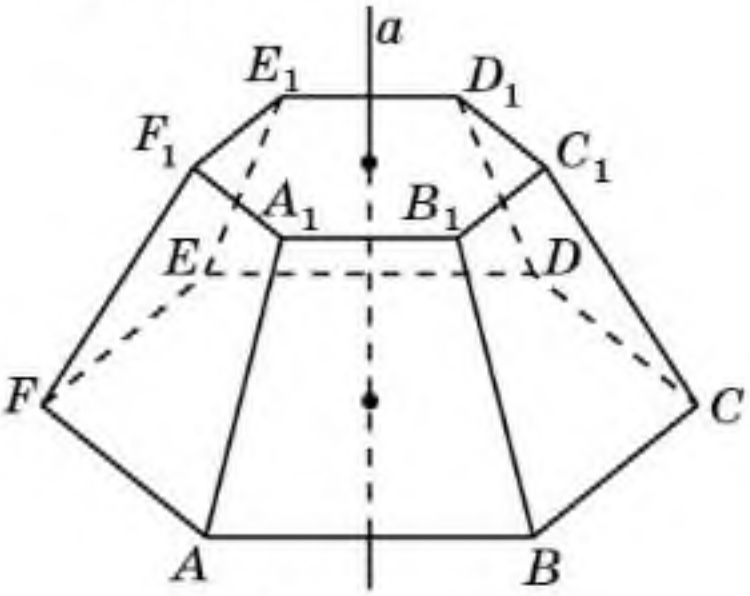
14.8-сүрәт

14.17. Дурус алтәбулуңлуқ қийиқ пирамидини униң асас-

MyLibrary.kz

лириниң мәркәзлири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (14.9-сүрәт)?

14.18. Дурус алтәбулуңлуқ қийиқ пирамида асаслириниң тәрәплири 2 см вә 1 см, ян қирлири 3 см-ға тәң. Мошу пирамидини униң асаслириниң мәркәзлири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда һасил болған фигуриниң толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар (14.9-сүрәт).



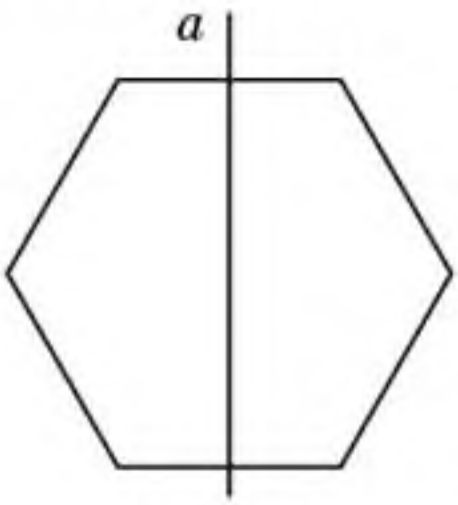
14.9-сүрәт

14.10-сүрәт

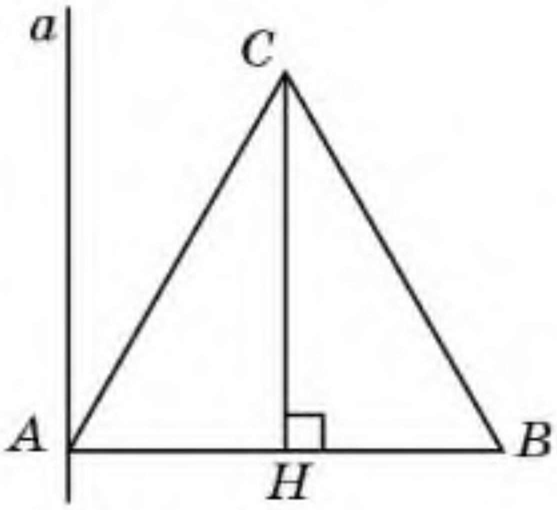
14.19. Кигиз өйниң гүмбизи (чедири) қийиқ конус шәклигә егә. униң асаслириниң диаметрлири 5 м вә 1 м, егизлиги болса 2 м-ға тәң (14.10-сүрәт). Кигиз өй гүмбизиниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

C

14.20. Дурус алтәбулуңлуқ униң қариму-қарши ятқан тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (14.11-сүрәт)? Дурус алтәбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң болса, пәйда болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.



14.11-сүрәт



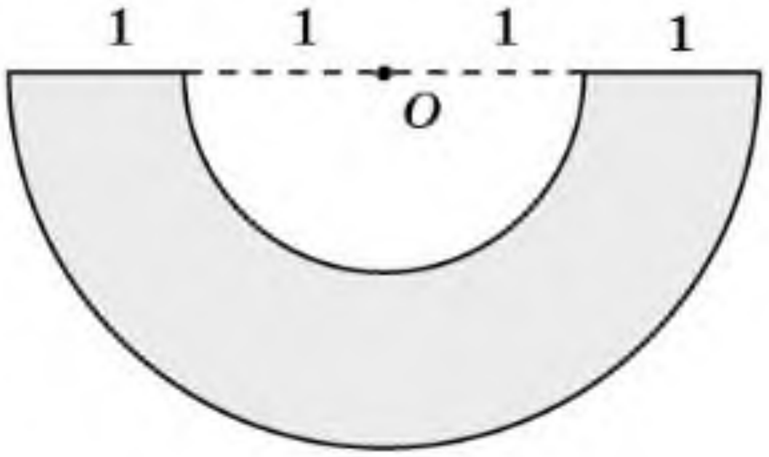
14.12-сүрәт

14.21. ABC тәңтәрәплик үчбулуңлуқни A чоққиси арқилиқ өтидиған CH егизлигигә параллель болидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (14.12-сүрәт)? ABC үчбулуңлуғиниң

MyLibrary.kz

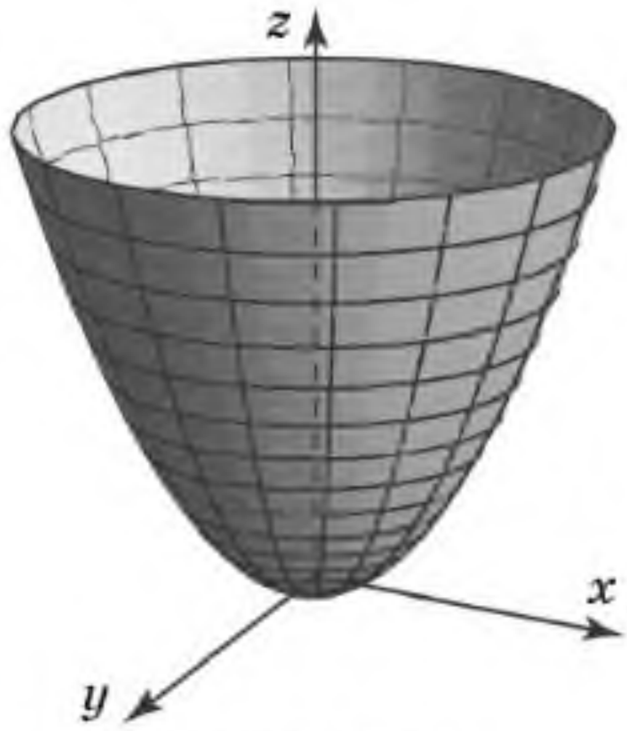
тәрәплири 1 см-ға тәң дәп елип, пәйда болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

14.22. 14.13-сүрәттә чәмбәрлириниң радиуслири 1 см вә 2 см болған дүгләк тәңгиниң йерими — қийиқ конусниң ян бетиниң йейилмиси тәсвирләнгән. Қийиқ конус асаслириниң радиуслирини тепиңлар.

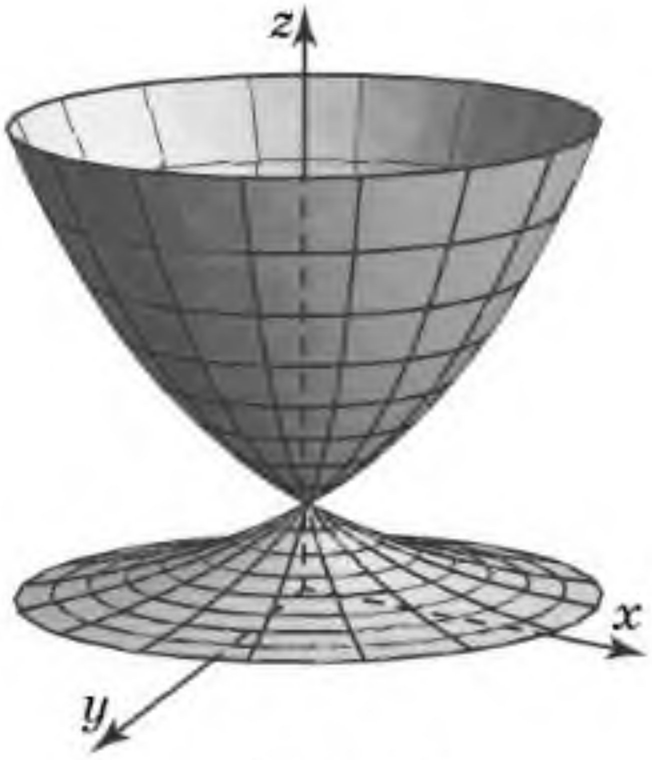


14.13-сүрәт

14.23. 14.14-сүрәттики бәтни қандақ функцияниң графигини айландурғанда елишқа болиду?



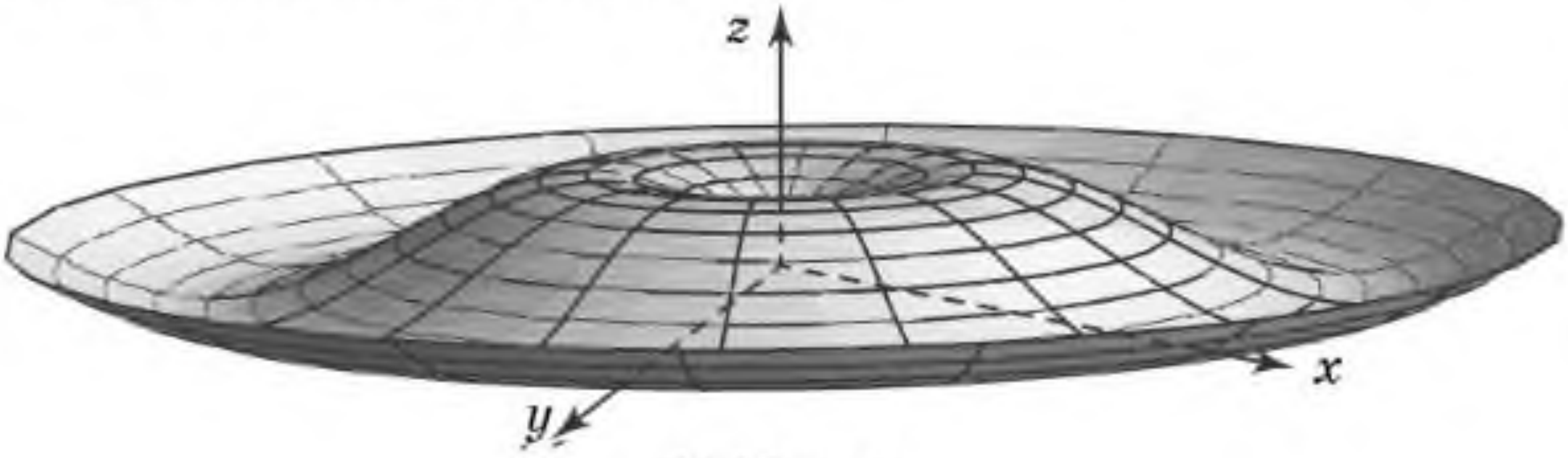
14.14-сүрәт



14.15-сүрәт

14.24. 14.15-сүрәттики бәтни қандақ функцияниң графигини айландурғанда елишқа болиду?

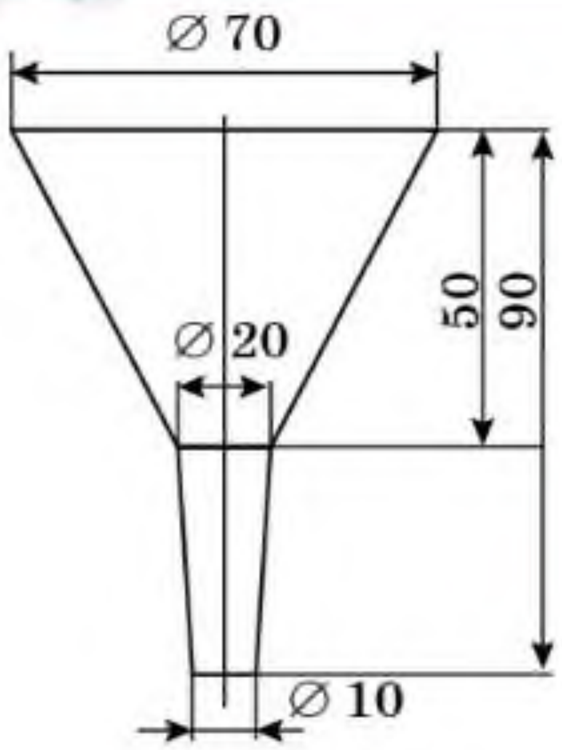
14.25. 14.16-сүрәттики бәтни қандақ функцияниң графигини айландурғанда елишқа болиду?



14.16-сүрәт

14.26. Челәк қийиқ конус шәклидә вә униң ичи-сиртини бояш һаҗәт. Униң асаслириниң диаметрлири 30 см вә 20 см, ясиғучиси 30 см-ға тәң. Әгәр бояқниң оттура чиқими 1 $м^2$-ға 300 г болса,

MyLibrary.kz



14.17-сүрәт

у чағда челәкни бояш үчүн қанчилик бояқ һажәт болиду?

14.27. 14.17-сүрәттә қәләйдин ясалған суюқлуқ қуйғучиниң өлчәмлири миллиметр билән көрситилгән. Әгәр барлиқ қәләй бетиниң 10%-и уларни йепиштурушқа кетидиған болса, у чағда суюқлуқ қуйғучини ясаш үчүн қанчә квадрат дециметр қәләй керәк болиду?

14.28. Конус шәклидики челәкни төмүр тахтисидин ясаш керәк. Униң асаслириниң диаметрлири 28 см вә 20 см, егизлиги 24 см-ға тәң. Йепиштурушқа кетидиған чиқимни һесапқа алмиғанда челәкниң ян бети йейилмисиниң өлчәмлири қандақ?

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

14.29. Чәмбәрниң, дүгләкниң вә уларниң элементлириниң ениқлимилирини, чәмбәргә жүргүзүлгән яндашминиң ениқлимисини вә чәмбәр билән түзниң өз ара орунлишиш һаләтлирини тәкрарлаңлар.

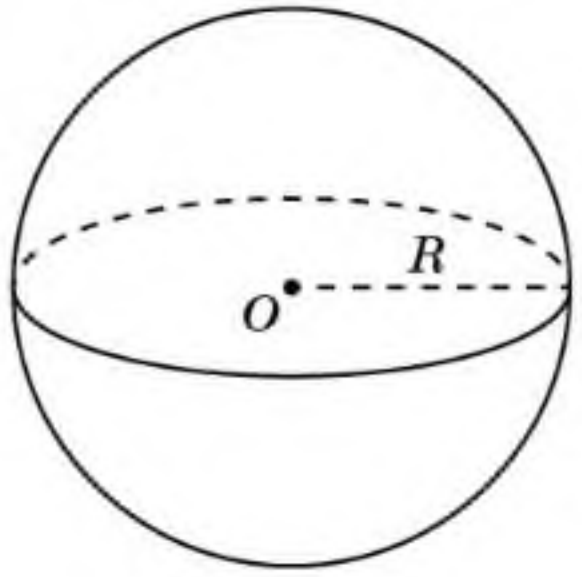
§ 15. Сфера, шар вә уларниң элементлири

Сфера вә шар — тәкшиликтики мувапиқ чәмбәр билән дүгләкниң бошлуқтики аналоглири болуп тепилиду.

Берилгән чекиттин бәлгүлүк арилиқта орунлашқан бошлуқниң барлиқ чекитлиридин туридиған фигура *сфера* дәп атилиду (15.1-сүрәт).

Берилгән чекит *сфериниң мәркизи*, берилгән арилиқ *сфериниң радиуси* дәп атилиду.

Сфериниң мәркизини униң бойида ятқан қандақту бир чекити билән қошидиған кесиндини *сфериниң радиуси* дәп атайду.



15.1-сүрәт

Шуниң билән, мәркизи O чекити вә радиуси R болидиған сфера мошу O чекитидин арилиғи R-ға тәң бошлуқниң барлиқ чекитлиридин туридиған геометриялиқ фигурини тәшкил қилиду.

Сфериниң бойида ятқан һәр қандақ икки чекитни қошидиған кесиндә *сфериниң хордиси* дәп атилиду. Сфериниң мәркизи арқилиқ өтидиған хорда мошу *сфериниң диаметри* дәп атилиду.

Сфериниң мәркизи арқилиқ өтидиған тәкшилик билән кийилмиси *чоң чәмбәр* болиду.

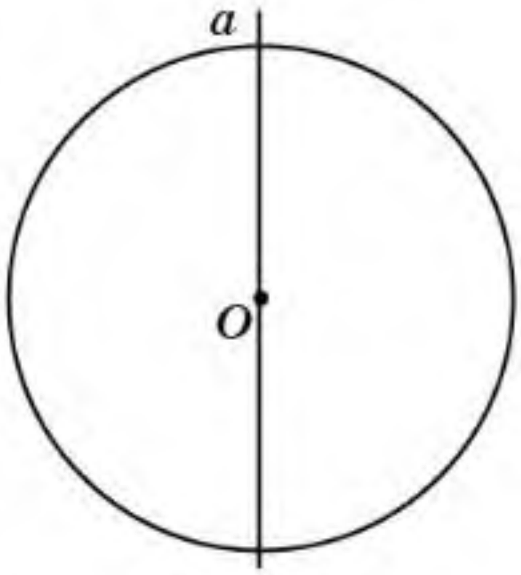
MyLibrary.kz

Сферини мошу чәмбәрни униң диаметри ятқан түздин айландуруш арқилиқ елишқа болиду (15.2-сүрәт).

Берилгән чекиттин бәлгүлүк ариліқтин ашмайдиған бошлуқниң барлиқ чекитлиридин туридиған фигура *шар* дәп атилиду.

Берилгән чекит *шарниң мәркизи*, берилгән арилиқ болса *шарниң радиуси* дәп атилиду.

Шарниң мәркизини униң бойида ятидиған қандақту бир чекити билән қошидиған кесиндиниму *шарниң радиуси* дәп атайду.



15.2-сүрәт

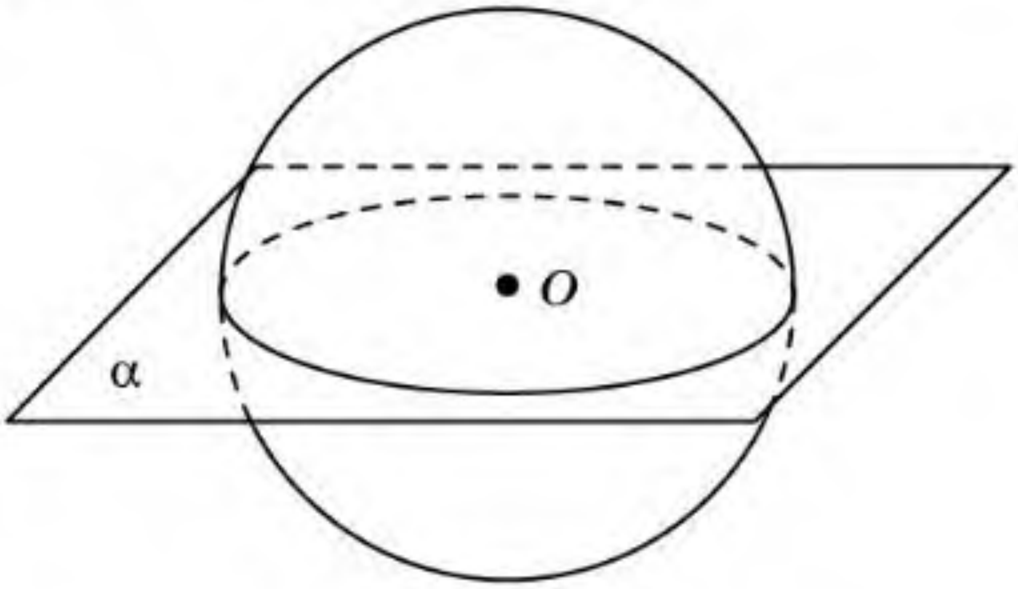
Шуниң билән мәркизи O чекити вә радиуси R болған шар мошу O чекитидин арилиғи R-дин ашмайдиған бошлуқниң барлиқ чекитлиридин туридиған геометриялиқ фигурини тәшкил қилиду.

Шарниң бетидә ятқан һәр қандақ икки чекитни қошидиған кесиндини мошу *шарниң хордиси* дәп атайду. Шарниң мәркизи арқилиқ өтидиған хорда *шарниң диаметри* дәп атилиду.

Шарниң мәркизи арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмиси *чоң дүгләк* болиду. Шарни мошу дүгләкни униң диаметри ятқан түздин айландуруш арқилиқ елишқа болиду.

Берилгән шарниң мәркизи вә радиуси билән бирдәк болидиған сфера мошу *шарниң бети* дәп атилиду.

Сфера билән тәкшиликниң өз ара орунлишиш һаләтлирини қараштурайли. Әгәр α тәкшилиги сфериниң мәркизи арқилиқ өтсә, у чағда сфериниң мошу тәкшилик билән қийилмисида чәмбәр пәйда болиду (15.3-сүрәт).



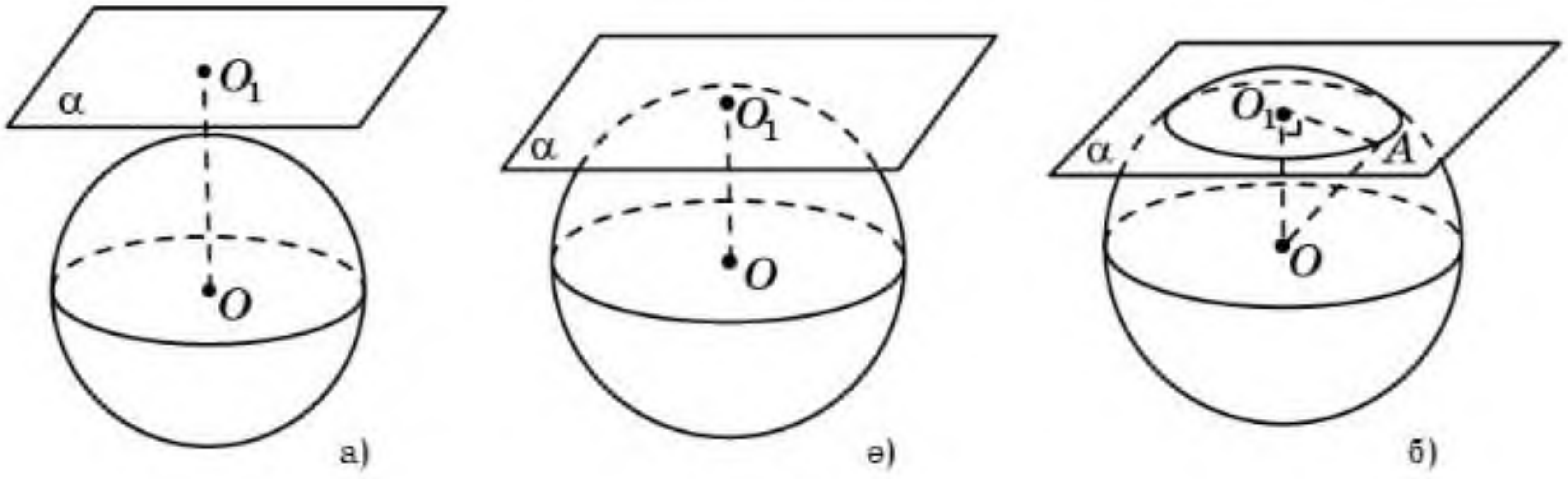
15.3-сүрәт

Әгәр α тәкшилиги сфериниң мәркизи арқилиқ өтмисә, у чағда мошу мәркәздин α тәкшилигигә OO_1 перпендикулярини чүширимиз. Бу төвәндики һаләтләрдә орунлиниши мүмкин.

1-һаләт. Әгәр OO_1 перпендикуляриниң узунлиғи сфериниң R радиусидин чоң болса, у чағда O чекитидин α тәкшилигиниң һәр қандақ

MyLibrary.kz

чекитигичә болған арилиқ R-дин чоң болиду. Демәк, бу һаләттә сфера билән тәкшиликниң умумий чекитлири болмайду (15.4, а-сүрәт).



15.4-сүрәт

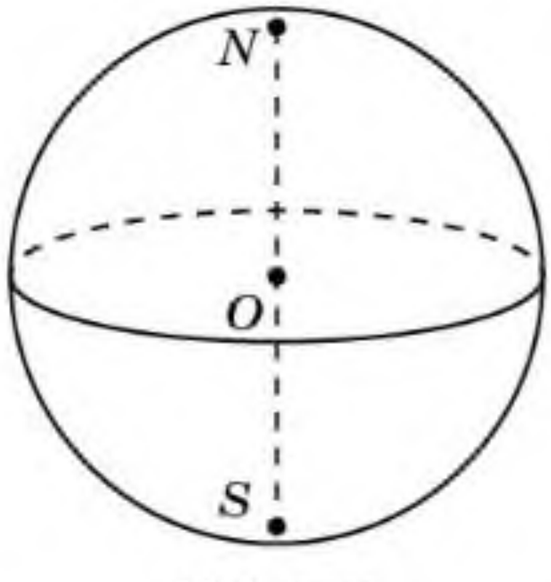
2-һаләт. Әгәр OO_1 перпендикулярининиң узунлиғи сфериниң R радиусиға тәң болса, у чағда сфера билән тәкшиликниң пәқәт бирла умумий чекити — O_1 чекити бар болиду (15.4, ә-сүрәт).

Сфера билән пәқәт бирла умумий чекити болидиған тәкшилик *сфериға яндашма тәкшилик* дәп атилиду. Бу сфера билән тәкшиликниң умумий чекити *яндашма чекити* дәп атилиду. Шуниң билән биллә мошу чекиттә *тәкшилик сфера* билән *яндишиду* дәпму атилиду.

Яндашма тәкшилик яндишиш чекитигә жүргүзүлгән сфериниң радиусиға перпендикуляр болидиғанлиғини испатлаңлар.

3-һаләт. Әгәр OO_1 перпендикулярининиң узунлиғи, йәни O чекитидин α тәкшилигигичә болған d арилиғи сфериниң R радиусидин кичик болса, у чағда сфера билән тәкшилик қийилишиду вә уларниң қийилишиш мәркизи O_1 чекити вә радиуси $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ болидиған чәмбәр болиду (15.4, б-сүрәт).

Һәқиқәтән, сфера билән α тәкшилигининиң қийилишида ятидиған қандақту бир A чекити үчүн $OO_1 = d$, $OA = R$ болидиған OO_1A тикбулуңлуқ үчбулуңлиғидин $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$ тәңлиги чиқиду. Әксичә, әгәр α тәкшилигидә ятқан А чекити үчүн бу тәңлик орунланса, у чағда $OA = R$ болиду, йәни A чекити сфериниң бойида ятиду.



15.5-сүрәт

Адәттә, сфера 15.5-сүрәттики охшаш тәсвирлиниду. Бу сүрәттә чәмбәрдин башқа:

а) сфериниң мәркизи арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмиси — *сфериниң чоң чәмбири яки экватор*;

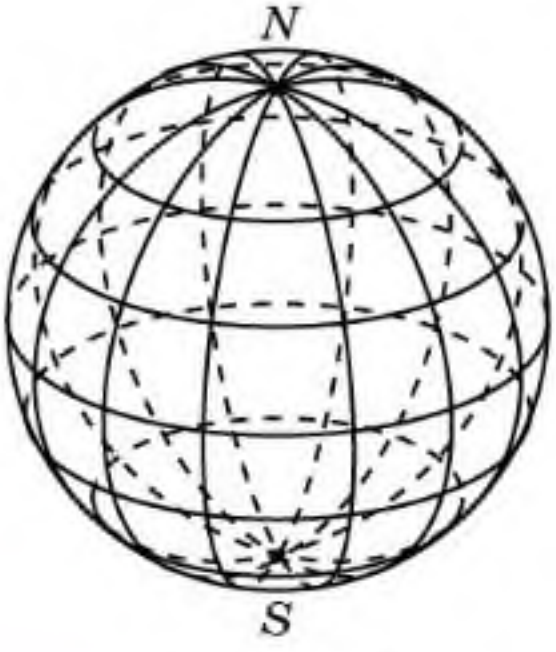
ә) сфериниң мәркизи арқилиқ өтидиған вә экватор тәкшилигигә перпендикуляр түз — *сфериниң оқи*;

MyLibrary.kz

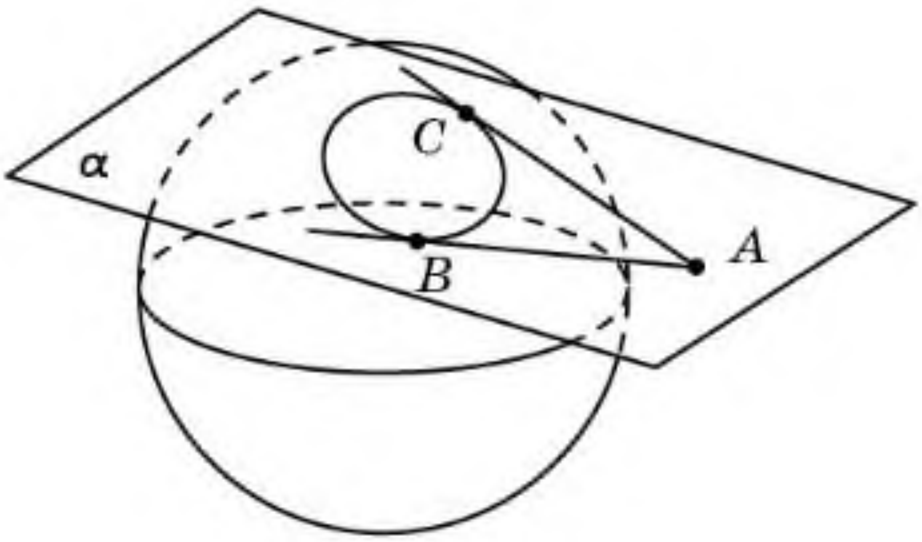
б) оқниң сфера билән қийилишиш чекитлири — *сфериниң полюслири* тәсвирләнгән. Адәттә, уларни N (шималий полюс) вә S (җәнубий полюс) һәриплири билән бәлгүләйду.

Сфериниң сүритидә полюс билән экватор таллап елинғандин кейин параллельлар билән меридианларниң тәсвирини селишқа болиду.

Параллельлар — сфериниң экватор тәкшилигигә параллель тәкшилик билән қийилмилири. *Меридианлар* — сфериниң оқи арқилиқ өтидиған тәкшиликләр билән қийилмилири (15.6-сүрәт). Адәттә, дәл мошундақ Йәр шариниң тәсвири — глобус тәсвирлиниду.



15.6-сүрәт



15.7-сүрәт

Шарниң тәкшилик билән қийилмиси қандақ фигура болиду?

Сфера билән тәкшиликниң өз ара орунлишиш һаләтлиригә охшаш сфера билән түзниң өзара орунлишишини өзәңлар қараштуруңлар.

Сфера билән пәқәт бирла умумий чекити болидиған түз сфериға *яндашма түз* дәп атилиду.

Теорема. ***Сферидин сирт ятқан бир чекиттин мошу сфериға жүргүзүлгән яндашма түзләрниң кесиндилири өз ара тәң болиду.***

Испатлиниши. AB вә AC қандақту бир A чекитидин сфериға жүргүзүлгән яндашмиларниң кесиндилири болсун, бу йәрдики B вә C — яндишиш чекитлири (15.7-сүрәт).

A, B вә C чекитлири арқилиқ өтидиған α тәкшилигини қараштурайли. Бу тәкшилик сфера билән мувапиқ B вә C чекитлиридә AB вә AC түзлири билән яндишидиған чәмбәр бойи билән қийилишиду. Чәмбәрдин сирт ятқан чекиттин мошу чәмбәргә жүргүзүлгән яндашмилар кесиндилириниң хусусийәтлири бойичә $AB = AC$ болиду. ☐

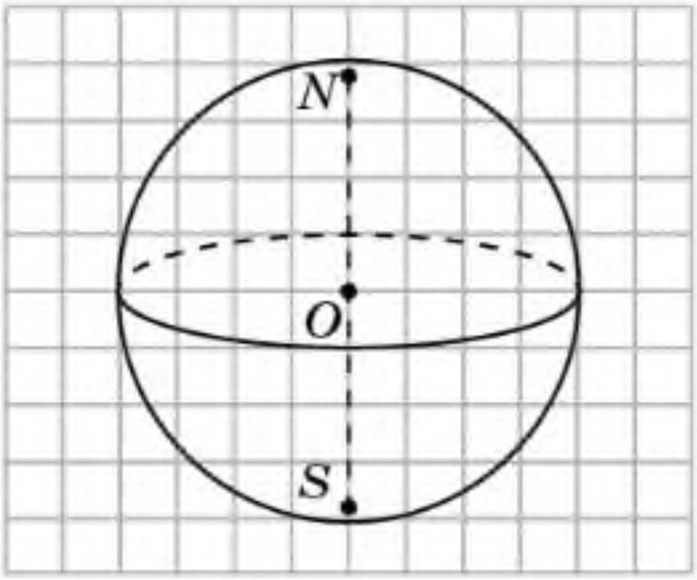
MyLibrary.kz

Соаллар

1. Қандақ фигура сфера дәп атилиду?
2. Сфериниң радиуси дегинимиз немә?
3. Сфериниң хордиси дегинимиз немә?
4. Сфериниң диаметри дегинимиз немә?
5. Қандақ фигурини айландурғанда сферини елишқа болиду?
6. Қандақ фигура шар дәп атилиду?
7. Шарниң радиуси дегинимиз немә?
8. Шарниң хордиси дегинимиз немә?
9. Шарниң диаметри дегинимиз немә?
10. Қандақ фигурини айландурғанда шарни елишқа болиду?
11. Шарниң бети дегинимиз немә?
12. Қандақ һаләттә сфера билән тәкшиликниң умумий чекити болмайду?
13. Қандақ һаләттә сфера билән тәкшиликниң бирла умумий чекити болиду?
14. Қандақ һаләттә сфера билән тәкшилик чәмбәр бойи билән кесилишиду?
15. Қандақ тәкшилик сфериға жүргүзүлгән яндашма тәкшилик дәп атилиду?
16. Қандақ түз сфериға жүргүзүлгән яндашма түз дәп атилиду?

Һесаплар

А



15.8-сүрәт

15.1. Чақмақ қәғәзгә 15.8-сүрәттикигә охшаш сферини селиңлар. Қандақту бир параллельлар билән меридианиларни тәсвирләңлар.

15.2. Мәркизи O чекити вә радиуси R болидиған: 1) шарниң ичидә ятқан; 2) шардин сирт ятқан A чекити қандақ тәңсизликни қанаәтләндүриду?

15.3. Сфериниң радиуси 4 см-ға тәң. Әгәр берилгән чекиттин сфериниң мәркизигичә болған арилиқ: 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см болса, у чағда мошу чекит сфериға нисбәтән қандақ орунлишиду?

15.4. Сфериниң мәркизи арқилиқ қанчә диаметр жүргүзүшкә болиду?

15.5. Сфериниң диаметри униң радиусидин 55 мм-ға чоң. Мошу диаметрни тепиңлар.

15.6. A вә B чекитлириниң арилиғи 2 см-ға тәң. Мошу чекитләр арқилиқ өтидиған сфериниң әң кичик радиусини тепиңлар.

15.7. Сфериниң радиуси 7 см-ға тәң вә қандақту бир тәкшилик униң мәркизидин: 1) 6 см; 2) 7 см; 3) 8 см арилиқта орунлашқан. Мошу сфера билән тәкшиликниң өз ара қандақ орунлашқанлиғини ениқлаңлар.

MyLibrary.kz

B

15.8. 1) Сфериниң бойида ятқан чекит арқилиқ; 2) сфериниң ичидә ятқан чекит арқилиқ; 3) сферидин сирт ятқан чекит арқилиқ мошу сфериға қанчә яндашма тәкшилик жүргүзүшкә болиду?

15.9. Шарниң радиуси 5 см-ға тәң. Шарниң мәркизидин 3 см арилиқтики тәкшилик билән қийилмиси болидиған дүгләкниң радиусини тепиңлар.

15.10. Сфериниң радиуси 3 см-ға тәң. Берилгән чекиттин мошу сфериниң мәркизигичә болған арилиқ 5 см. Мошу чекиттин сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндисиниң узунлиғини тепиңлар.

15.11. Сфериниң радиуси 6 см-ға тәң вә униң мәркизидин қандақту бир түз: 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 7 см арилиқта орунлашқан. Мошу сфера билән түзниң бир-биригә нисбәтән қандақ орунлашқинини ениқлаңлар.

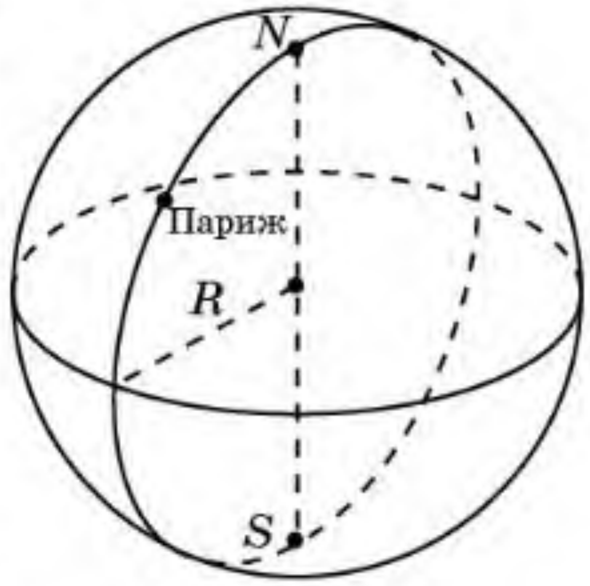
15.12. Сфериниң радиуси 3 см-ға тәң. Берилгән чекиттин мошу сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндисиниң узунлиғи 4 см-ға тәң. Мошу чекиттин сфериниң мәркизигичә болған арилиқни тепиңлар.

15.13. Сфериниң радиуси 6 см-ға тәң. Берилгән чекиттин мошу сфериниң мәркизигичә болған арилиқ 10 см. Мошу чекиттин сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндисиниң узунлиғини тепиңлар.

15.14. Берилгән чекиттин сфериниң мәркизигичә болған арилиқ 13 см-ға тәң. Мошу чекиттин сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндисиниң узунлиғи 12 см. Сфериниң радиусини тепиңлар.

15.15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ тәңлимиси билән берилгән сфера вә 1) $z = 1$; 2) $z = 2$; 3) $z = 3$ тәңлимиси билән берилгән тәкшиликниң өз ара орунлишишини ениқлаңлар.

15.16. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 16$ тәңлимиси билән берилгән сфера вә 1) $y + 1 = 0$; 2) $y - 1 = 0$; 3) $y = 2$ тәңлимиси билән берилгән тәкшиликниң өзара орунлишишини ениқлаңлар.



15.9-сүрәт

15.17. Париж меридианисиниң узунлиғи 40000 км-ға тәң. Йәр шариниң радиусини тепиңлар (15.9-сүрәт).

15.18. Сфера билән умумий чекитлири болмайдиған түз арқилиқ берилгән сфериға қанчә яндашма тәкшилик жүргүзүшкә болиду?

15.19. Сфериниң радиуси 4 см-ға тәң. Берилгән чекиттин мошу сфериниң мәркизигичә болған арилиқ 6 см. Мошу чекиттин сфериниң бойида ятқан чекитлиригичә болған әң узун вә әң қисқа арилиқларни тепиңлар.

MyLibrary.kz

C

15.20. Сферидин сирт ятқан чекиттин мошу сфериниң бойида ятқан чекитлиригичә болған әң қисқа вә әң узун ариliқлар 4 см вә 6 см. Сфериниң радиусини тепиңлар.

15.21. Шарниң радиуси 2 см-ға тәң. Радиусниң чәтки чекити арқилиқ униң билән 60° булуң ясайдиғандәк тәкшилик жүргүзүлгән. Пәйда болған қийилминиң мәйданини тепиңлар.

15.22. Бири иккинчисиниң ичидә ятмайдиған икки сфериға қанчә умумий яндашма тәкшилик жүргүзүшкә болиду?

15.23. Параллель икки тәкшилик билән яндишидиған сфериларниң мәркәзлириниң геометриялиқ орнини тепиңлар.

15.24. Сфериниң бойида ятқан чекит арқилиқ мошу сфериға жүргүзүлгән яндашма түзләрниң геометриялиқ орнини тепиңлар.

15.25. Сферидин сирт ятқан чекит арқилиқ мошу сфериға жүргүзүлгән яндашма түзләрниң кесиндилириниң геометриялиқ орнини тепиңлар.

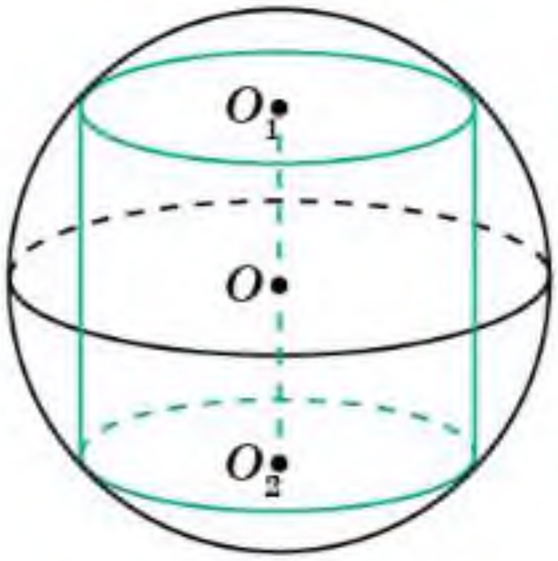
15.26. 1) $x + y + z = \sqrt{2}$; 2) $x + y + z = \sqrt{3}$; 3) $x + y + z = 2$ тәңлимиси арқилиқ берилгән тәкшилик билән $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тәңлимиси билән берилгән сфериниң өзара орунлишишини ениқлаңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

15.27. Тиктөртбулуңлуққа, үчбулуңлуққа, трапецияға ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләрниң ениқлимилирини вә уларниң радиуслирини тепиш формулилирини тәкрарлаңлар.

§ 16. Айлиниш җисимлириниң комбинациялири

"Тиктөртбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәр" вә "квадратқа ичидин сизилған чәмбәр" чүшәнчилиригә охшаш "цилиндрға сиртидин сизилған сфера" вә "цилиндрға ичидин сизилған сфера" чүшәнчилирини ениқлайли.



16.1-сүрәт

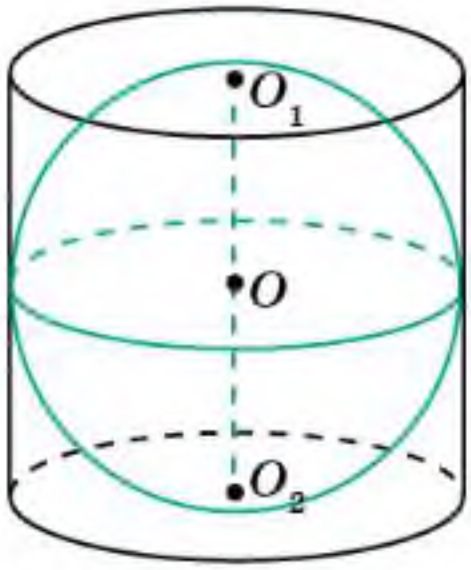
Әгәр цилиндр асаслириниң чәмбәрлири сфериниң бойида ятса, у чағда сфера *цилиндрға сиртидин сизилған* яки *цилиндр сфериға ичидин сизилған* дәп атилиду (16.1-сүрәт).

Әгәр сфера цилиндр асасиниң мәркизи вә ян бети билән (һәрбир ясиғучиси билән) яндишидиған болса, у чағда *сфера цилиндрға ичидин сизилған* яки *цилиндр сфериға сиртидин сизилған* дәп атилиду (16.2-сүрәт).

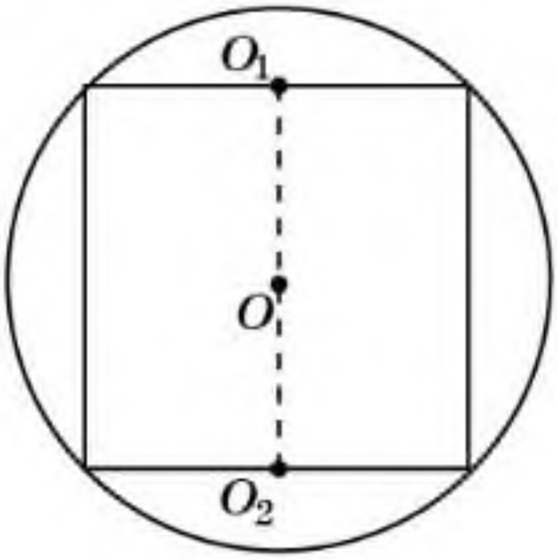
Бошлуқтики фигуриларниң комбинация-сини селиш қаидилиригә мувапиқ, фигуриға

MyLibrary.kz

ичидин сизилған фигура башқа рәң билән тәсвирләнгән болса, у чағда у туташ (көрүнидиған) сизиқлар билән бөләк фигура ретидә тәсвирлинидиғанлиғиға көңүл бөлүмиз. Биз бу йәрдә һәм буниңдин кейинму мошу қаидигә асаслинимиз.



16.2-сүрәт



16.3-сүрәт

Теорема. ***Цилиндрға сиртидин сфера сизишқа болиду. Униң радиуси мошу цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тиктөртбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.***

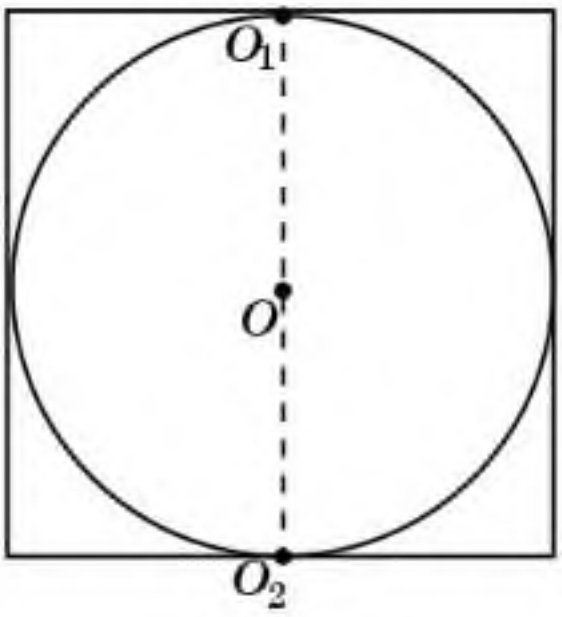
Испатлиниши. Цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тиктөртбулуңлуқ вә униңға сиртидин сизилған чәмбәрни қараштурайли (16.3-сүрәт). Цилиндр мошу тиктөртбулуңлуқни униң қариму-қарши икки тәрипиниң O_1, O_2 оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда елиниду. Чәмбәрни мошу түздин айландурғанда берилгән цилиндрға сиртидин сизилған сфера пәйда болиду. Бу сфериниң радиуси тиктөртбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду. ◻

Әгәр цилиндр асасиниң радиуси r-ға вә егизлиги h-қа тәң болса, у чағда мошу цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң R радиуси төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Теорема. ***Әгәр цилиндрниң оқлуқ қийилмиси квадрат болса, у чағда униңға ичидин сфера сизишқа болиду. Ичидин сизилған сфериниң радиуси цилиндрниң оқлуқ қийилмисиға ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.***

Испатлиниши. Цилиндрниң оқлуқ қийилмисини қараштурайли (16.4-сүрәт).



