В.А.Смирнов, Е.А.Туяқов

ГЕОМЕТРИЯ
11

Умумий билим беридиған мәктәпләрниң ижтимаий-гуманитарлиқ йөнилишидики 11-синиплири үчүн дәрислик

Қазақстан Жумһурийити Билим вә пән министрлиги тәстиқлиған

Алмута "Мектеп" 2020

УДК 373.167.1
ББК 22.15я72
С53

Тәрҗиманлар: **А.З. Қурбанов, Г.Н. Миҗитова**

Шәртлик бәлгүләр:

? — тәнқидий ойлаш үчүн берилгән тапшурмилар

— теориялиқ материални өз алдиға оқуп-үгиниш үчүн һаҗәтлик тапшурмилар

— теорема испатлинишиниң аяқлиниши

A — барлиқ оқуғучиларға орунлашқа тегиш тапшурмилар

B — оттура сәвийәлик тапшурмилар

C — жуқури сәвийәлик тапшурмилар

Смирнов В.А., Туяқов Е.А.

С53 **Геометрия.** Умумий билим беридиған мәктәпләрниң иҗтимаий-гуманитарлиқ йөнилишидики 11-синиплири үчүн дәрислик. — Алмута: Мектеп, 2020. — 128 б., сүр.

ISBN 978—601—07—1533—2

С $\frac{4306020502—138}{404(05)—20}$ 49(1)—20

УДК 373.167.1
ББК 22.15я72

ISBN 978—601—07—1533—2

КИРИШМӘ

Дәрислик 10-синип үчүн «Геометрия» дәрислигиниң давами болуп һесаплиниду вә иҗтимаий-гуманитарлиқ йөнилиштә оқуйдиған 11-синип оқуғучилириға беғишланған.

Дәрисликтә асасий көпяқлиқлар вә уларниң хусусийәтлири билән тонушуш, айлиниш җисимлири (цилиндр, конус, шар) вә уларниң хусусийәтлири билән тонушуш, бошлуқтики фигурилар бәтлириниң мәйданлири билән һәҗимлирини тепишни үгитиш көздә тутулған.

Дәрисликтә барлиқ материаллар бапларға вә параграфларға бөлүнгән. Улар теориялиқ материлларни, өз алдиға орунлашқа тапшурмиларни, пишиқдаш соаллирини вә қийинлиғи бойичә һәр хил сәвийәдики һесапларни өз ичигә алиду.

Теорема испатлинишиниң аяқлишиши (□) бәлгүси билән бәлгүләнгән.

Дәрисликтики һесаплар сәвийәлиригә қарап A — барлиқ оқуғучилар орунлашқа тегишлик тапшурмилар, B — оттура сәвийәлик вә C — жуқури сәвийәлик болуп бөлүнгән.

(*) юлтузчә билән бәлгүләнгән параграфлар оқуш программисиға кирмәйдиған қошумчә материалларни өз ичигә алиду.

Һәрбир бапниң ахирида оқуш материалини өзләштүрүш сапасини тәкшүрүшкә беғишланған тест тапшурмилири берилгән. Дәрисликниң ахирида һәсапларниң җаваплири кәлтүрүлгән.

Геометрияни оқуп үгиништә муваппәқийәтләр тиләймиз!

Һөрмәт билән дәрислик авторлири

10-СИНИП ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

Стереометрия башланмилири

1. Бошлуқта һәр бир үчи бир түзниң бойида ятмайдиған һәр түрлүк 1) үч; 2) төрт; 3) бәш; 4)* n чекитлириниң җүпи арқилиқ нәччә түз жүргүзүшкә болиду?
2. Бошлуқтики үч чекит арқилиқ нәччә тәкшилик җүргүзүшкә болиду?
3. Бошлуқта һәр бир төрти бир тәкшиликниң бойида ятмайдиған һәр түрлүк: 1) төрт; 2) бәш; 3)* n чекитләр арқилиқ нәччә тәкшилик җүргүзүшкә болиду?
4. 1) Икки тәкшилик; 2) үч тәкшилик; 3)* төрт тәкшилик бошлуқни әң көп дегәндә қанчә бөләккә бөлиду?
5. Әгәр түзниң тәкшилик билән икки умумий чекити болса, у чағда түзниң мошу тәкшиликтә ятидиғинини испатлаңлар.
6. Түз вә мошу түздә ятмайдиған чекит арқилиқ пәқәт бирла тәкшилик җүргүзүшкә болидиғинини испатлаңлар.
7. Қийилишқан икки түз арқилиқ пәқәт бирла тәкшилик җүргүзүшкә болидиғинини испатлаңлар.
8. Кубниң қанчә : 1) чоққиси; 2) қири; 3) йеқи болиду?
9. Параллелепипедниң қанчә: 1) чоққиси; 2) қири; 3) йеқи болиду?
10. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ призминиң қанчә чоққиси болиду?
11. Призминиң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 чоққиси болуши мүмкинму?
12. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ призминиң қанчә қири болиду?
13. Призминиң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 қири болуши мүмкинму?
14. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ призминиң қанчә йеқи болиду?
15. Призминиң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 йеқи болуши мүмкинму?
16. 1) 12; 2) 15; 3) 18 қири бар призминиң асаси қандақ көпбулуңлуқ болиду?
17. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ пирамидиниң қанчә чоққиси болиду?
18. Пирамидиниң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 чоққиси болуши мүмкинму?
19. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ пирамидиниң қанчә қири болиду?
20. Пирамидиниң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 қири болуши мүмкинму?
21. 1) Үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) бәшбулуңлуқ; 4) алтәбулуңлуқ; 5) n-булуңлуқ пирамидиниң қанчә йеқи болиду?
22. Пирамидиниң: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 йеқи болуши мүмкинму?
23. 1) 8; 2) 10; 3) 12 қири бар пирамидиниң асасида қандақ көпбулуңлуқ болиду?