16.4-сүрәт

Әгәр цилиндрниң оқлуқ қийилмиси – тиктөртбулуңлуққа ичидин чәмбәр сизилған болса, у чағда мошу цилиндрға ичидин сфера

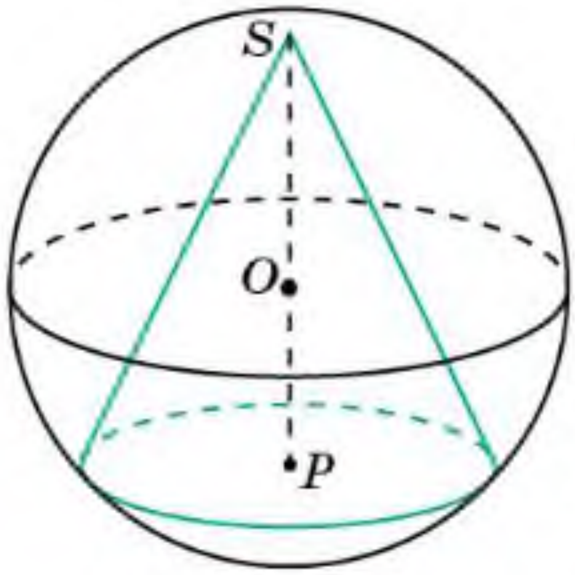
MyLibrary.kz

сизилиду. Бу тиктөртбулуңлуқ квадрат болған һаләттила орунлиниду. Демәк, ичидин сизилған сферининң радиуси цилиндрниң оқлуқ қийилмисиға ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду. ☐

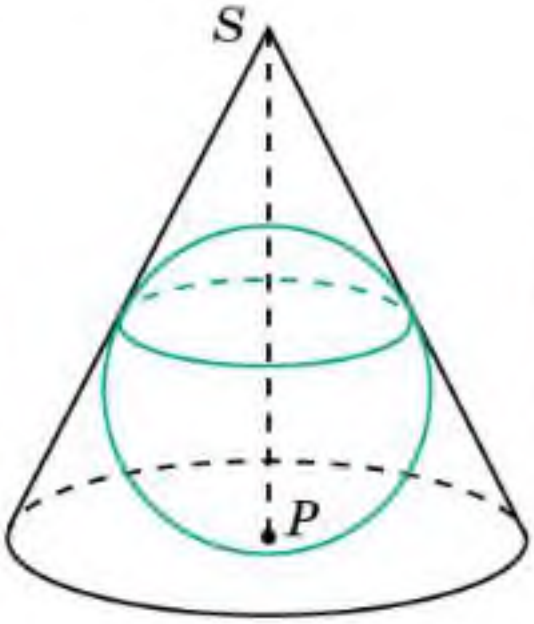
Әгәр цилиндр асасиниң радиуси R-ға тәң болса, у чағда сфериниң радиусиму R-ға тәң болиду.

"Үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәр" вә "үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәр" чүшәнчилиригә охшаш "конусқа сиртидин сизилған сфера" вә "конусқа ичидин сизилған сфера" чүшәнчилирини ениқлайли.

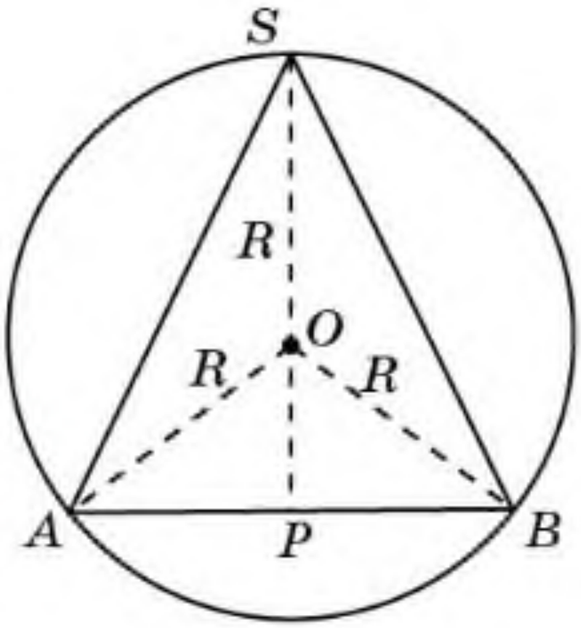
Әгәр конусниң чоққиси билән асасиниң чәмбири сфериниң бойида ятса, у чағда *сфера конусқа сиртидин сизилған* яки *конус сфериға ичидин сизилған* дәп атилиду (16.5-сүрәт).



16.5-сүрәт



16.6-сүрәт



16.7-сүрәт

Әгәр сфера конусниң асасиға вә ян бети билән (һәр бир ясиғучиси билән) яндишидиған болса, у чағда *сфера конусқа ичидин сизилған* яки *конус сфериға сиртидин сизилған* дәп атилиду (16.6-сүрәт).

Теорема. ***Конусқа сиртидин сфера сизишқа болиду. Униң радиуси мошу конусниң оқлуқ қийилмиси — үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.***

Испатлиниши. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңянлиқ үчбулуңлуқни вә униңға сиртидин сизилған чәмбәрни қараштурайли (16.7-сүрәт). Конус мошу үчбулуңлуқни униң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландурғанда елиниду. Чәмбәрни мошу түздин айландурғанда берилгән конусқа сиртидин сизилған сфера пәйда болиду. Бу сфериниң радиуси тәңянлиқ үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду. ☐

Тәрәплири a, b, c вә мәйдани S болидиған үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң R радиуси үчүн төвәндики формула орунлуқ болидиғанлиғини есимизға салайли:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

MyLibrary.kz

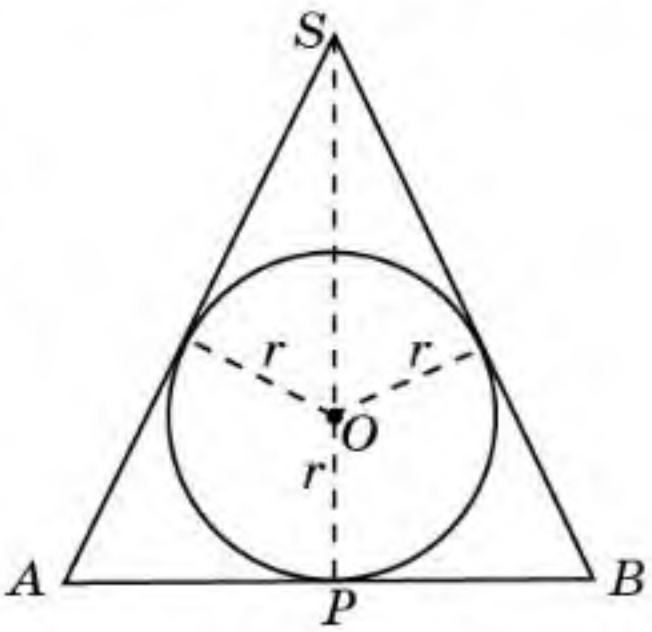
Мошу формула билән оқлуқ қийилмиси үчбулуңлуқ болидиған конусқа сиртидин сизилған сфериниң R радиусиму ениқлиниду. Бу йәрдә, a, b, c — үчбулуңлуқниң тәрәплири, S — үчбулуңлуқниң мәйдани.

1-мисал. Конус асасиниң радиуси 6 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

Йешилиши. Конусниң оқлуқ қийилмиси тәрәплири 12 см, 10 см, 10 см болидиған тәңянлиқ үчбулуңлуқ болиду. Мошу үчбулуңлуқниң асасиға чүширилгән егизлиги 8 см-ға, мәйдани болса 48 см^2-ға тәң. Демәк, конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиуси $6\frac{1}{4}$ см-ға тәң болиду.

Теорема. ***Конусқа ичидин сфера сизишқа болиду. Ичидин сизилған сфериниң радиуси конусниң оқлуқ қийилмиси — үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.***

Испатлиниши. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңянлиқ үчбулуңлуқни вә униңға ичидин сизилған чәмбәрни қараштурайли (16.8-сүрәт). Конус мошу үчбулуңлуқни униң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландурғанда елиниду. Чәмбәрни мошу түздин айландурғанда берилгән конусқа ичидин сизилған сфера пәйда болиду. Бу сфериниң радиуси тәңянлиқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду. ☐



16.8-сүрәт

Тәрәплири a, b, c вә мәйдани S болидиған үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң r радиуси үчүн төвәндики формула орунлуқ болидиғанлиғини есимизға салайли:

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

Мошу формула билән оқлуқ қийилмиси үчбулуңлуқ болидиған конусқа ичидин сизилған сфериниң r радиусиму ениқлиниду. Бу йәрдики a, b, c — үчбулуңлуқниң тәрәплири, S — үчбулуңлуқниң мәйдани.

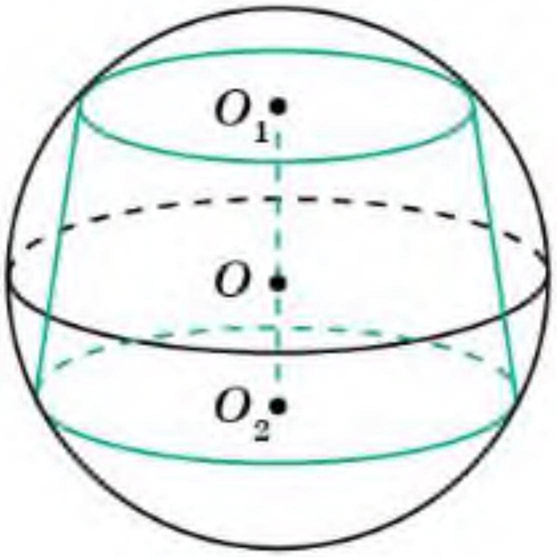
2-мисал. Конус асасиниң радиуси 6 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

Йешилиши. Конустиң оқлуқ қийилмисиниң тәрәплири 12 см, 10 см, 10 см болидиған тәңянлиқ үчбулуңлуқ болиду. Мошу үчбулуңлуқниң асасиға чүширилгән егизлиги 8 см-ға, мәйдани болса 48 см^2-ға тәң. Демәк, конусқа ичидин сизилған сфериниң радиуси 3 см-ға тәң болиду.

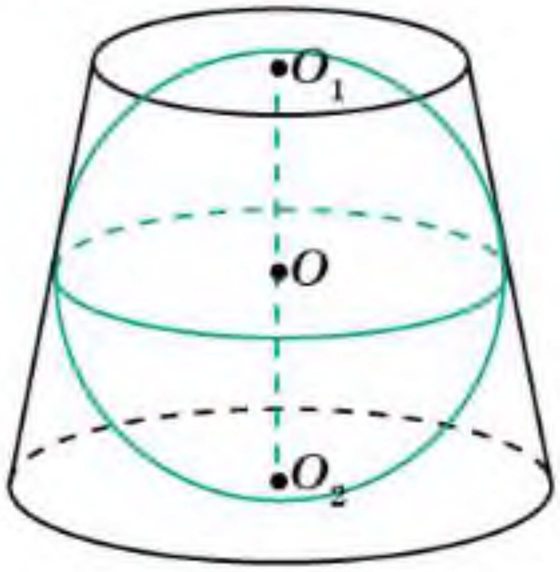
"Тәңянлиқ трапецияға сиртидин сизилған чәмбәр" вә "тәңянлиқ трапецияға ичидин сизилған чәмбәр" чүшәнчилиригә охшаш "қийиқ конусқа сиртидин сизилған сфера" вә "қийиқ конусқа ичидин сизилған сфера" чүшәнчилирини ениқлайли.

MyLibrary.kz

Әгәр қийиқ конус асаслириниң чәмбәрлири сфериниң бойида ятса, у чағда *сфера қийиқ конусқа сиртидин сизилған* яки *қийиқ конус сфериға ичидин сизилған* дәп атилиду (16.9-сүрәт).



16.9-сүрәт

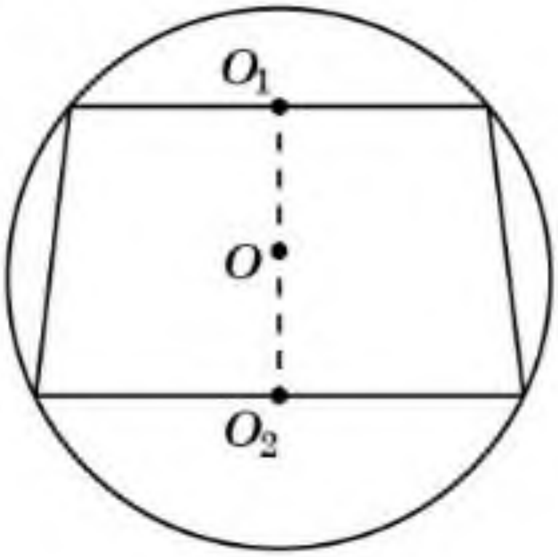


16.10-сүрәт

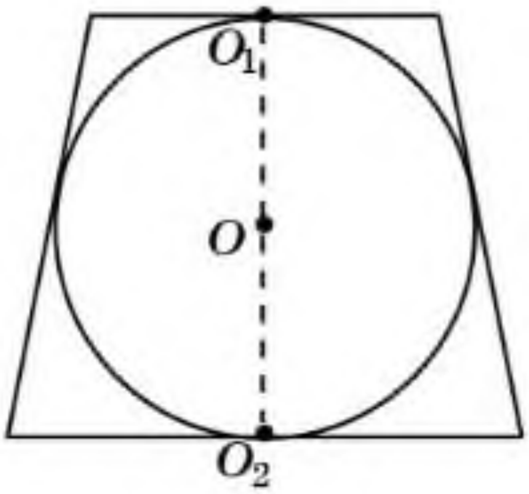
Әгәр сфера қийиқ конусниң асаслириға вә ян бетигә яндишидиған болса, у чағда *сфера қийиқ конусқа ичидин сизилған* яки *қийиқ конус сфериға сиртидин сизилған* дәп атилиду (16.10-сүрәт).

Теорема. ***Қийиқ конусқа сиртидин сфера сизишқа болиду. Униң радиуси мошу қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңянлиқ трапецияға сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.***

Испатлиниши. Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңянлиқ трапецияни вә униңға сиртидин сизилған чәмбәрни қараштурайли (16.11-сүрәт).



16.11-сүрәт



16.12-сүрәт

Қийиқ конус мошу тәңянлиқ трапецияни униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда елиниду. Чәмбәрни мошу түздин айландурғанда берилгән қийиқ конусқа сиртидин сизилған сфера пәйда болиду. Бу сфериниң радиуси тәңянлиқ трапецияға сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду. ◻

Теорема. ***Әгәр қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси асаслириниң қошундиси ян тәрәплириниң қошундисиға тәң болидиған тәңянлиқ трапеция болса, у чағда униңға ичидин сфера сизишқа болиду. Ичи-***

MyLibrary.kz

дин сизилған сфериниң радиуси қийиқ конусниң оқлуқ қийилмисиға ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.

Испатлиниши. Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмисини караштурайли (16.12-сүрәт). Әгәр қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси тәң болидиған тәңянлиқ трапецияға ичидин чәмбәр сизилған болса, у чағда мошу қийиқ конусқа ичидин сфера сизилиду. Бу мошу трапеция асаслириниң қошундиси ян тәрәплириниң қошундисиға тәң болған һаләттила орунлиниду. Мошуниңдин ичидин сизилған сфериниң радиуси қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси — трапецияға ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду. □

Соаллар

1. Қандақ сфера цилиндрға сиртидин сизилған дәп атилиду?
2. Қандақ цилиндр сфериға ичидин сизилған дәп атилиду?
3. Цилиндрға сиртидин сферини һәрдайим сизишқа боламду?
4. Қандақ сфера цилиндрға ичидин сизилған дәп атилиду?
5. Қандақ цилиндр сфериға сиртидин сизилған дәп атилиду?
6. Қандақ цилиндрға ичидин сфера сизишқа болиду?
7. Қандақ сфера конусқа сиртидин сизилған дәп атилиду?
8. Қандақ конус сфериға ичидин сизилған дәп атилиду?
9. Конусқа сиртидин сферини һәрдайим сизишқа боламду?
10. Қандақ сфера конусқа ичидин сизилған дәп атилиду?
11. Қандақ конус сфериға сиртидин сизилған дәп атилиду?
12. Конусқа ичидин сферини һәрдайим сизишқа боламду?
13. Қандақ сфера қийиқ конусқа сиртидин сизилған дәп атилиду?
14. Қандақ қийиқ конус сфериға ичидин сизилған дәп атилиду?
15. Қийиқ конусқа сиртидин сфериниң һәрдайим сизишқа боламду?
16. Қандақ сфера қийиқ конусқа ичидин сизилған дәп атилиду?
17. Қандақ қийиқ конус сфериға сиртидин сизилған дәп атилиду?
18. Қандақ қийиқ конусқа ичидин сфера сизишқа болиду?

Һесаплар

A

16.1. Сфериниң радиуси R-ға тәң. Сфериға сиртидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини вә егизлигини тепиңлар.

16.2. Цилиндрниң егизлиги h-қа тәң. Цилиндрға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

16.3. Цилиндрниң егизлиги билән асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

16.4. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиуси 2 см-ға тәң дәп елип, цилиндрниң егизлигини тепиңлар.

16.5. Цилиндрниң егизлиги 2 см-ға тәң. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиуси 2 см-ға тәң дәп елип, цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

16.6. Цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тәрәплири 3 см вә 4 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

16.7. Сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Сфериға сиртидин сизилған цилиндр бетиниң мәйданини тепиңлар.

16.8. Қийиқ конусқа ичидин сизилған сфериниң радиуси 2 см-ға тәң. Қийиқ конусниң егизлигини тепиңлар.

B

16.9. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәрипи 1 см-ға тәң тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Конусқа: 1) сиртидин сизилған; 2) ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

16.10. Конусқа сиртидин сизилған сфериниң R радиусини конусниң h егизлиги билән асасиниң r радиуси арқилиқ ипадиләңлар.

16.11. Конус асасиниң радиуси 3 см-ға, егизлиги 4 см-ға тәң. Конусқа сиртидини сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

16.12. Конусқа ичидин сизилған сфериниң R радиусини конусниң h егизлиги билән асасиниң r радиуси арқилиқ ипадиләңлар.

16.13. Конус асасиниң радиуси 3 см-ға, егизлиги 4 см-ға тәң.Конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

16.14. Конусниң ясиғучиси билән униңға сиртидини сизилған сфериниң радиуси 2 см-ға тәң. Конус асасиниң радиусини тепиңлар.

16.15. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Униң ясиғучиси асас тәкшилиги билән 45° булуң ясайду. Конусқа: 1) сиртидин сизилған; 2) ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

16.16. Конусниң ясиғучиси 1 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Конусқа: 1) сиртидин сизилған; 2) ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

C

16.17. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 2 см вә 1 см, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Қийиқ конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

16.18. Асаслириниң радиуслири R_1, R_2, ясиғучиси b-ға тәң болидиған қийиқ конусқа ичидин сизилған сфериниң r радиуси төвәндики формула билән ениқлинидиғинини испатлаңлар:

$$r = \frac{\sqrt{b^2 - (R_1 - R_2)^2}}{2}.$$

16.19. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 4 см вә 1 см, ясиғучиси 5 см-ға тәң. Қийиқ конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

16.20. Сфериға сиртидин сизилған қийиқ конус асаслириниң радиуслири 2 см-ға вә 3 см-ға тәң. Қийиқ конусниң ясиғучисини тепиңлар.

MyLibrary.kz

16.21. Сфериға сиртидин сизилған қийиқ конусниң ясиғучиси 8 см-ға, бир асасиниң радиуси 5 см-ға тәң. Қийиқ конусниң иккинчи асасиниң радиусини тепиңлар.

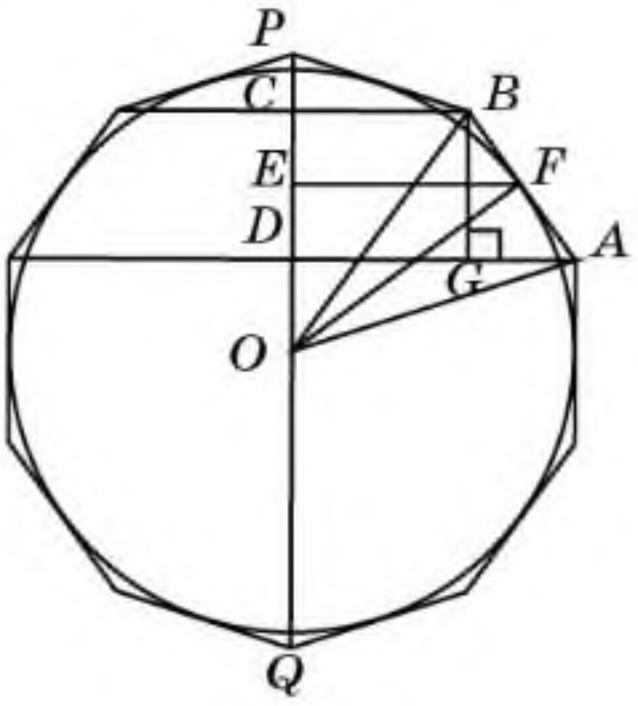
Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

16.22. Чәмбәр узунлиғиниң ениқлимисини вә чәмбәр узунлиғини тепиш формулисини тәкрарлаңлар.

§ 17. Сфериниң вә униң бөләклириниң мәйданлири

Сфера мәйданиниң ениқлимиси чәмбәр узунлиғиниң ениқлимисиға охшаш келиду.

Чәмбәргә ичидин сизилған дурус көпбулуңлуқ тәрәплириниң санини чәксиз ашурған вақиттики көпбулуңлуқ периметри интилидиған сан чәмбәр узунлиғиниң дәл мәнасини беридиғанлиғини әскә чүширимиз.



17.1-сүрәт

Чәмбәргә сиртидин сизилған дурус көпбулуңлуқни чәмбәрниң *PQ* диаметри ятидиған түздин айландурғанда пәйда болған фигурини қараштурайли (17.1-сүрәт). Бу фигуриниң бети конусниң, қийиқ конусниң вә цилиндрниң ян бәтлиридин туриду, фигуриниң өзи чәмбәрни айландурғанда пәйда болған сфериға сиртидин сизилиду. Фигура бетиниң мәйдани униңға тәәллуқ конусниң, қийиқ конусниң вә цилиндрниң ян бәтлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду.

Чәмбәрни униң диаметри ятидиған түздин айландурғанда елинған сфериниң мәйдани мошу чәмбәргә сиртидин сизилған дурус көпбулуңлуқ тәрәплириниң санини чәксиз ашуруп, айландурғанда пәйда болған фигура бетиниң мәйдани интилидиған сан *сфериниң мәйдани* болуп һесаплиниду.

Әнди радиуси *R* болидиған сфериниң мәйданини тепиш формулисини ениқлайли.

Сфериниң мәйдани дәп мошу сфера билән чәкләнгән шар бетиниң мәйданини атайду.

Чәмбәргә сиртидин сизилған *M* дурус көпбулуңлиғиниң *AB* тәрипини айландурғанда пәйда болған бетини қараштурайли. У *ABCD* тикбулуңлуқ трапециясини *CD* түзидин айландурғанда елинған қийиқ конусниң ян бетини бериду (17.1-сүрәт).

MyLibrary.kz

Мошу бәтниң $S(AB)$ мәйдани трапецияниң EF оттура сизиға радиуси болидиған чәмбәрниң узунлиғи билән AB ян тәрипиниң көпәйтиндисигә тәң болиду, йәни

$$S(AB) = 2\pi \cdot EF \cdot AB.$$

$ABCD$ тикбулуңлуқ трапециядин тапимиз: $CD = BG = AB \cdot \sin\angle BAD$. Демәк,

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD}.$$

$\angle BAD = \angle EOF$ (мувапиқ перпендикуляр тәрәплиридики булуңлар ретидә тәң) екәнлигини һесапқа елип, төвәндики тәңликни алимиз:

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD} = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle EOF} = 2\pi \cdot OF \cdot CD = 2\pi R \cdot CD.$$

Мошуниңға охшаш M көпбулуңлиғиниң башқиму тәрәплирини айландурғанда пәйда болған бәтләрниң мәйданлириниң формулилири елиниду. Мошу мәйданларни қошуп, M көпбулуңлиғини айландурғанда пәйда болған бәтниң $S(M)$ мәйданини тапимиз:

$$S(M) = 2\pi \cdot OF \cdot PQ = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

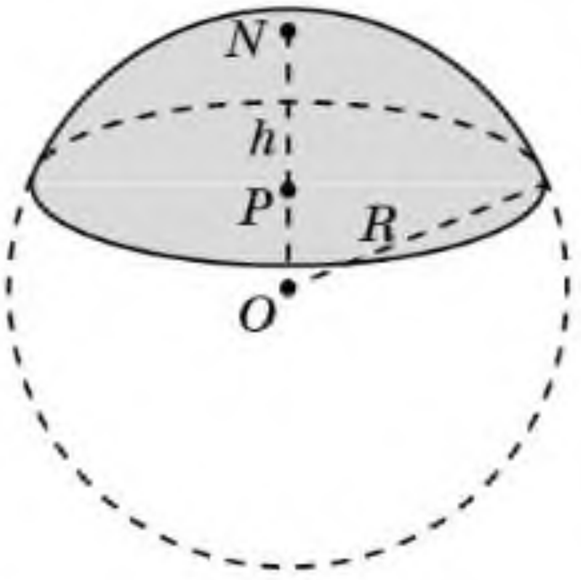
Чәмбәргә сиртидин сизилған дурус көпбулуңлуқларниң тәрәплириниң санини чәксиз ашуруп айландурғанда пәйда болидиған фигура бетиниң мәйдани интилидиған сан *сфериниң мәйдани* болуп һесаплиниду. Шуниң билән, сфериниң S мәйданини төвәндики формула билән тепишқа болиду:

$$S = 4\pi R^2.$$

Сфериниң мәйдани мошу сфериға сиртидин сизилған цилиндрниң ян бетиниң мәйданиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Шарниң мәркизи арқилиқ өтмәйдиған қандақту бир тәкшилик билән кесип елинған бөлиги *шар сегменти* дәп атилиду (17.2-сүрәт).

Шарниң мошу тәкшилик билән қийилмиси — дүгләк, йәни шар сегментини чәкләйдиған дүгләк *шар сегментиниң асаси* дәп атилиду.



17.2-сүрәт

Шарниң мошу тәкшилик билән кесип елинған бөлигиниң бети *шар сегментиниң ян бети* дәп атилиду.

Шар сегментиниң асаси билән униң ян бетиниң қошундиси *шар сегментиниң бетини* тәшкил қилиду.

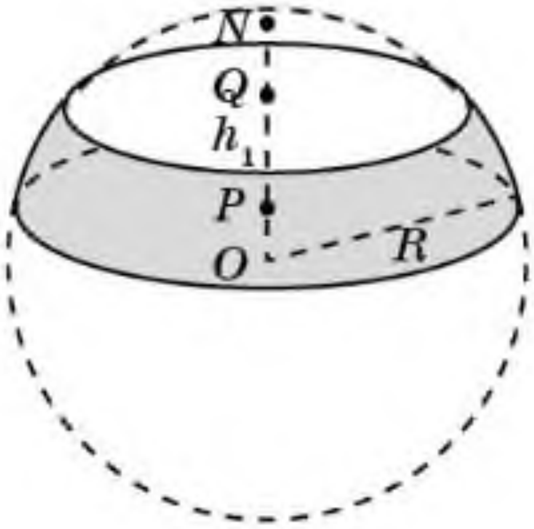
Шар сегментиниң ичидә ятидиған вә униң асасиға перпендикуляр болидиған шар радиусиниң бөлиги *шар сегментиниң егизлиги* дәп атилиду.

17.2-сүрәттики жуқарқи сегментниң егизлиги $NP = h$-қа тәң.

Шар билән қийилишидиған параллель икки тәкшиликниң арисида чәкләнгән шарниң бөлиги *шар бәлдими* дәп атилиду (17.3-сүрәт).

Шарниң мошу тәкшиликләр билән қийилмилири — дүгләкләр, йәни шар бәлдимлирини чәкләйдиған дүгләкләр *шар бәлдиминиң асаслири* дәп атилиду.

Шар билән қийилишидиған параллель икки тәкшиликниң арисида чәкләнгән шар бетиниң бөлиги *шар бәлдиминиң ян бети* дәп атилиду.



17.3-сүрәт

Шар бәлдиминиң асаслири билән униң ян бетиниң қошундиси *шар бәлдиминиң бетини* тәшкил қилиду.

Шар бәлдиминиң ичидә ятидиған вә униң асаслириға перпендикуляр болидиған шар диаметриниң бөлиги *шар бәлдиминиң егизлиги* дәп атилиду. Башқичә ейтқанда, *шар бәлдиминиң егизлиги* дәп униң асаслириниң арисидики ариliқни атайду.

17.3-сүрәттә шар бәлдиминиң егизлиги $QP = h_1$ кесиндиси тәсвирләнгән.

Жуқурида кәлтүрүлгән сфериниң мәйданини тепиш формулисини чиқириш усулини шар сегменти билән шар бәлдими үчүнму қоллинишқа болиду. Нәтиҗисидә шар сегменти бетиниң мәйдани билән шар бәлдими бетининиң мәйданини тепиш формулилирини алимиз:

$$S_{\text{сегмент}} = 2\pi R \cdot h, \ \ S_{\text{бәлдими}} = 2\pi R \cdot h_1,$$

бу йәрдә R — шар радиуси, h вә h_1 — мувапиқ шар сегментиниң вә шар бәлдиминиң егизликлири.

Соаллар

1. Сфериниң мәйдани қандақ ениқлиниду?
2. Шар бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
3. Радиуси R болидиған сфериниң мәйдани қандақ формула билән һесаплиниду?
4. Шар сегменти дегинимиз немә?
5. Шар сегментиниң ян бетиниң мәйдани қандақ формула билән һесаплиниду?
6. Шар бәлдими дегинимиз немә?
7. Шар бәлдими бетиниң мәйдани қандақ формула билән һесаплиниду?

Һесаплар

A

17.1. Радиуси 1 см-ға тәң сфериниң мәйданини тепиңлар.

17.2. Мәйдани 1 см^2-ға тәң сфериниң радиусини тепиңлар.

17.3. Шарниң чоң дүглигиниң мәйдани 3 см^2-ға тәң. Шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

17.4. Әгәр шарниң радиусы: 1) 2 һәссә; 2) 3 һәссә; 3) n һәссә ашидиған болса, у чағда униң бетиниң мәйдани қандақ өзгириду?

MyLibrary.kz

17.5. Икки шар бәтлири мәйданлириниң нисбити 4:9 дәп елип, уларниң радиуслириниң нисбитини тепиңлар.

17.6. Икки шарниң радиуслири 6 см вә 8 см. Бетиниң мәйдани берилгән шарларниң бәтлири мәйданлириниң қошундисиға тәң болидиған шарниң радиусини тепиңлар.

17.7. Шарға сиртидин цилиндр сизилған. Шар бети мәйданиниң цилиндрниң ян бетиниң мәйданиға нисбитини тепиңлар.

17.8. Оқлуқ қийилмиси бирлик квадрат болидиған цилиндрға ичидин сизилған сфера бетиниң мәйданини тепиңлар.

17.9. Оқлуқ қийилмиси бирлик квадрат болидиған цилиндрға сиртидин сизилған сфера бетиниң мәйданини тепиңлар.

17.10. Айниң диаметри Йәр шариниң диаметридин 4 һәссә кичик. Ай бетиниң мәйдани Йәр шари бетиниң мәйданидин нәччә һәссә кичик болиду?

B

17.11. Кубқа ичидин сизилған сфера бетиниң мәйдани мошу кубқа сиртидин сизилған сфера бетиниң мәйданидин нәччә һәссә кичик болиду?

17.12. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Конусқа сиртидин сизилған сфера бетиниң мәйдани мошу конусқа ичидин сизилған сфера бетиниң мәйданидин нәччә һәссә чоң болиду?

17.13. Шарниң мәркизидин 8 см арилиқта ятидиған тәкшилик билән қийилмиси болидиған дүгләкниң радиуси 6 см. Шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

17.14. Шарниң радиусиниң оттуриси арқилиқ мошу радиусқа перпендикуляр тәкшилик жүргүзүлгән. Мошу тәкшилик берилгән шар бетиниң мәйданини қандақ нисбәттә бөлиду?

17.4-сүрәт

17.15. Шарниң радиуси 2 см. Егизлиги 1 см-ға тәң шар сегментиниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

17.16. Шарниң радиуси 3 см. Егизлиги 1 см-ға тәң шар бөлдиминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

17.17. Париж меридианиниң узунлиғи тәхминән 40000 км-ға тәң. Йәр шари бетиниң мәйданини тепиңлар.

17.18. Нур-Султан шәһиридики “Бәйтерек” монументи шариниң диаметри 22 м-ға тәң (17.4-сүрәт). Мошу шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

17.19. ЭКСПО-2017 — Қазақстанниң пайтәхтидә 2017-жили Хәлиқарилиқ Көргәзмиләр бюроси уюштурған хә-

MyLibrary.kz

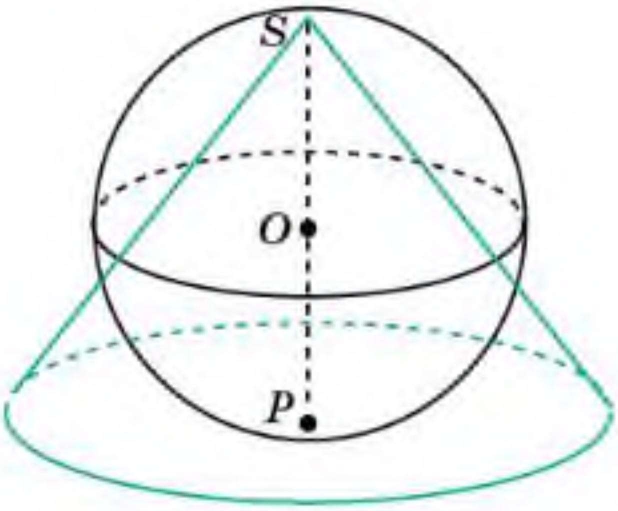
лиқарилиқ көргәзмә. Көргәзминиң мәркизий элементи — дуниядики әң чоң сферилиқ имарәт болған “Нур Әлем” комплекси (17.5-сүрәт). Униң диаметри 80 м. Мошу сфера бетиниң мәйданини тепиңлар ($\pi \approx 3$).

17.5-сүрәт

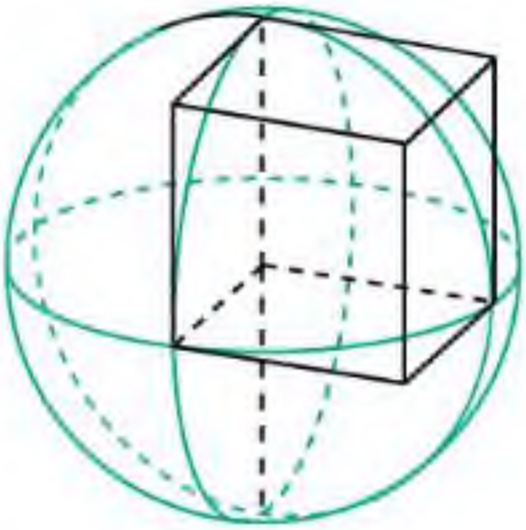
C

17.20. Шарниң радиуси 1 см-ға тәң. Униң диаметриға перпендикуляр болидиған икки тәкшилик шарниң диаметрини 1 : 2 : 3 нисбәттә бөлиду. Қийғучи тәкшиликләр билән чәкләнгән шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

17.21. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңтәрәплик үчбулуңлуқ (17.6-сүрәт). Конус бетиниң мәйдани диаметри мошу конусниң егизлиги билән бирдәк шар бетиниң мәйданиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.



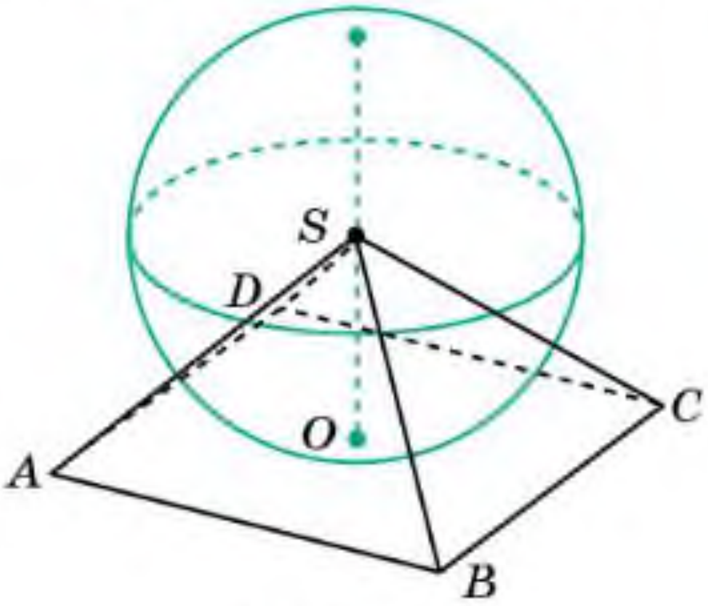
17.6-сүрәт



17.7-сүрәт

17.22. Радиуси 1 см-ға тәң шарниң мәркизи — бирлик кубниң чоққиси (17.7-сүрәт). Мошу кубниң ичидә орунлашқан шар бети бөлигиниң мәйданини тепиңлар.

17.23. Дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға, егизлиги 1 см-ға тәң. Радиуси 1 см-ға тәң шарниң мәркизи — мошу пирамидиниң чоққиси (17.8-сүрәт). Пирамидиниң ичидә орунлашқан шар бети бөлигиниң мәйданини тепиңлар.



17.8-сүрәт

MyLibrary.kz

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

17.24. Ичидин вә сиртидин сизилған көпбулуңлуқларниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар. Цилиндрға ичидин вә сиртидин сизилған призмиларни ениқлап көрүңлар.

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. Цилиндр асасиниң радиуси 3 см, ясиғучиси 8 см. Цилиндрниң оқлуқ қийилмисиниң диагоналини тепиңлар:

A) 6 см; B) 10 см; C) 12 см; D) 16 см.

2. Тиктөртбулуңлуқниң тәрәплири 1 см вә 2 см. Мошу тиктөртбулуңлуқни униң чоң тәрипи ятқан түз билән айландурғанда пәйда болған цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 4π см^2; D) 6π см^2.

3. Дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға вә ян қирлири 2 см-ға тәң. Мошу призмини униң ян қири ятқан түздин айландурғанда пәйда болған цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 4π см^2; D) 6π см^2.

4. Конус асасиниң радиуси 6 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Конусниң егизлигини тепиңлар:

A) 6 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $6\sqrt{2}$ см; D) 8 см.

5. Конусниң ясиғучиси 6 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 45° булуң ясап янтийиду. Мошу конус асасиниң радиусини тепиңлар:

A) 3 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $3\sqrt{3}$ см; D) 6 см.

6. Конус асасиниң радиуси 2 см-ға, ясиғучиси 3 см-ға тәң. Конус бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 6π см^2; B) 8π см^2; C) 10π см^2; D) 12π см^2.

7. Конус асасиниң радиуси 2 см-ға тәң. Конус егизлигиниң оттуриси арқилиқ асас тәкшилигигә параллель тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданини тепиңлар:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

8. Тәңянлиқ үчбулуңлуқниң асаси 2 см-ға вә ян тәрәплири 4 см-ға тәң. Мошу үчбулуңлуқни униң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландурғанда пәйда болған конус бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 3π см^2; B) 4π см^2; C) 5π см^2; D) 6π см^2.

MyLibrary.kz

9. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға вә ян қирлири 3 см-ға тәң. Мошу пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда пәйда болған конусниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 3π см^2; B) 4π см^2; C) 5π см^2; D) 6π см^2.

10. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 4 см вә 1 см, егизлиги 4 см-ға тәң. Қийиқ конусниң ясиғучисини тепиңлар:

A) 3 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 6 см.

11. Қийиқ конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 45° булуң ясап янтийиду. Конусниң чоң асасиниң радиусини 2 см-ға тәң дәп елип, кичик асасиниң радиусини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ см; D) $2-\sqrt{2}$ см.

12. Тәңянлиқ трапецияниң асаслири 2 см вә 4 см, ян тәрәплири болса, 3 см-ға тәң. Мошу трапецияни униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда пәйда болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 8π см^2; B) 10π см^2; C) 12π см^2; D) 14π см^2.

13. Сфериниң радиуси 4 см-ға тәң. Сферидин сирт ятқан чекиттин униң мәркизигичә болған арилиқ 5 см-ға тәң. Мошу чекиттин сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндисиниң узунлуқлирини тепиңлар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

14. Шарниң радиуси 2 см-ға тәң. Шарниң мәркизидин 1 см арилиқта болидиған тәкшилик билән қийилмиси болидиған дүгләкниң мәйданини тепиңлар:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

15. Шарниң радиуси 6 см-ға тәң. Радиусниң учи арқилиқ 60° булуң ясайдиғандәк тәкшилик жүргүзүлгән. Шарниң мошу тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданини тепиңлар:

A) 3π см^2; B) 6π см^2; C) 9π см^2; D) 12π см^2.

16. Сфериниң ичидә ятқан чекиттин сфериниң бойида ятқан чекитләргичә болған әң кичик вә әң чоң арилиқлар мувапиқ 4 см-ға вә 6 см-ға тәң. Сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 2 см; B) 3 см; C) 4 см; D) 5 см.

17. Цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тәрәплири 6 см вә 8 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 5 см; B) 6 см; C) 8 см; D) 10 см.

MyLibrary.kz

18. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәрәплири 2 см болидиған тәң-тәрәплик үчбулуңлуқ. Мошу конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.

19. Радиуси 2 см-ға тәң сфериниң мәйданини тепиңлар:

A) 12π см^2; B) 14π см^2; C) 16π см^2; D) 18π см^2.

20. Шарниң радиуси 3 см-ға тәң. Егизлиги 2 см болидиған шар бөлдиминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 6π см^2; B) 8π см^2; C) 10π см^2; D) 12π см^2.

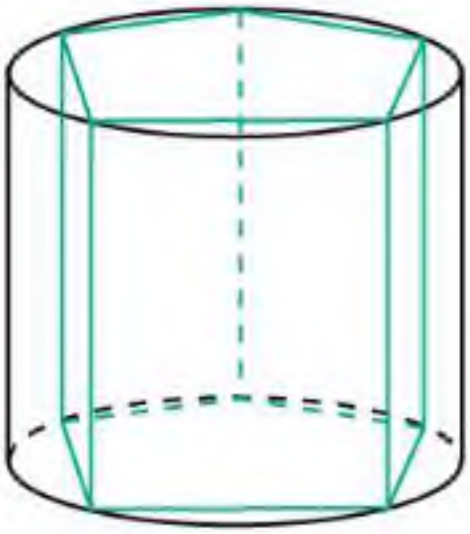
MyLibrary.kz

IV бап

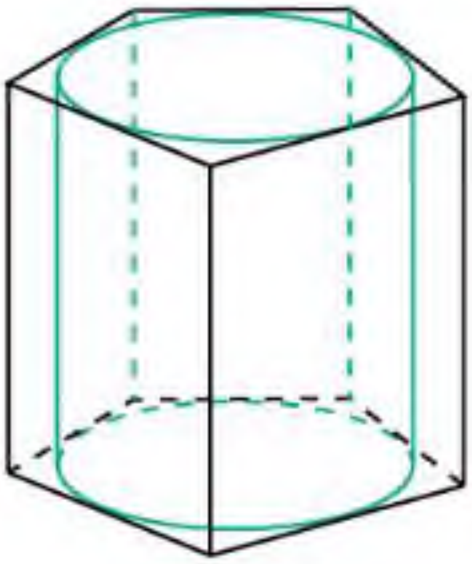
ИЧИДИН ВӘ СИРТИДИН СИЗИЛҒАН КӨПЯҚЛИҚЛАР

§ 18. Цилиндр вә призма. Конус вә пирамида

Әгәр тик призминиң асаслири цилиндр асасиға ичидин сизилған болса, у чағда призма *цилиндрға ичидин сизилған* яки *цилиндр призмиға сиртидин сизилған* дәп атилиду (18.1-сүрәт).



18.1-сүрәт



18.2-сүрәт

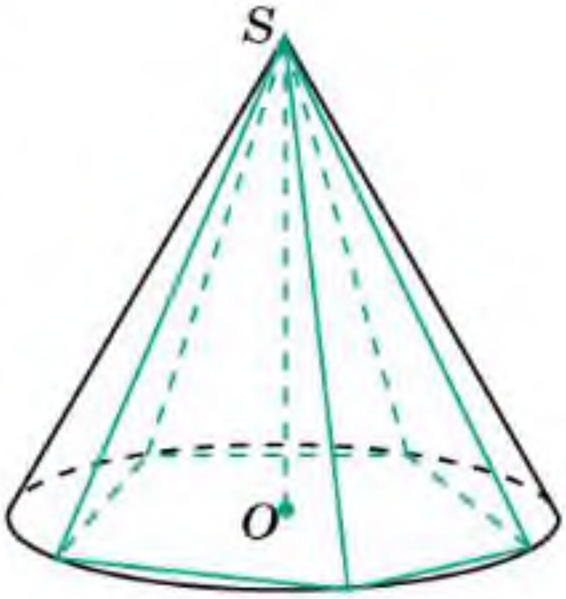
Әгәр тик призминиң асаслириға сиртидин чәмбәр сизилған болса, у чағда призмиға сиртидин цилиндр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

Әгәр тик призминиң асаслири цилиндрниң асаслириға сиртидин сизилған болса, у чағда призма *цилиндрға сиртидин сизилған* яки *цилиндр призмиға ичидин сизилған* дәп атилиду (18.2-сүрәт).

Әгәр тик призминиң асаслириға ичидин чәмбәр сизилған болса, у чағда призмиға ичидин цилиндр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

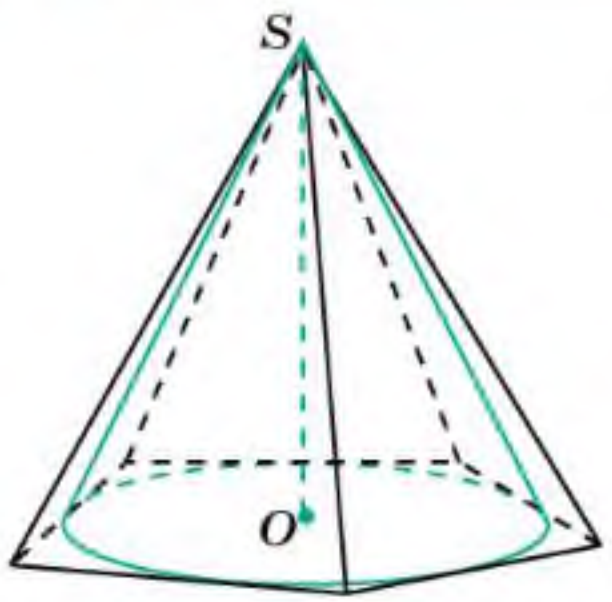
Әгәр пирамидиниң чоққиси конусниң чоққиси билән бәтлишип, асаси конусниң асасиға ичидин сизилған болса, у чағда *пирамида конусқа ичидин сизилған* яки *конус пирамидиға сиртидин сизилған* дәп атилиду (18.3-сүрәт).

Теорема. ***Әгәр пирамидиниң асасиға сиртидин чәмбәр сизилған болса вә униң егизлигиниң асаси мошу чәмбәрниң мәркизи болса, у чағда пирамидиға сиртидин конус сизишқа болиду.***



18.3-сүрәт

MyLibrary.kz



18.4-сүрәт

Испатлиниши. Әгәр пирамида егизлигиниң асаси мошу пирамидиниң асасиға сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болса, у чағда чоққиси пирамидиниң чоққиси билән мувапиқ келидиған, асаси мошу чәмбәр билән чәкләнгән дүгләк болидиған конус мошу пирамидиға сиртидин сизилиду (18.3-сүрәт).

Әксичә, әгәр конус пирамидиға сиртидин сизилған болса, у чағда пирамида асасиға сиртидин чәмбәр сизилиду. Пирамидиниң егизлиги конусниң егизлиги болиду. Демәк, пирамида егизлигиниң асаси мошу пирамидиниң асасиға сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болуп һесаплиниду. ☐

Әгәр пирамидиниң чоққиси конусниң чоққиси билән мувапиқ келип, асаси конусниң асасиға сиртидин сизилған болса, у чағда *пирамида конусқа сиртидин сизилған* яки *конус пирамидиға ичидин сизилған* дәп атилиду (18.4-сүрәт).

Теорема. ***Әгәр пирамидиниң асасиға ичидин чәмбәр сизилған болса вә униң егизлигиниң асаси мошу чәмбәрниң мәркизи болса, у чағда пирамидиға ичидин конус сизишқа болиду.***

Испатлиниши. Әгәр пирамидиниң асасиға ичидин чәмбәр сизилған болса вә униң егизлигиниң асаси мошу чәмбәр мәркизи болса, у чағда чоққиси пирамидиниң чоққиси билән мувапиқ келидиған, асаси болса мошу чәмбәр билән чәкләнгән дүгләк болидиған конус пирамидиға ичидин сизилиду (18.4-сүрәт).

Әксичә, әгәр конус пирамидиға ичидин сизилған болса, у чағда пирамидиниң асасиға ичидин чәмбәр сизилиду. Пирамидиниң егизлиги конусниң егизлиги болиду. Демәк, пирамида егизлигиниң асаси мошу пирамидиниң асасиға ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болуп һесаплиниду. ☐

Соаллар

1. Қандақ призма цилиндрға ичидин сизилған дәп атилиду?
2. Қандақ призмиға сиртидин цилиндр сизишқа болиду?
3. Қандақ призма цилиндрға сиртидин сизилған дәп атилиду?
4. Қандақ призмиға ичидин цилиндр сизишқа болиду?
5. Қандақ пирамида конусқа ичидин сизилған дәп атилиду?
6. Қандақ пирамидиға сиртидин конус сизишқа болиду?
7. Қандақ пирамида конусқа сиртидин сизилған дәп атилиду?
8. Қандақ пирамидиға ичидин конус сизишқа болиду?

MyLibrary.kz

A

18.1. 1) Кубқа; 2) тикбулуңлуқ параллелепипедқа; 3) янту параллелепипедқа; 4) тик үчбулуңлуқ призмиға; 5) дурус n-булуңлуқ призмиға сиртидин цилиндр сизишқа боламду?

18.2. 1) Кубқа; 2) тәрәплири квадрат әмәс тикбулуңлуқ параллелепипедқа; 3) янту параллелепипедқа; 4) тик үчбулуңлуқ призмиға; 5) дурус n-булуңлуқ призмиға ичидин цилиндр сизишқа боламду?

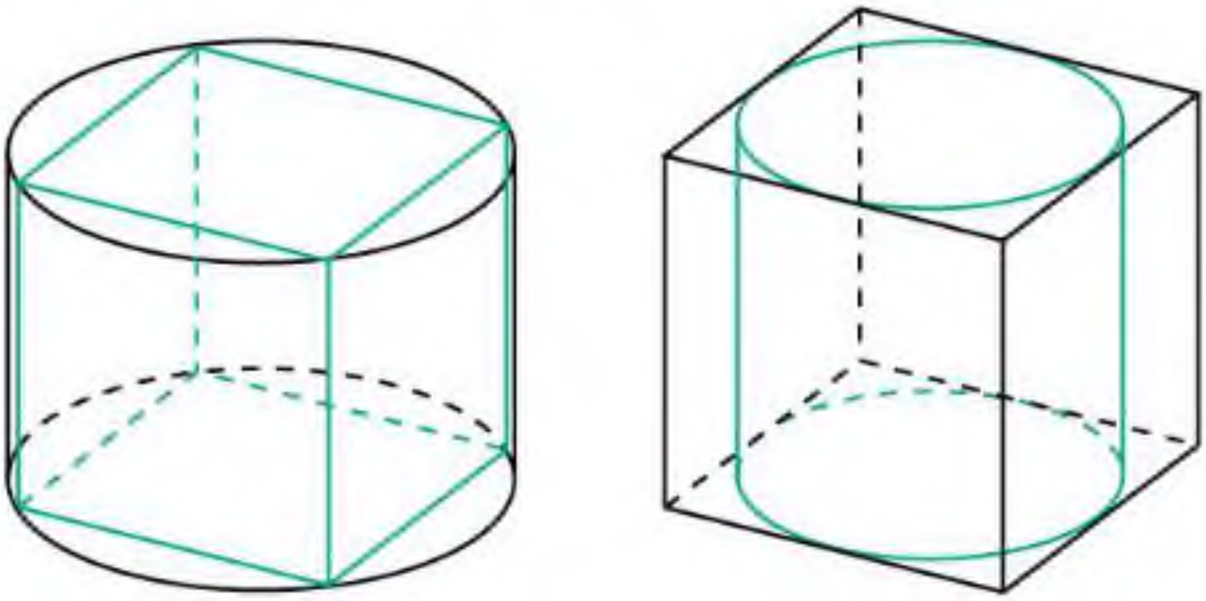
18.3. Дурус пирамидиға сиртидин конус сизишқа боламду?

18.4. Дурус пирамидиға ичидин конус сизишқа боламду?

18.5. Қандақ һаләттә тикбулуңлуқ параллелепипедқа ичидин цилиндр сизишқа болиду?

18.6. Бирлик кубқа сиртидин сизилған цилиндрниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар (18.5-сүрәт).

18.7. Бирлик кубқа ичидин сизилған цилиндрниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар (18.6-сүрәт).



18.5-сүрәт 18.6-сүрәт

B

18.8. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 1 см, 2 см, 3 см-ға тәң. Мошу параллелепипедқа сиртидин сизилған цилиндрниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар. Мошуниңға охшаш цилиндрлар қанчә болиду?

18.9. Дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң егизлиги вә асасиниң радиусини тепиңлар.

18.10. Дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрниң егизлиги вә асасиниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

18.11. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар.

18.12. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар.

18.13. Дурус пирамидиниң ян қирлири 1 см-ға тәң вә улар асас тәкшилиги билән: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° булуң ясайду. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған конус асасиниң радиусини тепиңлар.

C

18.14. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған конусниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар.

18.15. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған конусниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар.

18.16. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған конусниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар.

18.17. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған конусниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар.

18.18. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған конусниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар.

18.19. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған конусниң егизлигини вә асасиниң радиусини тепиңлар.

18.20. Әгәр төртбулуңлуқ призмиға сиртидин цилиндр сизилған болса, у чағда мошу призминиң ян қирлиридики қариму-қарши ятқан иккияқлиқ булуңлириниң қошундилири өзара тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

18.21. Әгәр төртбулуңлуқ пирамидиға ичидин конус сизилған болса, у чағда мошу пирамидиниң чоққисидики төртяқлиқ булуңниң қариму-қарши ятқан тәкши булуңлириниң қошундилири өзара тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

18.22. Әгәр төртбулуңлуқ пирамидиға сиртидин конус сизилған болса, у чағда мошу пирамидиниң чоққисидики төртяқлиқ булуңниң қариму-қарши ятқан иккияқлиқ булуңлириниң қошундилири өзара тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

MyLibrary.kz

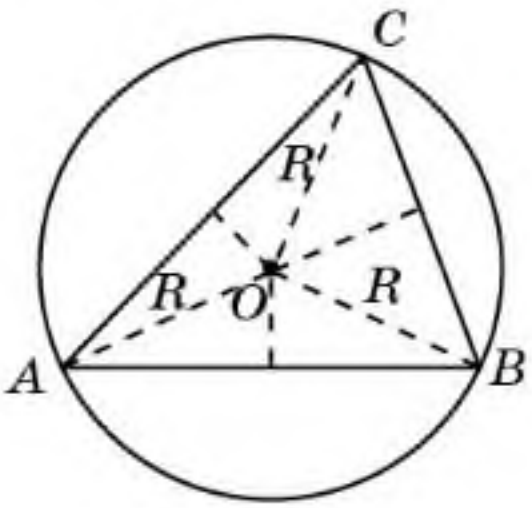
18.23. Призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң вә цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§ 19. Сфериға ичидин сизилған көпяқлиқлар. Призма

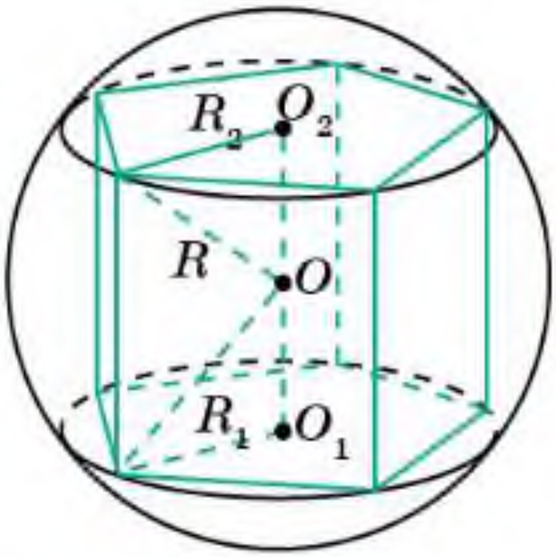
Көпбулуңлуқлар билән чәмбәргә бағлиқ ениқлимиларни әскә чүширәйли.

Әгәр көпбулуңлуқниң барлиқ тәрәплири чәмбәр сизиғида ятса, у чағда *көпбулуңлуқ чәмбәргә ичидин сизилған* яки *чәмбәр көпбулуңлуққа сиртидин сизилған* дәп атилиду.

Планиметрия курсида һәрқандақ үчбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғи испатланған. Үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи униң тәрәплиригә жүргүзүлгән оттура перпендикулярларниң қийилишиш чекити болиду (19.1-сүрәт).



19.1-сүрәт



19.2-сүрәт

Әнди бошлуқтики фигуриларни қараштурайли.

Әгәр көпяқлиқниң барлиқ чоққилири сфера бетидә ятса, у чағда *көпяқлиқ сфериға ичидин сизилған* яки *сфера көпяқлиққа сиртидин сизилған* дәп атилиду.

Теорема. ***Әгәр тик призминиң асасиға сиртидин чәмбәр сизилған болса, у чағда мошу призмиға сиртидин сфера сизишқа болиду.***

Испатлиниши. Асасиға сиртидин чәмбәр сизилған тик призмини қараштурайли. Чәмбәрниң мәркизи O_1 чекити вә радиуси R_1 болсун. Шу чағда призминиң иккинчи асасиға мәркизи O_2 чекити вә радиуси $R_2 = R_1$ болидиған чәмбәрни сиртидин сизишқа болиду. O_1O_2 кесиндиси призминиң егизлиги болиду. $O_1O_2 = h$, O чекити O_1O_2 кесиндисиниң оттуриси болсун. Мошуниңдин мәркизи O чекити вә радиуси $R = \sqrt{R_1^2 + \frac{h^2}{4}}$ болидиған сфера издиливатқан сфера болуп һесаплиниду (19.2-сүрәт).

MyLibrary.kz

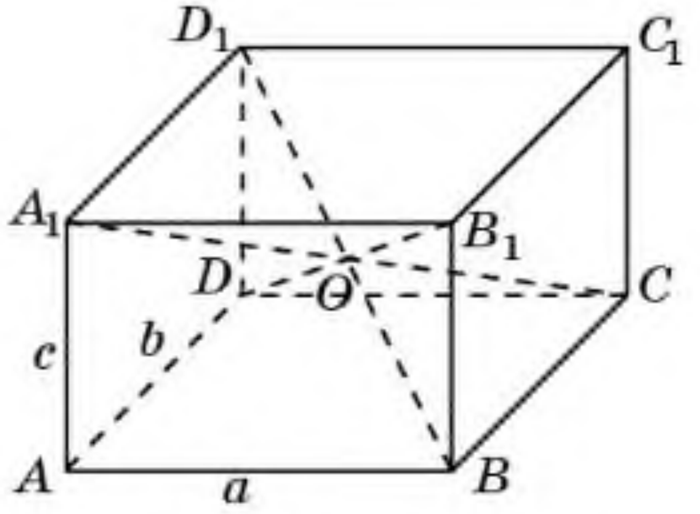
Әксичә, әгәр тик призмиға сиртидин сфера сизишқа болса, у чағда призма асасиниң барлиқ чоққилири сфериниң бойида ятиду. Демәк, улар сфера билән призминиң асас тәкшилигиниң қийилишиш сизиғи болидиған чәмбәр бойида ятиду. Ундақ болса, мошу тик призминиң асасиға сиртидин чәмбәр сизишқа болиду. ☐

1-ақивәт. Призмиға сиртидин сизилған сфера, мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрға сиртидин сизилған сфера болуп һесаплиниду.

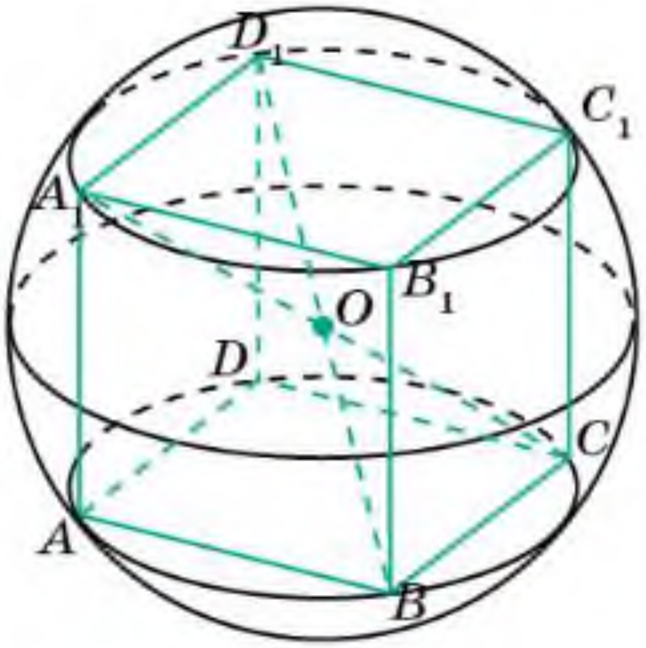
2-ақивәт. Тикбулуңлуқ параллелепипедқа сиртидин сфера сизишқа болиду.

Һәқиқәтәнму тикбулуңлуқ параллелепипедни асаси тик төртбулуңлуқ болған тик призминиң айрим һалити ретидә қараштурушқа болиду. Тиктөртбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиқтин, тикбулуңлуқ параллелепипедқа сиртидин сфера сизишқа болиду.

Тикбулуңлуқ параллелепипедниң диагональлири бир чекиттә қийилишиду вә қийилишиш чекитидә тәң иккигә бөлүниду. Демәк бу чекит мошу у параллелепипедниң барлиқ чоққилиридин бирдәк арилиқта болиду, йәни сиртидин сизилған сфериниң мәркизи болиду (19.3-сүрәт).



19.3-сүрәт



19.4-сүрәт

Әгәр тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири a, b, c болса, у чағда униң диагональлири $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$-қа тәң болиду. Шуниң билән тикбулуңлуқ параллелепипедқа сиртидин сизилған сфериниң R радиуси төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Айрим һаләттә қири a болған кубқа сиртидин сизилған сфериниң радиуси $\frac{\sqrt{3}}{2}a$-ға тәң болиду.

19.4-сүрәттә сфериға ичидин сизилған куб тәсвирләнгән.

Сиртидин сфера сизишқа болмайдиған призмиға мисал кәлтүрүңлар.

MyLibrary.kz

Соаллар

1. Қандақ көпяқлиқ сфериға ичидин сизилған дәп атилиду?
2. Қандақ сфера көпяқлиққа сиртидин сизилған дәп атилиду?
3. Тикбулуңлуқ параллелепипедқа сиртидин сфера сизишқа боламду?
4. Тикбулуңлуқ параллелепипедқа сиртидин сизилған сфериниң мәркизи қәйәрдә орунлашқан?
5. Қандақ тик призмиға сиртидин сфера сизишқа болиду?

Һесаплар

A

19.1. 1) Кубқа; 2) тикбулуңлуқ параллелепипедқа; 3) бир йеқи параллелограмм болидиған параллелепипедқа сиртидин сфера сизишқа боламду?

19.2. Бирлик кубқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

19.3. Радиуси 1 см-ға тәң сфериға ичидин сизилған кубниң қирини тепиңлар.

19.4. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң қирлири 1 дм, 2 дм вә 2 дм-ға тәң. Мошу параллелепипедқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

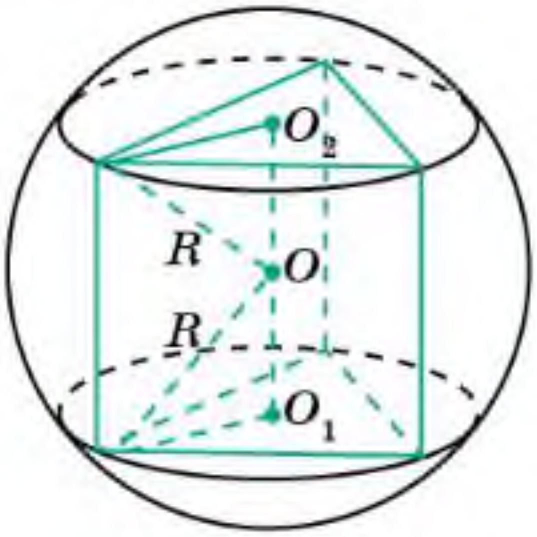
B

19.5. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см вә 4 см-ға тәң. Параллелепипедқа сиртидин сизилған сфериниң радиуси 3 см-ға тәң. Параллелепипедниң шу чоққисидин чиқидиған үчинчи қирини тепиңлар.

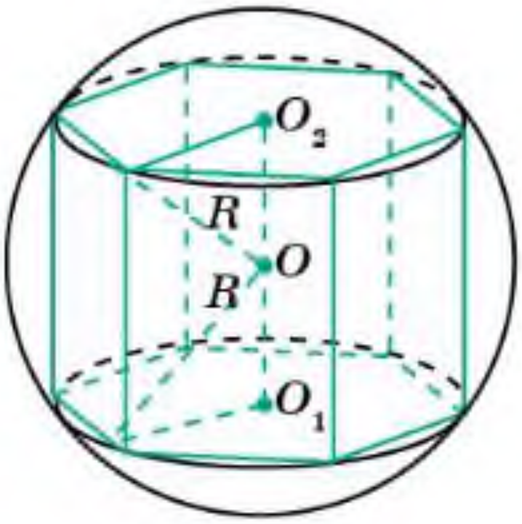
19.6. Сиртидин сфера сизишқа болмайдиған тик призмиға мисал кәлтүрүңлар.

19.7. Призмиға сиртидин сизилған сфериниң мәркизи һәр дайим призминиң ичидә ятамду?

19.8. Дурус үчбулуңлуқ призминиң егизлиги 2 см-ға, асасиниң тәрипи 1 см-ға тәң (19.5-сүрәт). Призмиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.



19.5-сүрәт



19.6-сүрәт

MyLibrary.kz

19.9. Дурус алтəбулуңлуқ призминиң егизлиги 2 см-ға, асасиниң тəрəплири 1 см-ға тəң (19.6-сүрəт). Мошу призмиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

C

19.10. Қандақ һалəттə тик үчбулуңлуқ призмиға сиртидин сизилған сфериниң мəркизи: 1) призминиң ичидə; 2) призминиң бир ян йеқида; 3) призминиң сиртида ятиду?

19.11. Тик призминиң егизлиги 24 см-ға тəң, асасиниң тəрəплири 6 см, 8 см вə 10 см болған үчбулуңлуқ. Мошу призмиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

19.12. Дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тəрəплири 1 см-ға тəң. Мошу призмиға сиртидин сизилған сфериниң радиуси 1 см-ға тəң. Призминиң егизлигини тепиңлар.

19.13. Призминиң асаси — тəрəплири 1 см вə 2 см болған тик төртбулуңлуқ. Мошу призмиға сиртидин сизилған сфериниң радиуси 2 см-ға тəң. Призминиң егизлигини тепиңлар.

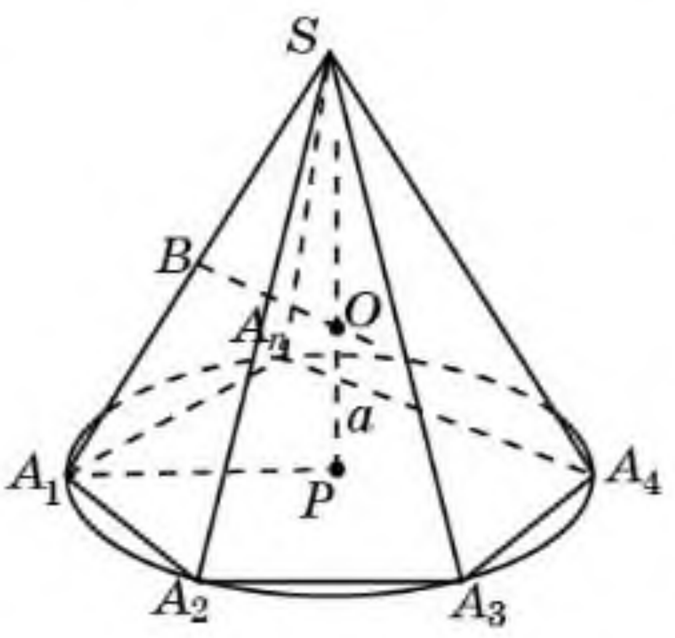
19.14. Əгəр төртбулуңлуқ призмиға сиртидин сфера сизишқа болса, у чағда мошу призминиң ян қирлиридики қариму-қарши ятқан иккияқлиқ булуңлириниң қошундилири өз ара тəң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

19.15. Пирамидиға сиртидин сизилған конусниң вə конусқа сиртидин сизилған сфериниң ениқлимилирини тəкрарлаңлар.

§20. Сфериға ичидин сизилған көпяқлиқлар. Пирамида

Теорема. ***Əгəр пирамидиниң асасиға сиртидин чəмбəр сизишқа болса, у чағда мошу пирамидиға сиртидин сфера сизишқиму болиду.***



20.1-сүрəт

Испатлиниши. $SA_1...A_n$ пирамидисини қараштурайли вə униң $A_1...A_n$ асасиға сиртидин чəмбəр сизилған болсун (20.1-сүрəт). Чəмбəр мəркизини P дəп бəлгүлəйли.

A_1, ... , A_n чекитлиридин бирдəк ариликта ятқан чекитлəрниң геометриялиқ орни P чекити арқилиқ өтидиған вə пирамидиниң α тəкшилигигə перпендикуляр болидиған a түзи болуп һесаплиниду. A_1, S чекитлиридин бирдəк ариликта ятқан чекитлəрниң геометриялиқ орни пирамидиниң SA_1 қириға перпендикуляр

вә униң оттуриси B арқилиқ өтидиған β тәкшилиги болиду. β тәкшилиги α тәкшилигигә перпендикуляр әмәс. Демәк, у a түзи билән пирамидиниң барлиқ чоққилиридин бирдәк арилиқта ятқан қандақту бир O чекитидә қийилишиду. Мошуниңдин O чекити берилгән пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң мәркизи болиду.

Әксичә, әгәр пирамидиға сиртидин сфера сизишқа болса у чағда мошу пирамида асасиниң барлиқ чоққилири сфера бойида ятиду. Демәк, улар сфера билән пирамидиниң асас тәкшилигиниң қийилишиш сизиғи болидиған чәмбәр бойида ятиду. Ундақ болса мошу пирамидиниң асасиға сиртидин чәмбәр сизишқа болиду. ▢

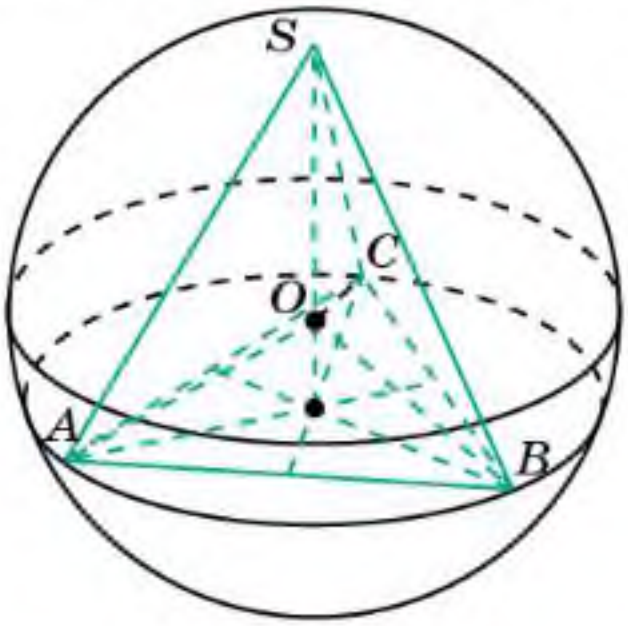
1-ақивәт. Һәрқандақ үчбулуңлуқ пирамидиға сиртидин сфера сизишқа болиду.

Һәқиқәтәнму үчбулуңлуқ пирамидиниң асаси — үчбулуңлуқ вә һәрқандақ үчбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиқтин, һәр қандақ үчбулуңлуқ пирамидиға сиртидин сфера сизишқа болиду.

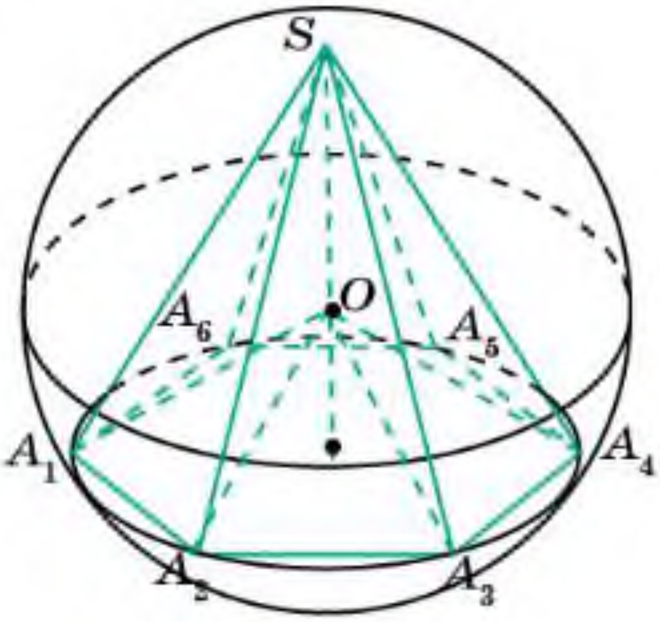
Әгәр пирамидиниң асасиға сиртидин чәмбәр сизишқа болса вә чәмбәрниң мәркизи пирамида егизлигиниң асаси болса, у чағда мошу пирамидиға сиртидин конус сизишқа болиду. Мошу конусқа сиртидин сизилған сфера пирамидиғиму сиртидин сизилған болиду.

2-ақивәт. Дурус пирамидиға сиртидин сфера сизишқа болиду.

20.2-сүрәттә дурус үчбулуңлуқ вә алтәбулуңлуқ пирамидиларға сиртидин сизилған сферилар тәсвирләнгән.



а)



ә)

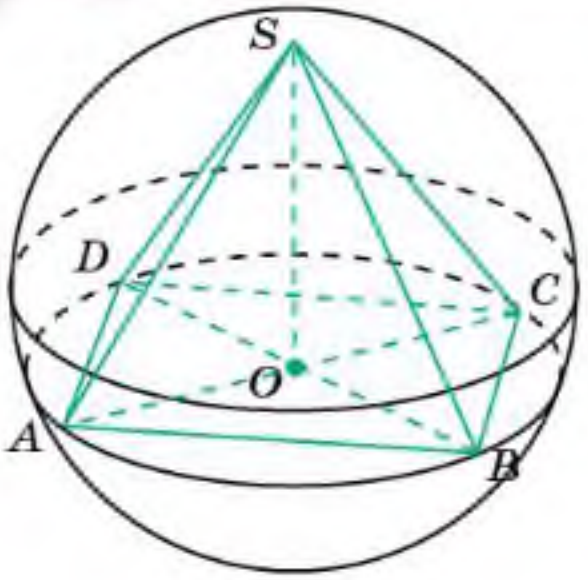
20.2-сүрәт

3-ақивәт. Әгәр пирамидиға сиртидин конус сизишқа болса, у чағда униңға сиртидин сфера сизишқиму болиду. Бу сфера мошу пирамидиға сиртидин сизилған конусқиму сиртидин сизилған болиду.

Шуниң билән, пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиш үчүн мошу пирамидиға сиртидин сизилған конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепишқа беғишланған формулини пайдилинишқа болиду.

Мисал. $SABCD$ пирамидисиниң асаси — тәрәплири 1 см вә 2 см болған $ABCD$ тиктөртбулуңлуқ. Пирамидиниң егизлиги 2 см вә униң

MyLibrary.kz



20.3-сүрәт

асаси $ABCD$ тик төртбулуңлиғиниң диагональлириниң қийилишиш чекити болиду. Мошу пирамидиға сиртидин сфера сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар вә униң радиусини тепиңлар.

Йешилиши. $ABCD$ тиктөртбулуңлуғиға сиртидин чәмбәр сизишқа болиду вә униң мәркизи — тик төртбулуңлуқниң диагональлириниң қийилишиш O чекити вә радиуси $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см-ға тәң. SAC үчбулуңлуғини униң асасиға чүширилгән егизлиги ятқан түзниң бойи билән айландурғанда һасил болған конус $SABCD$ пирамидисиға сиртидин сизилиду. Мошу конусқа сиртидин сизилған сфера берилгән пирамидиғиму сиртидин сизилған болуп һесаплиниду (20.3-сүрәт).

Конусниң оқлуқ қийилмиси болидиған SAC үчбулуңлуғида $AC = \sqrt{5}$, $SO = 2$, $SA = SC = \frac{\sqrt{21}}{2}$ см вә мәйдани $\sqrt{5}$ см^2-ға тәң болиду. Тепилған мәналарни конусқа сиртидин сизилған сфериниң R радиуси үчүн $R = \frac{abc}{4S}$ формулисиға қоюп тапимиз: $R = 1\frac{5}{16}$. Шуниң билән, берилгән пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиуси $1\frac{5}{16}$ см-ға тәң болиду.

Пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң R радиусини униң h егизлиги билән пирамидиниң асасиға сиртидин сизилған чәмбәрниң r радиуси арқилиқ ипадиләңлар.

Соаллар

1. Қандақ пирамидиға сиртидин сфера сизишқа болиду?
2. Қандақ үчбулуңлуқ пирамидиға сиртидин сфера сизишқа болиду?
3. Дурус пирамидиға сиртидин сфера сизишқа боламду?
4. Пирамидиға сиртидин сизилған сфера билән конусниң радиуслири өзара қандақ бағлиништа болиду?

Һесаплар

А

20.1. Берилгән икки чекиттин бирдәк ариliқта ятқан бошлуқтики чекитләрниң геометриялиқ орнини көрситиңлар.

20.2. 20.2, 20.3-сүрәтләргә охшаш сфериға ичидин сизилған: 1) үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) алтәбулуңлуқ пирамидини селиңлар .

20.3. Дурус пирамидиниң егизлиги 1 см-ға, ян қирлири болса 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

20.4. Дурус пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси болса 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.5. Дурус пирамидиниң егизлиги 2 см-ға, асасиға сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси болса 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

B

20.6. Дурус тетраэдрниң қирлири 1 см-ға тәң. Мошу тетраэдрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.7. Бирлик сфериға ичидиин сизилған дурус тетраэдрниң қирини тепиңлар.

20.8. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.9. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 1 см-ға тәң, асасиниң тәрәплири 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.10. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.11. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги вә асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.12. Дурус пирамидиниң ян қирлири 1 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° булуң ясайду. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.13. Сиртидин сфера сизишқа болмайдиған пирамидиға мисал кәлтүрүңлар.

C

20.14. Пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң мәркизи: 1) пирамидиниң ичидә; 2) пирамидиниң асасида; 3) пирамидидин сирт ятамду? Сфериға ичидин сизилған пирамидиларни селиңлар.

20.15. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги $\sqrt{3}$ см-ға, асасиниң тәрәплири 3 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфера мәркизиниң орунлишишини көрситиңлар вә униң радиусини тепиңлар.

20.16. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 1 см-ға тәң, чоққисидики тәкши булуңлири 90°-қа тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.17. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфера мәркизиниң орунлишишини көрситиңлар.

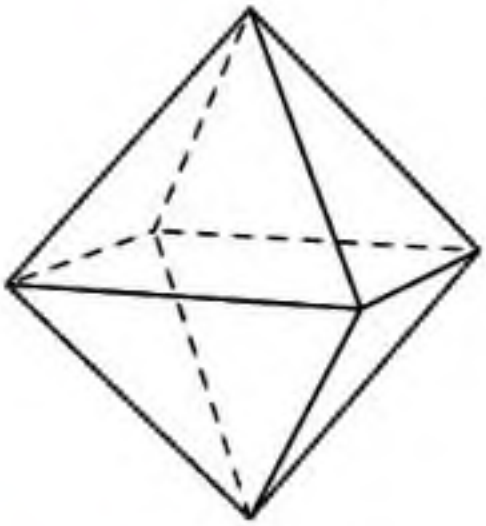
MyLibrary.kz

20.18. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги вә асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфера мәркизиниң орунлишишини көрситиңлар.

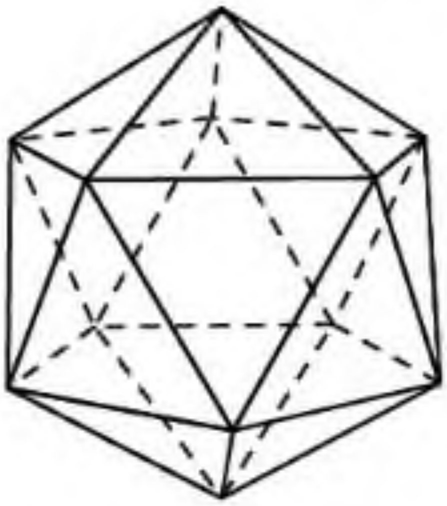
20.19. *SABCD* пирамидисиниң асаси — тәрәплири 1 см вә 2 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. *SD* қири 2 см-ға тәң вә у пирамидиниң егизлиги болуп тепилиду. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.20. *SABCDEF* пирамидисиниң асаси — тәрәплири 2 см-ға тәң дурус алтәбулуңлуқ. *SA* қири 3 см-ға тәң вә у пирамидиниң егизлиги болуп тепилиду. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

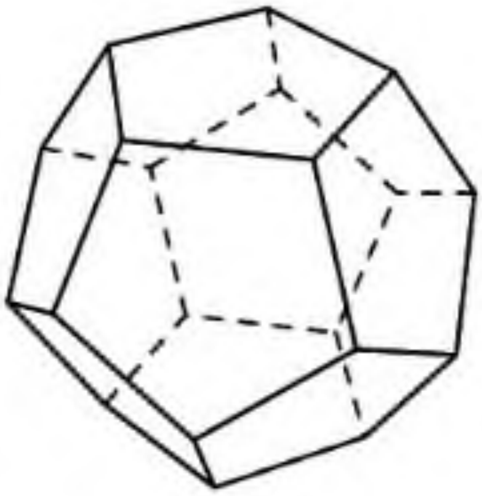
20.21. Октаэдрниң қирлири 1 см-ға тәң (20.4-сүрәт). Октаэдрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.



20.4-сүрәт



20.5-сүрәт



20.6-сүрәт

20.22. Икосаэдрниң қирлири 1 см-ға тәң (20.5-сүрәт). Икосаэдрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

20.23. Додекаэдрниң қирлири 1 см-ға тәң (20.6-сүрәт). Додекаэдрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

20.24. Призмиға ичидин сизилған цилиндрниң вә цилиндрға ичидин сизилған сфера ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§21. Сфериға сиртидин сизилған көпяқлиқлар. Призма

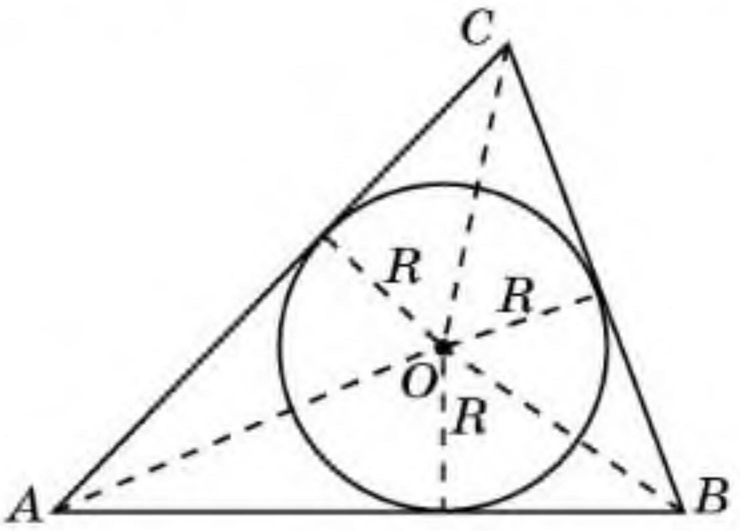
Көпбулуңлуқлар билән чәмбәрләр тоғрисида чүшәнчиләрни әскә чүширәйли.

Әгәр көпбулуңлуқниң барлиқ тәрәплири чәмбәр билән яндишидиған болса, у чағда *көпбулуңлуқ чәмбәргә сиртидин сизилған* яки *чәмбәр көпбулуңлуққа ичидин сизилған* дәп атилиду.

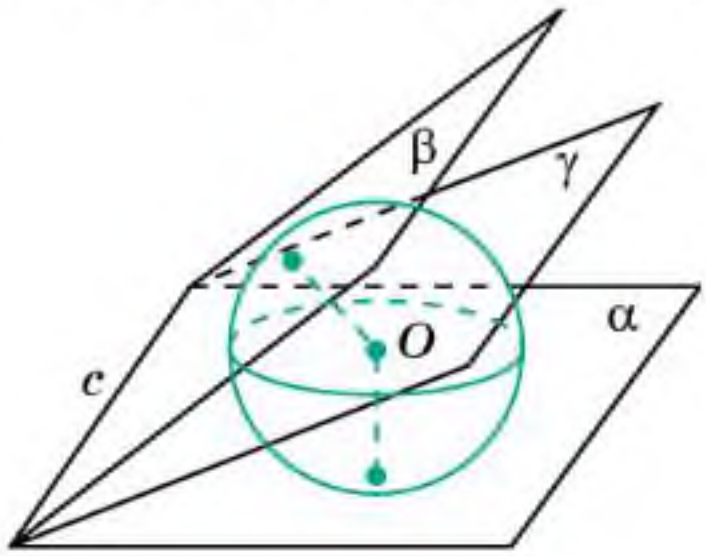
Планиметрия курсида һәрқандақ үчбулуңлуққа ичидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғи испатланған. Үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизини тепиш үчүн униң булуңлириниң бис-

MyLibrary.kz

сектрисилирини жүргүзүш керәк. Уларниң қийилишиш O чекити үчбулуңлуқниң барлиқ тәрәплиридин бирдәк ариliқта ятиду. Демәк, O чекити ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болиду (21.1-сүрәт).



21.1-сүрәт



21.2-сүрәт

Әнди бошлуқтики фигурилларни қараштурайли.

Әгәр көпяқлиқниң барлиқ яқлири сфера билән яндишидиған болса, у чағда *көпяқлиқ сфериға сиртидин сизилған* яки *сфера көпяқлиққа ичидин сизилған* дәп атилиду.

Алди билән қандақ сферилар иккияқлиқ булуңниң яқлири билән яндишидиғанлиғини ениқлайли.

c умумий түзи билән чәкләнгән α вә β йеримтәкшиликлири билән ясалған иккияқлиқ булуң берилсун. c түзи арқилиқ мошу иккияқлиқ булуңни қақ бөлидиған γ йерим тәкшилигини жүргүзимиз (21.2-сүрәт). Мошундақ йеримтәкшилик иккияқлиқ булуңниң *биссекторлиқ йеримтәкшилиги* дәп атилиду.

c түзидә ятмайдиған γ йеримтәкшилигидики чекитләр α вә β йеримтәкшиликлиридин бирдәк ариliқта болиду.

Әгәр мошу ариliқни сфериниң r радиуси дәп алсақ, у чағда мәркизи биссекторлиқ йеримтәкшилигидә ятидиған, радиуси r болидиған сфера α вә β тәкшиликлири билән яндишидиған болиду.

c түзисиз биссекторлиқ йерим тәкшиликниң өзи иккияқлиқ булуңниң ичидә ятидиған вә α, β тәкшиликлири билән яндишидиған сфера мәркәзлириниң геометриялиқ орнини бериду.

Қандақ һаләттә тик призмиға ичидин сфера сизишқа болидиғанлиғини ениқлайли.

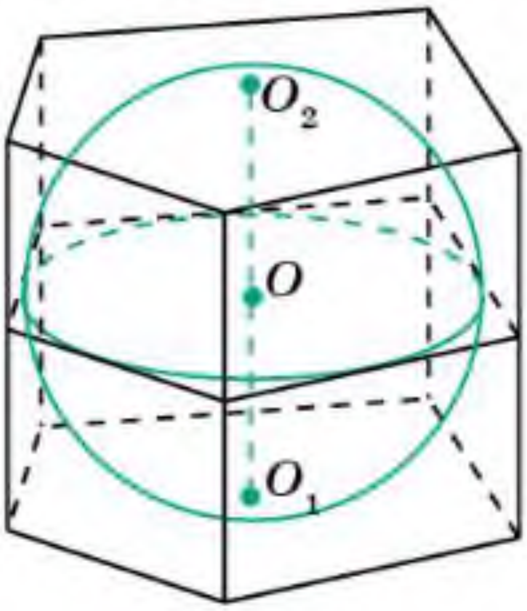
Теорема. ***Әгәр тик призминиң асасиға ичидин чәмбәр сизишқа болса вә призминиң егизлиги мошу чәмбәрниң диаметриға тәң болса, у чағда мошу призмиға ичидин сфера сизишқа болиду.***

Испатлиниши. Тик призмиға ичидин мәркизи O чекитидә вә радиуси r болидиған сфера сизилған болсун (21.3-сүрәт).

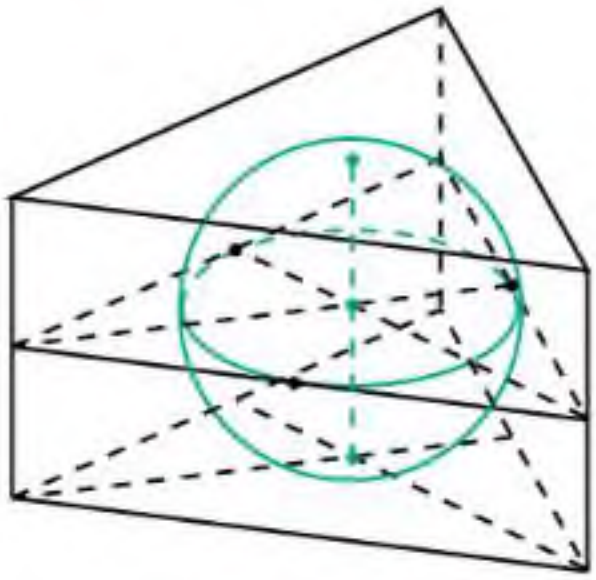
Шу чағда призминиң егизлиги $2r$-ға тәң болиду. O чекити арқилиқ призминиң асаслириға параллель қийилма жүргүзимиз. Призминиң қийилмиси сфериниң тәкшилик билән қийилмиси болидиған чәмбәргә

сиртидин сизилған асасидики көпбулуңлуқ тәң көпбулуңлуқ болиду. Шуниң билән, призминиң асасиға ичидин чәмбәр сизишқа болиду

Әксичә, тик призминиң асаслириға ичидин радиуси r болидиған чәмбәрләр сизилған вә призминиң егизлиги $2r$-ға тәң болсун дәп һесаплайли. O чекити — асаслириға ичидин сизилған чәмбәрләрниң мәркәзлирини қошидиған кесиндиниң оттуриси болсун. Шу чағда мәркизи O чекити вә радиуси r болидиған сфера мошу призмиға ичидин сизилған издиливатқан сфера болиду. ☐



21.3-сүрәт

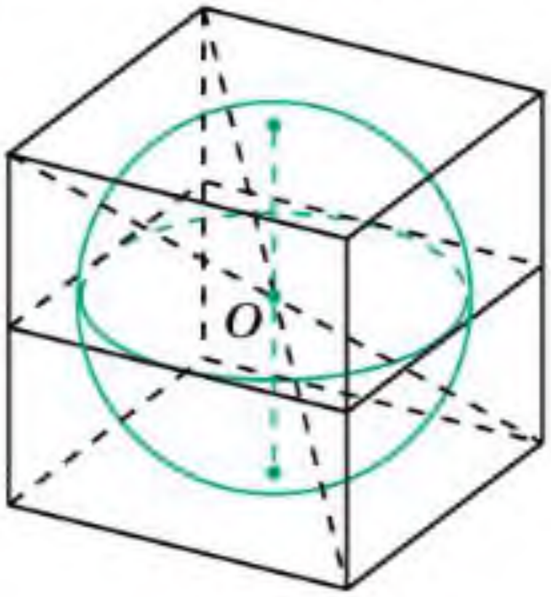

21.4-сүрәт

21.4-сүрәттә дурус үчбулуңлуқ призмиға ичидин сизилған сфера тәсвирләнгән.

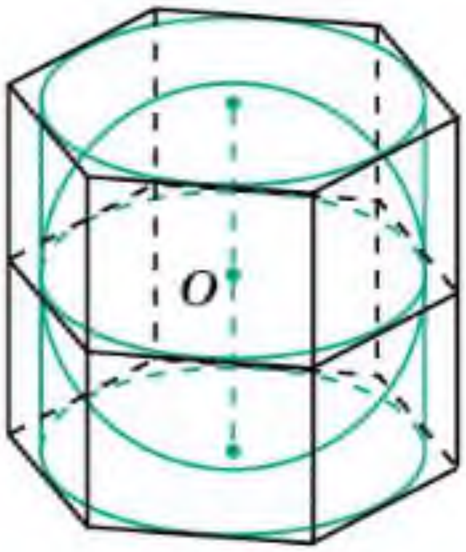
Ақивәт. Әгәр тикбулуңлуқ параллелепипед куб болса, у чағда униңға ичидин сфера сизишқа болиду.

Кубқа ичидин сизилған сфериниң мәркизи мошу кубниң диагональлириниң қийилишиш чекити болиду. Әгәр кубниң қири a-ға тәң болса, у чағда униңға ичидин сизилған сфериниң радиуси $\frac{a}{2}$-ға тәң болиду.

21.5-сүрәттә кубқа ичидин сизилған сфера тәсвирләнгән.



21.5-сүрәт



21.6-сүрәт

Әгәр призмиға ичидин сфера сизишқа болса, у чағда мошу призмиға ичидин цилиндр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар (21.6-сүрәт).

Призмиға ичидин сизилған сфера мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрғиму ичидин сизилған болиду.

Соаллар

1. Қандақ көпяқлиқ сфериға сиртидин сизилған дәп атилиду?
2. Қандақ сфера көпяқлиққа ичидин сизилған дәп атилиду?
3. Қандақ тик призмиға ичидин сфера сизишқа болиду?
4. Қандақ тикбулуңлуқ параллелепипедқа ичидин сфера сизишқа болиду?
5. Кубқа ичидин сизилған сфериниң мәркизи қәйәрдә орунлашқан?
6. Қири a-ға тәң кубқа ичидин сизилған сфериниң радиуси немигә тәң?

Һесаплар

A

21.1. Кубниң қири 1 см-ға тәң. Мошу кубқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

21.2. Сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу сфериға сиртидин сизилған кубниң қирини тепиңлар.

21.3. Дурус призминиң егизлиги 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

21.4. Дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сфера сизилған. Призминиң егизлигини тепиңлар.

21.5. Әгәр призмиға ичидин цилиндр сизишқа болса, у чағда униңға ичидин сфера сизишқа болидиғанлиғи һәқиқәтму?

21.6. Ичидин сфера сизишқа болмайдиған дурус призмиға мисал кәлтүрүңлар.

B

21.7. Дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

21.8. Дурус үчбулуңлуқ призмиға ичидин сфера сизилған. Сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу призма асасиниң тәрәплирини тепиңлар.

21.9. Дурус төртбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

21.10. Дурус төртбулуңлуқ призмиға ичидин сфера сизилған. Сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу призма асасиниң тәрәплирини тепиңлар.

21.11. Дурус алтәбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сфера сизилған (21.6-сүрәт). Призминиң егизлигини тепиңлар.

MyLibrary.kz

21.12. Дурус алтәбулуңлуқ призмиға ичидин сфера сизилған. Сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу призма асасиниң тәрәплирини тепиңлар.

C

21.13. Қийилишқан икки тәкшиликтин бирдәк арилиқта ятқан чекитләрниң геометриялиқ орнини тепиңлар.

21.14. Үчбулуңлуқ тик призминиң асаси — катетлири 3 см вә 4 см болған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ. Мошу призмиға ичидин сфера сизилған. Призминиң егизлигини тепиңлар.

21.15. Төртбулуңлуқ тик призминиң асаси — тәрәплири 1 см вә тар булуңи 60°-қа тәң болған ромб. Мошу призмиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

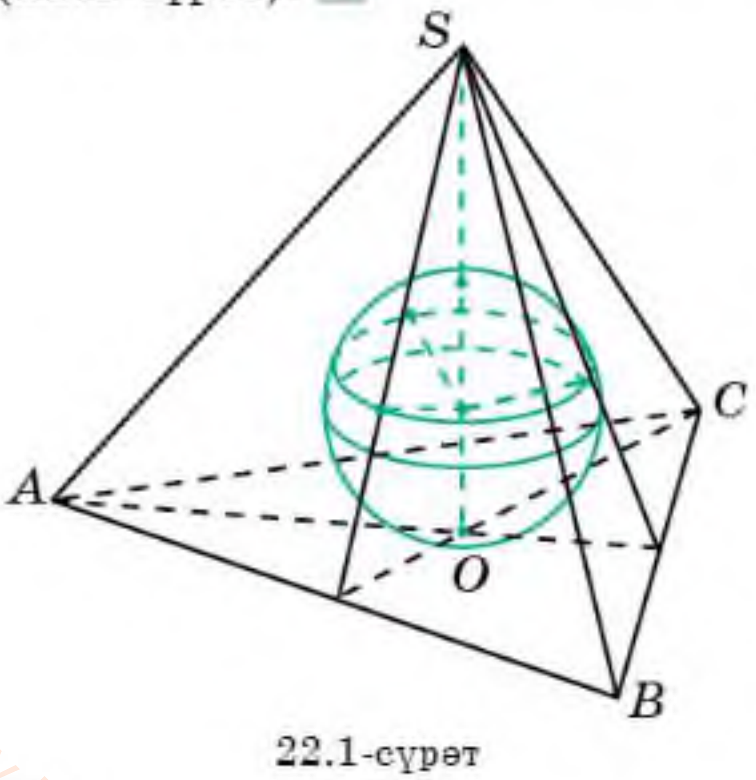
Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

21.16. Пирамидиға ичидин сизилған конусниң вә конусқа ичидин сизилған сфериниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§22. Сфериға сиртидин сизилған көпяқлиқлар. Пирамида

Теорема. ***Һәр қандақ үчбулуңлуқ пирамидиға ичидин сфера сизишқа болиду.***

Испатлиниши. Үчбулуңлуқ пирамидиға ичидин сизилған сфериниң мәркизи пирамидиниң барлиқ яқлиридин бирдәк арилиқта ятидиған чекит болуп тепилиду. Бу чекитни тепиш үчүн пирамидиниң ян яқлири билән асасиниң арисидики иккияқлиқ булуңларниң үч биссекторлуқ йерим тәкшиликлирини қараштуримиз. Улар пирамидиниң ян яқлири билән асасидин бирдәк арилиқта ятқан чекиттә қийилишиду, йәни у чекит ичидин сизилған сфериниң издиливатқан мәркизи болиду (22.1-сүрәт). ☐

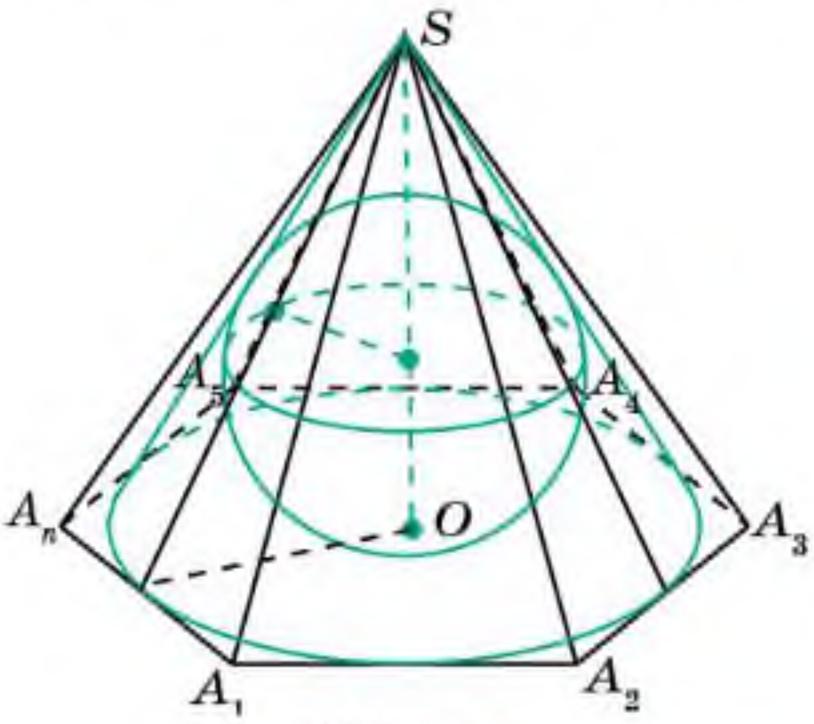


22.1-сүрәт

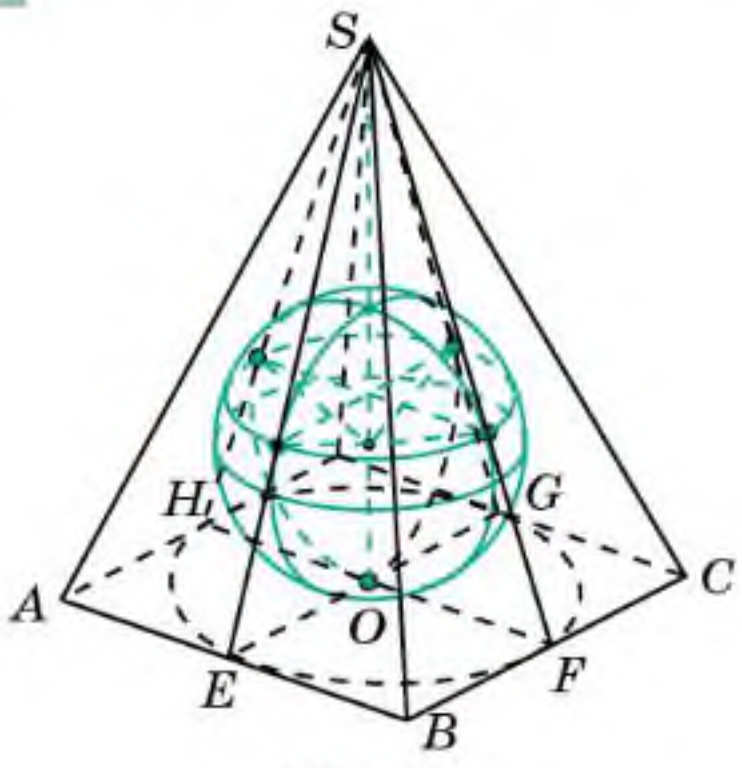
Теорема. ***Әгәр пирамидиниң асасиға ичидин чәмбәр сизишқа болса вә мошу чәмбәрниң мәркизи пирамида егизлигиниң асаси болса, у чағда мошу пирамидиға ичидин сфера сизишқа болиду.***

Испатлиниши. Әгәр пирамидиниң асасиға ичидин чәмбәр сизишқа болса вә мошу чәмбәрниң мәркизи пирамида егизлигиниң асаси болса, у чағда мошу пирамидиға ичидин конус сизишқа болиду (22.2-сүрәт).

Бу конусқа ичидин сизилған сфера пирамидиға ичидин сизилған издиливатқан сфера болуп тепилиду. ◻



22.2-сүрәт



22.3-сүрәт

Ақивәт. Һәр қандақ дурус пирамидиға ичидин сфера сизишқа болиду.

Һәқиқәтәнму, һәрқандақ дурус пирамидиға ичидин конус сизишқа болиду. Демәк униңға ичидин сфера сизишқиму болиду.

Пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиш үчүн мошу пирамидиға ичидин сизилған конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиш формулисини пайдилинишқа болиду.

Мисал. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 2 см. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тапайли.

Йешилиши. Пирамидиниң асасиға ичидин сизилған чәмбәр радиуси 1 см-ға тәң. Ян яқлириниң SE, SF, SG, SH егизликлири $\sqrt{5}$ см-ға тәң. SEG үчбулуңлуғини униң асасиға чүширилгән SO егизлиги ятқан түздин айландурғанда һасил болған конус $SABCD$ пирамидисиға ичидин сизилиду. SEG үчбулуңлуғи мошу конусниң оқлуқ кийилмиси болиду. SEG үчбулуңлуғида $EG = 2$ см, $SE = SG = \sqrt{5}$ см вә мәйдани 2 см^2-ға тәң болиду. Тепилған мәналарни конусқа ичидин сизилған сфериниң r радиуси үчүн $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$ формулисиға қоюп тапимиз: $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Шуниң билән, берилгән пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиуси $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ см-ға тәң болиду (22.3-сүрәт).

Соаллар

1. Қандақ үчбулуңлуқ пирамидиға ичидин сфера сизишқа болиду?
2. Қандақ дурус пирамидиға ичидин сфера сизишқа болиду?
3. Үчбулуңлуқ пирамидиға ичидин сизилған сфериниң мәркизи немә болиду?
4. Дурус пирамидиға ичидин сизилған сфериниң мәркизи немә болиду?

MyLibrary.kz

B

22.1. Дурус пирамидиниң егизлиги 2 см-ға вә униң асасиға ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

22.2. Дурус пирамидиниң ян йеқиниң егизлиги 2 см, асасиға ичидин сизилған чәмбәр радиуси 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

22.3. Дурус пирамидиниң егизлиги 1 см-ға, ян йеқиниң егизлиги 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

22.4. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги h-қа, асасиниң тәрәплири болса a-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиш формулисини йезиңлар.

22.5. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 3 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

22.6. Дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға тәң, ян йеқи асас тәкшилиги билән: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° булуң ясайду. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

C

22.7. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги h-қа, асасиниң тәрәплири болса a-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиш формулисини йезиңлар.

22.8. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 1 см-ға, асасиниң тәрәплири болса 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

22.9. Дурус тетраэдрниң қири 1 см-ға тәң. Тетраэдрға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

22.10. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги h-қа, асасиниң тәрәплири болса a-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиш формулисини йезиңлар.

22.11. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 2 см-ға, асасиниң тәрәплири болса 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

22.12. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 1 см-ға, чоққисидики тәкши булуңлири 90°-қа тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

22.13. Төртбулуңлуқ пирамидиниң асаси — тәрәплири 1 см-ға вә тар булуңи 60°-қа тәң болған ромб. Пирамидиниң егизлиги 1 см-ға тәң вә униң асаси ромб диагональлириниң қийилишиш чекити болуп һесаплиниду. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

22.14. Ичидин сфера сизишқа болмайдиған пирамидиға мисал кәлтүрүңлар.

22.15. Октаэдрниң қирлири 1 см-ға тәң. Октаэдрға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

22.16. Тәкшиликтики фигуриларниң мәйданлири билән хусусийәтлирини тәкрарлаңлар.

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға ичидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплирини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

2. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплирини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

3. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға ичидин сизилған дурус алтәбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплирини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

4. Цилиндр асасиниң радиуси 3 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған дурус алтәбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплирини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

5. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған конусниң егизлигини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

6. Дурус алтә булуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири болса 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған конусниң егизлигини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

7. Кубниң қири 2 см-ға тәң. Мошу кубқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

MyLibrary.kz

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

8. Дурус төртбулуңлуқ призминиң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири болса 1 см-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ см.

9. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң ян қирлири 6 см-ға, асасиниң тәрәплири болса 4 см-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 4 см; B) 5 см; C) 6 см; D) 8 см.

10. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң қирлири 1 см, 2 см, 3 см-ға тәң. Мошу параллелепипедға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см; B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см; C) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ см.

11. Тик үчбулуңлуқ призминиң асаси — тәрәплири 3 см, 4 см, 5 см болған үчбулуңлуқ. Мошу призмиға сиртидин сизилған сфериниң мәркизи қәйәрдә орунлишидиғанлиғини тепиңлар:

A) призминиң ичидә ятиду;
B) призминиң йеқида ятиду;
C) призминиң қирида ятиду;
D) призмидин сирт ятиду.

12. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 1 см-ға, ян қирлири болса 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

13. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 1 см-ға, ян қирлири болса 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

14. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 3 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң мәркизи қәйәрдә орунлишидиғанлиғини тепиңлар:

A) пирамидиниң ичидә ятиду;
B) пирамидиниң ян йеқида ятиду;
C) пирамидиниң асасида ятиду;
D) пирамидидин сирт ятиду.

MyLibrary.kz

15. Кубниң қири 2 см-ға тәң. Мошу кубқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

16. Сфериниң радиуси 2 см-ға тәң. Мошу сфериға сиртидин сизилған кубниң қирини тепиңлар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

17. Сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу сфериға сиртидин сизилған призминиң егизлигини тепиңлар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

18. Дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 6 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) $\sqrt{2}$ см; B) $2\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

19. Дурус алтәбулуңлуқ призмиға ичидин радиуси 3 см-ға тәң сфера сизилған. Мошу призма асасиниң тәрипини тепиңлар:

A) $2\sqrt{2}$ см; B) $2\sqrt{3}$ см; C) $3\sqrt{2}$ см; D) $3\sqrt{3}$ см.

20. Дурус тетраэдрниң қирлири 4 см-ға тәң. Мошу тетраэдрға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ см; B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см; C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ см; D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ см.

MyLibrary.kz

V бап

ЖИСИМЛАРНИҢ ҺӘҖИМЛИРИ

§ 23. Жисимларниң һәҗимлириниң умумий хусусийәтлири

Һәҗим — геометриялик фигуриларниң бошлуқтики бөлигини тәрипләйдиған миқдар. Һәҗим геометриялик җисимларға бағлиқ асасий миқдарларниң бири болуп һесаплиниду.

Һәҗимниң өлчәм бирлиги ретидә қириниң узунлиғи 1 гә тәң куб елиниду. Уни *бирлик куб* дәп атайду.

Мәсилән, әгәр узунлуқниң өлчәм бирлиги 1 мм, 1 см яки 1 м болса, у чағда һәҗимниң өлчәм бирлиги ретидә қириниң узунлиғи мувапиқ 1 мм, 1 см яки 1 м-ға тәң куб елиниду. Мошундақ куб мувапиқ *миллиметр куб, сантиметр куб* яки *метр куб* дәп атилиду.

Аддий һаләттә фигуриниң һәҗими мошу фигура ичигә сиғидиған бирлик кубларниң вә униң бөләклириниң сани билән өлчиниду. Бу сан натурал, рационал яки иррационал болуши мүмкин. Фигуриниң һәҗими өлчәм бирлигигә бағлиқ болғанлиқтин, чүшинишлик болуши үчүн әмәлиятта мошу сандин кейин һәҗимниң өлчәм бирлиги көрситилиду. Мисалға, V мм^3, V см^3, V м^3.

Бошлуқтики фигуриниң һәҗими үчүн төвәндики хусусийәтләр орунлуқ болиду:

1) бошлуқтики фигуриниң һәҗими иҗабий сан;

2) бирдәк фигуриларниң һәҗимлири тәң;

3) әгәр Φ фигуриси Φ_1 вә Φ_2 фигурилиридин тәшкил болса, у чағда Φ фигурисиниң һәҗими Φ_1 вә Φ_2 фигурилири һәҗимлириниң қошундисиға тәң, йәни

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

4) Бир чоққисидин чиқидиған қирлири a, b, c болған *тикбулуңлуқ параллелепипедниң V һәҗими* төвәндики формула билән һесаплиниду:

$$V(\Phi) = a \cdot b \cdot c.$$

Бәзидә *тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗими* униң сизиқлиқ өлчәмлириниң көпәйтиндисигә тәң яки униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң дәп ейтиду. Ахирқи йәкүн һәр қандақ параллелепипед үчүн дурус болиду.

Айрим һаләтләрдә қири a-ға тәң кубниң V һәҗими төвәндики формула билән һесаплиниду:

$$V = a^3.$$

? Қандақ ойлайсиләр, фигуриниң һәҗими нөлгә тәң боламду?

MyLibrary.kz

Һәҗимлири тәң икки фигура *тәң миқдарлиқ фигурилар* дәп атилиду.

Чекитләрниң арилиғи бирдәк ижабий санға көпәйтилидиған тәкшиликни түрләндүрүш *охшашлиқ* дәп атилидиғанлиғини есимизға чүширимиз. Йәни, охшашлиқ түрләндүрүш вақтида һәр қандақ A, B чекитлири мувапиқ A', B' чекитлиригә көчидиған болса, $A'B' = k \cdot AB$ болиду, бу йәрдә k — *охшашлиқ коэффициенти* дәп атилидиған ижабий сан.

Әгәр бошлуқтики икки фигуриниң бирини иккинчисигә көчиридиған охшашлиқ түрләндүрүш бар болса, у чағда мошу икки фигура *охшаш* дәп атилиду.

Охшаш фигуриларға мисаллар:

1) икки кубниң охшашлиқ коэффициенти мошу куб қирлири узунлуқлириниң нисбитигә тәң болиду;

2) икки тикбулуңлуқ параллелепипедларниң a', b', c' билән a, b, c қирлири үчүн мону тәңликләр орунлиниду:

$$a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc,$$

бу йәрдә k — қандақту бир турақлиқ сан;

3) икки шарниң охшашлиқ коэффициенти мошу шар радиуслириниң нисбитигә тәң болиду.

Икки охшаш көпяқлиқ бәтлири мәйданлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң квадратиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Икки охшаш шар бәтлири мәйданлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң квадратиға тәң болидиғанлиғини тәкшүрүңлар.

Икки тикбулуңлуқ параллелепипед һәҗимлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң кубиға тәң болидиғанлиғини тәкшүрүңлар.

Икки охшаш фигура һәҗимлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң кубиға тәң болидиғинини испатлимисиз беримиз, йәни әгәр k охшашлиқ коэффициенти бойичә Φ_2 фигуриси Φ_1 фигурисиға охшаш болса, у чағда мошу фигуриларниң һәҗимлири үчүн төвәндики формула орунлуқ болиду:

$$V(\Phi_2) = k^3 V(\Phi_1).$$

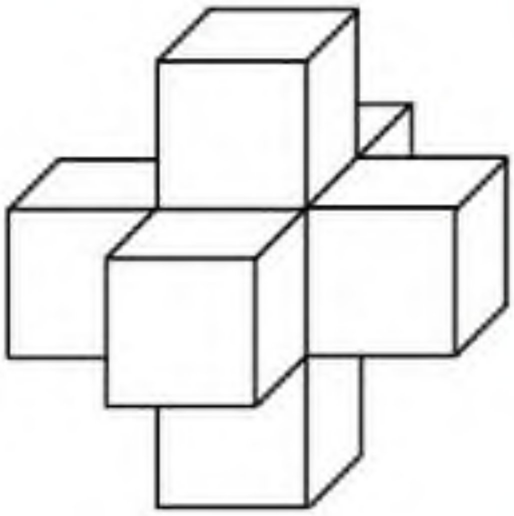
Соаллар

1. Һәҗим қандақ миқдарни тәрипләйду?
2. Һәҗимниң өлчәм бирлиги ретидә немә елиниду?
3. Һәҗимниң хусусийәтлирини атаңлар.
4. Бошлуқтики қандақ фигурилар тәң миқдарлиқ дәп атилиду?
5. Бошлуқтики қандақ түрләндүрүш охшашлиқ дәп атилиду?
6. Бошлуқтики қандақ фигурилар охшаш дәп атилиду?
7. Охшаш фигуриларниң һәҗимлири өз ара қандақ бағлинишқан?
8. Бошлуқтики охшаш фигуриларға мисаллар кәлтүрүңлар.

MyLibrary.kz

Һесаплар

А



23.1-сүрәт

23.1. Кубниң һәҗими 27 $см^3$-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.

23.2. Кубниң бетиниң мәйдани 24 $см^2$-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

23.3. Кубниң диагонали $\sqrt{12}$ см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

23.4. 23.1-сүрәттики бошлуқ фигурисини тәшкил қилидиған кубларниң қирлири 1 см-ға тәң. Мошу фигуриниң һәҗими тепиңлар.

23.5. Әгәр кубниң бирлик қирлирини 3 һәссә ашурсақ, у чағда униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?

23.6. Әгәр тикбулуңлуқ параллелепипедниң барлиқ қирлирини 2 һәссә кемитсәк, у чағда униң һәҗими қанчә һәссә кемийду?

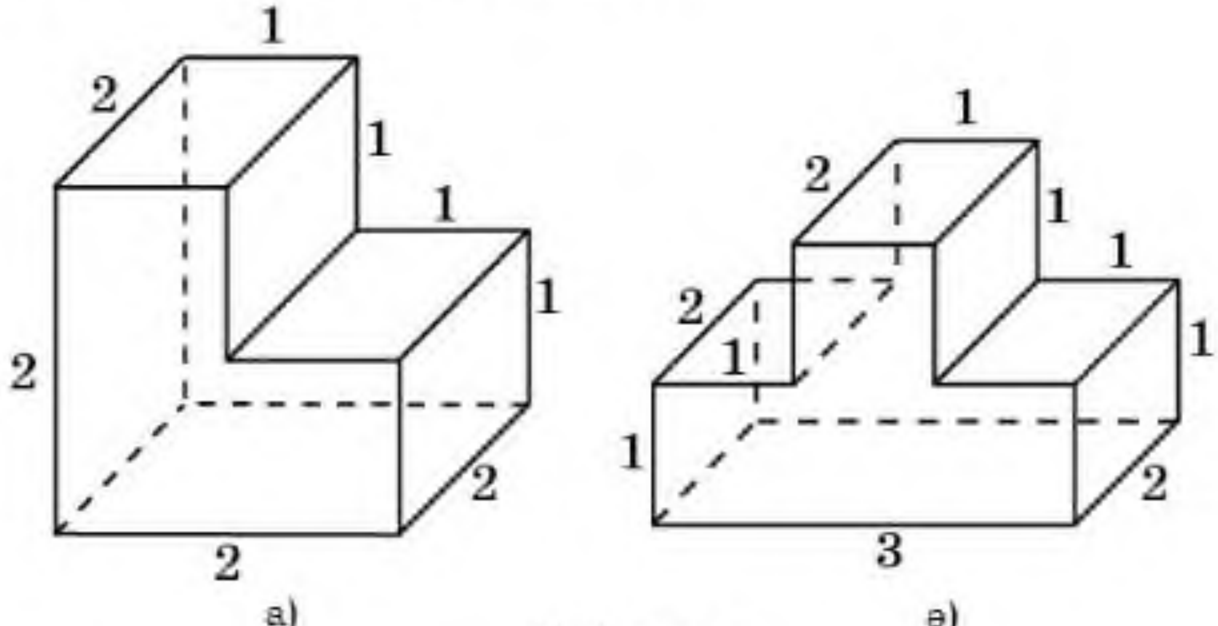
23.7. Әгәр тикбулуңлуқ параллелепипедниң: 1) бир сизиқлиқ өлчимини 2 һәссә ашурса; 2) икки сизиқлиқ өлчимини 3 һәссә қисқартсақ у чағда униң һәҗими қандақ өзгириду?

23.8. Қурулуш хишиниң салмиғи 4 кг. Барлиқ сизиқлиқ өлчәмлири мошу хишниң өлчәмлиридин төрт һәссә кичик болидиған оюнчуқ хишниң салмиғи қанчә грамм болиду?

В

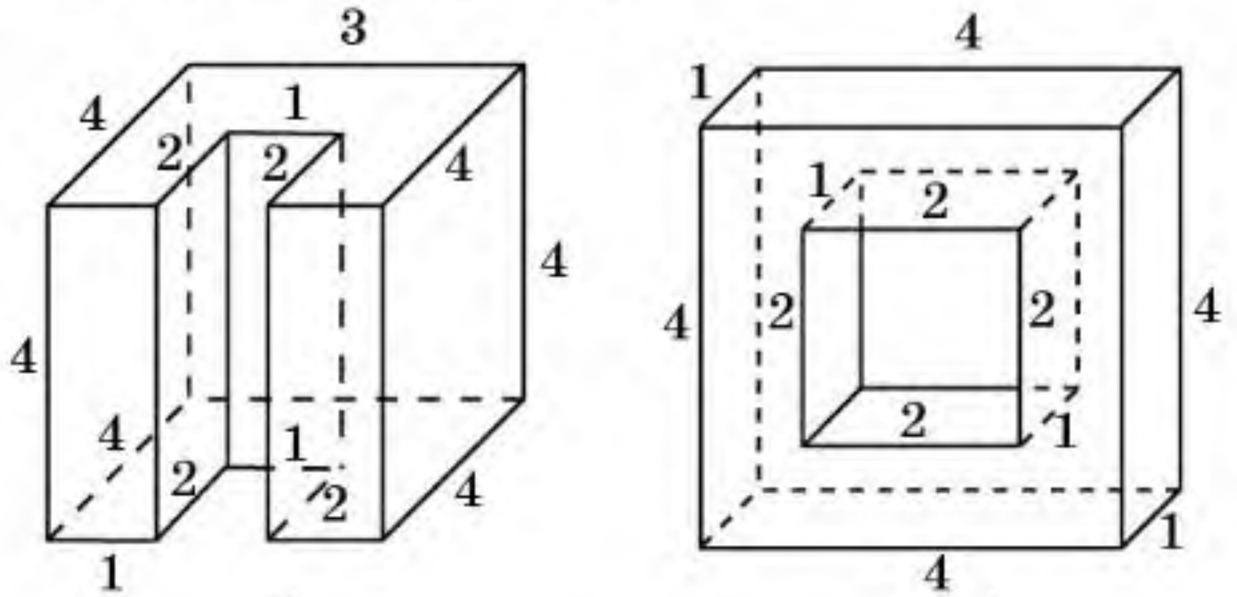
23.9. Мәктәптики синип бөлмисиниң егизлиги 3,5 м-ға тәң. Әгәр һәр бир оқуғучиға 7,5 $м^3$ һава һаҗәт болса, у чағда 28 оқуғучиға беғишланған синип бөлмисиниң мәйдани қандақ болуши керәк?

23.10. 23.2-сүрәттики тикбулуңлуқ параллелепипедлардин туридиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.



23.2-сүрәт

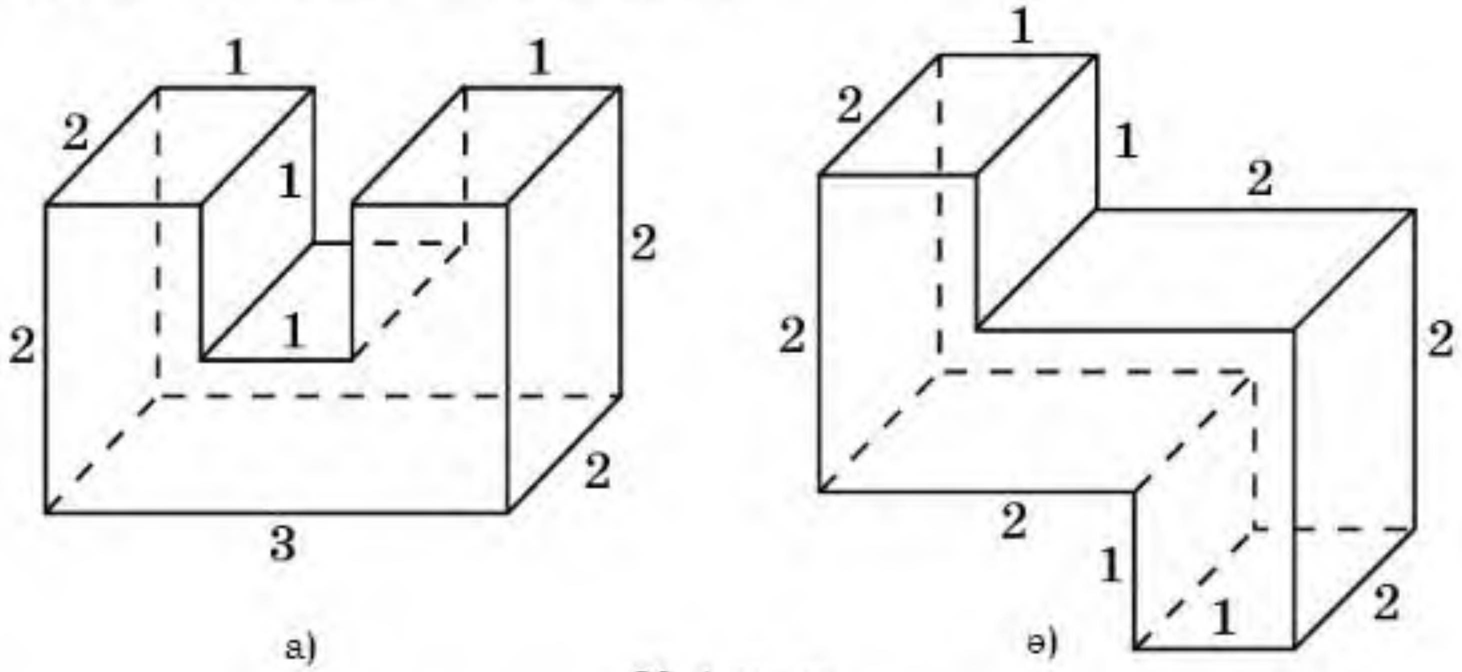
23.11. 23.3-сүрәттики тикбулуңлуқ параллелепипедлардин туридиған фигуриниң һәжимини тепиңлар.



а) ә)

23.3-сүрәт

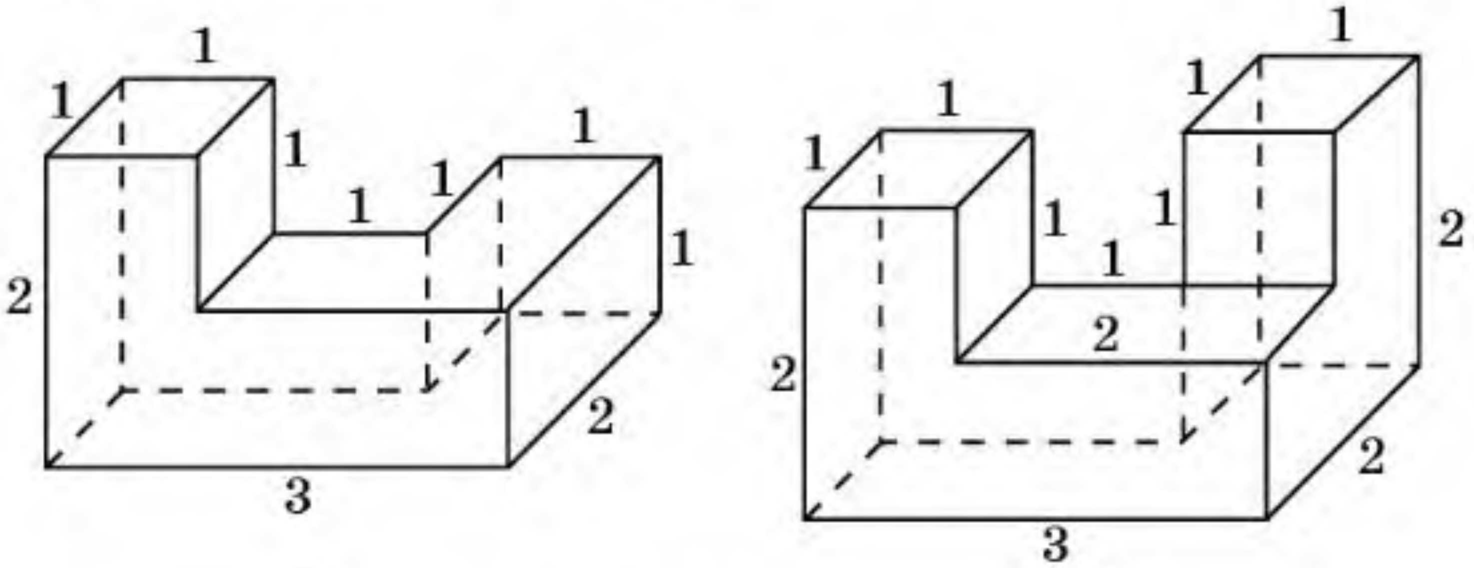
23.12. 23.4-сүрәттики тикбулуңлуқ параллелепипедлардин туридиған фигуриниң һәжимини тепиңлар.



а) ә)

23.4-сүрәт

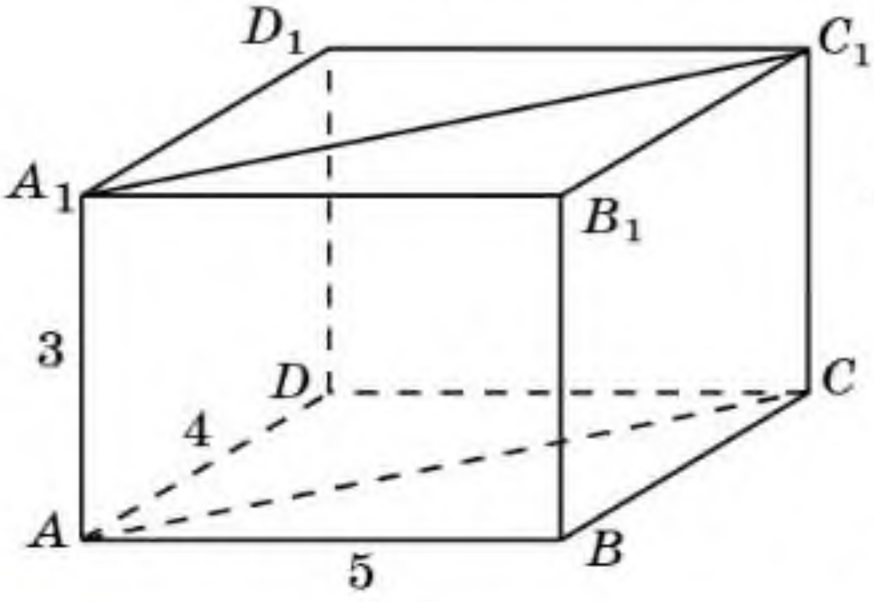
23.13. 23.5-сүрәттики тикбулуңлуқ параллелепипедлардин туридиған фигуриниң һәжимини тепиңлар.



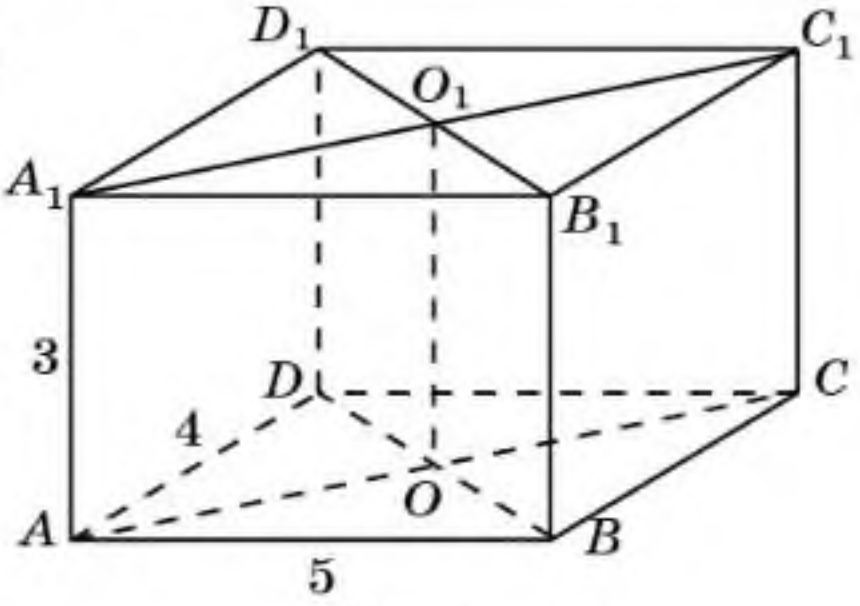
а) ә)

23.5-сүрәт

23.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 5 см, 4 см, 3 см-ға тәң. $ABCA_1B_1C_1$ үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар (23.6-сүрәт).



23.6-сүрәт

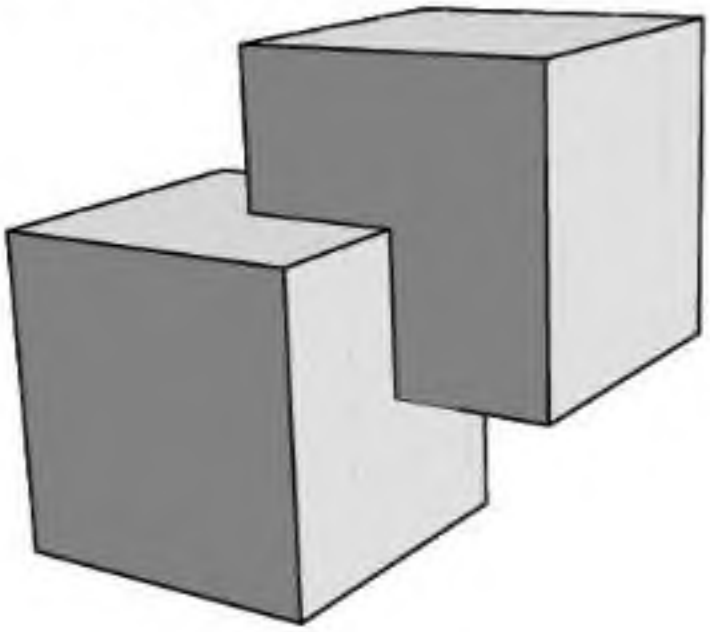


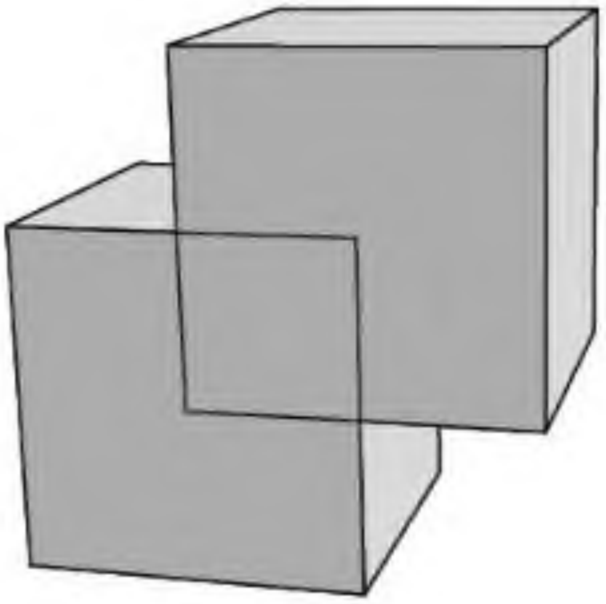
23.7-сүрәт

23.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 5 см, 4 см, 3 см-ға тәң. $ABOA_1B_1O_1$ үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар (23.7-сүрәт).

23.16. Белиқни өстүрүшкә беғишланған аквариумниң асаси — қирлири 40 см вә 50 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Аквариумдики суниң чоңқурлиғи 80 см-ни тәшкил қилиду. Бу су иккинчи аквариумға қуювелинди. Иккинчи аквариумниң түви — тәрәплири 80 см вә 100 см-ға тәң тиктөртбулуңлуқ. Буниңдики суниң чоңқурлиғи қандақ болиду?

23.17. Бириниң чоққиси иккинчисиниң мәркизидә орунлашқан икки бирлик кублириниң умумий (кийилишқан) бөлигиниң һәҗимини тепиңлар (23.8-сүрәт).


23.8-сүрәт


23.9-сүрәт

23.18. Бириниң икки чоққиси иккинчисиниң қариму-қарши тәрипиниң мәркәзлиридә орунлашқан икки бирлик кублардин түзүлгән фигуриниң һәҗимини тепиңлар (23.9-сүрәт).

MyLibrary.kz

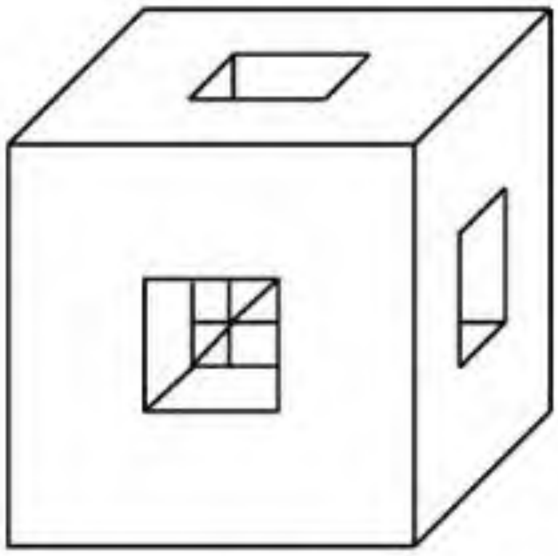
23.19. Қурулуш хишиниң өлчими 25 см · 12 см · 6 см. Цемент еритмиси һәҗимини 15% -қа ашуридиған болса, 10000 хиштин турғузулған тамниң һәҗимини тепиңлар.

23.20. Қирлири 1 см, 6 см вә 8 см болидиған үч қоғушун кубни суюлдуруп, бир куб ясалди. Елинған куб қириниң узунлиғини тепиңлар.

С

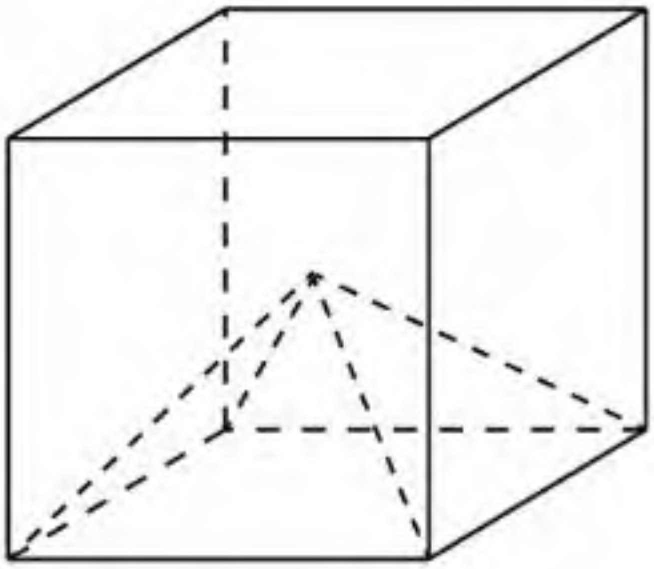
23.21. Әгәр кубниң һәр бир қирини 2 см-ға ашурса, у чағда униң һәҗими 98 $см^3$-қа ашиду. Кубниң қирини тепиңлар.

23.22. Қири 6 см-ға тәң болидиған кубниң һәр бир йеқидин квадрат шәклидә төшүкләр ясалди (23.10-сүрәт). Квадратниң тәрипи 2 см-ға тәң. Кубниң қалған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

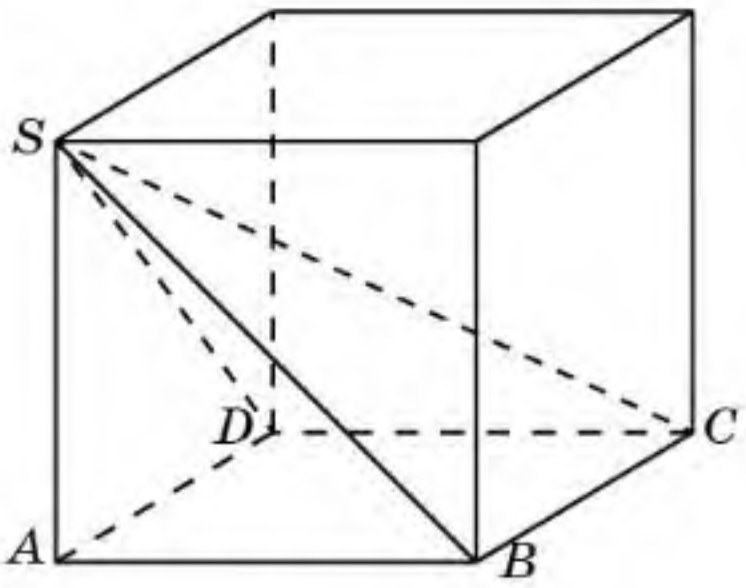


23.10-сүрәт

23.23. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң асаси — бирлик кубниң бир тәрипи, чоққиси мошу кубниң мәркизи болуп һесаплиниду (23.11-сүрәт). Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.



23.11-сүрәт



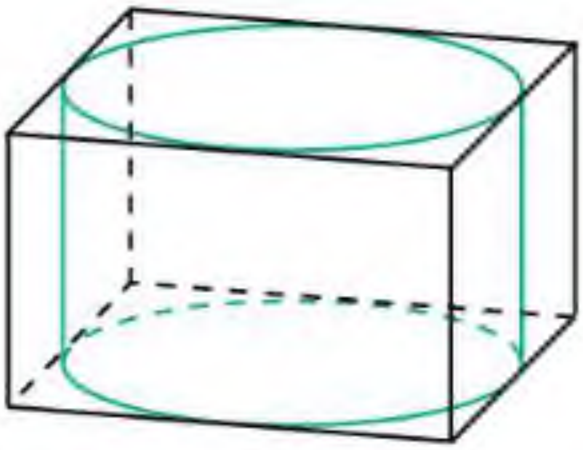
23.12-сүрәт

23.24. Төртбулуңлуқ пирамидиниң асаси — бирлик кубниң бир йеқи, чоққиси мошу йеқида ятмайдиған кубниң чоққиси болуп һесаплиниду (23.12-сүрәт). Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

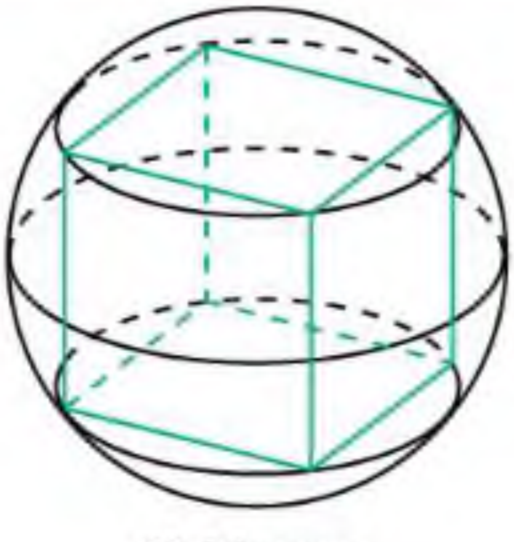
23.25. Цилиндрниң егизлиги билән асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар (23.13-сүрәт).

23.26. Сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу сфериға ичидин сизилған кубниң һәҗимини тепиңлар (23.14-сүрәт).

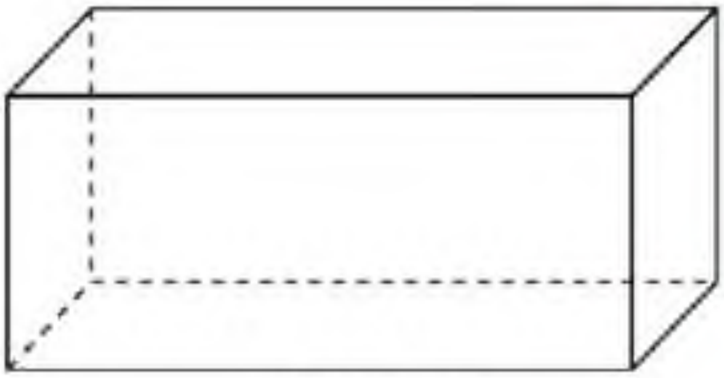
MyLibrary.kz



23.13-сүрәт



23.14-сүрәт



23.15-сүрәт

23.27. Кубниң мәркизи арқилиқ өтидиған тәкшилик уни тәң миқдарлиқ икки бөләккә бөлидиғанлиғини испатлаңлар.

23.28. Параллелепипед охшаш қача берилгән (23.15-сүрәт). Қача һәҗиминиң тәң йерими су билән толтурулған. Сүритини селип көрситиңлар вә чүшәндүрүңлар. Әгәр қачиниң узунлиғи 4 м, кәңлиги егизлигидин 0,5 м-ға артуқ, егизлиги узунлиғиниң 37,5%-ни тәшкил қилидиған болса, қуюлған суниң һәҗимини тепиңлар.

23.29. Аквариумниң узунлиғи 80 см, кәңлиги 45 см, егизлиги 55 см. Суниң дәриҗиси аквариумниң жуқарқи қиридин 10 см төвән болуши үчүн мошу аквариумға нәччә литр су қуюш керәк болиду?

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

23.30. Призминиң, ичидин сизилған вә сиртидин сизилған призминиң ениқлимилирини қайтилаңлар.

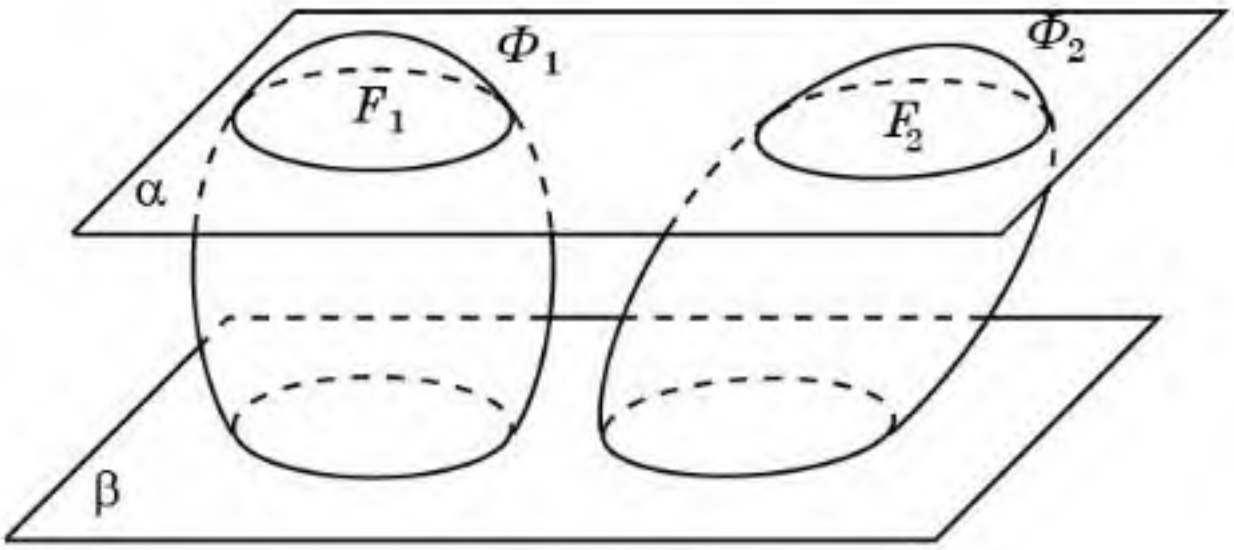
§ 24. Призминиң һәҗими

Итальянлиқ математик Бонавентура Кавальери (1598—1647-жж.) тәвсийә қилған бошлуқ фигурилирниң һәҗимини һесаплаш усулини қараштурайли.

Кавальери принципи. ***Әгәр бошлуқтики Φ_1 вә Φ_2 фигурилириниң бир тәкшиликкә параллель тәкшиликләр билән қийилмилирида мәйданлири бирдәк F_1 вә F_2 фигурилири пәйда болса, у чағда берилгән бошлуқтики фигуриларниң һәҗимлири тәң болиду*** (24.1-сүрәт).

Кавальери принципини асаслаш үчүн Φ_1 вә Φ_2 фигурилирини қелинлиғи бирдәк непиз қәвәтләрдин қураштурулған дәп алимиз. Улар Φ_1 вә Φ_2 фигурилириниң қандақту бир тәкшиликкә параллель

MyLibrary.kz



24.1-сүрәт

тәкшиликлири билән қийилишишидин һасил болиду (24.1-сүрәт). Мошу қәвәтләрниң келинлиғи билән мәйданлириниң тәңлигидин уларниң һәҗимлириниң тәңлиги чиқиду. Демәк, мошу қәвәтләрдин тәшкил тапқан Φ_1 вә Φ_2 фигурилириниң һәҗимлириму тәң болиду.

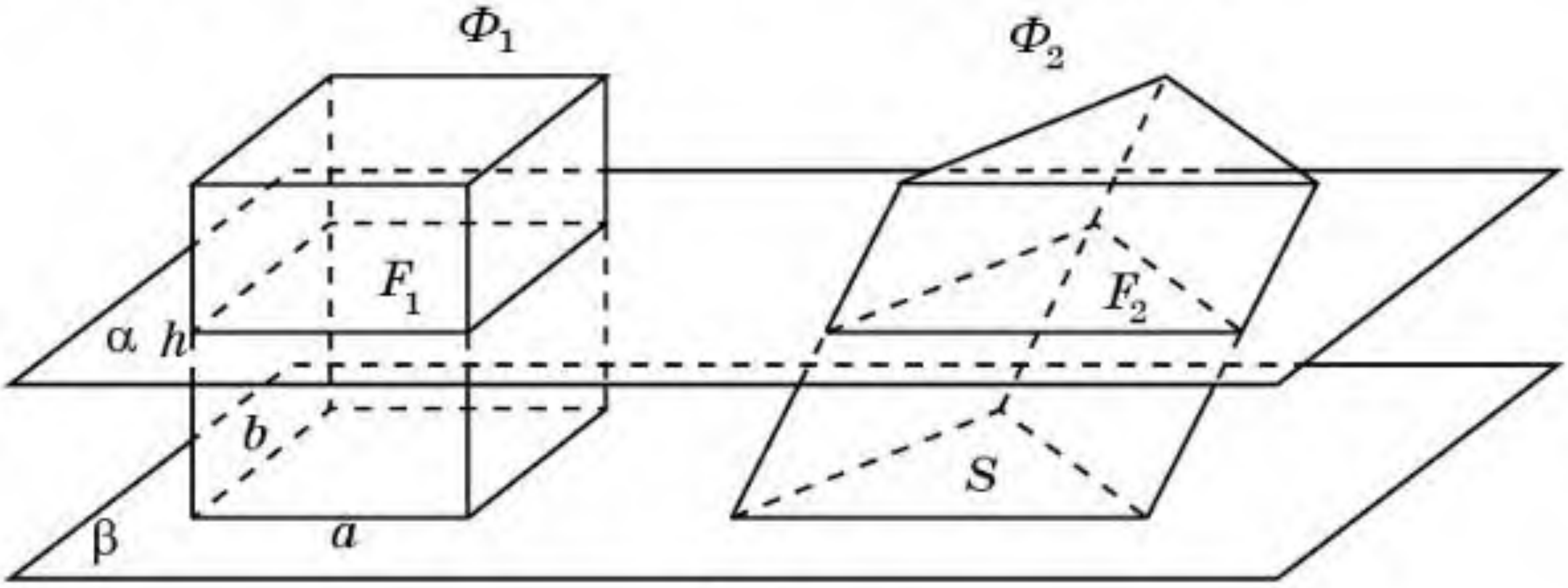
Кавальери принципини қоллинип, һәр қандақ призминиң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқиришқа болиду.

Теорема. ***Призминиң һәҗими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду*:**

$$V = S \cdot h,$$

бу йәрдә S — призминиң асасиниң мәйдани, h — призминиң егизлиги.

Испатлиниши. Асасиниң мәйдани S вә егизлиги h болған призма үчүн тикбулуңлуқ параллелепипедни қараштуримиз. Униң бир чоққисидин чиқидиған қирлири a, b, h-қа тәң вә $a \cdot b = S$ болсун. Призма билән параллелепипедни униң a, b тәрәплири ятқан йеқи призма асасиниң β тәкшилигидә ятидиғандәк вә өзлири мошу тәкшиликниң бир йеқидики бөлигидә болидиғандәк орунлаштуримиз (24.2-сүрәт).



24.2-сүрәт

Параллелепипедниң β тәкшилигигә параллель α тәкшилиги билән қийилмисида β тәкшилигидики тәрәплири a, b болған тиктөртбулуңлуққа тәң тиктөртбулуңлуқ һасил болиду. Призминиң мошу α

MyLibrary.kz

тәкшилиги билән қийилмисида призминиң асасиға тәң көпбулуңлуқ елиниду. Бу қийилмиларниң мәйданлири тәң. Демәк, Кавальери принципи бойичә параллелепипед билән призминиң һәҗимлири тәң болиду. Мошуниңдин призминиң һәҗими $V = S \cdot h$ болидиғанлиғи келип чиқиду. □

Тик призминиң егизлиги униң ян бетиниң қири билән бәтлишиду, һәҗими болса асасиниң мәйдани билән ян бети қириниң көпәйтиндисигә тәң болиду.

Егизлиги h вә асасиниң тәрәплири a болидиған дурус: а) үчбулуңлуқ; ә) алтәбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқириңлар.

Соаллар

1. Кавальери принципи қандақ йәкүнлиниду?
2. Призминиң һәҗими қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

А

24.1. Үчбулуңлуқ призминиң асаси — катетлири 3 см вә 4 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуң. Призминиң егизлиги 10 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

24.2. Дурус үчбулуңлуқ призминиң егизлиги 5 см-ға, асасиниң тәрәплири 4 см-ға тәң. Мошу призминиң һәҗимини тепиңлар.

24.3. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң ян қирлири 3 см-ға, асасиниң тәрәплири 2 см-ға тәң. Мошу призминиң һәҗимини тепиңлар.

24.4. Төртбулуңлуқ призминиң асаси — тәрәплири 1 см-ға тәң квадрат. Призминиң ян қирлири 2 см-ға тәң вә улар асас тәкшилиги билән 60° булуң ясайду. Призминиң һәҗимини тепиңлар.

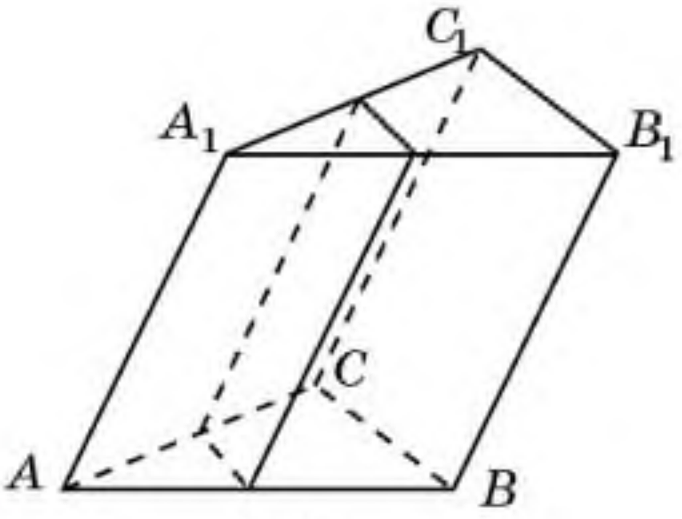
24.5. Параллелепипедниң йеқи — тәрәплири 1 см вә тар булуңи 60° болидиған ромб. Параллелепипедниң бир қири 1 см-ға тәң вә мошу йеқи билән 60° булуң ясайду. Униң һәҗимини тепиңлар.

В

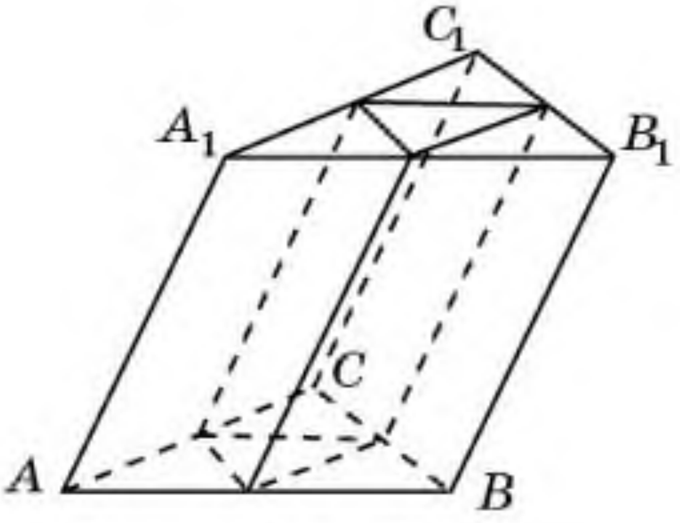
24.6. Дурус үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 4800 $см^3$-қа, асасиниң тәрәплири 20 см-ға тәң. Призминиң егизлигини тепиңлар.

24.7. Үчбулуңлуқ призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ униң ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән (24.3-сүрәт). Бу тәкшилик призминиң һәҗимини қандақ нисбәттә бөлиду?

MyLibrary.kz



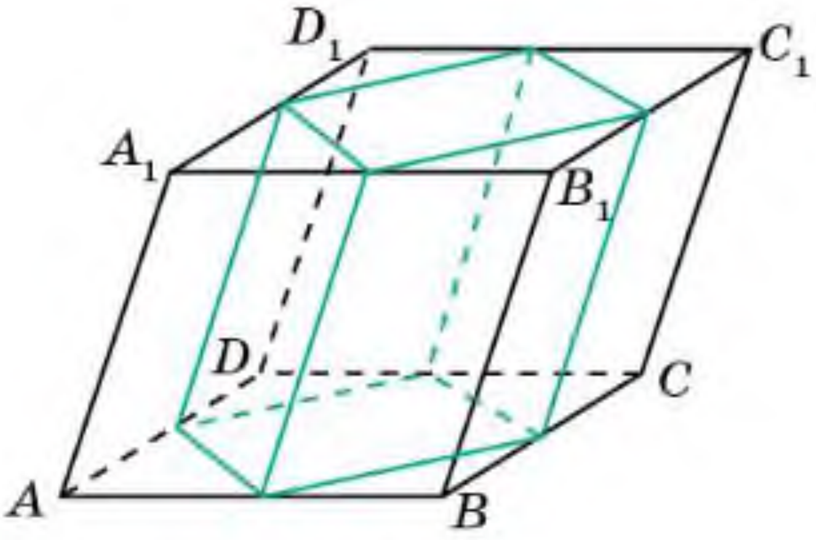
24.3-сүрәт



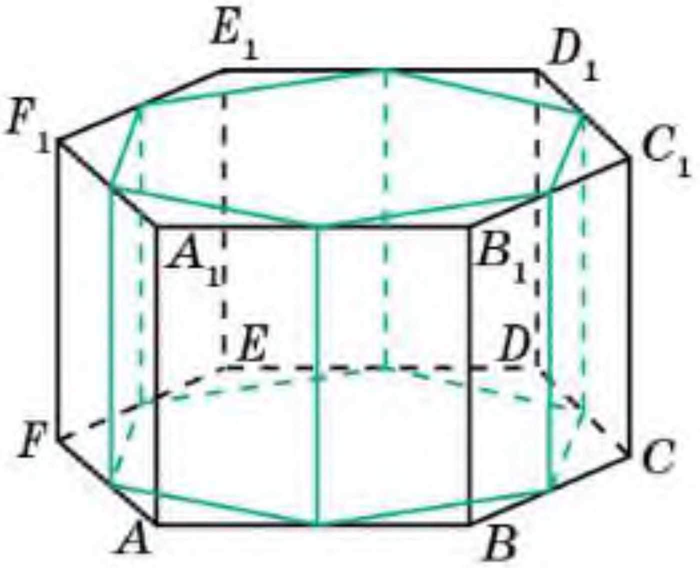
24.4-сүрәт

24.8. Үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 12 см³-ға тәң. Асасиниң чоққилири берилгән призма асасиниң тәрәплириниң оттурилири болидиған икинчи призминиң һәҗимини тепиңлар (24.4.-сүрәт).

24.9. Төртбулуңлуқ призминиң һәҗими 10 см³-ға тәң. Асасиниң чоққилири берилгән призма асасиниң тәрәплириниң оттурилири болидиған иккинчи призминиң һәҗимини тепиңлар (24.5-сүрәт).



24.5-сүрәт



24.6-сүрәт

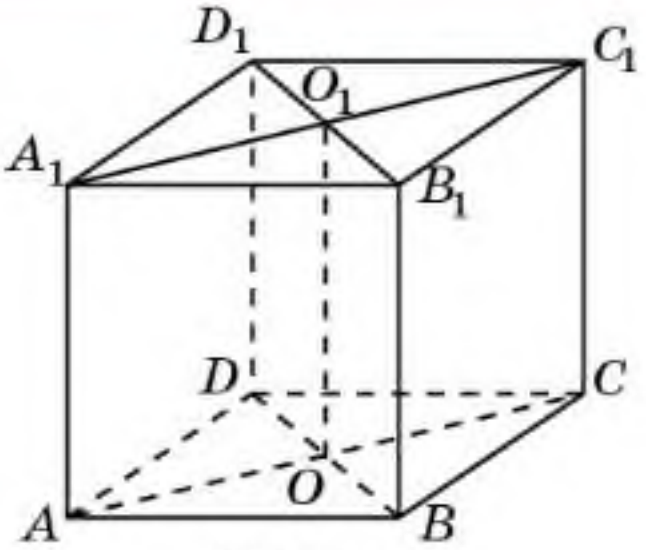
24.10. Алтәбулуңлуқ призминиң һәҗими 12 см³-ға тәң. Асасиниң чоққилири берилгән призма асасиниң тәрәплириниң оттурилири болидиған иккинчи призминиң һәҗимини тепиңлар (24.6-сүрәт).

24.11. Дурус *n*-булуңлуқ икки призма охшаш болуши үчүн уларниң ян қирлири билән асасиниң тәрәплиригә бағлиқ шәртләрни тәрипләңлар. Мошу призмилар һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

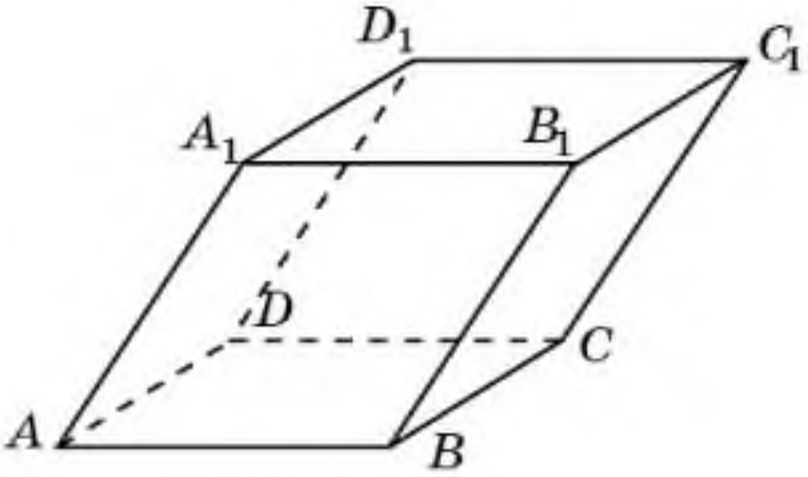
C

24.12. Тик призминиң асаси — мәйдани 1 м²-ға тәң болидиған ромб. Униң диагональлиқ қийилмилириниң мәйданлири 3 м² вә 6 м²-ға тәң (24.7-сүрәт). Призминиң һәҗимини тепиңлар.

MyLibrary.kz



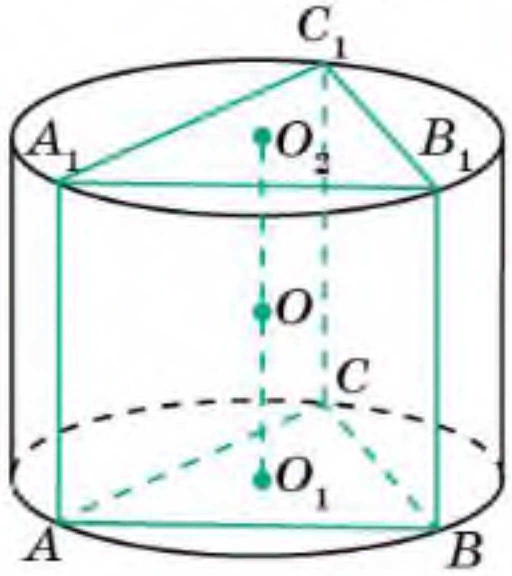
24.7-сүрәт



24.8-сүрәт

24.13. Параллелепипедниң умумий чоққиси бар үч йеқи — тәрәплири 1 см вә чоққисидики тар булуңлири 60°-қа тәң ромблар (24.8-сүрәт). Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.

24.14. Параллелепипедниң хошна икки йеқиниң мәйданлири S_1 вә S_2, уларниң умумий қирлири a-ға тәң вә арисидики икки яқлиқ булуңи 150°-қа тәң (24.8-сүрәт). Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.



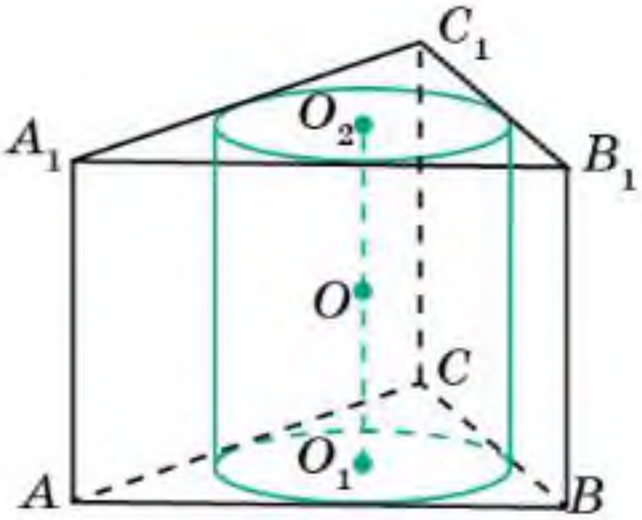
24.9-сүрәт

24.15. Бошлуқта үч параллелепипед берилгән. Һәр бир параллелепедни икки тәң миқдарлиқ бөләкләргә бөлүш үчүн кийғучи тәкшиликни қандақ жүргүзүшкә болиду?

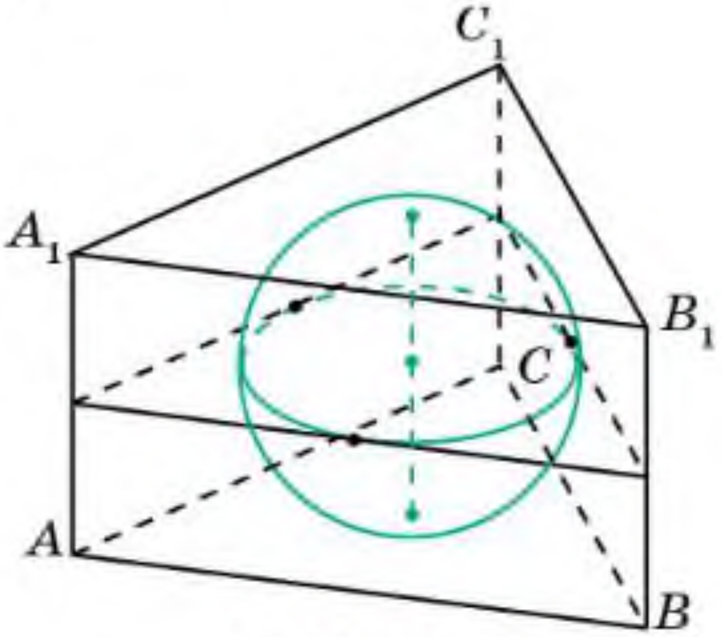
24.16. Цилиндрниң егизлиги билән асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға ичидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар (24.9-сүрәт).

24.17. Цилиндрниң егизлиги билән асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар (24.10-сүрәт).

24.18. Бирлик сфериға сиртидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар (24.11-сүрәт).



24.10-сүрәт

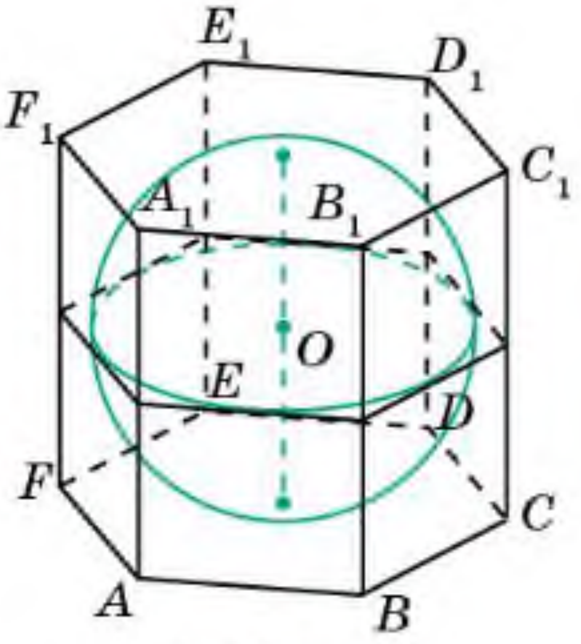


24.11-сүрәт

MyLibrary.kz

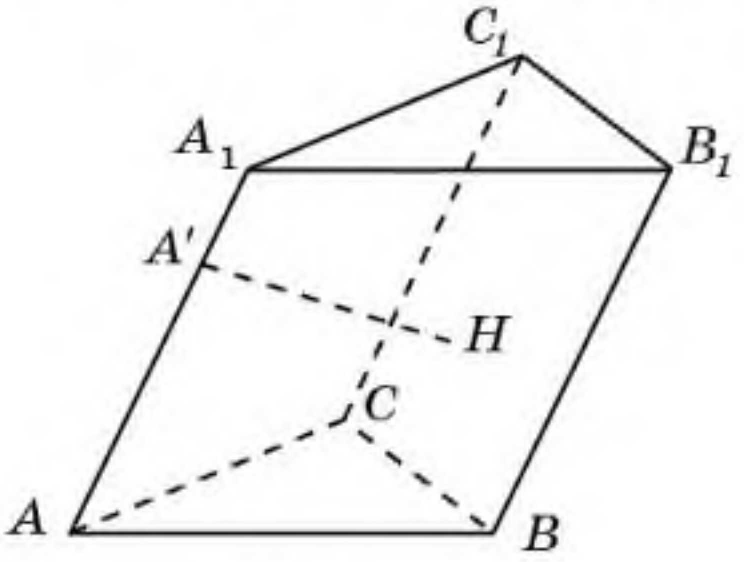
24.19. Бирлик сфериға сиртидин сизилған дурус алтәбулуңлуқ призминиң һәжимини тепиңлар (24.12-сүрәт).

24.20. Үчбулуңлуқ янту призминиң бир ян йеқиниң мәйдани Q-ға, мошу ян йеқидин униңға қарши ятқан қириғичә болған арилиқ d-ға тәң. Призминиң һәжимини тепиңлар (24.13-сүрәт).

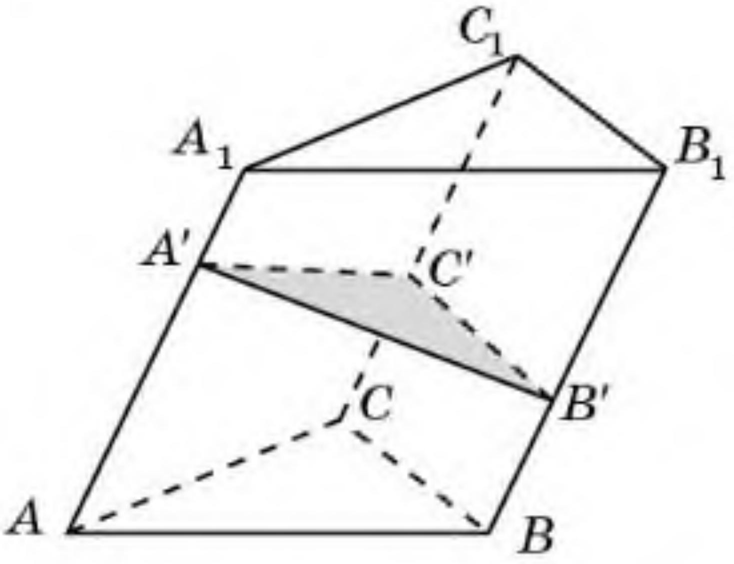


24.12-сүрәт

24.21. Янту призминиң һәжими униң ян қири билән мошу қириға перпендикуляр вә барлиқ қирлири билән қийилишидиған тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданиниң көпәйтиндисигә тәң болидиғанлиғини испатлаңлар (24.14-сүрәт).



24.13-сүрәт



24.14-сүрәт

24.22. Үчбулуңлуқ янту призминиң ян қирлири 6 см-ға вә уларниң арилиқлири 3 см, 4 см вә 5 см-ға тәң. Призминиң һәжимини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

24.23. Айлиниш җисимлириниң вә цилиндрниң ениқлимилирини қайтилаңлар.

§25. Цилиндрниң һәжими

Кавальери принципини цилиндрниң һәжимини тепишқа қоллинайли.

Теорема. ***Цилиндрниң һәжими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду:***

$$V = S \cdot h = \pi R^2 \cdot h,$$

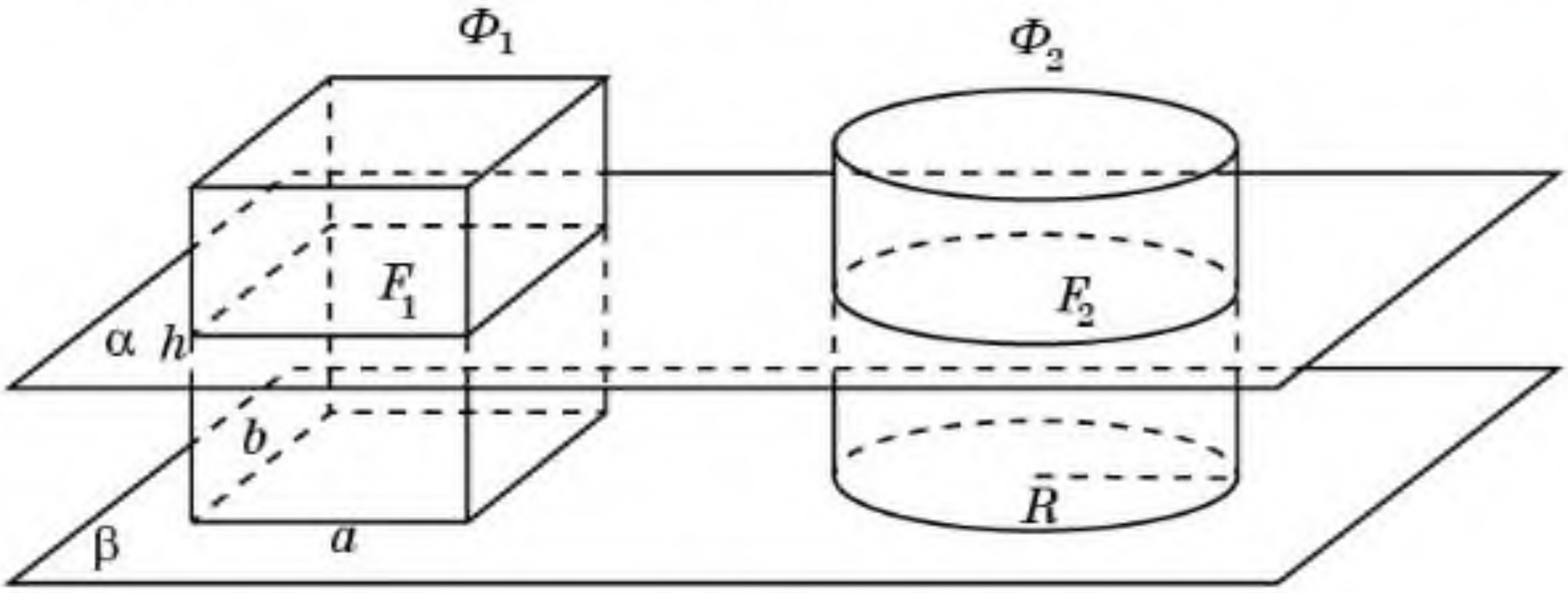
бу йәрдә S — цилиндр асасиниң мәйдани, R — асасиниң радиуси, h — цилиндрниң егизлиги.

MyLibrary.kz

Испатлиниши. Теореминиң испатлиниши призминиң һәҗимини тепиш формулисиниң испатлинишиға охшаш. Асасиниң радиуси R вә егизлиги h болидиған цилиндр үчүн тикбулуңлуқ параллелепипедни қараштурайли. Униң бир чоққисидин чиқидиған қирлири a, b, h-қа тәң вә $a \cdot b = \pi R^2$ болсун.

Цилиндр билән параллелепипедни униң a, b тәрәплири ятқан йеқи цилиндр асасиниң β тәкшилигидә ятидиған вә өзлири мошу тәкшиликниң бир йеқида болидиғандәк қилип орунлаштуримиз (25.1-сүрәт).

Параллелепипедниң β тәкшилигигә параллель α тәкшилиги билән қийилмисида β тәкшилигидики тәрәплири a, b болидиған тиктөртбулуңлуққа тәң тиктөртбулуңлуқ һасил болиду. Цилиндрниң мошу α тәкшилиги билән қийилмисида цилиндрниң асасиға тәң дүгләк елиниду. Бу қийилмиларниң мәйданлири тәң. Демәк, Кавальери принципи бойичә параллелепипед билән цилиндрниң һәҗимлири тәң болиду. Мошуниңдин цилиндрниң һәҗими $\pi R^2 \cdot h$ келип чиқиду. ◻



25.1-сүрәт

Соаллар

1. Цилиндрниң һәҗими қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

А

25.1. Цилиндрниң ясиғучиси 3 см-ға, асасиниң радиуси 2 см-ға тәң. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

25.2. Цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тәрипи a см болидиған квадрат. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

25.3. Бир қача иккинчисигә қариғанда 2 һәссә егизирәк, иккинчи қача болса биринчисигә қариғанда 1,5 һәссә кәңирәк. Қандақ қачиниң сиғдурушлиғи жуқури?

MyLibrary.kz

25.4. Квадратниң тәрипи a-ға тәң. Квадратни тәрипи ятқан түздин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

25.5. Цилиндрниң оқлуқ кийилмисиниң диагонали 1 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

25.6. Бирлик кубқа ичидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

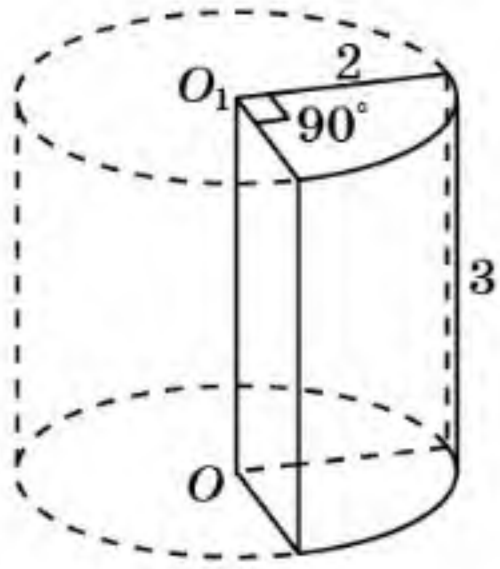
25.7. Тик призминиң асаси — тәрипи 1 см-ға тәң квадрат. Призминиң ян қири 2 см-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

B

25.8. Тиктөртбулуңлуқни a вә b тәрәплири ятқан түзләрдин айландурғанда икки цилиндр пәйда болиду. Мошу цилиндрларниң һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

25.9. Дурус төртбулуңлуқ призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗими мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрниң һәҗимидин нәччә һәссә артуқ?

25.10. 25.2-сүрәттики цилиндр асасиниң радиуси 2 см-ға, ясиғучиси 3 см-ға тәң. Мошу цилиндрдин иккияқлиқ тик булуң ясап, кийилип елинған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.



25.2-сүрәт

25.11. Цилиндрлиқ қача асасиниң диаметри 9 см-ға тәң. Қачиға қандақту бир җисимни салғанда, униң ичидики суюқлуқ мөлчәри 12 см-ға көтирилиду. Җисимниң һәҗимини тепиңлар.

25.12. Цилиндрлиқ қачидики суюқлуқниң дәриҗиси 16 см-ға тәң. Әгәр мошу суюқлуқни диаметри бу қачидин 2 һәссә чоң болидиған иккинчи қачиға қуйса, у чағда суюқлуқниң дәриҗиси қандақ егизликтә болиду?

25.13. Цилиндрниң ян бетиниң йейилмиси — тәрәплири 1 см вә 2 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

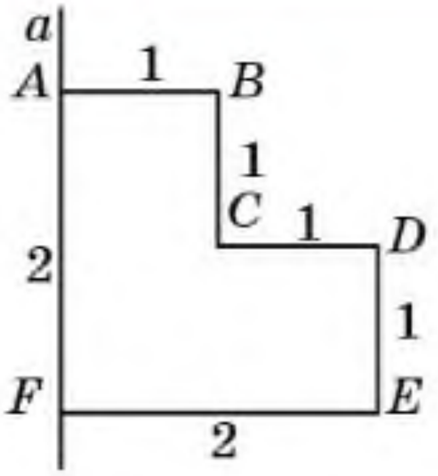
25.14. Бирлик сфериға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

25.15. Икки цилиндр охшаш болуши үчүн уларниң ясиғучилири билән асаслириниң радиуслириға бағлиқ шәртләрни йезиңлар. Мошу цилиндр һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

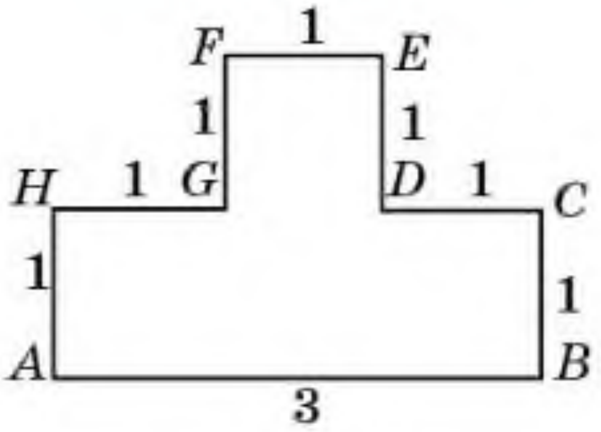
C

25.16. 25.3-сүрәттә барлиқ булуңлири тик болидиған көпбулуңлуқ тәсвирләнгән. Мошу көпбулуңлуқни 2 см-ға тәң тәрәплири ятидиған түздин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

MyLibrary.kz



25.3-сүрәт



25.4-сүрәт

25.17. 25.4-сүрәттә барлиқ булуңлири тик болидиған көпбулуңлуқ тәсвирләнгән. Мошу көпбулуңлуқни 3 см-ға тәң тәрипи ятидиған AB түзидин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

25.18. Призминиң ян қирлири 2 см-ға тәң, асаси — тәрипи 1 см болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

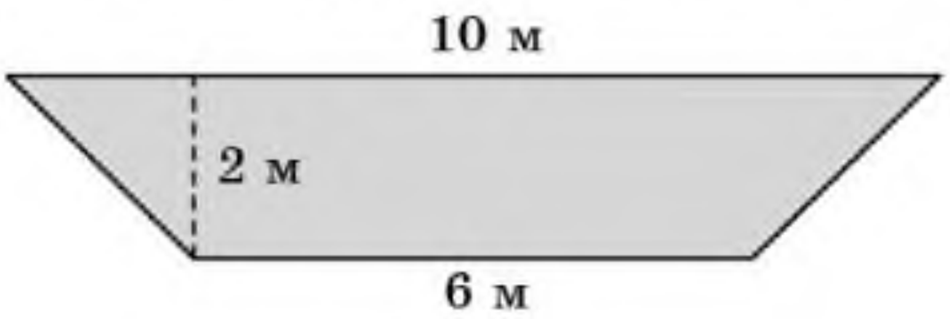
25.19. Призминиң ян қирлири 5 см-ға тәң, асаси — катетлири 6 см вә 8 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

25.20. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлдар.

25.21. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

25.22. Цилиндр асаслириниң мәркәзлирини қошидиған кесиндиниң оттуриси арқилиқ өтидиған һәр қандақ тәкшилик мошу цилиндрни икки тәң миқдарлиқ бөләкләргә бөлидиғанлиғини испатлаңлар.

25.23. Дәрия қининиң тоғра қийилмисиниң тәсвири тәңянлиқ трапеция шәклигә егә болиду. Униң асаслири 10 м вә 6 м, егизлиги 2 м (25.5-сүрәт). Дәрия еқиминиң илдамлиғи 1 м/с болса, мошу тәсвирдин 1 минутта қандақ һәҗимдики су өтидиғанлиғини тепиңлар. Җававини метр куб билән йезиңлар.

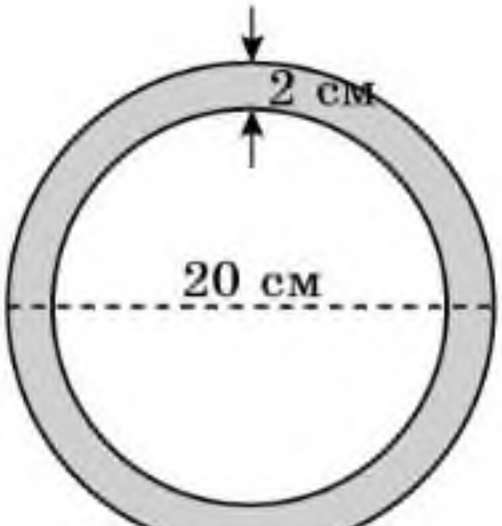


25.5-сүрәт

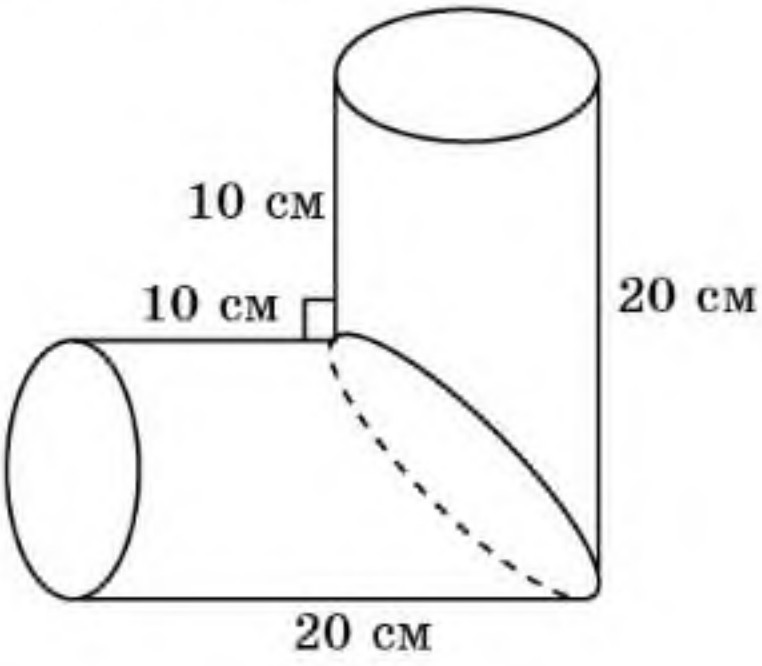
25.24. Чоюн трубисиниң узунлиғи 2 м, сиртқи диаметри 20 см-ға тәң. Трубиниң қелинлиғи 2 см (25.6-сүрәт). Әгәр чоюнниң зичлиғи

MyLibrary.kz

тәхминән 7,5 г/см^3 болса, трубиниң салмиғини тепиңлар. Жававини килограмм билән бериңлар ($\pi \approx 3$).



25.6-сүрәт



25.7-сүрәт

25.25. 25.7-сүрәттики 90° булуң ясайдиған цилиндрларниң икки тәң бөлигидин туридиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар ($\pi \approx 3$).

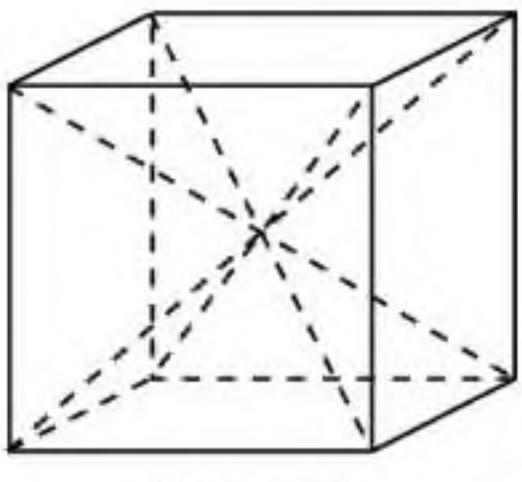
Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

25.26. Пирамидиниң вә қийиқ пирамидиниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§ 26. Пирамида вә қийиқ пирамида һәҗимлири

Пирамидиниң һәҗимини һесаплаш тоғрисида дәсләпки мәлуматлар б.з.б. 3000 жил бурун қедимий вавилонлиқлар билән мисирлиқларниң папируслиридин тепилған.

Бир қизиқ йери, улар пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисини умумлаштуруп чиқармиған, бирақ пирамидиларниң һәҗимлирини дәл ениқлиған. Мошундақ егизлиги $\frac{1}{2}$-гә, 7 гә тәң дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимлирини тапқан. Униң үчүн улар қири өлчәм бирлигигә тәң кубни елип, уни 6 тәң дурус төртбулуңлуқ пирамидиларға бөлгән. Бу пирамидиларниң асаслири кубниң яқлири болиду вә уларниң һәрқайсисиниң чоққиси кубниң мәркизидә орунлишиду (26.1-сүрәт). Барлиқ алтә пирамида өзара тәң болиду. Буниңдин уларниң һәр қайсисиниң һәҗими кубниң һәҗиминиң $\frac{1}{6}$-гә тәң болидиғанлиғини алимиз.



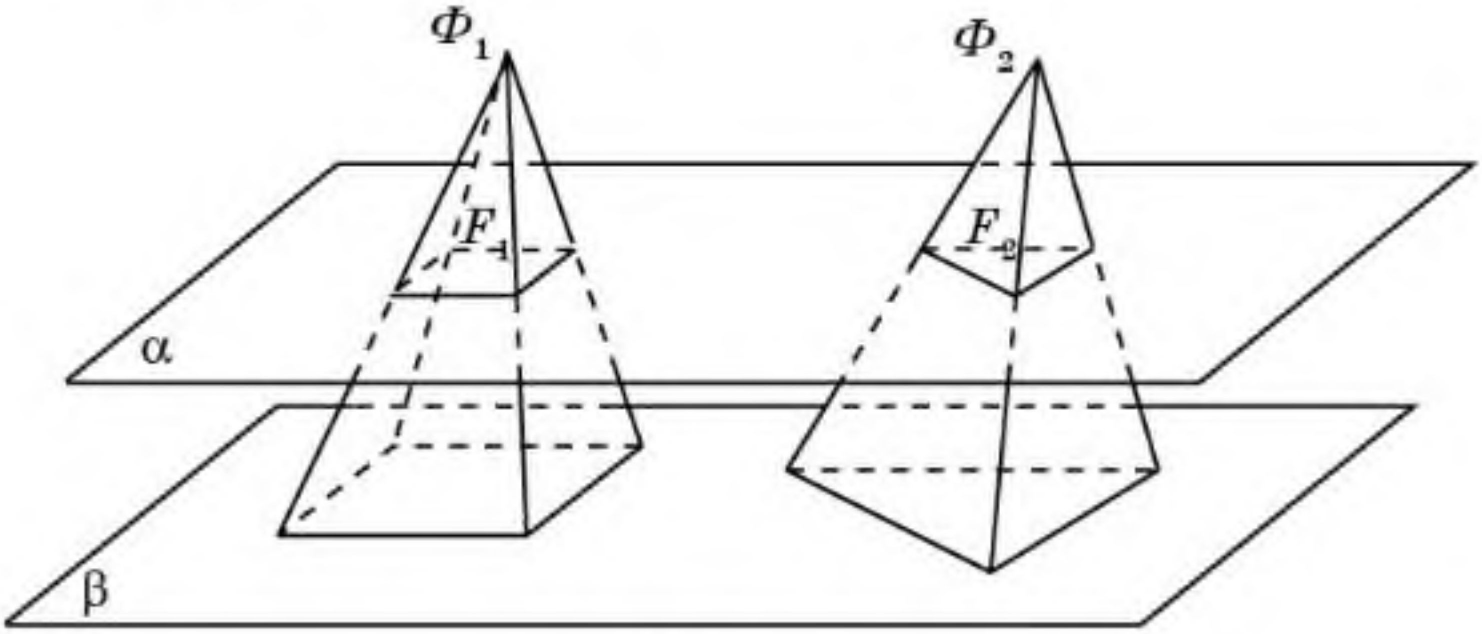
26.1-сүрәт

Кавальери принципини қоллинип, мундақ ярдәмчи теоремини испатлайли.

MyLibrary.kz

Теорема. ***Әгәр икки пирамидиниң егизликлири вә асаслириниң мәйданлири өзара тәң болса, у чағда уларниң һәҗимлириму тәң болиду.***

Испатлиниши. $Ф_1$ вә $Ф_2$ пирамидилириниң егизликлири h-қа тәң болсун вә мәйданлири S-қа тәң болидиған асаслири бир β тәкшилигидә ятсун (26.2-сүрәт).

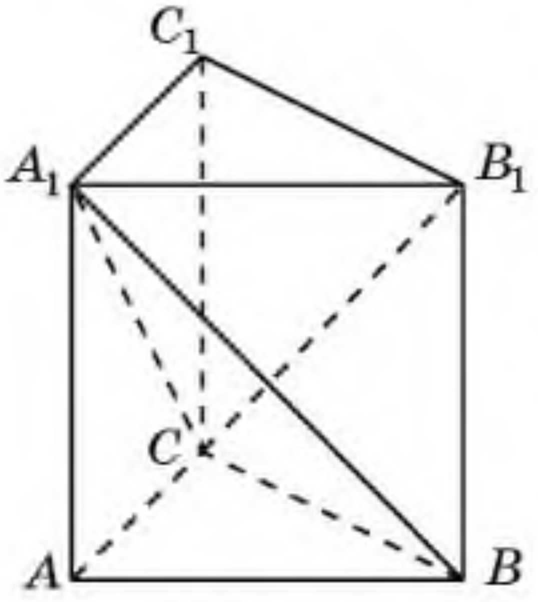


26.2-сүрәт

β тәкшилигигә параллель вә униңдин x ариliқта болидиған α тәкшилигини жүргүзимиз ($0 \leqslant x \leqslant h$). Шу чағда пирамидиларниң мошу тәкшилик билән қийилмилирида пәйда болған F_1 вә F_2 фигурилири мувапиқ асаслириға охшаш болиду вә һәр иккисидә k охшашлиқ коэффициенти $(h - x) : h$-қа тәң болиду. Демәк, F_1 вә F_2 фигурилириниң S_1 вә S_2 мәйданлири мувапиқ $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулилири билән ипадилиниду. Ундақ болса, улар өзара тәң болиду. Кавальери принципи бойичә пирамидиларниң һәҗимлириниң тәң болидиғанлиғи келип чиқиду. ◻

Әнди үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими тоғрилиқ асасий теоремини испатлайли.

Теорема. ***Үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисиниң үчтин бириgә тәң.***



26.3-сүрәт

Испатлиниши. A_1ABC үчбулуңлуқ пирамида болсун. Уни $ABCA_1B_1C_1$ үчбулуңлуқ призмисиғичә толуқтуруп салимиз (26.3-сүрәт).

B, C, A_1 вә C, B_1, A_1 чекитлири арқилиқ өтидиған тәкшиликләр бу призмини чоққиси A_1 чекити болидиған A_1ABC, A_1CBB_1 вә $A_1CB_1C_1$ пирамидилириға бөлиду.

A_1CBB_1 вә $A_1CB_1C_1$ пирамидилириниң CBB_1 вә CB_1C_1 асаслири тәң болиду, сәвәви CB_1 диагонали CBB_1C_1 параллелограмини икки тәң үчбулуңлуқларға бөлиду. Шуниң билән биллә бу пирамидиларниң чоққилири умумий

вә асаслири бир тәкшиликтә ятиду. Демәк, бу пирамидиларниң умумий егизлиги болиду. Буниңдин пирамидиларниң һәҗимлири тәң болидиғанлиғи келип чиқиду. Әнди A_1ABC вә $CA_1B_1C_1$ пирамидилирини қараштурайли. Уларниң ABC вә $A_1B_1C_1$ асаслири тәң вә егизликлириму тәң болиду. Демәк, бу пирамидиларниң һәҗимлири тәң болиду. Шуниң билән, барлиқ үч пирамидиниң һәҗимлири тәң болиду.

Призминиң һәҗими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң екәнлигини һесапқа елип, үчбулуңлуқ пирамидиниң V һәҗимини тепиш формулисини алимиз:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

бу йәрдә S — пирамида асасиниң мәйдани, h — пирамидиниң егизлиги.

Әнди һәр қандақ пирамидиниң һәҗимини тепиш мәсилисини қараштурайли.

Теорема. ***Пирамидиниң һәҗими униң асас мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисиниң үчтин биригә тәң болиду.***

Испатлиниши. Берилгән пирамида үчүн асасиниң мәйдани билән егизлиги бирдәк үчбулуңлуқ пирамидини қараштуримиз.

Кавальери принципи бойичә бу пирамидиларниң һәҗимлири тәң болиду. Демәк, мону формула орунлуқ болуп тепилиду:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

бу йәрдә S — пирамида асасиниң мәйдани, h — пирамидиниң егизлиги.

Егизлиги h вә асасиниң тәрәплири a болидиған дурус: а) үчбулуңлуқ; ә) алтәбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиш фомулисини йәкүнләп чиқириңлар.

Қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисини чиқирайли.

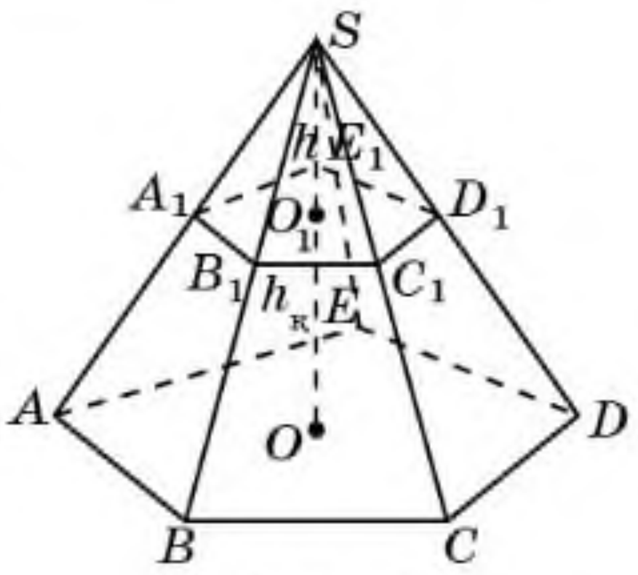
Теорема. ***Қийиқ пирамидиниң V һәҗими мону формула билән һесаплиниду:***

$$V = \frac{1}{3}h_қ(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

бу йәрдә S, s — қийиқ пирамида асаслириниң мәйданлири, $h_қ$ — униң егизлиги.

Испатлиниши. Қийиқ пирамида асаслириниң мәйданлири S вә s-қа тәң болсун. Униң $h_қ$ егизлиги болса дәсләпки вә қийилип чүшкән пирамидилар егизликлириниң $(H - h)$ айримисиға тәң болсун.

26.4-сүрәттә $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ бәшбулуңлуқ қийиқ пирамидиси тәсвирләнгән.



26.4-сүрәт

Қийиқ пирамидиниң V һәҗими үчүн мону формула орунлуқ болиду:

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

MyLibrary.kz

Қийиқ пирамидиниң $h_қ$ егизлигини униң асаслириниң S, s мәйданлири билән дәсләпки вә қийилип чүшкән пирамидиларниң H, h егизликлири арқилиқ ипадиләймиз.

Пирамидиниң асасиға параллель тәкшилик билән қийилмисида униң асасиға охшаш фигура пәйда болидиғанлиғини байқаймиз. Охшашлиқ коэффициенти пирамидиниң чоққисидин қийилма тәкшилигигә вә асас тәкшилигигичә арилиқларниң нисбитигә тәң $\frac{h}{H}$-қа тәң болиду. Шуниң билән биллә охшаш фигурилар мәйданлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң квадратиға тәң болиду.

Буниңдин мону тәңликни алимиз:

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{H - h_қ}{H}\right)^2.$$

Бу тәңликтин H вә h егизликлирини тапимиз:

$$H = \frac{h_қ\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}, \; h = \frac{h_қ\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Тепилған H, h мәналирини қийиқ пирамидиниң V һәҗими үчүн формулиға қоюп, издиливатқан формулини тапимиз:

$$V = \frac{1}{3}\left(S\frac{h_қ\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} - s\frac{h_қ\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}h_қ \cdot \frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} = \frac{1}{3}h_қ(S + \sqrt{S \cdot s} + s).$$ □

Егизлиги $h_қ$ вә асаслириниң тәрәплири a билән b болидиған дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқириңлар.

Соаллар

1. Үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими қандақ һесаплиниду?
2. Һәр қандақ пирамидиниң һәҗими қандақ һесаплиниду??
3. Қийиқ пирамидиниң һәҗими қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

А

26.1. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги h-қа, асасиниң тәрәплири болса a-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини һесаплаш формулисини йәкүнләп чиқириңлар.

26.2. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 3 м-ға, ян қирлири 5 м-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

26.3. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

26.4. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

MyLibrary.kz

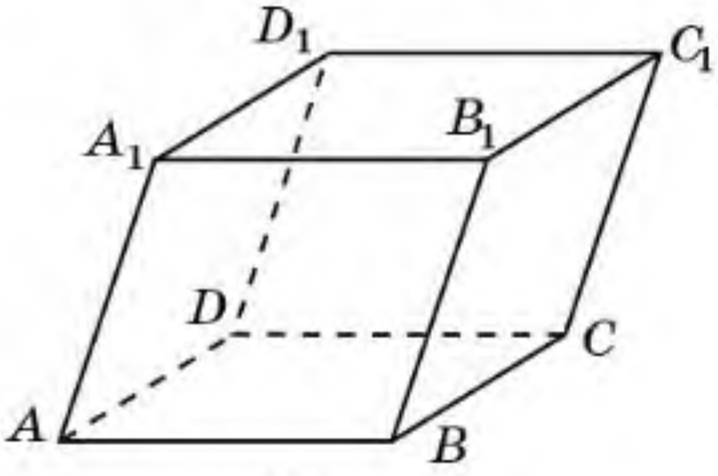
26.5. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири болса 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

26.6. Тетраэдрниң қири 1 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

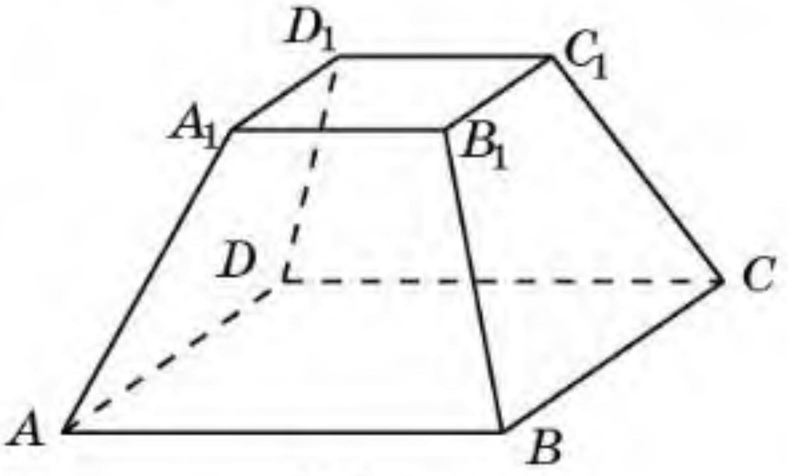
26.7. Әгәр дурус тетраэдрниң барлиқ қирлирини 2 һәссә ашурса, униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?

26.8. Әгәр дурус пирамидиниң егизлигини 3 һәссә ашурса, асасиниң тәрәплирини 3 һәссә кемитсә, униң һәҗими қандақ өзгириду?

26.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипединиң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң. Чоққилири: 1) A, B, C, D, B_1; 2) A, B, D, C_1 чекитлири болидиған көпяқлиқниң һәҗимини тепиңлар (26.5-сүрәт).



26.5-сүрәт



26.6-сүрәт

26.10. Пирамида егизлигиниң оттуриси арқилиқ өтидиған вә асасиға параллель тәкшилик билән қийилмиси жүргүзүлгән. Пирамидиниң пәйда болған бөләклириниң һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

26.11. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң егизлиги 3 см-ға, асаслириниң тәрәплири 2 см вә 1 см-ға тәң. Қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар (26.6-сүрәт).

B

26.12. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң диагональлиқ қийилмиси — тәрипи 1 см болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

26.13. Үчбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири өз ара перпендикуляр вә уларниң һәрқайсиси 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

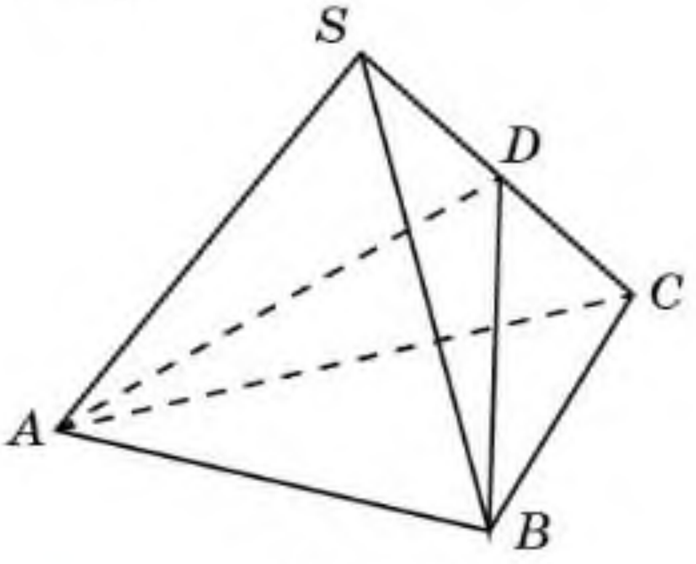
26.14. Үчбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ ян қирлири 1 см-ға, чоққисидики тәкши булуңлири 60°, 90° вә 90°-қа тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

26.15. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 6 $см^3$-қа тәң, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Пирамидиниң егизлигини тепиңлар.

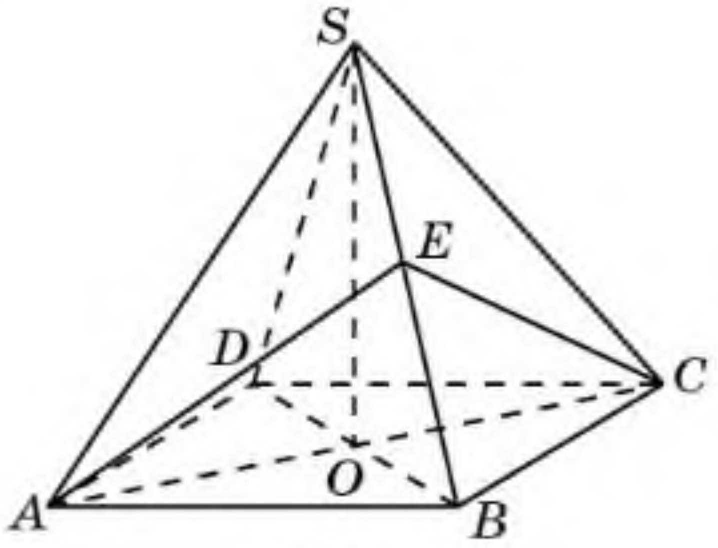
26.16. Параллелепипедниң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң (26.5-сүрәт). BDA_1C_1 тетраэдриниң һәҗимини тепиңлар.

MyLibrary.kz

26.17. Үчбулуңлуқ пирамида асасиниң бир тәрипи вә униңға қарши ятқан қириниң оттуриси арқилиқ тәкшилик өтиду (26.7-сүрәт). Бу тәкшилик пирамидиниң һәҗимини қандақ нисбәттә бөлиду?



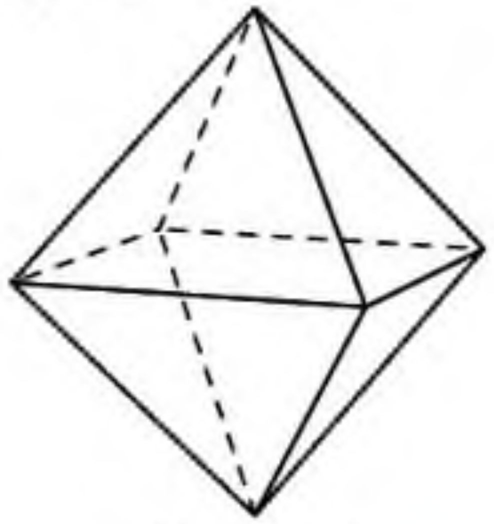
26.7-сүрәт



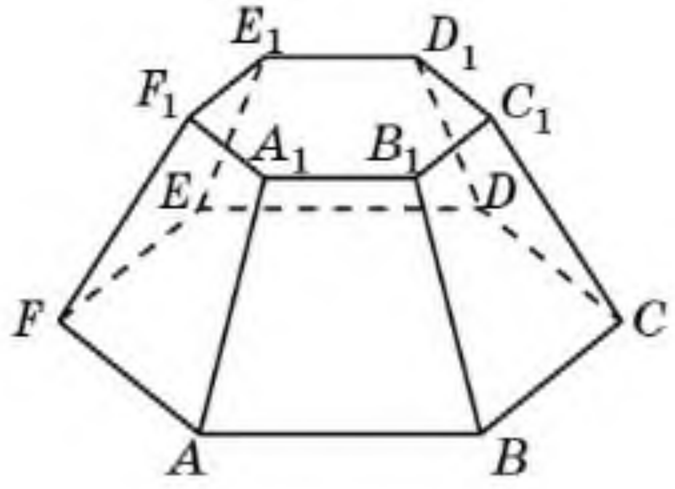
26.8-сүрәт

26.18. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 12 см³-ға тәң. Пирамида асасиниң AC диагонали вә униңға қарши ятқан ян қириниң E оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилип чүшидиған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар (26.8-сүрәт).

26.19. Октаэдрниң қирлири 1 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар (26.9-сүрәт).



26.9-сүрәт



26.10-сүрәт

26.11-сүрәт

26.20. Дурус алтәбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң егизлиги 3 см-ға, асасиниң тәрәплири 2 см вә 1 см-ға тәң. (26.10-сүрәт). Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

26.21. Нур-Султан шәһиридики Течлиқ вә разимәнлик сарийи дурус төртбулуңлуқ пирамида шәклидә (26.11-сүрәт). Униң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 62 м. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар .

MyLibrary.kz

26.22. Дурус n-булуңлуқ икки пирамида охшаш болуши үчүн уларниң ян қирлири билән асаслириниң тәрәплиригә бағлинишлиқ шәртләрни йезиңлар. Мошу пирамидилар һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

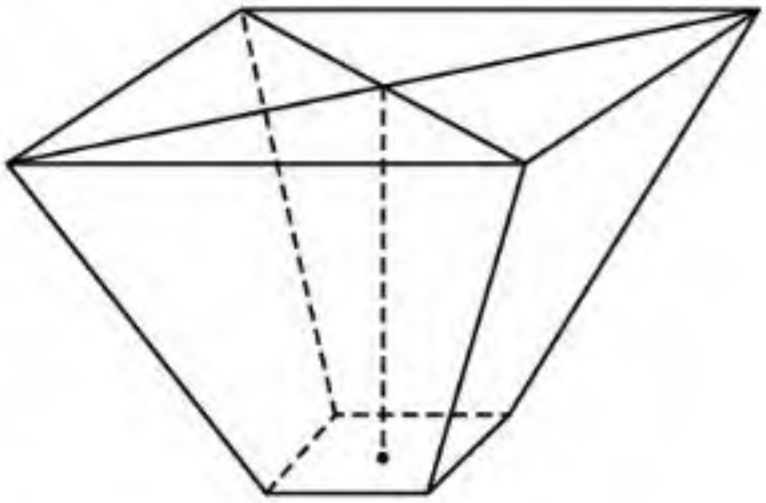
26.23. 26.12-сүрәттә Қедимий Мисирдики әң чоң имарәтләрниң бири — Хеопс пирамидиси — дурус төртбулуңлуқ пирамида тәсвирләнгән. Униң егизлиги 146 м-ға, ян қирлири 230 м-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

26.12-сүрәт

26.13-сүрәт

26.24. 26.13-сүрәттә чедири пирамида шәклидә вә асаси квадрат болидиған өй тәсвирләнгән. Пирамидиниң барлиқ қирлири 12 м-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

26.25. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамида шәклидики көктатларни сақлашқа беғишланған ящик асаслириниң тәрәплири мувапиқ 6 дм вә 14,4 дм-ға тәң (26.14-сүрәт). Пирамидиниң егизлиги 4,3 дм. Әгәр 1 $дм^3$-да 0,675 кг көктат болса, у чағда ящикниң һәҗими билән униң ичидики көктатниң салмиғини тепиңлар.



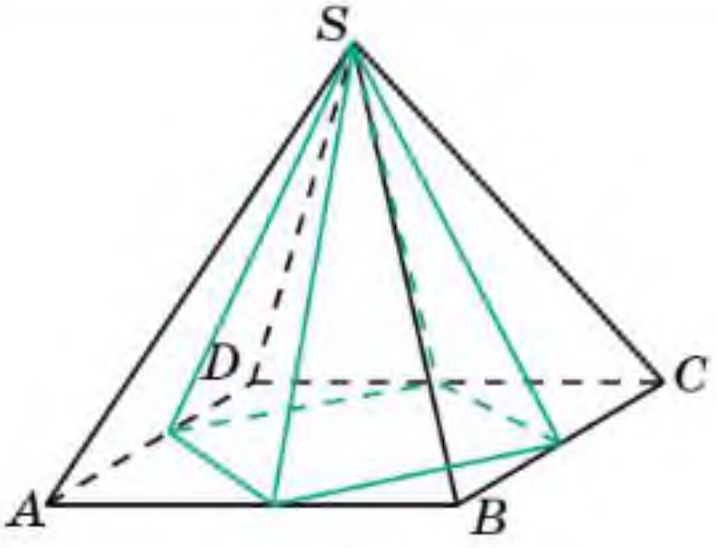
26.14-сүрәт

C

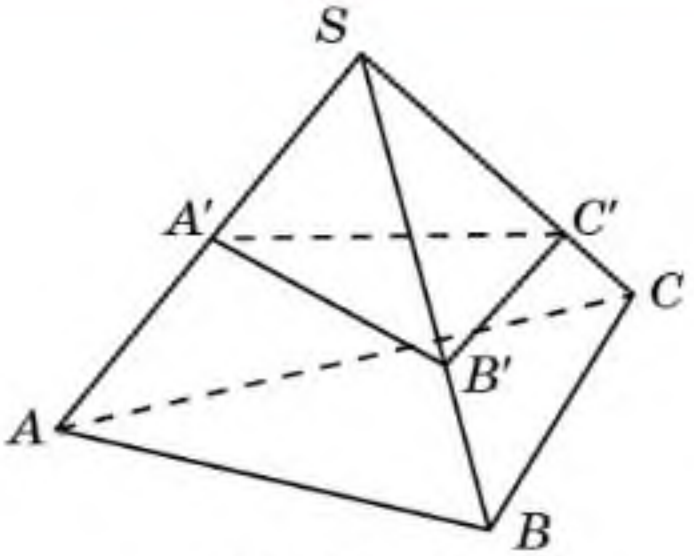
26.26. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, униң ян йеқи билән асасиниң арисидики булуңи 45°-қа тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

26.27. *SABCD* төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң. Чоққиси берилгән пирамидиниң S чоққиси билән мувапиқ келидиған, асасиниң чоққилири болса ABCD асасиниң тәрәплириниң оттуриси болидиған пирамидиниң һәҗимини тепиңлар (26.15-сүрәт).

MyLibrary.kz



26.15-сүрәт



26.16-сүрәт

26.28. Тетраэдрниң һәҗими 1 см³-ға тәң. Чоққилири мошу тетраэдр қирлириниң оттурилири болидиған көпяқлиқниң һәҗимини тепиңлар.

26.29. Тетраэдрниң қариму-қарши ятқан икки қири өзара перпендикуляр вә узунлуқлири 3 см-ға тәң. Уларниң арилиғи 2 см-ға тәң. Тетраэдрниң һәҗимини тепиңлар.

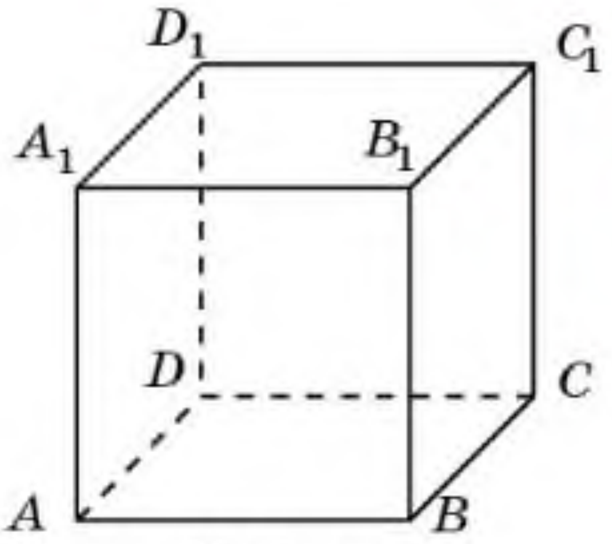
26.30. Тетраэдрниң қариму-қарши ятқан икки қириниң арисидики булуң 60° вә уларниң узунлуқлири 2 см-ға тәң. Уларниң арилиғи 3 см-ға тәң. Тетраэдрниң һәҗимини тепиңлар.

26.31. $SABC$ үчбулуңлуқ пирамидисиниң SA, SB, SC қирлирини тәкшилик мувапиқ A', B', C' чекитлиридә қийип өтиду (26.16-сүрәт) вә $SA' : SA = k$, $SB' : SB = l$, $SC' : SC = m$. $SA'B'C'$ пирамидисиниң һәҗими $SABC$ пирамидиси һәҗиминиң $k \cdot l \cdot m$-ға көпәйтиндисигә тәң екәнлигини испатлаңлар. Дәсләпки пирамидиниң һәҗими 1 см³-ға тәң вә $SA' : SA = 1 : 2$, $SB' : SB = 2 : 3$, $SC' : SC = 3 : 4$ дәп елип, $SA'B'C'$ пирамидисиниң һәҗимини тепиңлар.

26.32. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубидики ADA_1BCB_1 вә ABA_1DCD_1 призмилириниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар (26.17-сүрәт).

26.33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубидики ADA_1BCB_1 вә $BA_1B_1CD_1C_1$ призмилириниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар (26.17-сүрәт).

26.34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубидики A_1ABCD вә C_1ABCD призмилириниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар (26.17-сүрәт).



26.17-сүрәт

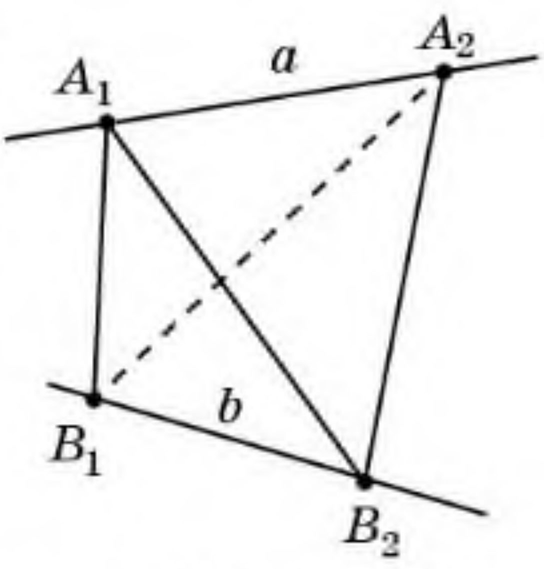
26.35. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубидики A_1ABCD вә $DBCC_1B_1$ пирамидилириниң умумий бөлүгиниң һәҗимини тепиңлар (26.17-сүрәт).

26.36. Бир үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 1 см³-ға тәң. Мошу пирамидиниң егизлигиниң оттуриси арқилиқ өтидиған вә асасиға параллель тәкшиликкә қариғанда әйнәклик симметриялиқ иккинчи пирамида елинған. Пирамидиларниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

MyLibrary.kz

26.37. Бир дурус тетраэдрниң һәҗими 1 см³-ға тәң. Мошу тетраэдрниң икки қаримуқарши ятқан қирлириниң оттурилирини қошидиған кесиндиниң оттурисиға қариғанда мәркәзлик симметриялиқ иккинчи тетраэдр елинған. Тетраэдрниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

26.38. a вә b айқаш түзлиридин мувапиқ A_1A_2 вә B_1B_2 кесиндилири елинған (26.18-сүрәт). $A_1A_2B_1B_2$ тетраэдриниң һәҗими түзләрдики мошу кесиндиләрниң орунлишишиға әмәс, пәқәт уларниң узунлуқлириға бағлиқ екәнлигини испатлаңлар.



26.18-сүрәт

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

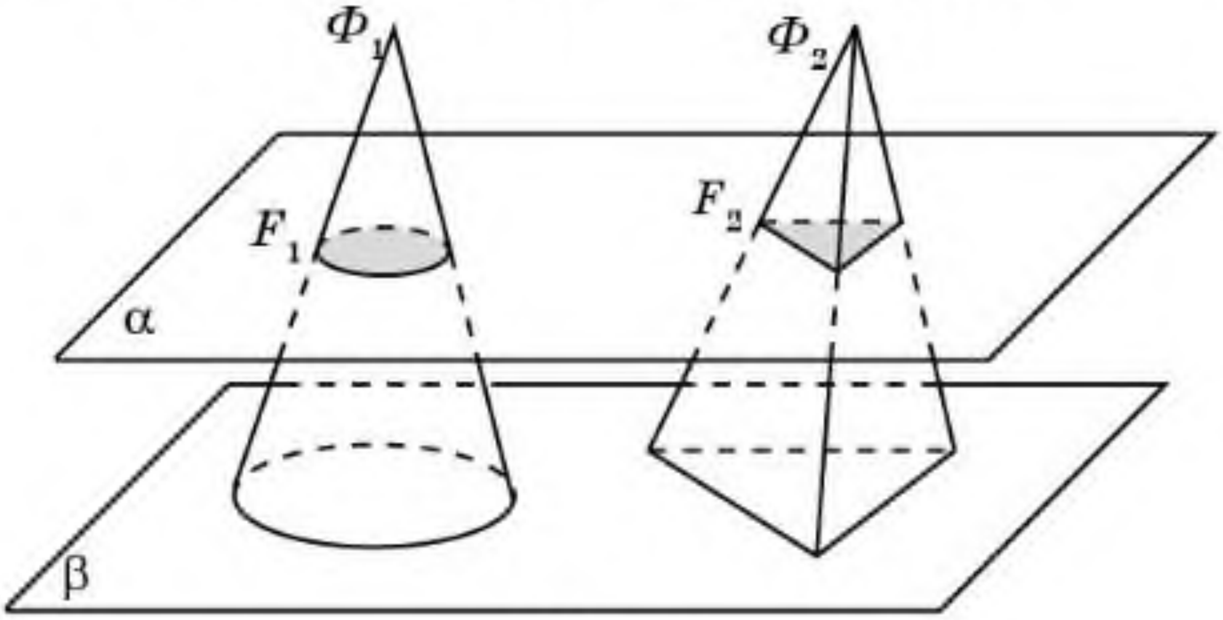
26.39. Конусниң вә қийиқ конусниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§ 27. Конус вә қийиқ конус һәҗимлири

Кавальери принципини конусниң һәҗимини тепишқа қоллинайли.

Теорема. ***Конусниң һәҗими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисиниң үчтин биригә тәң болиду.***

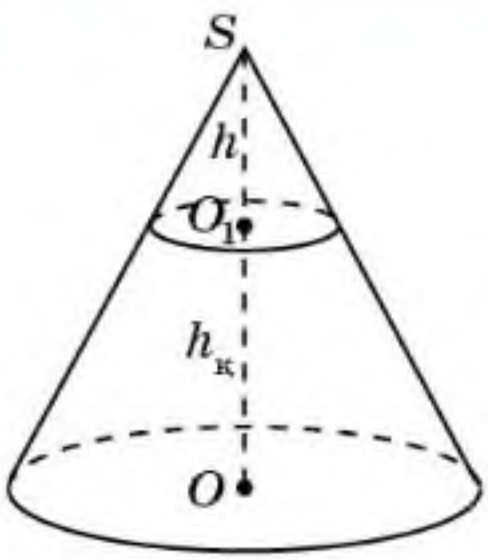
Испатлиниши. Асасиниң мәйдани S вә егизлиги h-қа тәң конус үчүн асасиниң мәйдани вә егизлиги дәл мошундақ болидиған қандақту бир пирамидини қараштуримиз. Уларни асаслири β тәкшилигидә ятидиғандәк вә өзлири мошу тәкшиликниң бир яқ бөлигидә болидиғандәк қилип орунлаштуримиз (27.1-сүрәт).



27.1-сүрәт

β тәкшилигигә параллель вә униңдин x ариliқта болидиған α тәкшилигини жүргүзимиз ($0 \leqslant x \leqslant h$). Шу чағда конус билән пирамидиниң мошу тәкшилик билән қийилмилирида һасил болған F_1 вә F_2

MyLibrary.kz



27.2-сүрәт

фигурилири мувапиқ асаслириға охшаш болиду вә һәр иккисидә охшашлиқ коэффициенти $k = \frac{h - x}{h}$ болиду. Демәк, F_1 вә F_2 фигурилириниң S_1 вә S_2 мәйданлири мувапиқ $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулилири билән ипадилиниду. Ундақ болса, улар өз ара тәң болиду. Кавальери принципи бойичә конус билән пирамида һәҗимлири тәң болидиғанлиғи келип чиқиду. Буниңдин конусниң V һәҗимини тепиш үчүн мону формула орунлуқ болиду:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

бу йәрдә R — конус асасиниң радиуси, h — конусниң егизлиги. ☐

Қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисиға охшаш қийиқ конусниң һәҗимини тепиш үчүн мону формула орунлуқ болиду:

$$V = \frac{1}{3}h_к(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

бу йәрдә S, s — қийиқ конус асаслириниң мәйданлири, $h_к$ — қийиқ конусниң егизлиги (27.2-сүрәт).

Бу формулиниң испатлимиси қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисиға охшаш болиду. Буни өзәңлар испатлаңлар.

Қийиқ конус асаслириниң мәйданлири мувапиқ $S = \pi R^2$ вә $s = \pi r^2$-қа тәң екәнлигини һесапқа елип, униң V һәҗимини тепиш үчүн төвәндики формулини алимиз:

$$V = \frac{1}{3}\pi h_к(R^2 + R \cdot r + r^2),$$

бу йәрдә R вә r — қийиқ конус асаслириниң радиуслири, $h_к$ — униң егизлиги.

Соаллар

1. Конусниң һәҗими қандақ һесаплиниду?
2. Қийиқ конусниң һәҗими қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

А

27.1. Әгәр конусниң: 1) егизлигини 3 һәссә ашурса; 2) асасиниң радиусини 2 һәссә ашурса, униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?

27.2. Әгәр конусниң егизлигини 2 һәссә азайтса, асасиниң радиусини 2 һәссә ашурса, униң һәҗими өзгирәмду?

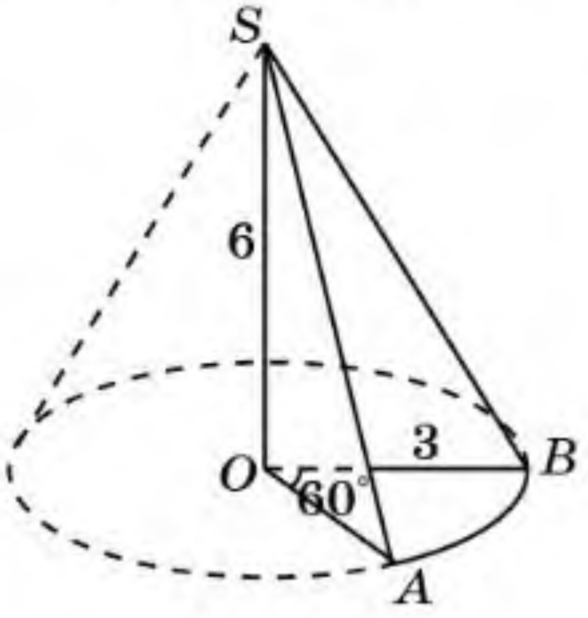
MyLibrary.kz

27.3. Цилиндр билән конусниң умумий асаси бар вә егизлиги бирдәк. Әгәр цилиндрниң һәҗими 15 $см^3$-ға тәң болса, у чағда конусниң һәҗимини тепиңлар.

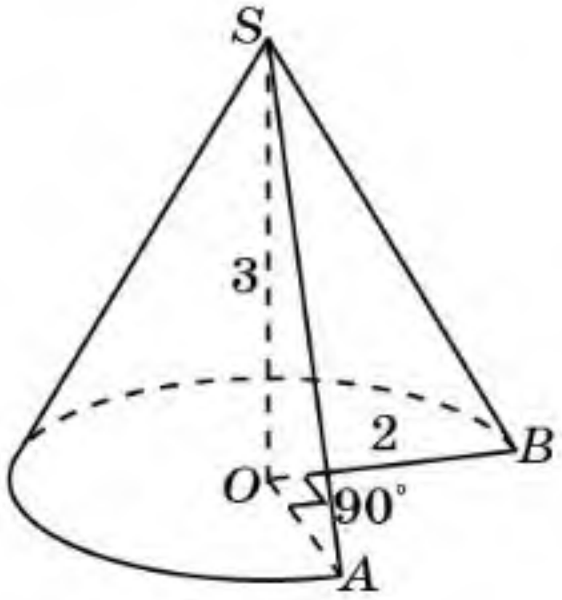
27.4. Конусниң һәҗими V-ға тәң. Конус егизлигиниң оттуриси арқилиқ өтидиған вә асасиға параллель қийилма жүргүзүлгән. Конусниң һасил болған бөләклири һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

27.5. Конусниң егизлиги 3 см-ға, ясиғучиси 5 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

27.6. Конус асасиниң радиуси 3 см-ға, егизлиги 6 см-ға тәң вә $\angle AOB = 60^\circ$. 27.3-сүрәттики конус бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.



27.3-сүрәт



27.4-сүрәт

27.7. Конус асасиниң радиуси 2 см-ға, егизлиги 3 см-ға тәң вә $\angle AOB = 90^\circ$. 27.4-сүрәттики конус бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

27.8. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 1 см вә 2 см-ға, егизлиги 3 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

В

27.9. Конус асасиниң диаметри 12 см-ға, оқлуқ қийилмисиниң чоққисидики булуңи 90°-қа тәң. Конусниң һәҗимини тепиңлар.

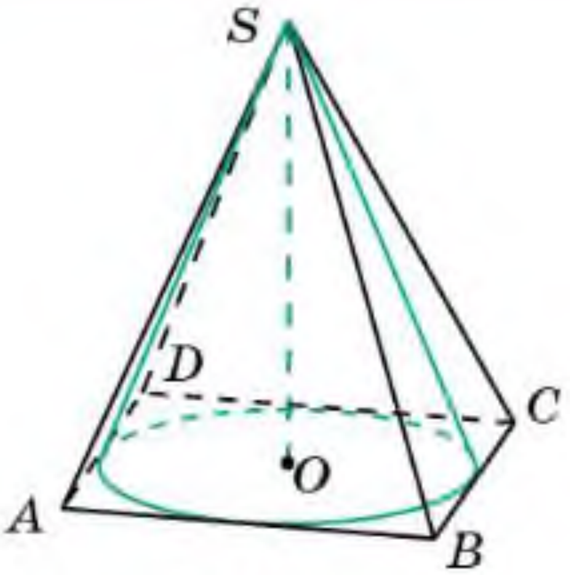
27.10. Конусниң оқлуқ қийилмиси — мәйдани 9 $см^2$ болидиған тикбулуңлуқ тәң янлиқ үчбулуңлуқ. Конусниң һәҗимини тепиңлар.

27.11. Тәрипи 1 см болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқни униң егизлиги ятидиған түз бойичә айландурғанда пәйда болидиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

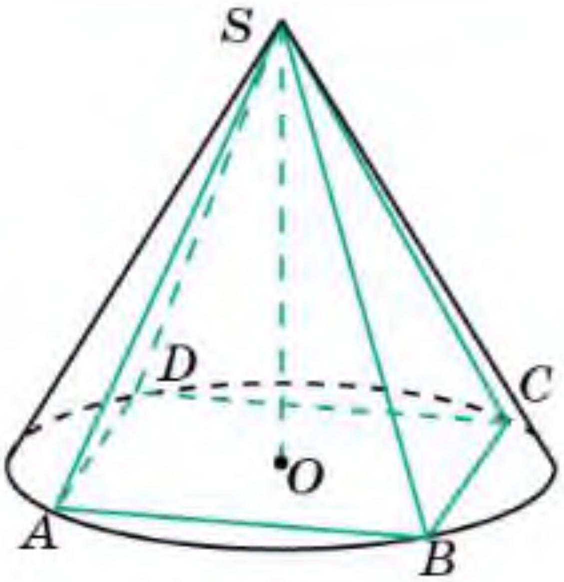
27.12. Тәңянлиқ әмәс тикбулуңлуқ үчбулуңлуқни униң һәр бир катетидин айландурғанда икки конус пәйда болиду. Мошу конусларниң һәҗимлири тәң боламду?

27.13. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 6 см-ға тәң. Асасиниң тәрәплири 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған конусниң һәҗимини тепиңлар (27.5-сүрәт).

MyLibrary.kz



27.5-сүрәт

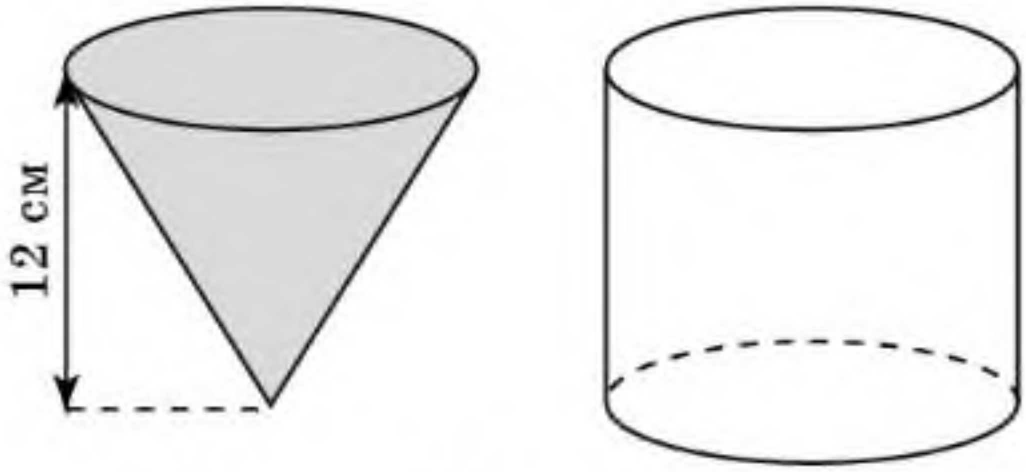


27.6-сүрәт

27.14. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 2 см-ға, асасиниң тәрәплири болса 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған конусниң һәҗимини тепиңлар (27.6-сүрәт).

27.15. Конусниң һәҗими 1 см^3-ға тәң. Конусниң егизлиги тәң үч бөләккә бөлүнгән вә бөлүниш чекитлири арқилиқ униң асасиға параллель тәкшиликләр жүргүзүлгән. Конусниң оттура бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

27.16. Егизлиги 12 см болидиған конуслуқ қачиға толтурулған су цилиндрлиқ қачиға авуштуруп қуюлди. Цилиндрлиқ қачиниң асасиниң радиуси конус қачиниң чәмбириниң радиусиға тәң. (27.7-сүрәт). Цилиндрлиқ қачидики суниң бети униң асасидин қандақ егизликтә болиду?



27.7-сүрәт

27.17. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 6 см вә 2 см, ясиғучиси болса 5 см-ға тәң. Мошу қийиқ конусниң һәҗимини тепиңлар.

27.18. Тәңянлиқ трапецияниң асаслири 4 см вә 6 см, егизлиги болса 3 см-ға тәң. Трапецияни униң асаслириниң оттуриси арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда пәйда болидиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

27.19. Икки конус охшаш болуши үчүн уларниң ясиғучилири билән асаслириниң радиуслириға бағлиқ шәртләрни йезиңлар. Мошу конуслар һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

MyLibrary.kz

27.20. Кигиз өй — көчмәнләрниң бурундин пайдилиниватқан турғун өйи (27.8-сүрәт). Кигиз өйниң керегеси (янлири) цилиндр шәклидә, мошу кереге билән шаңырақни туташтуруп туридиған бөлиги қийиқ конусқа охшайду. Цилиндр асасиниң диаметри 5 м-ға, қийиқ конус асаслириниң диаметри 5 м вә 1 м, цилиндр билән қийиқ конусниң егизликлири 2 м-ға тәң. Кигиз өйниң һәҗимини тепиңлар.

27.8-сүрәт

C

27.21. Тикбулуңлуқ тәңянлиқ үчбулуңлуқниң катети 3 см-ға тәң. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқни мошу катети ятқан түздин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

27.22. Бирлик квадратни униң диагонали ятқан түздин айландурғанда пәйда болидиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

27.23. Тәңянлиқ үчбулуңлуқниң ян тәрәплири 1 см-ға, уларниң арисидики булуң 120°-қа тәң. Үчбулуңлуқни бир ян тәрипи ятқан түздин айландурғанда пәйда болидиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

27.24. Конусниң ян бетиниң йейилмиси — радиуси 2 см-ға тәң йерим дүгләк. Мошу конусниң һәҗимини тепиңлар.

27.25. Бир конусниң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң. Мошу конус егизлигиниң оттуриси арқилиқ өтидиған вә асасиға параллель тәкшиликкә нисбәтән әйнәклик симметриялиқ иккинчи конус елинған. Конусларниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

27.26. Тәңтәрәплик үчбулуңлуқниң тәрәплири 2 см-ға тәң. Үчбулуңлуқниң бир чоққиси арқилиқ өтидиған вә егизлигигә параллель түздин айландурғанда пәйда болидиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

27.27. Қурулуш мәйданидики конус шәкиллик дога қумниң асасидики чәмбәрниң узунлиғини лентилиқ метр билән өлчигәндә 21,6 м

27.9-сүрәт

болди (27.9-сүрәт). Лентилиқ метрни догиниң үстидин атландуруп өлчигәндә, униң икки ясиғучисиниң узунлиғи 7,8 м екәнлиги ениқланди. Догиланған қумниң һәҗимини тепиңлар ($\pi \approx 3$).

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

27.28. Шарниң ениқлимисини вә Кавальери принципини тәкрарлаңлар.

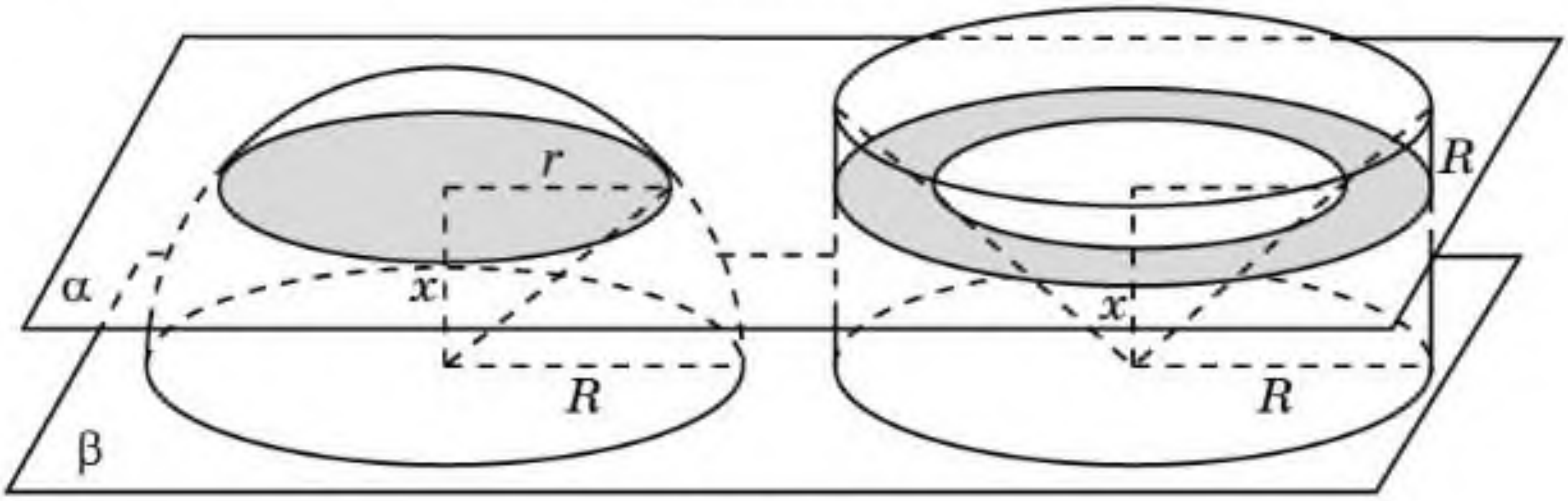
§ 28. Шар вә униң бөләклириниң һәҗимлири

Кавальери принципини қоллинип, шарниң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқирайли.

Теорема. ***Радиуси R-ға тәң шарниң V һәҗими мону формула билән һесаплиниду:***

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Испатлиниши. Радиуси R-ға тәң вә асаси β тәкшилигидә ятидиған йеримшарни қараштурайли. Шуниң билән биллә асаси мошу β тәкшилигидә ятидиған цилиндрни алайли вә униң асасиниң радиуси R-ға, егизлигиму R-ға тәң болсун (28.1-сүрәт).



28.1-сүрәт

Чоққиси цилиндрниң төвәнки мәркизидә, асаси цилиндрниң жуқарқи асаси болидиғандәк мошу цилиндрға ичидин конус сизимиз. Конусниң ичидә ятмайдиған цилиндрниң чекитлиридин туридиған Φ фигуриси билән берилгән йеримшарниң һәҗимлири тәң болидиғанлиғини испатлайли.

β тәкшилигигә параллель вә униңдин x арилиқта болидиған α тәкшилигини жүргүзимиз ($0 \leqslant x \leqslant R$). Шу чағда йерим шарниң мошу тәкшилик билән кийилмисида радиуси $\sqrt{R^2 - x^2}$ вә мәйдани $\pi(R^2 - x^2)$ болидиған дүгләк елиниду. Φ фигурисиниң α тәкшилиги билән кийилмисида ички дүглигиниң радиуси x-қа, сиртқи дүглигиниң радиуси R-ға тәң төңгә пәйда болиду. Бу төңгиниң мәйдани $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ қа тәң. Демәк, бу йеримшарниң кийилмисиниң мәйданиға тәң.

MyLibrary.kz

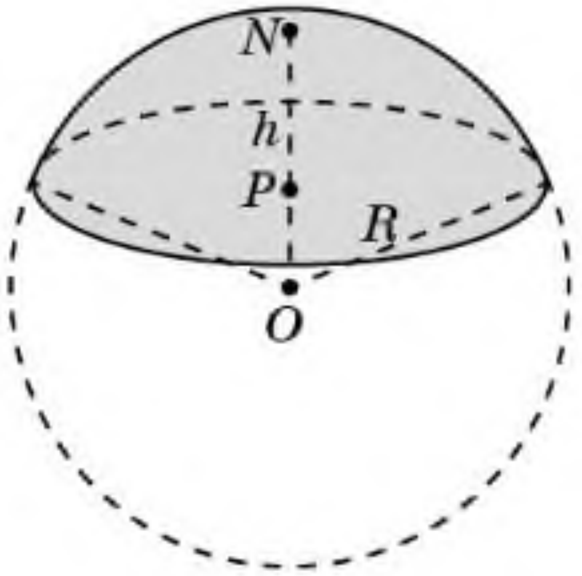
Кавальери принципи бойичә йеримшар билән Φ фигурисиниң һәҗимлири тәң болиду. Мошу һәҗимни һесаплайли. У цилиндр билән конус һәҗимлириниң айримисиға тәң болиду, йәни

$$V = V_ц - V_к = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Шарниң һәҗими йеримшарниң һәҗимидин икки һәссә көп болиду. Демәк, шарниң һәҗими мону формула билән һесаплиниду:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Әнди шарниң мәркизи арқилиқ өтмәйдиған қандақту бир тәкшилик билән қийип елинған шарниң кичик бөлиги — шар сегментиниң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқиримиз (28.2-сүрәт).



28.2-сүрәт

Теорема. ***Радиуси R-ға тәң шардин қийип елинған шар сегментиниң һәҗими мону формула билән һесаплиниду:***

$$V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h),$$

бу йәрдә h — шар сегментиниң егизлиги.

Испатлиниши. Шарниң һәҗимини тепиш формулисини испатлаш бойичә йеримшардин α тәкшилиги билән қийип елинған шар сегментиниң һәҗими Φ фигурисиниң α тәкшилиги билән қийилип чүшкән бөлигиниң һәҗимигә тәң болидиғанлиғи чиқиду (28.1-сүрәт).

Әгәр шар сегментиниң егизлиги h-қа тәң болса, у чағда цилиндрдин қийип елинған бөлигиниң һәҗими $\pi R^2 h$-қа тәң болиду. Конусниң қийилип чүшкән бөлигиниң һәҗими $\frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(R-h)^3 = \pi R^2 h - \pi h^2 R + \frac{1}{3}\pi h^3$-қа тәң болиду. Буниңдин шар сегментиниң V һәҗимини тепишниң издиливатқан формулиси елиниду.

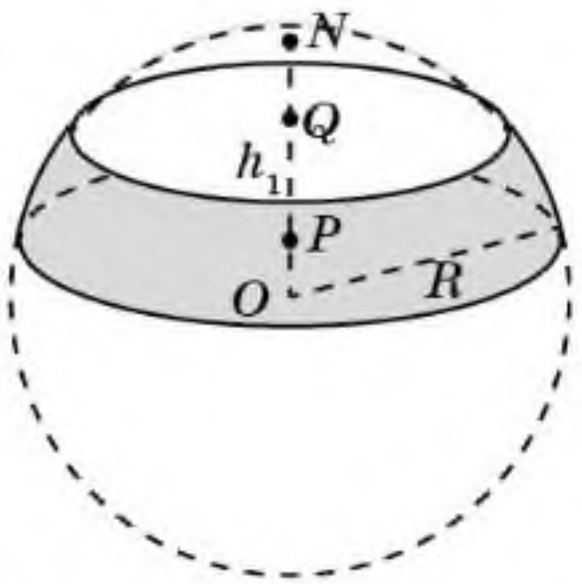
Шар сегментидин вә чоққиси мошу шарниң мәркизи, асаси болса шар сегментиниң асаси болидиған конустин түзүлгән шарниң бөлиги шар сектори дәп атилиду (28.2-сүрәт).

Шар сегментиниң вә конусниң һәҗимлириниң формулилирини пайдилинип, шар секториниң һәҗимини һесаплаш формулисини алимиз:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

бу йәрдә R — шардың радиуси, h — шар сегментиниң егизлиги.

Шар билән қийилишидиған параллель икки тәкшиликниң арисидики чәкләнгән шарниң бөлиги – шар бәлдиминиң һәҗимини тепиш формулисини өзәңлар йәкүнләп чиқириңлар (28.3-сүрәт).



28.3-сүрәт

MyLibrary.kz

Соаллар

1. Шарниң һәҗими қандақ һесаплиниду?
2. Шар сегментиниң һәҗими қандақ һесаплиниду?
3. Шар секториниң һәҗими қандақ һесаплиниду?

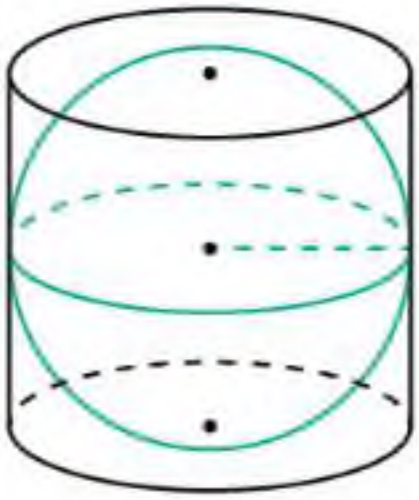
Һесаплар

A

28.1. Шарниң диаметри 6 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

28.2. Әгәр шарниң радиусини: 1) 3 һәссә; 2) 4 һәссә ашурса, униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?

28.3. Үч шарниң радиуслири 3 см, 4 см вә 5 см-ға тәң. Һәҗими мошу шарларниң һәҗимлириниң қошундисиға тәң шарниң радиусини тепиңлар.



28.4-сүрәт

28.4. Һәҗимлириниң қошудиси радиуси 6 см болидиған шарниң һәҗимигә тәң болидиған, радиуси 2 см-ға тәң қанчә шар елишқа болиду?

28.5. Кубниң қири 1 см-ға тәң. Кубқа ичидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар.

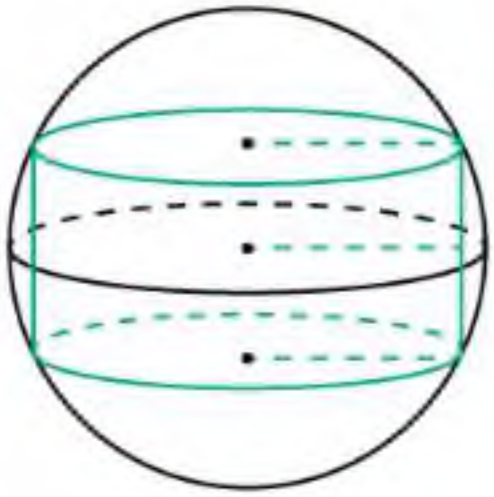
28.6. Цилиндрниң егизлиги 2 см-ға тәң. Цилиндрға ичидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (28.4-сүрәт).

B

28.7. Шарниң мәркизидин 8 см арилиқтики тәкшилик билән қийилмисиниң радиуси 6 см-ға тәң. Шардың һәҗимини тепиңлар.

28.8. Кубниң қири 1 см-ға тәң. Кубқа сиртидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар.

28.9. Цилиндрниң егизлиги билән асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Цилиндрға сиртидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (28.5-сүрәт).



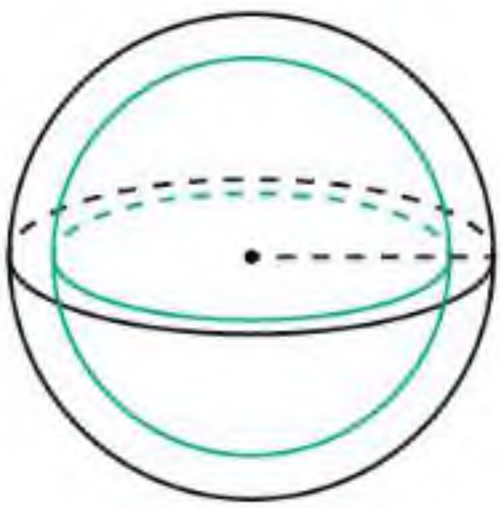
28.5-сүрәт

28.10. Дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Призмиға ичидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар.

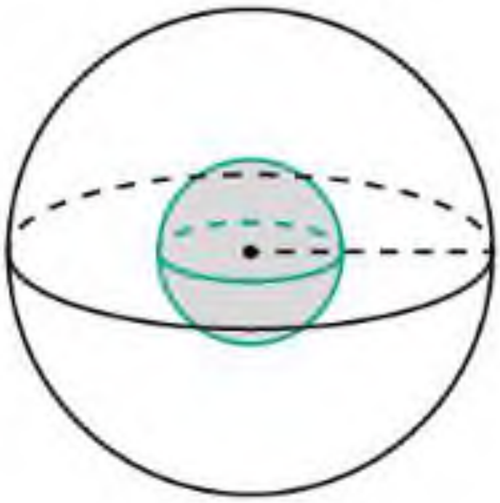
28.11. Икки шар бәтлириниң мәйданлири $m : n$ нисбитидәк. Уларниң һәҗимлириниң нисбити қандақ болиду?

28.12. Мәркәзлири умумий вә радиуслири R_1 билән R_2 $(R_1 > R_2)$ болидиған икки шарниң бәтлири билән чәкләнгән фигура — шар қәвитиниң һәҗимини тепиш формулисини тепиңлар (28.6-сүрәт).

MyLibrary.kz



28.6-сүрәт



28.7-сүрәт

28.13. Аличиниң ширнилик қәвитиниң қелинлиғи униң ичидики уруғиниң диаметриға тәң (28.7-сүрәт). Алича вә униң ичидики уруғи шар охшаш дәп елип, ширнилик қәвити билән уруғиниң һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

28.14. Апельсин — шар охшаш мевә. Униң қепиниң қелинлиғи шар радиусиниң бәштин бир бөлигигә тәң болиду (28.6-сүрәт). Апельсин қепи униң һәҗиминиң қандақ бөлигини тәшкил қилиду?

28.15. Нур-Султан шәһиридики “Бәйтерек” монументи — металлдин, әйнәктин вә бетондин ясалған архитектурилиқ имарәт, барлиқ дунияви бирләшмиләр үчүн мустәқил Қазақстанниң символи (28.8-сүрәт). Униң чоққисида диаметри 22 м-ға тәң шар бар. Мошу шарниң һәҗимини тепиңлар.

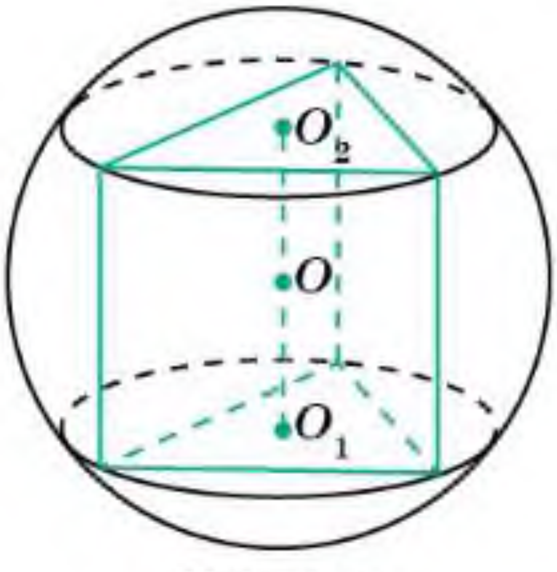
28.8-сүрәт

C

28.16. Дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призмиға сиртидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (28.9-сүрәт).

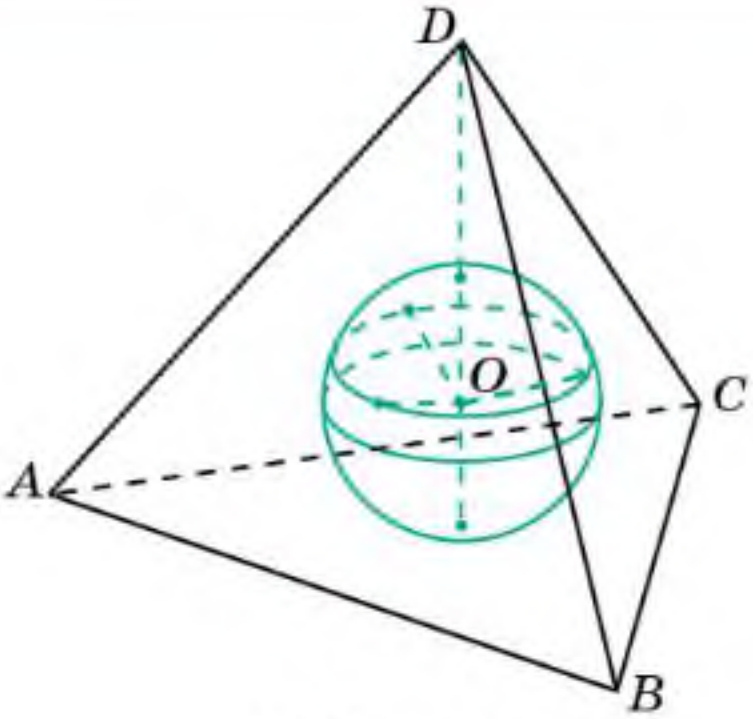
28.17. Дурус тетраэдрниң қирлири 1 см-ға тәң. Тетраэдрға ичидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (28.10-сүрәт).

28.18. Дурус тетраэдрниң қирлири 1 см-ға тәң. Тетраэдрға сиртидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (28.11-сүрәт).

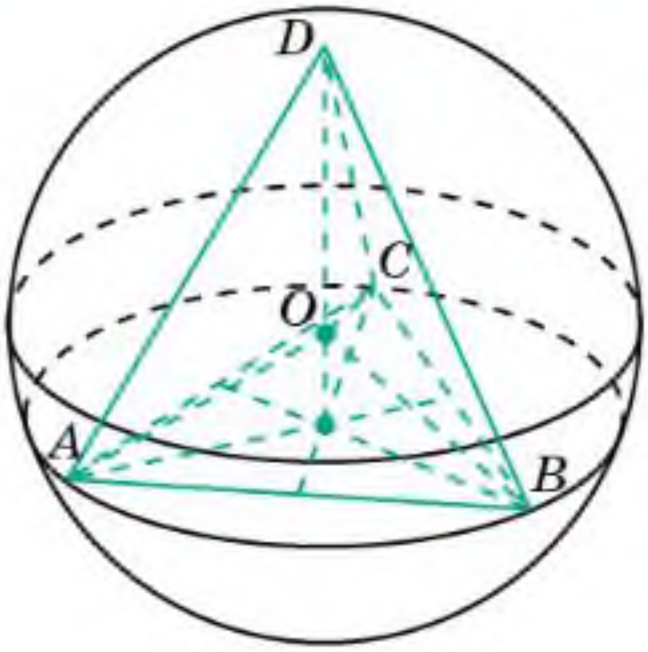


28.9-сүрәт

MyLibrary.kz

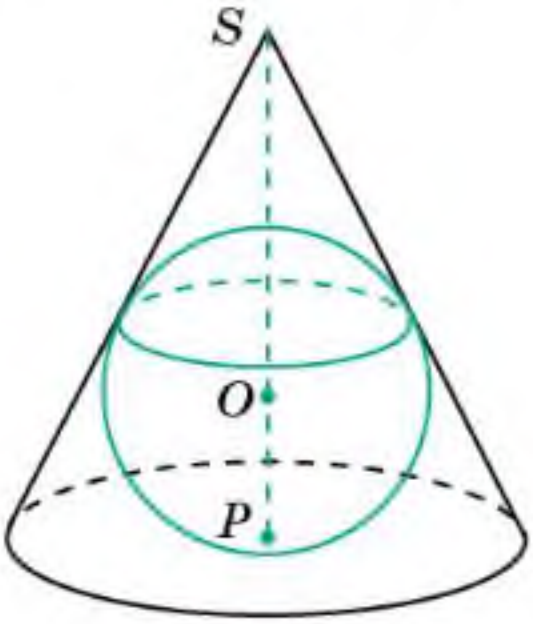


28.10-сүрәт

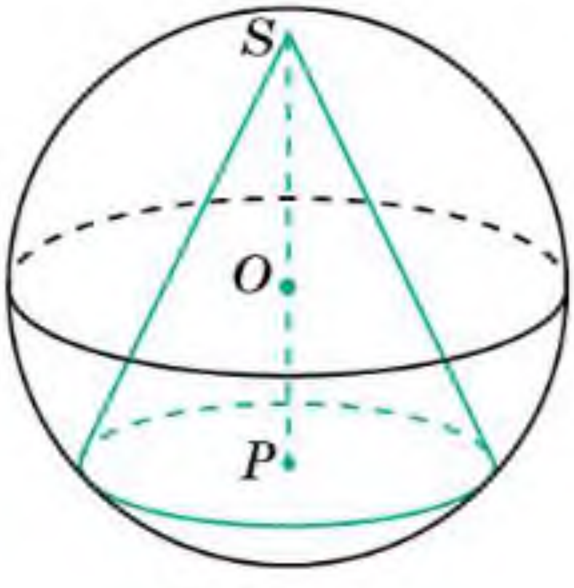


28.11-сүрәт

28.19. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Конусқа ичидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (28.12-сүрәт).

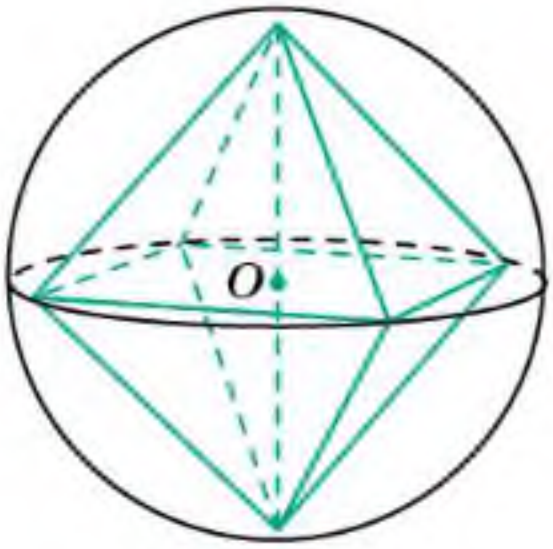


28.12-сүрәт



28.13-сүрәт

28.20. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Конусқа сиртидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (28.13-сүрәт).



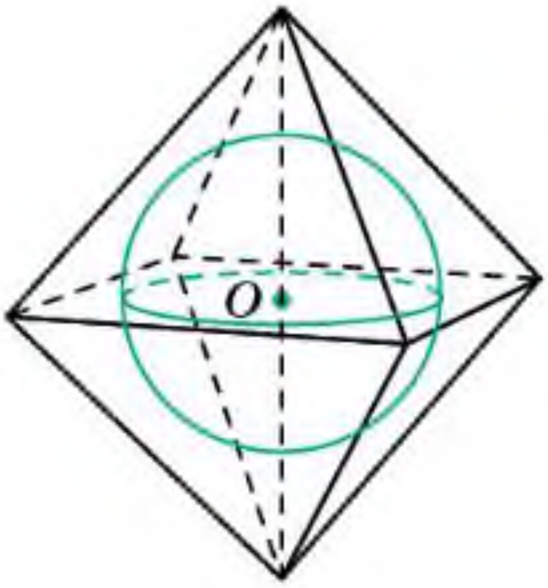
28.14-сүрәт

28.21. Октаэдрниң қири 1 см-ға тәң. Октаэдрға сиртидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (28.14-сүрәт).

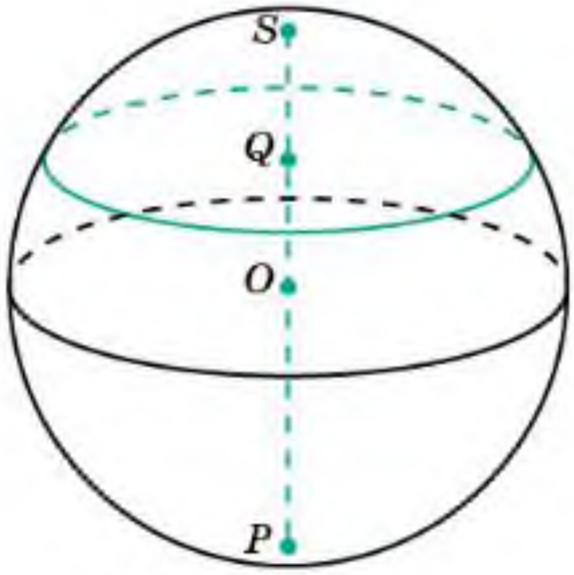
28.22. Октаэдрниң қири 1 см-ға тәң. Октаэдрға ичидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (28.15-сүрәт).

28.23. Шар радиусиниң оттуриси арқилиқ мошу радиусқа перпендикуляр тәкшилик жүргүзүлгән (28.16-сүрәт). Мошу тәкшилик билән қийип елинған шар сегментиниң һәҗими шар һәҗиминиң қандақ бөлиги болиду?

MyLibrary.kz



28.15-сүрәт



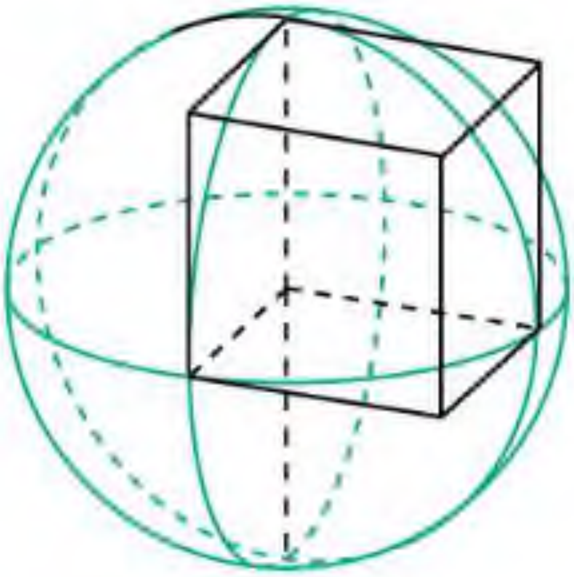
28.16-сүрәт

28.24. Шар сектори асасидики чәмбәрниң радиуси 60 см-ға, шарниң радиуси 75 см-ға тәң. Шар секториниң һәҗимини тепиңлар.

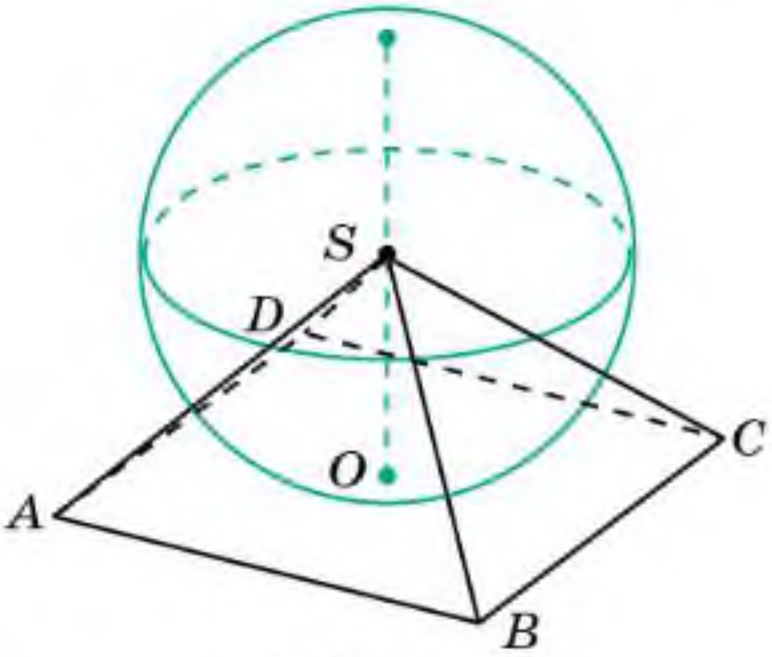
28.25. Шар бөлдими асаслириниң радиуслири 3 см вә 4 см-ға, шарниң радиуси 5 см-ға тәң. Шар бөлдиминиң һәҗимини тепиңлар.

28.26. Шарниң радиуси 1 см-ға тәң. Униң мәркизидә бирлик кубниң чоққиси орунлашқан (28.17-сүрәт). Куб билән шарниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

28.27. Дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға вә униң егизлиги 1 см-ға тәң. Радиуси 1 см-ға тәң шарниң мәркизидә мошу пирамидиниң чоққиси орунлашқан (28.18-сүрәт). Пирамида билән шарниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.



28.17-сүрәт



28.18-сүрәт

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. Әгәр кубниң барлиқ қирлирини 2 һәссә ашурса, у чағда униң һәҗими қанчә һәссә ашиду:

A) 2 һәссә; B) 4 һәссә; C) 6 һәссә; D) 8 һәссә.

MyLibrary.kz

2. Куб бетиниң мәйдани 12 $см^2$. Униң һәҗимини тепиңлар:

A) $2\sqrt{2}$ $см^3$; B) 4 $см^3$; C) $4\sqrt{2}$ $см^3$; D) 8 $см^3$.

3. Сферениң радиуси 2 см-ға тәң. Сфериға сиртидин сизилған кубниң һәҗимини тепиңлар:

A) 32 $см^3$; B) 64 $см^3$; C) 128 $см^3$; D) 256 $см^3$.

4. Үчбулуңлуқ призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ униң ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Әгәр дәсләпки призминиң һәҗими 8 $см^3$-қа тәң болса, у чағда мошу тәкшилик билән қийип елинған үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар:

A) 1 $см^3$; B) 2 $см^3$; C) 3 $см^3$; D) 4 $см^3$.

5. Алтәбулуңлуқ призминиң асаси — тәрәплири 2 см-ға тәң дурус алтәбулуңлуқ. Призминиң ян қирлири 3 см-ға тәң вә улар асас тәкшилиги билән 60° булуң ясайду. Призминиң һәҗимини тепиңлар:

A) $6\sqrt{3}$ $см^3$; B) 9 $см^3$; C) 27 $см^3$; D) $9\sqrt{3}$ $см^3$.

6. Цилиндр асасиниң радиуси билән егизлиги 2 см-ға тәң. Цилиндрға ичидин сизилған төртбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар:

A) 8 $см^3$; B) $8\sqrt{2}$ $см^3$; C) 16 $см^3$; D) $16\sqrt{2}$ $см^3$.

7. Цилиндрлиқ қачидики суюқлуқниң дәрижиси 8 см. Әгәр мошу суюқлуқ диаметри биринчи қачиға қариғанда 2 һәссә кичик болидиған иккинчи қачиға қуюлса, у чағда суюқлуқниң дәрижиси қандақ егизликтә болидиғанлиғини тепиңлар:

A) 16 см; B) 32 см; C) 48 см; D) 64 см.

8. Цилиндрниң ян бетиниң йейилмиси — тәрипи 2 см-ға тәң квадрат. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{2}{\pi}$ $см^3$; B) $\frac{4}{\pi}$ $см^3$; C) 2π $см^3$; D) 4π $см^3$.

9. Үчбулуңлуқ призминиң қирлири 3 см-ға тәң. Призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар:

A) 3π; B) 6π; C) 9π; D) 12π.

10. $ABCA_1B_1C_1$ үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 6 $см^3$-ға тәң. $A_1BCC_1B_1$ төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар:

A) 1 $см^3$; B) 2 $см^3$; C) 3 $см^3$; D) 4 $см^3$.

11. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң қирлири 2 см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $см^3$; B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ $см^3$; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $см^3$; D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ $см^3$.

MyLibrary.kz

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң һәҗими 6 см³-ға тәң. ACB_1D_1 тетраэдриниң һәҗимини тепиңлар:

A) 1 см³; B) 2 см³; C) 3 см³; D) 4 см³.

13. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға тәң вә улар асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см³; B) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ см³; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см³; D) $\sqrt{3}$ см³.

14. Тәңтәрәплик үчбулуңлуқ тәрипи 2 см-ға тәң. Үчбулуңлуқни униң егизлигидә ятқан түз билән айландурғанда пәйда болидиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см³; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см³; C) $\frac{\pi}{3}$ см³; D) $\pi\sqrt{3}$ см³.

15. Конусниң ян бетиниң йейилмиси — радиуси 3 см-ға тәң вә мәркәзлик булуңи 120°-қа тәң дүгләк сектор. Конусниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см³; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см³; C) $\frac{2\pi}{3}$ см³; D) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ см³.

16. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Пирамидиға сиртидин сизилған конусниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см³; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см³; C) $\frac{\pi}{3}$ см³; D) $\frac{2\pi}{3}$ см³.

17. Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси — асаслири 4 см вә 2 см, ян тәрипи 2 см болидиған тәңянлиқ трапеция. Қийиқ конусниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ см³; B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$ см³; C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$ см³; D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ см³.

18. Шар бетиниң мәйдани 36 см²-ға тәң. Шарниң һәҗимини тепиңлар:

A) $24\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см³; B) $36\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см³; C) $48\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см³; D) $60\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см³.

19. Кубниң қири 2 см-ға тәң. Кубқа сиртидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\sqrt{3}\pi$ см³; B) $2\sqrt{3}\pi$ см³; C) $3\sqrt{3}\pi$ см³; D) $4\sqrt{3}\pi$ см³.

20. Шарниң радиуси 5 см-ға, униң сегменти асасиниң радиуси 4 см-ға тәң. Шар сегментиниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{52\pi}{3}$ см³; B) $\frac{43\pi}{3}$ см³; C) $\frac{32\pi}{3}$ см³; D) $\frac{22\pi}{3}$ см³.

MyLibrary.kz

10-11-СИНИПЛАРДИКИ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

БУЛУҢЛАР

Түзләрниң арисидики булуңлар

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида AB вә CD_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида BC_1 вә DA_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида AC вә BC_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призмисиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AC_1 вә BB_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
5. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. SB вә CD түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

B

6. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири 2 см-ға тәң. SB вә CD түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB вә C_1D_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AC вә BE_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида AB вә CA_1 түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.
10. $ABCD$ дурус тетраэдрида E чекити — CD қириниң оттуриси. BC вә AE түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призмисиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB вә CA_1 түзлириниң арасидики булуңниң косинусини тепиңлар.
12. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң вә E чекити — SD қириниң оттуриси. SB вә AE түзлириниң арисидики булуңниң тангенсини тепиңлар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB вә FE_1 түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB_1 вә BC_1 түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.
15. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири 2 см-ға тәң. SB вә AE түзлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.
16. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири 2 см-ға тәң. SB вә AD түзлириниң арисидики булуңиниң косинусини тепиңлар.

Түз билән тәкшиликниң арисидики булуң

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида AB_1 түзи билән BCC_1 тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида AB_1 түзи билән BCD_1 тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида CA_1 түзи билән AB_1D_1 тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB түзи билән ACC_1 тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.
5. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. SB түзи билән ABC тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.

B

6. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға тәң, асасиниң тәрәплирии 1 см-ға тәң. SC түзи билән ABC тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB түзи билән CDD_1 тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AC түзи билән CDD_1 тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида AC_1 түзи билән BDD_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң тангенсини тепиңлар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида AB түзи билән CB_1D_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

11. $ABCD$ дурус тетраэдрида E чекити — BD қириниң оттуриси. AE түзи билән ABC тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

12. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. BB_1 түзи билән AB_1C_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң тангенсини тепиңлар.

13. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. BD түзи билән SBC тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

14. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. BC түзи билән SAF тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AA_1 түзи билән BCE_1 тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.

16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. BC_1 түзи билән AFF_1 тәкшилигиниң арисидики булуңниң синусини тепиңлар.

Икки тәкшиликниң арисидики булуң

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида ABC_1 вә ABC тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида ADC_1 вә BCD_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. ACC_1 вә BCC_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
4. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. SAC вә SBD тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

B

5. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. SAD вә SBE тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. ABB_1 вә CDD_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. ABB_1 вә CEE_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. ACC_1 вә BEE_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

MyLibrary.kz

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида ABC вә CB_1D_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң тангенсини тепиңлар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида BA_1C_1 вә AB_1D_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлук призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. ABC вә CA_1B_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң тангенсини тепиңлар.
12. $SABCD$ дурус төртбулуңлук пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. SAD вә SBC тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.
13. $SABCD$ дурус төртбулуңлук пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. SBC вә SCD тәкшиликлириниң арисидики икки яқлиқ булуңниң косинусини тепиңлар.
14. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлук пирамидиниң ян қирлири 2 см, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. SBC вә SEF тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.
15. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлук пирамидиниң ян қирлири 2 см, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. SAF вә SBC тәкшиликлириниң арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлук призминиң барлиқ қирлири 1см-ға тәң. ABC вә DB_1F_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңниң тангенсини тепиңлар.

АРИЛИҚ

Чекиттин түзгичә болған арилиқ

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B чекитидин AD_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B чекитидин A_1D_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлук призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин BC түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлук призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин B_1C_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.

B

5. $SABCD$ дурус төртбулуңлук пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. S чекитидин AC түзигичә болған арилиқни тепиңлар.

MyLibrary.kz

6. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. S чекитидин BE түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. F чекитидин BB_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. F чекитидин B_1C_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B чекитидин DA_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
10. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. B чекитидин AC_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
11. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. S чекитидин BF түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
12. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. B чекитидин SA түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. B чекитидин A_1F_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. B чекитидин A_1D_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. B чекитидин FE_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. B чекитидин AD_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.

Чекиттин тәкшиликкичә болған арилиқ

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида A чекитидин BDD_1 тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.
2. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин BCC_1 тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

MyLibrary.kz

3. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тең. S чекитидин ABC тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.
4. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян бетиниң қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. S чекитидин ABC тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.

B

5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин BDD_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.
6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин BCC_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин CDD_1 тәкшилигигичә болған ариlиғини тепиңлар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин BDE_1 тәкшилигигичә болған ариlиғини тепиңлар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида A чекитидин CB_1D_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида A чекитидин BDC_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин BCA_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.
12. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. А чекитидин CA_1B_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.
13. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин SCD тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.
14. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. A чекитидин SDE тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин DEA_1 тәкшилигигичә болған ариliқни тепиңлар.

MyLibrary.kz

16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. A чекитидин DEF_1 тәкшилигигичә болған арилиқни тепиңлар.

Икки түзниң арилиғи

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида AB вә CC_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида AB вә C_1D_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида AB_1 вә CD_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB вә B_1C_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.

B

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида AA_1 вә BD_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.
6. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AA_1 вә BC_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB вә C_1D_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB_1 вә DE_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида BA_1 вә DB_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.
10. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. CC_1 вә AB түзлириниң арилиғини тепиңлар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. AB вә CB_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.
12. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. SB вә AC түзлириниң арилиғини тепиңлар.
13. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. SA вә CD түзлириниң арилиғини тепиңлар.
14. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. SB вә AF түзлириниң арилиғини тепиңлар.
15. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. SB вә AE түзлириниң арилиғини тепиңлар.

MyLibrary.kz

16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. BB_1 вә EF_1 түзлириниң арилиғини тепиңлар.

ҚИЙИЛМИЛАР

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң AA_1, BB_1, B_1C_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.
2. $ABCD$ тетраэдриниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Тетраэдрниң AB, BC вә CD қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң AB, BC, A_1B_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң BB_1, CC_1, A_1B_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.
5. $ABCD$ тетраэдрниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Тетраэдрниң AD, BD вә BC қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.
6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң A, C вә D_1 чоққилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң A чоққиси вә BC, B_1C_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң C чоққиси вә AD, A_1D_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.
9. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң B, B_1 чоққилири вә AC қириниң оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

B

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң A чоққиси вә BB_1, DD_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң A, C чоққилири вә C_1D_1 қириниң оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң A, D вә C_1 чоққилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң B чоққиси вә AA_1, CC_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң A_1, B чоққилири вә CC_1 қириниң оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

15. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң A_1, B_1 чоққилири вә AC қириниң оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң AA_1, CC_1 қирлириниң оттурилири вә BB_1 қирида B чоққисидин 0,25 ариliқта ятқан чекит арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң A чоққиси вә CD, A_1D_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

18. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Пирамидиниң A, B чоққилири вә SC қириниң оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

19. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң AA_1, BB_1 вә A_1C_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң A_1B_1, CD қирлириниң оттурилири вә AB қирида A чоққисидин 0,25 ариliқта ятқан чекит арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң A_1, C_1 чоққилири вә AD қириниң оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

22. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Пирамидиниң B, C чоққилири вә SA қириниң оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң B, D вә E_1 чоққилири арқилиқ

MyLibrary.kz

өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң AD, B_1C_1 қирлиринииң оттурилири вә BC қирида B чоққисидин 0,25 арилиқта ятқан чекит арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

25. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Пирамидиниң AD, BC вә SD қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

26. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң A, B чоққилири вә A_1C_1 қириниң оттуриси арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң C, F вә E_1 чоққилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

C

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң AA_1, CC_1 қирлириниң оттурилири вә AB қирида A чоққисидин 0,75 арилиқта ятқан чекит арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң D_1 чоққиси вә AB, BC қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң BB_1, DD_1 қирлириниң оттурилири вә AB қирида A чоққисидин 0,75 арилиқта ятқан чекит арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң A, B вә D_1 чоққилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

32. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң AA_1, CC_1 қирлириниң оттурилири вә AB қирида A чоққисидин 0,25 арилиқта ятқан чекит арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң AB, BC, CC_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубиниң B_1 чоққиси вә AD, CD қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмисини селиңлар. Қийилминиң мәйданини тепиңлар.

ИЧИДИН ВӘ СИРТИДИН СИЗИЛҒАН ФИГУРАЛАР

Цилиндр вә конус

А

1. Сфериға сиртидин сизилған цилиндрниң оқлуқ қийилмисиниң периметри 8 см-ға тәң. Сфериниң радиусини тепиңлар.

2. Сфериға сиртидин сизилған цилиндрниң оқлуқ қийилмисиниң мәйдани 4 см^2-ға тәң. Сфериниң диаметрини тепиңлар.

3. Цилиндрниң оқлуқ қийилмисиниң диагонали 2 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

4. Цилиндрниң егизлиги 2 см-ға, асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

5. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин радиуси 2 см-ға тәң сфера сизилған. Цилиндрниң егизлигини тепиңлар.

6. Цилиндрниң егизлиги 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин радиуси 1 см-ға тәң сфера сизилған. Цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

7. Тик призминиң асаси — тәрипи 1 см-ға тәң дурус үчбулуңлуқ. Мошу призмиға ичидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

8. Тик призминиң асаси — катетлири 6 см вә 8 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ. Мошу призмиға ичидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

9. Бирлик кубқа ичидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

10. Дурус алтәбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

11. Тик призминиң асаси — тәрәплири 1 см-ға тәң дурус үчбулуңлуқ. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

12. Тик призминиң асасиниң — катетлири 6 см вә 8 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуң. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

13. Тик призминиң асасиниң — тәрипи 1 см-ға тәң квадрат. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

14. Дурус алтәбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

B

15. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу конусқа ичидин сизилған дурус үчбулуңлук пирамида асасиниң тәрипини тепиңлар.
16. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу конусқа ичидин сизилған дурус төртбулуңлук пирамида асасиниң тәрипини тепиңлар.
17. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу конусқа ичидин сизилған дурус алтәбулуңлук пирамида асасиниң тәрипини тепиңлар.
18. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу конусқа сиртидин сизилған дурус үчбулуңлук пирамида асасинининң тәрипини тепиңлар.
19. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу конусқа сиртидин сизилған дурус төртбулуңлук пирамида асасиниң тәрипини тепиңлар.
20. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу конусқа сиртидин сизилған дурус алтәбулуңук пирамида асасиниң тәрипини тепиңлар.
21. Конусниң ясиғучиси 2 см-ға, асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

C

22. Конус асасиниң радиуси 2 см-ға тәң. Мошу конусқа ичидин радиуси 1 см-ға тәң сфера сизилған. Конусниң егизлигини тепиңлар.
23. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң вә ясиғучиси асас тәкшилиги билән 45° булуң ясайду. Мошу конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
24. Конусниң егизлиги 8 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Мошу конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
25. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 2 см вә 1 см-ға тәң. Мошу конусқа ичидин сфера сизилған. Қийиқ конусниң егизлигини тепиңлар.
26. Қийиқ конусниң бир асасиниң радиуси 2 см-ға тәң. Мошу конусқа ичидин радиуси 1 см-ға тәң сфера сизилған. Қийиқ конусниң иккинчи асасиниң радиусини тепиңлар.
27. Қийиқ конусниң чоң асасиниң радиуси 2 см-ға тәң вә ясиғучиси асас тәкшилиги билән 60° булуң ясайду. Мошу конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
28. Қийиқ конусниң ясиғучиси 2 см-ға, оқлуқ қийилмисиниң мәйдани 3 $см^2$-ға тәң. Мошу конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
29. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Мошу конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

30. Конус асасиниң радиуси 4 см-ға тәң. Мошу конусқа сиртидин радиуси 5 см-ға тәң сфера сизилған. Конусниң егизлигини тепиңлар.

31. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң вә ясиғучиси асас тәкшилиги билән 45° булуң ясайду. Мошу конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

32. Конусниң егизлиги 8 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Мошу конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

33. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 2 см вә 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Мошу конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

34. Қийиқ конусниң кичик асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси болса 2 см-ға тәң вә иккинчи асас тәкшилиги билән 45° булуң ясайду. Мошу конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

35. Қийиқ конусниң бир асасиниң радиуси 4 см-ға, егизлиги 7 см-ға тәң. Мошу конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиуси 5 см-ға тәң. Қийиқ конусниң иккинчи асасиниң радиусини тепиңлар.

36. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 2 см вә 4 см-ға, егизлиги 5 см-ға тәң. Мошу конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

Көпяқлиққа ичидин сизилған сфера

A

1. Бирлик кубқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

2. Сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу сфериға сиртидин сизилған кубниң қирини тепиңлар.

3. Дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

4. Дурус үчбулуңлуқ призмиға ичидин радиуси 1 см-ға тәң сфера сизилған. Призминиң егизлигини тепиңлар.

5. Дурус алтәбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Призминиң егизлигини вә униңға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

B

6. Призминиң асаси — катетлири 1 см-ға тәң тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ. Мошу призмиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

7. Призминиң асаси — тәрәплири 2 см вә 3 см болидиған тәңянлиқ үчбулуңлуқ. Призминиң егизлигини вә униңға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

8. Төртбулуңлуқ тик призминиң асаси — тәрәплири 1 см-ға вә тар булуңи 60°-қа тәң ромб. Призминиң егизлигини вә униңға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

9. Төртбулуңлуқ тик призминиң асаси — тар булуңи 60°-қа тәң болған ромб. Мошу призмиға ичидин сизилған сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Призминиң егизлигини вә асасиниң тәрәплирини тепиңлар.
10. Төртбулуңлуқ тик призминиң асаси — егизлиги 2 см-ға тәң трапеция. Призминиң егизлиги вә униңға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
11. Дурус алтәбулуңлуқ призмиға ичидин радиуси 1 см-ға тәң сфера сизилған. Призминиң егизлигини вә асасиниң тәрәплирини тепиңлар.
12. Бирлик тетраэдрға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
13. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
14. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, асасидики икки яқлиқ булуңлири 60°-қа тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

C

15. Төртбулуңлуқ тик призминиң асаси — периметри 4 см-ға вә мәйдани 2 $см^2$-ға тәң төртбулуңлуқ. Мошу призмиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
16. Дурус тетраэдрға ичидин бирлик сфера сизилған. Тетраэдрниң қирини тепиңлар.
17. Дурус үчбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға, асасидики иккияқлиқ булуңлири 60°-қа тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
18. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 1 см-ға, чоққисидики тәкши булуңлири 90°-қа тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
19. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
20. Дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға, асасидики иккияқлиқ булуңлири 60°-қа тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
21. Дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 4 см-ға тәң. Бу пирамидиға ичидин бирлик сфера сизилған. Пирамидиниң егизлигини тепиңлар.
22. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

Көпяқлиққа сиртидин сизилған сфера

A

1. Бирлик кубқа сиртидин сизилған сферининң радиусини тепиңлар.
2. Бирлик сфериға ичидин сизилған кубниң қирини тепиңлар.
3. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 1 см, 2 см, 3 см-ға тәң. Мошу параллелепипедқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
4. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 1 см, 2 см-ға тәң вә униңға сиртидин сизилған сфериниң радиуси 1,5 см-ға тәң. Параллелепипедниң мошу чоққисидин чиқидиған үчинчи қирини тепиңлар.

B

5. Бирлик тетраэдрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
6. Бирлик сфериға ичидин сизилған дурус тетраэдрниң қирини тепиңлар.
7. Дурус призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призмиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
8. Дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Призмиға сиртидин радиуси 2 см-ға тәң сфера сизилған. Призминиң егизлигини тепиңлар.
9. Дурус үчбулуңлуқ призминиң егизлиги 1 см-ға тәң. Призмиға сиртидин радиуси 1 см-ға тәң сфера сизилған. Призма асасиниң тәрәплирини тепиңлар.
10. Үчбулуңлуқ тик призминиң асаси — катетлири 1 см-ға тәң тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ. Призминиң егизлиги 2 см-ға тәң болса, у чағда униңға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
11. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призмиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
12. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
13. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

C

14. Пирамидиниң асаси — тәрәплири 3 см-ға тәң дурус үчбулуңлуқ. Пирамидиниң бир ян қири 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилигигә перпендикуляр. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

15. $SABC$ пирамидисиниң SC қири 2 см-ға тәң вә у ABC асас тәкшилигигә перпендикуляр, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 1$. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.
16. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 1 см-ға, чоққисидики тәкши булуңлири 90°-қа тәң. Мошу пирамидиға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

ҺӘҖИМ

А

1. Тикбулуңлуқ параллелепипед бир йеқиниң мәйдани 12 $см^2$-ға вә мошу йеқиға перпендикуляр қири 4 см-ға тәң. Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.
2. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗими 24 $см^3$-қа, бир қири болса 3 см-ға тәң. Параллелепипедниң мошу қириға перпендикуляр йеқиниң мәйданини тепиңлар.
3. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗими 60 $см^3$-қа, бир йеқиниң мәйдани 12 $см^2$-ға тәң. Параллелепипедниң мошу йеқиға перпендикуляр қирини тепиңлар.
4. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см вә 6 см-ға тәң. Параллелепипедниң һәҗими 48 $см^3$-қа тәң. Параллелепипедниң мошу чоққисидин чиқидиған үчинчи қирини тепиңлар.
5. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған үч қири 4 см, 6 см, 9 см-ға тәң. Мошу параллелепипедқа тәң миқдарлиқ кубниң қирини тепиңлар.
6. Әгәр кубниң барлиқ қирлирини үч һәссә ашурса, униң һәҗими нәччә һәссә ашиду?
7. Үчбулуңлуқ тик призминиң асаси — катетлири 6 см вә 8 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ, ян қири болса 5 см-ға тәң. Призминиң һәҗимини тепиңлар.
8. Үчбулуңлуқ тик призминиң асаси — катетлири 3 см вә 5 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ. Призминиң һәҗими 30 $см^3$-ға тәң. Униң ян қирини тепиңлар.
9. Дурус алтәбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Призминиң һәҗимини тепиңлар.
10. Әгәр дурус тетраэдрниң барлиқ қирлирини икки һәссә ашурса, у чағда униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?
11. Пирамидиниң егизлиги 6 см-ға тәң, асаси — тәрәплири 3 см вә 4 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.
12. Пирамидиниң асаси — тәрәплири 3 см вә 4 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Пирамидиниң һәҗими 16 $см^3$-ға тәң. Униң егизлигини тепиңлар

MyLibrary.kz

13. Дурус үчбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.
14. Дурус үчбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға, һәҗими $\sqrt{3}$ $см^3$-ға тәң. Униң егизлигини тепиңлар.
15. Әгәр пирамидиниң егизлигини төрт һәссә ашурса, униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?
16. Ичидә 6 л су бар цилиндрлиқ қачиға брусок селинди. Нәтиҗисидә суюқлуқниң дәриҗиси 1,5 һәссә көтирилди. Брусокниң һәҗими немигә тәң?
17. Цилиндрлик қачидики суюқлуқниң дәриҗиси 18 см. Әгәр мошу суюқлуқни диаметри биринчи қачидин 3 һәссә артуқ болған қачиға қуюдиған болсақ, суниң дәриҗиси қандақ егизликтә болиду?
18. Конус асасиниң мәйдани 2 $см^2$-ға, ясиғучиси болса 6 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Конусниң һәҗимини тепиңлар.
19. Әгәр конусниң егизлигини үч һәссә азайтса, униң һәҗими қанчә һәссә кемийду?
20. Әгәр конус асасиниң радиусини 1,5 һәссә ашурса, униң һәҗими нәччә һәссә ашиду?
21. Цилиндр билән конусниң асаси билән егизлиги умумий. Конусниң һәҗими 10 $см^3$-ға тәң. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.
22. Цилиндр билән конусниң асаси билән егизлиги умумий. Цилиндрниң һәҗими 150 $см^3$-ға тәң. Конусниң һәҗимини тепиңлар.
23. Әгәр шарниң радиусини үч һәссә ашурса, униң һәҗими нәччә һәссә ашиду?

В

24. Кубниң диагонали $\sqrt{12}$ см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.
25. Кубниң һәҗими $24\sqrt{3}$ $см^3$-ға тәң. Униң диагоналини тепиңлар.
26. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см, 4 см-ға, диагонали 6 см-ға тәң. Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.
27. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см, 3 см-ға, һәҗими 36 $см^3$-ға тәң. Параллелепипедниң диагоналини тепиңлар.
28. Әгәр кубниң һәр бир қирини 1 см-ға ашурса, униң һәҗими 19 $см^3$-қа ашиду. Кубниң қирини тепиңлар.
29. Параллелепипедниң йеқи — тәрипи 1см-ға вә тар булуңи 60°-қа тәң болидиған ромб. Параллелепипедниң бир қири мошу йеқи билән 60° булуң ясайду вә 2 см-ға тәң. Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.
30. Цилиндр асасиниң радиуси билән егизлиги 2 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.

MyLibrary.kz

31. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗими 8 $см^3$-ға тәң. Цилиндрниң егизлигини тепиңлар.

32. Сфериниң радиуси 2 см-ға тәң. Мошу сфериға сиртидин сизилған кубниң һәҗимини тепиңлар.

33. Сфериға сиртидин сизилған кубниң һәҗими 216 $см^3$-ға тәң. Сфериниң радиусини тепиңлар.

34. Үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 32 $см^3$-ға тәң. Призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ униң ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Қийип елинған үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар.

35. Үчбулуңлуқ призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ униң ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Қийип елинған үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 5 $см^3$-ға тәң. Дәсләпки призминиң һәҗимини тепиңлар.

36. Призма асаслири — тәрәплири 2 см болидиған дурус алтәбулуңлуқ. Призминиң ян қирлири $2\sqrt{3}$ см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Униң һәҗимини тепиңлар.

37. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 6 см-ға, ян қирлири 10 см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

38. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 12 см-ға, һәҗими 200 $см^3$-ға тәң. Пирамидиниң ян қирини тепиңлар.

39. Пирамидиниң асаси — тиктөртбулуңлуқ. Пирамидиниң бир ян йеқи униң асас тәкшилигигә перпендикуляр, башқа үч ян яқлири асас тәкшилиги билән 60° булуң ясайду. Пирамидиниң егизлиги 6 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

40. Үчбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири өз ара перпендикуляр вә уларниң һәр қайсиси 3 см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

41. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға, ян қирлири 4 см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

42. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 6 $см^3$-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Пирамидиниң ян қирини тепиңлар.

43. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 4 см-ға, ян қири билән асасиниң арисидики булуң 45°-қа тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипединиң һәҗими 12 $см^3$-ға тәң. B_1ABC үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң һәҗими 12 $см^3$-ға тәң. E, F, E_1, F_1 чекитлири — BC, CD, B_1C_1, C_1D_1 қирлириниң оттурилири. $CEFC_1E_1F_1$ үчбулуңлуқ призмисиниң һәҗимини тепиңлар.

MyLibrary.kz

46. Кубниң һәҗими 12 см^3-ға тәң. Асаси — кубниң йеқи, чоққиси кубниң мәркизидә ятидиған төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

47. $ABCA_1B_1C_1$ призмисиниң һәҗими 6 см^3-ға тәң. Мошу призмидин C_1ABC үчбулуңлуқ пирамидисини қийип алған. Қалған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

48. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң бөлиги болидиған $SABC$ үчбулуңлуқ пирамидисиниң һәҗими 1 см^3-ға тәң. Алтәбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

49. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 12 см^3-ға тәң. E чекити — SB қириниң оттуриси. $EABC$ үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

50. Үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 12 см^3-ға тәң. Мошу пирамидиниң чоққиси арқилиқ вә асасиниң оттура сизиғи арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийип үчбулуңлуқ пирамида елинған. Қийип елинған үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

51. $SABC$ үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 15 см^3-ға тәң. Мошу пирамида асасиниң AB тәрипи арқилиқ өтидиған тәкшилик униңға қарши ятқан SC ян қирини S чекитидин башлап санизанда 1 : 2 нисбитидә бөлидиған D чекитидә қийип өтиду. $DABC$ пирамидисиниң һәҗимини тепиңлар.

52. Бир цилиндр охшаш қача иккинчисидин икки һәссә егиз, бирақ иккинчи қачиниң ичи 1,5 һәссә кәң. Иккинчи қача һәҗиминиң биринчи қача һәҗимигә нисбитини тепиңлар.

53. Конусниң һәҗими 12 см^3-ға тәң. Конусниң егизлигини қақ бөлидиғандәк униң асасиға параллель қийғучи тәкшилик жүргүзүлгән. Қийип елинған конусниң һәҗимини тепиңлар.

54. Конусниң егизлиги 6 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Униң һәҗиминиң π-ға нисбитини тепиңлар.

55. Конус асасиниң диаметри 6 см-ға, оқлуқ қийилмисиниң чоққисидики булуңи 90°-қа тәң. Униң һәҗиминиң π-ға нисбитини тепиңлар.

56. Тәңянлиқ тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң катети 6 см-ға тәң. Мошу үчбулуңлуқни бир катети ятқан түздин айландурғанда пәйда болидиған конус һәҗиминиң π-ға нисбитини тепиңлар.

57. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 6 см-ға, асасиниң тәрәплири 4 см-ға тәң. Пирамидиға сиртидин сизилған конус һәҗиминиң π-ға нисбитини тепиңлар.

58. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиға сиртидин сизилған конусниң һәҗими мошу пирамидиға ичидин сизилған конус һәҗимидин нәччә һәссә артуқ болиду?

59. Үч шарниң радиуслири 6 см, 8 см вә 10 см. Һәҗими мошу шарлар һәҗимлириниң қошундисиға тәң болидиған йеңи шарниң радиусини тепиңлар.

MyLibrary.kz

60. Кубниң қири 3 см-ға тәң. Мошу кубқа ичидин шар сизилған. Шар һәжиминиң π-ға нисбитини тепиңлар.

61. Кубниң қири $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу кубқа сиртидин шар сизилған. Шар һәжиминиң π-ға нисбитини тепиңлар.

C

62. Тик призминиң асаси — мәйдани 3 см^2-ға тәң ромб. Диагональлиқ қийилмилириниң мәйданлири 8 см^2 вә 12 см^2. Призминиң һәжимини тепиңлар.

63. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң үч йеқиниң мәйданлири 2 см^2, 3 см^2, 6 см^2. Параллелепипедниң һәжимини тепиңлар.

64. Параллелепипедниң икки йеқиниң мәйданлири 4 см^2 вә 6 см^2, уларниң умумий қири 2 см вә өзара 30° иккияқлиқ булуң ясайду. Параллелепипедниң һәжимини тепиңлар.

65. Үчбулуңлуқ янту призминиң бир ян йеқиниң мәйдани 12 см^2, мошу йеқидин униңға қарши ятқан қириғичә арилиқ 3 см. Призминиң һәжимини тепиңлар.

66. Үчбулуңлуқ призминиң икки ян яқлири өзара перпендикуляр вә уларниң умумий қири 2 см-ға тәң. Мошу яқлириниң мәйданлири 4 см^2 вә 6 см^2. Призминиң һәжимини тепиңлар.

67. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң қири 3 см-ға тәң. Кубниң $ABCD$ йеқиниң хошна тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтидиған вә AA_1 қириға параллель қийғучи текшиликләр билән төрт үчбулуңлуқ призмилар елинди. Призминиң қалған бөлигиниң һәжимини тепиңлар.

68. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң һәжими 12 см^3. Чоққилири берилгән призма асаслири тәрәплириниң оттуриси болидиған йеңи призминиң һәжимини тепиңлар.

69. Цилиндр асасиниң радиуси билән егизлиги $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призминиң һәжимини тепиңлар.

70. Цилиндр асасиниң радиуси билән егизлиги $2\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу цилиндрға ичидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призминиң һәжимини тепиңлар.

71. Сфериниң радиуси $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу сфериға сиртидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призминиң һәжимини тепиңлар.

72. Цилиндр асасиниң радиуси билән егизлиги $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған дурус алтәбулуңлуқ призминиң һәжимини тепиңлар.

73. Цилиндр асасиниң радиуси билән егизлиги $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу цилиндрға ичидин сизилған дурус алтәбулуңлуқ призминиң һәжимини тепиңлар.

MyLibrary.kz

74. Сферининң радиуси $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу сфериға сиртидин сизилған дурус алтәбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар.

75. Кубниң қири 6 см-ға тәң. Чоққилири кубниң төрт чоққиси билән мувапиқ келидиған кубқа ичидин дурус тетраэдр сизилған. Тетраэдрниң һәҗимини тепиңлар.

76. Тетраэдрниң бир қири 3 см-ға, башқа барлиқ қирлири 2 см-ға тәң. Тетраэдрниң һәҗимини тепиңлар.

77. Үчбулуңлуқ пирамидиниң йейилмиси — тәрипи 6 см-ға тәң квадрат. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

78. Тетраэдрниң икки қариму-қарши қирлири өзара перпендикуляр вә 3 см, 4 см-ға тәң, уларниң арилиғи 2 см-ға тәң. Тетраэдрниң һәҗимини тепиңлар.

79. $ABCD$ бирлик тетраэдрини униң DD_1 егизлиги ятқан түздин 60° булуңға айландуриду. Дәсләпки вә айналған тетраэдрниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

80. Төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 12 $см^3$-қа тәң. Пирамидиниң чоққиси вә асасиниң хошна тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтидидиған қийғучи тәкшиликләр билән төрт үчбулуңлуқ пирамидилар қийилип елиниду. Пирамидиниң қалған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

81. Кубниң қири 6 см-ға тәң. Чоққилири мошу куб тәрәплириниң мәркәзлиридә ятидиған октаэдрниң һәҗимини тепиңлар.

82. Октаэдрниң қири 3 см-ға тәң. Мошу октаэдрға ичидин сизилған кубниң һәҗимини тепиңлар.

83. Қири 6 см-ға тәң болидиған кубниң һәр бир йеқидин өткүчи квадратлиқ йочуқлар кесип елинди. Квадратниң тәрипи 2 см-ға тәң. Кубниң қалған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

84. Бирлик кубниң қири вә униң мәркизи арқилиқ өтидиған тәкшиликкә перпендикуляр болидиғандәк һәр бир қири арқилиқ тәкшиликләр жүргүзүлгән. Мошу тәкшиликләр билән чәкләнгән көпянлиқниң һәҗимини тепиңлар.

85. Бирлик тетраэдрниң һәрбир қири арқилиқ униңға қарши ятқан қириға параллель тәкшиликләр жүргүзүлгән. Мошу тәкшиликләр билән чәкләнгән көпянлиқниң һәҗимини тепиңлар.

86. Тетраэдрниң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң. Униң һәрбир чоққиси арқилиқ униңға қарши ятқан тәрипигә параллель тәкшиликләр жүргүзүлгән. Мошу тәкшиликләр билән чәкләнгән көпянлиқниң һәҗимини тепиңлар.

87. Тик призминиң ян қирлири 6 см-ға тәң, асаси — тәрәплири 4 см болидиған тәңянлиқ үчбулуңлуқ. Мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

MyLibrary.kz

88. Тик призминиң ян қирлири 6 см-ға тәң, асаси — тәрәплири 2 см болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

89. Дурус үчбулуңлуқ призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗими мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрниң һәҗимидин нәччә һәссә чоң болиду?

90. Тик призминиң ян қирлири 4 см-ға тәң, асаси — тәрәплири 1 см болидиған квадрат. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

91. Дурус төртбулуңлуқ призмиға ичидин сизилған цилиндрниң һәҗими мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимидин нәччә һәссә чоң болиду?

92. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң ян қирлири 6 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң болса. Мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

93. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң ян қирлири 6 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

94. Шарниң һәҗими 1 $см^3$-қа тәң. Мошу шарға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

95. Шарниң һәҗими 12 $см^3$-қа тәң. Асаси — шарниң чоң дүглиги, егизлиги мошу дүгләк тәкшилигигә перпендикуляр болидиған конусниң һәҗимини тепиңлар.

БӘТНИҢ МӘЙДАНИ

А

1. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 1 см, 2 см, 3 см-ға тәң. Бетиниң мәйданини тепиңлар.

2. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 3 см вә 4 см. Параллелепипед бетиниң мәйдани 52 $см^2$. Униң шу чоққидин чиқидиған үчинчи қирини тепиңлар.

3. Әгәр кубниң барлиқ қирлирини үч һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

4. Әгәр тетраэдрниң барлиқ қирлирини икки һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

5. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң егизлиги 6 см-ға, асасиниң тәрәаплири 3 см-ға тәң. Призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

6. Үчбулуңлуқ тик призминиң егизлиги 10 см-ға тәң, асаси — катетлири 6 см вә 8 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуң. Призма бетиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

7. Цилиндрниң егизлиги 2 см-ға, асасидики чәмбәрниң узунлиғи 3 см-ға тәң. Цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
8. Конусниң ясиғучиси 2 см-ға, асасидики чәмбәрниң узунлиғи 3 см-ға тәң. Конусниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
9. Әгәр конус ясиғучисини 3 һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?
10. Әгәр конус асасиниң радиусини 1,5 һәссә кемитсә, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә кемийду?
11. Шарниң чоң дүглигиниң мәйдани 1 $см^2$-ға тәң. Шар бетиниң мәйданини тепиңлар.
12. Әгәр шарниң радиусини икки һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

B

13. Кубниң диагонали 1 см-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.
14. Куб бетиниң мәйдани 8 $см^2$-ға тәң. Униң диагоналини тепиңлар.
15. Куб бетиниң мәйдани 24 $см^2$-ға тәң. Униң мәйданини тепиңлар.
16. Кубниң һәҗими 27 $см^3$-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.
17. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см вә 4 см. Параллелепипедниң диагонали 6 см-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.
18. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 1 см вә 2 см. Параллелепипед бетиниң мәйдани 16 $см^2$-ға тәң. Униң диагоналини тепиңлар.
19. Әгәр кубниң һәрбир қирини 1 см-ға ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани 30 $см^2$-ға тәң болиду. Кубниң қирини тепиңлар.
20. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 1 см вә 2 см. Параллелепипедниң һәҗими 6 $см^3$-қға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.
21. Тик призминиң ян қири 5 см-ға тәң, асаси — диагональлири 3 см вә 4 см болидиған ромб. Призма бетиниң мәйданини тепиңлар.
22. Тик призминиң асаси — диагональлири 6 см вә 8 см болидиған ромб. Призма бетиниң мәйдани 248 $см^2$-ға тәң. Униң ян қирини тепиңлар.
23. Дурус төртбулуңлуқ призма асасиниң тәплири 3 см-ға, бетиниң мәйдани 66 $см^2$-ға тәң. Униң ян қирини тепиңлар.
24. Үчбулуңлуқ призминиң икки ян яқлири өзара перпендикуляр. Уларниң умумий қири 10 см-ға тәң вә башқа ян қирлиридин 6 см вә 8 см арилиқта ятиду. Призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
25. Үчбулуңлуқ тик призминиң асаси — катетлири 6 см вә 8 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ. Призма бетиниң мәйдани 288 $см^2$-ға тәң. Униң егизлигини тепиңлар.

MyLibrary.kz

26. Үчбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйдани 12 $см^2$-ға тәң. Призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Қийип елинған үчбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

27. Үчбулуңлуқ призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Қийип елинған үчбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйдани 8 $см^2$-ға тәң. Дәсләпки призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

28. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 5 см-ға, асасиниң тәрәплири 6 см-ға тәң. Пирамида бетиниң мәйданини тепиңлар.

29. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 4 см-ға, асасиниң тәрәплири 6 см-ға тәң. Пирамида бетиниң мәйданини тепиңлар.

30. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 5 см-ға, асасиниң тәрәплири 6 см-ға тәң. Пирамидиниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

31. Әгәр октаэдрниң барлиқ қирлирини 3 һәссә ашурса, учағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә артиду?

32. Конусниң егизлиги 6 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Конус бети мәйданиниң π-ға нисбитини тепиңлар.

33. Конусниң ян бетиниң мәйдани униң асасиниң мәйданидин икки һәссә чоң. Конусниң ясиғучиси билән асас тәкшилигиниң арисидики булуңлирини тепиңлар.

34. Конус бетиниң мәйдани 12 $см^2$-ға тәң. Униң егизлигини қақ иккигә бөлидиғандәк асасиға параллель қийилма жүргүзүлгән. Қийип елинған конус бетиниң мәйданини тепиңлар.

35. Шарниң һәҗими 36π. Униң бетиниң мәйданиниң π-ға нисбитини тепиңлар.

36. Бир шарниң һәҗими иккинчи шарниң һәҗимидин 27 һәссә чоң. Биринчи шар бетиниң мәйдани иккинчи шар бетиниң мәйданидин нәччә һәссә чоң болиду?

37. Икки шарниң радиуслири 6 см йәнә 8 см. Мошу шарлар бәтлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болидиған үчинчи шарниң радиусини тепиңлар.

C

38. Цилиндрниң егизлиги билән асасиниң радиуси 2 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған дурус төртбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

39. Цилиндр асасиниң радиуси 2 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған дурус төртбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйдани 48 $см^2$-ға тәң. Цилиндрниң егизлигини тепиңлар.

MyLibrary.kz

40. Цилиндрниң егизлиги 3 см-ға, асасиниң радиуси болса $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

41. Цилиндрниң егизлиги 3 см-ға, асасиниң радиуси болса $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу цилиндрға ичидин сизилған дурус үчбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

42. Цилиндрниң егизлиги 3 см-ға, асасиниң радиуси болса $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған дурус алтәбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

43. Цилиндрниң егизлиги билән асасиниң радиуси 3 см-ға тәң. Мошу цилиндрға ичидин сизилған дурус алтәбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

44. Сфериниң радиуси 2 см-ға тәң. Мошу сфериға сиртидин сизилған тикбулуңлуқ параллелепипед бетиниң мәйданини тепиңлар.

45. Сфериға сиртидин сизилған тикбулуңлуқ параллелепипед бетиниң мәйдани 54 $см^2$-ға тәң. Сфериниң радиусини тепиңлар.

46. Цилиндрниң оқлуқ қийилмисиниң мәйдани 1 $см^2$-ға тәң. Цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

47. Дурус үчбулуңлуқ призмиға ичидин сизилған цилиндрниң ян бетиниң мәйдани 6 $см^2$-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

48. Дурус тетраэдрниң егизлиги 4 см-ға тәң. Мошу тетраэдрға сиртидин сизилған шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

49. Дурус тетраэдрға сиртидин сизилған шар бетиниң мәйдани 9 $см^2$-ға тәң. Мошу тетраэдрға ичидин сизилған шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

50. Шарға сиртидин сизилған цилиндр бетиниң мәйдани 9 $см^2$-ға тәң. Шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

51. Тикбулуңлуқ параллелепипед өлчәмлириниң узунлуқлири 2 см, 4 см вә 6 см-ға тәң. Мошу параллелепипедқа сиртидин сизилған шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

52. Кубқа сиртидин сизилған шар бетиниң мәйдани мошу кубқа ичидин сизилған шар бетиниң мәйданидин нәччә һәссә чоң болиду?

АЙЛИНИШ ЖИСИМЛИРИ

Көпбулуңлуқларниң айлиниши

А

1. ABC тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири $AC = BC = 1$ см. Мошу үчбулуңлуқни АС катети ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

2. *ABC* тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири $AC = BC = 1$ см. Мошу үчбулуңлуқни CH егизлиги ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
3. *ABC* тәңтәрәплик үчбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу үчбулуңлуқни CH егизлиги ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
4. *ABC* тәңянлиқ үчбулуңлиғида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$, *CH* — егизлиги . Мошу үчбулуңлуқни *CH* егизлиги ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
5. *ABCD* тәңянлиқ трапецияниң *AD* вә *BC* ян тәрәплири 1 см-ға, *AB* вә *CD* асаслири әксичә 2 см вә 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *AB* вә *CD* асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған с түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
6. *ABCD* тикбулуңлуқ трапецияниң *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң, кичик ян тәрипи болса 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *AD* тәрипи ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

B

7. *ABC* тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири $AC = BC = 1$ см. Мошу үчбулуңлуқниң *AB* тәрипи ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
8. *ABC* тәңтәрәплик үчбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу үчбулуңлуқниң *AB* тәрипи ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
9. *ABC* тәңянлиқ үчбулуңлиғида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Мошу үчбулуңлуқниң *AB* тәрипи ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
10. *ABC* тикбулуңлуқ үчбулуңлиғида $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. Мошу үчбулуңлуқниң *AB* тәрипи ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
11. *ABCD* ромбисиниң тәрәплири 1 см-ға, тар булуңи 60°-қа тәң. Мошу ромбни *AC* түзидин айландурғанда, һасил болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
12. *ABCD* ромбисиниң тәрәплири 1 см-ға, тар булуңи 60°-қа тәң. Мошу ромбини *BD* түзидин айландурғанда, һасил болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
13. *ABCD* тәңянлиқ трапецияниң *AD* вә *BC* ян тәрәплири 1 см-ға, *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *AB* түзидин айландурғанда, һасил болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

14. *ABCD* тикбулуңлуқ трапецияниң *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң, кичик ян тәрипи 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *AB* түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

C

15. *ABC* тәңянлиқ үчбулуңлиғида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Мошу үчбулуңлуқниң *AC* тәрипи ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

16. *ABC* тикбулуңлуқ үчбулуңлиғида $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$, *CH* — егизлиги. Мошу үчбулуңлуқниң *CH* егизлиги ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

17. *ABCD* ромбисиниң тәрәплири 1 см-ға, тар булуңи 60°-қа тәң. Мошу ромбини *AB* түзидин айландурғанда, һасил болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

18. *ABCD* тәңянлиқ трапецияниң *AD* вә *BC* ян тәрәплири 1 см-ға, *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *CD* түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

19. *ABCD* тәңянлиқ трапецияниң *AD* вә *BC* ян тәрәплири 1 см-ға, *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни оттура сизиғи ятқан *c* түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

20. *ABCD* тикбулуңлуқ трапецияниң *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң, кичик ян тәрипи 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *CD* түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

21. *ABCDEF* дурус алтәбулуңлиғиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу алтәбулуңлуқни *AB* түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

22. *ABCDEF* дурус алтәбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу алтәбулуңлуқни *AC* түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

23. *ABCDEF* дурус алтәбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу алтәбулуңлуқни *AD* түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

24. *ABCDEF* дурус алтәбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу алтәбулуңлуқни *AB* вә *DE* тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтидиған с түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

Көпяқлиқларниң айлиниши

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини AA_1 түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини $ABCD$ вә $A_1B_1C_1D_1$ яқлириниң мәркәзлири арқилиқ өтидиған c түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призмисиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини AA_1 түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призмисиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини ABC вә $A_1B_1C_1$ яқлириниң мәркәзлири арқилиқ өтидиған c түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призмисиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини асаслириниң мәркәзлири арқилиқ өтидиған c түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

B

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини BC вә B_1C_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтидиған c түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
7. $ABCD$ бирлик тетраэдрини униң DH егизлиги ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
8. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидини SH егизлиги ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
9. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидини SH егизлиги ятқан түздин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини AA_1 түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

C

11. $ABCD$ бирлик тетраэдрини AB түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

12. $S'ABCDS''$ бирлик октаэдрини $S'S''$ түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

13. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини BC вә B_1C_1 қирлириниң оттуриси арқилиқ өтидиған c түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини BC вә B_1C_1 қирлириниң оттуриси арқилиқ өтидиған c түзидин айландурғанда, пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

MyLibrary.kz

ПӘН БОЙИЧӘ АТАЛҒУЛАР КӨРСӘТКҮЧЛИРИ

Айлиниш 75
Айлиниш оқи 75
Айлиниш фигуриси 75
Әйнәклик симметрия 46
Әйнәклик симметриялик фигура 46
Әйнәклик симметриялик фигурилар 46
Алмаз кристаллири 47
Бирлик куб 133
Бураш 75
Бураш оқи 75
Гексаэдр 26
Геометриялиқ конструктор 32
Додекаэдр 26
Томпақ көпяқлиқ 8
Томпақ фигура 11
Дурус көпяқлиқ 25
Дурус пирамида 11
Дурус тетраэдр 25
Тәкшиликкә қариғанда симметриялиқ 46
Яндашма тәкшилик 94
Яндашма түз 95
Икосаэдр 25
Исландлиқ шпат кристаллири 48
Қәдәмләр усули 39
Кавальери принципи 139
Конус 81
Конусқа ичидин сизилған пирамида 98
Конусқа ичидин сизилған сфера 98
Конусқа сиртидин сизилған пирамида 98
Конусқа сиртидин сизилған сфера 98
Конус бетиниң мәйдани 82
Конусниң егизлиги 82
Конусниң ян бети 81
Конусниң ян бетиниң мәйдани 82
Конусниң йейилмиси 82
Конусниң ясиғучиси 81
Конусниң һәжими 82
Конусниң оқи 81
Конусниң оқлуқ қийилмиси 81
Конусниң асаси 81
Конусниң чоққиси 81
Янту призма 9
Һәжимниң өлчәм бирлиги 133
Көпяқлиққа ичидин сизилған сфера 180
Көпяқлиққа сиртидин сизилған сфера 98
Көпяқлиқлар 8
Көпяқлиқларниң симметрияси 44
Көпяқлиқ бәт 16
Көпяқлиқ булуң 16
Көпяқлиқ булуңниң яқлири 16

MyLibrary.kz

Көпяқлиқ булуңниң қирлири 16
Көпяқлиқ булуңниң чоққиси 16
Көпяқлиқ бәтниң мәйдани 31
Көпяқлиқ йейилмиси 31
Көпяқлиқ йейилмиси 38
Көпяқлиқниң қирлири 15
Куб 8
Қайнатма тузниң кристаллири 47
Қийиқ конус 86
Қийиқ конусқа ичидин сизилған сфера 101
Қийиқ конусқа сиртидин сизилған сфера 101
Қийиқ конус бетиниң мәйдани 87
Қийиқ конусниң егизлиги 87
Қийиқ конусниң ян бети 87
Қийиқ конусниң ян бетиниң мәйдани 87
Қийиқ конусниң йейилмиси 87
Қийиқ конусниң ясиғучиси 87
Қийиқ конусниң һәҗими 155
Қийиқ конусниң оқи 86
Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси 87
Қийиқ конусниң асаслири 86
Қийиқ пирамида 10
Қийиқ пирамидиниң бетиниң мәйдани 32
Қийиқ пирамидиниң ян бети 10
Қийиқ пирамидиниң ян яқлири 10
Қийиқ пирамидиниң ян қири 10
Қийиқ пирамидиниң һәҗими 149
Қийиқ пирамидиниң асаслири 149
Меридиандар 95
Нормаль вектор 58
Октаэдр 25
Оқлуқ симметрия 44
Параллелепипед 8
Параллельлар 95
Пирамидиға ичидин сизилған конус 128
Пирамидиға сиртидин сизилған конус 128
Пирамида бетиниң мәйдани 32
Пирамидиниң ян бети 9
Пирамидиниң ян яқлири 9
Пирамидиниң ян қирлири 9
Пирамидиниң һәҗими 9
Пирамидиниң асаси 9
Пирамидиниң чоққиси 9
Платон җисимлири 27
Призмиға ичидин сизилған цилиндр 126
Призмиға сиртидин сизилған цилиндр 126
Призма бетиниң мәйдани 32
Призминиң ян бети 9
Призминиң ян яқлири 9
Призминиң ян қирлири 9
Призминиң һәҗими 139
Призминиң асаси 116

MyLibrary.kz

Симметрия 44
Симметрия тәкшилиги 46
Симметрия оқи 44
Симметрия мәркизи 44
Симметриялиқ фигурилар 46
Кварц кристаллири 47
Сфера 92
Сфериға ичидин сизилған конус
Сфериға ичидин сизилған көпяқлиқ 116
Сфериға ичидин сизилған қийиқ конус
Сфериға ичидин сизилған цилиндр
Сфериға сиртидин сизилған конус 124
Сфериға сиртидин сизилған көпяқлиқ 123
Сфериға сиртидин сизилған қийиқ конус 125
Сфериға сиртидин сизилған цилиндр 125
Сфериниң диаметри 92
Сфериниң оқи 92
Сфериниң полюслири 94
Сфериниң радиуси 92
Сфериниң чоң чәмбири 94
Сфериниң хордиси 92
Сфериниң мәркизи 92
Тетраэдр 25
Тик призма 112
Тикбулуңлуқ параллелепипед 8
Топология 23
Түзниң параметрлик тәңлимиси 54
Охшаш фигурилар 134
Охшашлиқ 134
Охшашлиқ коэффициенти 134
Мәркизий симметрия 44
Мәркизий симметриялиқ фигура 44
Цилиндр 75
Цилиндрға ичидин сизилған призма 112
Цилиндрға ичидин сизилған сфера 98
Цилиндрға сиртидин сизилған призма 112
Цилиндрға сиртидин сизилған сфера 98
Цилиндр бетиниң мәйдани 77
Цилиндрниң егизлиги 76
Цилиндрниң ян бети 76
Цилиндрниң ян бетиниң мәйдани 77
Цилиндрниң йейилмиси 77
Цилиндрниң ясиғучиси 76
Цилиндрниң һәҗими 144
Цилиндрниң оқи 76
Цилиндрниң оқлуқ кийилмиси 76
Цилиндрниң асаси 76
Шар 92
Шар бөлдими 92
Шар бөлдиминиң бети 92
Шар бөлдиминиң егизлиги 92

MyLibrary.kz

ЖАВАПЛИРИ

10-СИНИПНИҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

1. 1) 3; 2) 6; 3) 10; 4)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.** Бир яки чәксиз көп. **3.** 1) 4; 2) 10; 3)* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **4.** 1) 4; 2) 8; 3)* 15. **8.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **9.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **10.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) $2n$. **11.** 1), 4) Йоқ; 2), 3) һәә. **12.** 1) 9; 2) 12; 3) 15; 4) 18; 5) $3n$. **13.** 1), 3), 4) һәә; 2) йоқ. **14.** 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) $n + 2$. **15.** 1), 2), 3), 4) һәә. **16.** 1) Төртбулуң; 2) бәшбулуң; 3) алтәбулуң. **17.** 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) $n + 1$. **18.** 1), 2), 3), 4) һәә. **19.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) $2n$. **20.** 1), 4) Йоқ; 2), 3) һәә. **21.** 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) $n + 1$. **22.** 1), 2), 3), 4) Яқ. **23.** 1) Төртбулуң; 2) бәшбулуң; 3) алтәбулуң. **24.** 1) 18; 2) 18; 3) 6; 4) 27. **27.** 1) 24; 2) 24; 3) 3; 4) 24. **28.** 1), 2) Айқаш түзләр; 3) қийилишиду. **29.** 1), 2) Айқаш түзләр, 3) қийилишиду. **33.** 1) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, BCC_1B_1, EFF_1E_1; 2) DEE_1D_1. **35.** 1) 3; 2) 3; 3) 1; 4) 4. **37.** 1) 3; 2) 48. **38.** 1) 60°; 2) 90°; 3) 90°. **39.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°. **40.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **41.** 1) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **42.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **43.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $1\frac{1}{2}$. **44.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **45.** 45°. **46.** 60°. **47.** 1) 60°; 2) 30°; 3) 90°; 4) 90°. **48.** $\frac{1}{3}$. **49.** $-\frac{1}{3}$. **50.** 6. **51.** 1) 2; 2) $\sqrt{5}$. **52.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6}$. **53.** $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. **54.** $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$. **55.** 1) 120°; 2) 90°. **56.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; ғ) 0. **57.** 1. **58.** $A(0; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 1)$, $B_1(1; 1; 1)$, $C_1(1; 0; 1)$, $D_1(0; 0; 1)$. **59.** $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $D(1; \sqrt{3}; 0)$, $E(0; \sqrt{3}; 0)$, $F(-0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$, $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$, $D_1(1; \sqrt{3}; 1)$, $E_1(0; \sqrt{3}; 1)$, $F_1(-0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$. **60.** 1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{5}$. **61.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$. **62.** $R = 3$, $O(2; -1; 0)$. **63.** 7. **64.** $6x + 3y + 2z = 6$.

I бап. КӨПЯҚЛИҚЛАР

§ 1

3. а), б). **4.** а), ә). **5.** а), ә), б), в). **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\sqrt{29}$. **8.** 1. **9.** 9 һәссә. **10.** 4 һәссә. **11.** 4 һәссә. **12.** 94. **13.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$. **14.** $6 + 3\sqrt{3}$. **15.** б), г), д). **16.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **18.** 2 вә $\sqrt{5}$. **19.** $\sqrt{5}$. **20.** 4. **21.** ә) 22; ә) 28. **22.** а) 92; ә) 48. **23.** а), ә) 34. **24.** а) 22; ә) 26. **25.** 30. **26.** ≈ 27600 м². **27.** ә), б), в), г) — томпақ; а), ғ) — томпақ әмәс. **28.** 288 см². **29.** $\sqrt{5}$. **30.** Йоқ. **31.** Йоқ.

§ 2

2. а), б). **3.** а), б). **4.** Бәшбулуңлуқ пирамида. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $1 + \sqrt{3}$. **8.** $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{2}$. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** 4 һәссә. **11.** 9 һәссә. **15.** $\sqrt{7}$. **16.** $\sqrt{10}$. **17.** ≈ 8595 м². **18.** ≈ 8,3 га. **19.** $5 + 3\sqrt{3}$. **20.** 1. **21.** ≈ 1710 дм².

§ 3

1. 1), 2) Йоқ; 3) һәә. **2.** Тетраэдр. **3.** 1) Төртбулуңлуқ пирамида; 2) бәшбулуңлуқ пирамида; 3) алтәбулуңлуқ пирамида. **4.** 1) Үчяқлиқ булуңлар; 2) үчяқлиқ вә n-яқлиқ булуңлар. **5.** 10°-тин чоң 150°-тин кичик. **6.** 1) 240°; 2) 270°; 3) 300°. **7.** 1) 210°; 2) 240°. **10.** 1), 2) Йоқ. **12.** Йоқ.

§ 4*

1. 8. **2.** 12. **3.** 6. **6.** а) Алтәбулуңлуқ призма; ә) бәшбулуңлуқ пирамида. **7.** Орунлиниду. **8.** һәә. **9.** һәә. **10.** Ч = 12, Қ = 24, Я = 12; Ч − Қ + Я = 0. **11.** Ч = 24, Қ = 60, Я = 38.

MyLibrary.kz

§ 5

1. 1) Ч = 4, Қ = 6, Я = 4; 2) Ч = 8, Қ = 12, Я = 6; 3) Ч = 6, Қ = 12, Я = 8; 4) Ч = 12, Қ = 30, Я = 20; 5) Ч = 20, Қ = 30, Я = 12. **2.** Яқ. Яқлириниң һәртүрлүк сани қийилишидиған чоққилири бар болиду. **3.** Һәә, бу октаэдр. **7.** 5. **8.** 3. **9.** Куб вә октаэдр. **10.** Икосаэдр вә додекаэдр. **11.** Тетраэдр, $\sqrt{2}$. **12.** Октаэдр, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.** Октаэдр, $\frac{1}{2}$. **14.** Октаэдр, 1. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 4. **17.** 8. **18.** Тетраэдр, $\frac{1}{3}$. **19.** Куб, $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **20.** Додекаэдр. **21.** Икосаэдр. **22.** 10. **23.** 6. **24.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

§ 6

11. Йоқ.

§ 7*

2. 1), 2), 3) һәә. **3.** 1) Йоқ; 2), 3) һәә. **4.** 1) Йоқ; 2), 3) һәә. **5.** 1), 2), 3) һәә. **6.** 1) Йоқ; 2), 3) һәә. **7.** 1) Йоқ; 2), 3) һәә. **9.** Берилгән түзләрниң тәкшилигидә ятидиған, уларға параллель болидиған вә улардин бирдәк ариliқта ятидиған түзниң чекитлири. **10.** 1) Берилгән тәкшиликләрниң қийилишиш түзлириниң чекитлири; 2) берилгән тәкшиликләргә параллель вә улардин бирдәк ариliқта ятидиған тәкшиликниң чекитлири. **11.** һәә. **12.** 1), 2), 3) һәә. **13.** 1) 3; 2) 7. **14.** 1) 4; 2) 7. **15.** 1), 2) 1. **16.** 1) 4; 2) 6. **17.** 1) n, әгәр n — тақ сан, $n + 1$, әгәр n — жүп сан; 2) 0, әгәр n — тақ сан, 1, әгәр n — жүп сан. **18.** 1) $n + 1$; 2) n. **19.** 1) 9; 2), 3) 15. **20.** 1) 9; 2), 3) 15. **21.** һәә, мәсилән, сфериниң симметрия мәркизи униң бойида ятмайду. **22.** 1) Яқлири параллелограммлар болидиған параллелепипедниң симметрия мәркизи бар, бирақ симметрия оқи йоқ; 2) дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң симметрия оқи бар, бирақ симметрия мәркизи йоқ. **23.** 1) Яқлири параллелограммлар болидиған параллелепипедниң симметрия мәркизи бар, бирақ симметрия тәкшилиги йоқ; 2) асаси параллелограмм болидиған төртбулуңлуқ пирамидиниң симметрия оқи бар, бирақ симметрия тәкшилиги йоқ. **24.** 1) Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң симметрия тәкшилиги бар, бирақ симметрия мәркизи йоқ; 2) дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң симметрия тәкшилиги бар, бирақ симметрия оқи йоқ. **25.** Октаэдр. **26.** Дурус алтәбулуңлуқ призма.

Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	A)	B)	D)	C)	B)	C)	A)	D)	D)	A)	C)	B)	D)	B)	C)	D)	A)	B)	C)

II бап. БОШЛУҚТИКИ ТҮЗ БИЛӘН ТӘКШИЛИК ТӘҢЛИМИЛИРИНИҢ ҚОЛЛИНИЛИШИ

§ 8

1. $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = -2 + 5t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 3 - 4t. \end{cases}$ **3.** Өз ара параллель болиду. **4.** $\frac{4}{9}$. **5.** 0. **6.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **7.** $\frac{9}{25}$. **8.** 0. **9.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **10.** $\frac{4}{5}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.** $\frac{11\sqrt{35}}{70}$. **13.** $\frac{3}{4}$.

§ 9

1. $3y - 2z = 0$. **2.** $6x - 3y - 2z + 6 = 0$. **3.** 1) $z = 3$; 2) $y = -2$; 3) $x = 1$. **4.** 1), 3). **5.** 1), 2) Яқ; 3) йоқ. **6.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{21}$. **7.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{4}{5}$. **8.** $\frac{7}{25}$. **9.** 1) $\frac{6}{7}$; 2) $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{3}{7}$. **10.** 1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{3}{5}$. **11.** $\frac{1}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **13.** $\frac{3}{5}$. **14.** $\frac{13}{19}$. **15.** $\frac{5}{7}$.

MyLibrary.kz

§ 10

1. $\frac{4}{9}$. **2.** $\frac{8}{9}$. **3.** 1) Өз ара перпедикуляр болиду; 2) өз ара параллель болиду; 3) түз тәкшиликтә ятиду. **4.** 1) $\frac{\sqrt{14}}{14}$; 2) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$; 3) $\frac{\sqrt{14}}{7}$. **5.** 1) $\frac{12\sqrt{13}}{91}$; 2) $\frac{12\sqrt{5}}{35}$; 3) $\frac{6\sqrt{10}}{35}$. **6.** 1) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; 3) $\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **7.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) 1. **8.** 1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; 2) $\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **9.** 1) $\frac{4\sqrt{19}}{19}$; 2) $\frac{2\sqrt{285}}{95}$. **10.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

§ 11

1. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **5.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **6.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **7.** 1), 2), 3) $\frac{6}{7}$. **8.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ см. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **10.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ см. **11.** $\frac{4\sqrt{57}}{19}$ см. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	C)	D)	A)	B)	D)	A)	B)	D)	A)	D)	B)	D)	B)	B)	C)	D)	A)	D)

III бап. АЙЛИНИШ ҖИСИМЛИРИ ВӘ УЛАРНИҢ ЭЛЕМЕНТЛИРИ

§ 12

2. Чәксиз көп. **3.** Дүгләк. **4.** Цилиндр. **5.** Тәңгә. **6.** 5 см. **7.** $\frac{1}{2\pi}$ см. **8.** 1) 4π см²; 2) 6π см². **10.** Тиктөртбулуң. **11.** 1), 2), 3) һәә. **12.** 1), 2) Цилиндр. **13.** 1) $2\sqrt{2}\pi$ см²; 2) $\sqrt{2}\pi$ см². **14.** 1), 2) Цилиндр. **15.** 1) 2π см²; 2) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ см². **16.** 1), 2) Цилиндр. **17.** 1) 12π см²; 2) 4π см². **18.** $10\pi \approx 31{,}4$ (м²). **19.** $30\sqrt{2-2\cos 10^\circ}$ см². **20.** 26 см². **21.** 3 дм. **22.** Асаслириниң радиуслири 2 см вә 1 см, егизлиги 1 см болидиған икки цилиндрдин туридиған фигура. Бу фигура бетиниң мәйдани 14 π-гә тәң. **23.** Асаслириниң радиуслири 2 см, 1 см, 1 см, егизлиги 1 см болидиған үч цилиндрдин туридиған фигура. Бу фигура бетиниң мәйдани 16 π-гә тәң. **24.** Асасиниң радиуси вә егизлиги 2 см-ға тәң цилиндрдин туридиған фигура. Бу фигуридин асасиниң радиуси 1 см-ға, егизлиги 2 см-ға тәң башқа цилиндр қийип елинған. Мошу фигура бетиниң мәйдани 18 см²-ға тәң. **25.** Асаслириниң радиуслири $2\sqrt{2}$ см вә $\sqrt{5}$ см, егизликлири 1 см болидиған икки цилиндрдин туридиған фигура. Бу фигура бетиниң мәйдани $(16 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\pi$ см² ға тәң. **26.** $\sqrt{9+4\pi^2}$ см. **27.** 13 см. **28.** 350π см². **29.** $\frac{2R\left(1-\cos\frac{\alpha}{R}\right)}{\operatorname{tg}\beta}$ см².

§ 13

2. Чәксиз көп. **3.** Дүгләк. **4.** Конус. **5.** Конусниң ян бети. **6.** 5. **7.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. **8.** 1. **9.** 1. **10.** 3π. **11.** Һәә. **12.** $\frac{\pi}{4}$. **13.** $\sqrt{5}\pi$. **14.** 1) Йоқ; 2), 3) Яқ. **15.** Конус. **16.** Асаслири умумий болидиған икки конустин туридиған фигура. **17.** Асаслири умумий болидиған икки конустин туридиған фигура. Униң бетиниң мәйдани $\sqrt{2}\pi$-гә тәң. **18.** Конус. **19.** $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$. **20.** Конус. **21.** 3π. **22.** 15 см². **23.** $2h^2$. **24.** Асасиниң радиуси 2 см-ға тәң, ясиғучиси 3см-ға тәң конустин туридиған фигура. Бу фигуридин радиуси 1 гә, ясиғучиси $\sqrt{6}$ ға тәң башқа конус қийип елинди. Униң бетиниң мәйдани $(9+\sqrt{6})\pi$ см²-ға тәң. **25.** Асаслири умумий болидиған икки тәң конуслардин туридиған фигура. Униң бетиниң мәйдани $\sqrt{2}\pi$ см² ға тәң. **26.** Асаслири умумий болидиған икки тәң конуслардин туридиған фигура. Униң бетиниң мәйдани π см² гә тәң. **27.** 0,5. **28.** 120°. **29.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **30.** 37. **31.** 42,12 м². **32.** 1440 см².

MyLibrary.kz

§ 14

2. Чәксиз көп. **3.** Дүгләк. **4.** Қийиқ конус. **5.** Қийиқ конусниң ян бети. **6.** 5 см. **7.** 80π см². **8.** Һәә. **10.** 9π см². **11.** 1) һәә; 2), 3) Һәә. **12.** 1 см. **13.** 2 см. **14.** $\frac{17\pi}{4}$ см². **15.** Қийиқ конус. **16.** $(10 + 9\sqrt{2})\pi$ см². **17.** Қийиқ конус. **18.** 14π см². **19.** $6\sqrt{2}\pi \approx 26,6$ (м²). **20.** Асаслири умумий болидиған тәң икки қийиқ конуслардин туридиған фигура. Униң бетиниң мәйдани $3,5\pi$ см²-ға тәң. **21.** Фигура қийиқ конус болуп һесаплиниду. Бу фигуридин асаси қийиқ конусниң бир асаси болидиған конус қийип елиниду. Униң бетиниң мәйдани 3π см²-ға тәң. **22.** 1 см вә 0,5 см. **23.** $y = x^2$. **24.** $y = a^x$. **25.** $y = \sin x$. **26.** ≈ 161 г. **27.** ≈ 1,1 дм². **28.** ≈ 88 см, ≈ 63 см, ≈ 24,3 см, ≈ 21 дм².

§ 15

2. 1) $OA < R$; 2) $OA > R$. **3.** 1) Сфериниң ичидә ятиду; 2) сфериниң бойида ятиду; 3) сфериниң сиртида ятиду. **4.** Чәксиз көп. **5.** 110 мм. **6.** 1 см. **7.** 1) Қийилишиду; 2) яндишиду; 3) умумий чекитлири болмайду. **8.** 1) Бир тал; 2) бир тал әмәс; 3) чәксиз көп. **9.** 4 см. **10.** 4 см. **11.** 1) Қийилишиду; 2) яндишиду; 3) умумий чекитлири болмайду. **12.** 5 см. **13.** 8 см. **14.** 5 см. **15.** 1) Қийилишиду; 2) яндишиду; 3) умумий чекитлири болмайду. **16.** 1) Қийилишиду; 2) яндишиду; 3) умумий чекитлири болмайду. **17.** ≈ 6369 км. **18.** Икки. **19.** 2 см вә 10 см. **20.** 1 см. **21.** π. **22.** Чәксиз көп. **23.** Берилгән тәкшиликләргә параллель вә улардин бирдәк арилиқта ятқан тәкшилик. **24.** Сфериға жүргүзүлгән яндашма тәкшилик. **25.** Чоққиси берилгән чекиттә болидиған конусниң ян бети. **26.** 1) Қийилишиду; 2) яндишиду; 3) умумий чекитлири болмайду.

§ 16

1. R вә $2R$. **2.** $\frac{h}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **4.** $2\sqrt{3}$ см. **5.** $\sqrt{3}$ см. **6.** 2,5 см. **7.** 6π см². **8.** 4 см. **9.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **10.** $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$. **11.** $3\frac{1}{8}$ см. **12.** $R = \frac{r(\sqrt{r^2 + h^2} - r)}{h}$. **13.** 1,5 см. **14.** $\sqrt{3}$ см. **15.** 1) 1 см; 2) $\sqrt{2} - 1$ см. **16.** 1) 1 см; 2) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$ см. **17.** 2 см. **19.** 2 см. **20.** 5 см. **21.** 3 см.

§ 17

1. 4π см². **2.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$ см. **3.** 12 см². **4.** 1) 4; 2) 9; 3) n^2 һәссә ашиду. **5.** 2 : 3. **6.** 10 см. **7.** 1. **8.** π. **9.** 2π. **10.** 16 һәссә. **11.** 3 һәссә. **12.** 4 һәссә. **13.** 400π см². **14.** 1 : 3. **15.** 4π см². **16.** 6π см². **17.** ≈ 509 554 140 км². **18.** ≈ 1520 м². **19.** 19200 м². **20.** $\frac{2\pi}{3}$ см². **22.** $\frac{\pi}{2}$ см². **23.** $\frac{2\pi}{3}$ см².

Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B)	C)	C)	D)	B)	C)	A)	C)	D)	C)	D)	D)	C)	C)	C)	D)	A)	D)	C)	D)

IV бап. ИЧИДИН ВӘ СИРТИДИН СИЗИЛҒАН КӨПЯҚЛИҚЛАР

§ 18

1. 1), 2), 4), 5) һәә; 3) йоқ. **2.** 1), 4), 5) һәә; 2), 3) йоқ. **3.** һәә. **4.** һәә. **5.** Униң бир йеқи квадрат болған һаләттә. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1. **7.** $\frac{1}{2}$, 1. **8.** Асаслириниң радиуслири билән егизликлири мувапик $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см вә 3 см; $\frac{\sqrt{10}}{2}$ см вә 2 см; $\frac{\sqrt{13}}{2}$ см вә 1 см болидиған үч цилиндр. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см вә 1 см. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см вә 1 см. **11.** 1 см. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см вә 1 см. **13.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см;

MyLibrary.kz

2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см; 3) $\frac{1}{2}$ см. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см вә $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. **15.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см вә $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **16.** 1 см вә $\sqrt{3}$ см. **17.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см вә $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. **18.** $\frac{1}{2}$ см вә $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **19.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см вә $\sqrt{3}$ см.

§ 19

1. 1), 2) һәә; 3) йоқ. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **4.** 1,5 дм. **5.** 4. **6.** Асаси параллелограмм болидиған төртбулуңлуқ призма. **7.** Яқ, мәсилән, асаси кәңбулуңлуқ үчбулуңлуқ болидиған үчбулуңлуқ тик призма. Сиртидин сизилған сферининң мошу мәркизи мошу призмидин сирт ятиду. **8.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **9.** $\sqrt{2}$. **10.** Призминиң асаси: 1) тарбулуң; 2) тикбулуң; 3) кәңбулуң болған һаләттә. **11.** 13 см. **12.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ см. **13.** $\sqrt{11}$ см.

§ 20

1. Берилгән чекитләрни қошидиған кесиндиниң оттуриси арқилиқ өтидиған вә мошу кесиндигә перпендикуляр болидиған тәкшилик. **3.** 2 см. **4.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **5.** $1\frac{1}{4}$ см. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ см. **7.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **9.** $1\frac{1}{2}$ см. **10.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **11.** 1 см. **12.** 1) 1 см; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **13.** Асаси параллелограмм болидиған төртбулуңлуқ пирирамида. **14.** 1), 2), 3) һәә. **15.** Сиртидин сизилған сфериниң мәркизи мошу пирамидиниң асасиға сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болиду; сфериниң радиуси $\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **17.** Сиртидин сизилған сфериниң мәркизи мошу пирамидиниң асасиға сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болиду. **18.** Сиртидин сизилған сфериниң мәркизи мошу пирамидиниң асасиға сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болиду. **19.** $1\frac{1}{2}$ см. **20.** $2\frac{1}{2}$ см. **21.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **22.** $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ см. **23.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}$ см.

§ 21

1. $\frac{1}{2}$ см. **2.** 2 см. **3.** $\frac{1}{2}$ см. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **5.** Йоқ. **6.** Дурус призма. Призминиң егизлиги униң асасиға ичидин сизилған чәмбәрниң икки һәссиләнгән радиусиға тәң әмәс. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **8.** $2\sqrt{3}$ см. **9.** $\frac{1}{2}$ см. **10.** 2 см. **11.** $\sqrt{3}$ см. **12.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **13.** Берилгән тәкшиликләрдин қурулған иккияқлиқ булуңларниң биссекторлуқ тәкшиликлири ятидиған икки перпендикуляр тәкшиликләр. **14.** 2 см. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см.

§ 22

1. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ см. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **3.** $2\sqrt{3}-3$ см. **4.** $R=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+4h^2}}$. **5.** $\frac{3\sqrt{5}-3}{4}$ см. **6.** 1) $2-\sqrt{3}$ см; 2) $\sqrt{2}-1$ см; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **7.** $r=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+12h^2}}$. **8.** $\frac{1}{3}$ см. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$ см. **10.** $r=\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3}a+\sqrt{3a^2+4h^2}}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{19}-\sqrt{3})}{8}$ см. **12.** $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ см. **13.** $\frac{\sqrt{57}-3}{16}$ см. **14.** Асаси тикбулуңлуқ болидиған төртбулуңлуқ пирамида. Униң егизлигиниң асаси мошу тикбулуңлуқниң диагональлириниң қийилишиш чекити болиду. **15.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ см.

Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	D)	A)	D)	B)	C)	C)	D)	B)	D)	B)	B)	B)	C)	A)	D)	B)	C)	B)	B)

MyLibrary.kz