Бошлуқтики параллельлик

24. 1) Кубниң; 2) параллелепипедниң; 3) үчбулуңлуқ призминиң; 4) алтәбулуңлуқ призминиң параллель қирлириниң қанчә җүпи бар?

25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедида: 1) AB вә D_1C_1; 2) AD_1 вә BC_1 түзлири параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призмида: 1) AB вә E_1D_1; 2) AA_1 вә DD_1; 3) AC_1 вә FD_1 түзлири параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

27. 1) Кубниң; 2) параллелепипедниң; 3) үчбулуңлуқ пирамидиниң; 4) алтәбулуңлуқ пирамидиниң айқаш қирлириниң қанчә җүпи бар?

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң чоққилири арқилиқ өтүдиған: 1) AB_1 вә BC_1; 2) AA_1 вә BD_1; 3) AC_1 вә BD_1 түзлири өз ара қандақ орунлашқан?

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң чоққилири арқилиқ өтүдиған: 1) AB_1 вә CD_1; 2) AA_1 вә BD_1; 3) AC_1 вә BF_1 түзлири өз ара қандақ орунлашқан?

30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедида: 1) AA_1 вә BD; 2) AC_1 вә BB_1 түзлири айқаш болидиғанлиғини испатлаңлар.

31. $SABCDEF$ пирамидисида SA түзи билән: 1) BC; 2) CD түзлири айқаш болидиғанлиғини испатлаңлар.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призмисида: 1) AA_1 вә BC; 2) AC_1 вә BD; 3) AB вә B_1C_1 түзлири айқаш болидиғинини испатлаңлар.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призмисида: 1) AD; 2) AB_1 түзлиригә параллель яқлирини көрситиңлар.

34. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидисида AB қири SDE йеқиға параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

35. 1) Кубниң; 2) параллелепипедниң; 3) үчбулуңлуқ призминиң; 4) алтәбулуңлуқ призминиң параллель яқлириниң қанчә җүпи болиду?

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призмисида: 1) ABB_1 вә EDD_1; 2) ACC_1 вә FDD_1 тәкшиликлири параллель болидиғинини испатлаңлар.

Бошлуқтики перпендикулярлиқ

37. 1) Дурус тетраэдрниң; 2) кубниң перпендикуляр қирлириниң қанчә җүпи болиду?

38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида: 1) AB_1 вә BC_1; 2) AC вә BD_1; 3) AB_1 вә CD_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. Униң: 1) AA_1 вә CD_1; 2) AA_1 вә BD_1; 3) AC вә BE_1 түзлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B чекитидин: 1) A_1D_1; 2) A_1C_1 түзлиригичә болған арилиқни тепиңлар.

41. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. Униң B чекитидин: 1) AC_1; 2) A_1C_1 түзигичә болған арилиқни тепиңлар.

42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B чекитидин: 1) ACC_1; 2) ACB_1 тәкшиликлиригичә болған арилиқни тепиңлар.

43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. Униң B чоққисидин: 1) ACC_1; 2) CDD_1; 3) DEE_1; 4) DFF_1 тәкшиликлиригичә болған арилиғини тепиңлар.

44. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. 1) ABB_1 вә DEE_1; 2) ACC_1 вә FDD_1 тәкшиликлириниң арилиғини тепиңлар.

45. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 гә тәң. SB түзи билән ABC тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.

46. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң асасиниң тәрәплири 1 гә, ян қирлири 2 гә тәң. SB түзи билән ABC тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.

47. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. 1) ABB_1 вә BCC_1; 2) ABB_1 вә ACC_1; 3) ACC_1 вә CDD_1; 4) ACC_1 вә BEE_1 тәкшиликлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

48. Дурус тетраэдр яқлириниң арисидики иккияқлиқ булуңниң косинусини тепиңлар.

49. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 гә тәң. Униң хошна ян яқлириниң арисидики иккияқлиқ булуңниң косинусини тепиңлар.

Векторлар вә уларниң хусусийәтлири

50. Параллелепипедниң қирлири һәр түрлүк қанчә векторни тәшкил қилиду?

51. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. 1) $\overline{AC_1}$; 2) $\overline{AD_1}$ векторлириниң узунлиғини тепиңлар.

52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида: 1) $\overline{AB} + \overline{AD_1}$; 2) $\overline{AB_1} + \overline{AD_1}$ векторлириниң узунлиғини тепиңлар.

53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида $\overline{AC_1}$ векторини $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ вә $\overline{AA_1}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

54. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң. $\overline{AD_1}$ векторини $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ вә $\overline{AA_1}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

55. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 гә тәң. $\overline{SA}$ вектори билән: 1) $\overline{BC}$; 2) $\overline{BD}$ векторлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

56. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куби берилгән $\overrightarrow{AB_1}$ вектори билән: 1) $\overrightarrow{CC_1}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$; 3) $\overrightarrow{BC_1}$; 4) $\overrightarrow{BD_1}$ векторлиририниң скалярлиқ көпәйтиндисини тепиңлар.

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида җисимни C чоққисидин C_1 чоққисиға $\vec{F} = \overrightarrow{BD_1}$ күчиниң тәсири билән орун алмаштурғандики орунлинидиған ишни тепиңлар.

Координатилар

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куби тикбулуңлуқ координатилар системисида орунлашқан. D чоққиси координатилар башланмисида, DC, DA, DD_1 қирлири мувапиқ абсцисса, ордината, аппликата оқлирида ятиду. Кубниң барлиқ чоққилириниң координатилирини тепиңлар.

59. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 гә тәң, A чоққиси тикбулуңлуқ координатилар системисиниң башлинишида, AB, AE, AA_1 кесиндилири болса мувапиқ абсцисса, ордината, аппликата оқлирида ятиду. Призма чоққилириниң координатилирини тепиңлар.

60. $A(1; 2; 3)$ чекитидин: 1) Ox; 2) Oy; 3) Oz координатилар түзлиригичә болған ариliқни тепиңлар.

61. Мәркизи $A(1; 2; 2)$ чекитидә болидиған вә координатилар башлинишидин өтүдиған сфериниң тәңлимисини тепиңлар.

62. $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 4 = 0$ тәңлимиси бошлуқтики сферини ениқлайдиғанлиғини испатлаңлар. Униң радиуси билән мәркизиниң координатилирини тепиңлар.

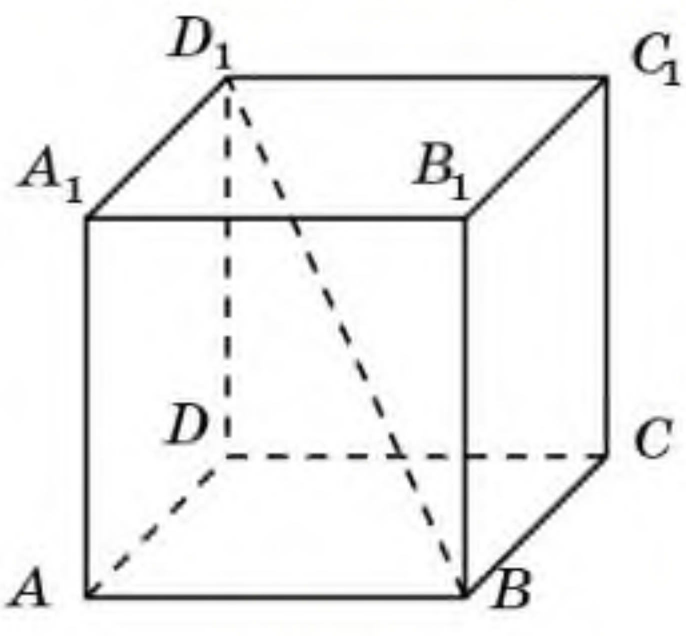
63. $\vec{a}_1(1; 2; 3)$ вә $\vec{a}_2(3; -1; 2)$ векторлириниң скалярлиқ көпәйтиндисини тепиңлар.

64. $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ чекитлири арқилиқ өтүдиған тәкшиликниң тәңлимисини йезиңлар.

I бап КӨПЯҚЛИҚЛАР

§ 1. Көпяқлиқ чүшәнчиси. Призма вә параллелепипед. Призминиң йейилмиси, ян бети вә толуқ бетиниң мәйданлири

Көпяқлиқ дәп бети көпбулуңлуқларниң чәкләнгән санидин туридиған жисимни ейтиду. Көпбулуңлуқлар көпяқлиқниң *яқлири* дәп, көпбулуңлуқниң тәрәплири билән чоққилири көпяқлиқниң мувапиқ *қирлири* билән *чоққилири* дәп атилиду.



1.1-сүрәт

10-синип геометрия курсида томпақ көпяқлиқлар (куб, параллелепипед, призма, пирамида вә ш.о.) қараштурулған.

Куб дәп һәммә яқлири квадрат болидиған көпяқлиқни атайду (1.1-сүрәт).

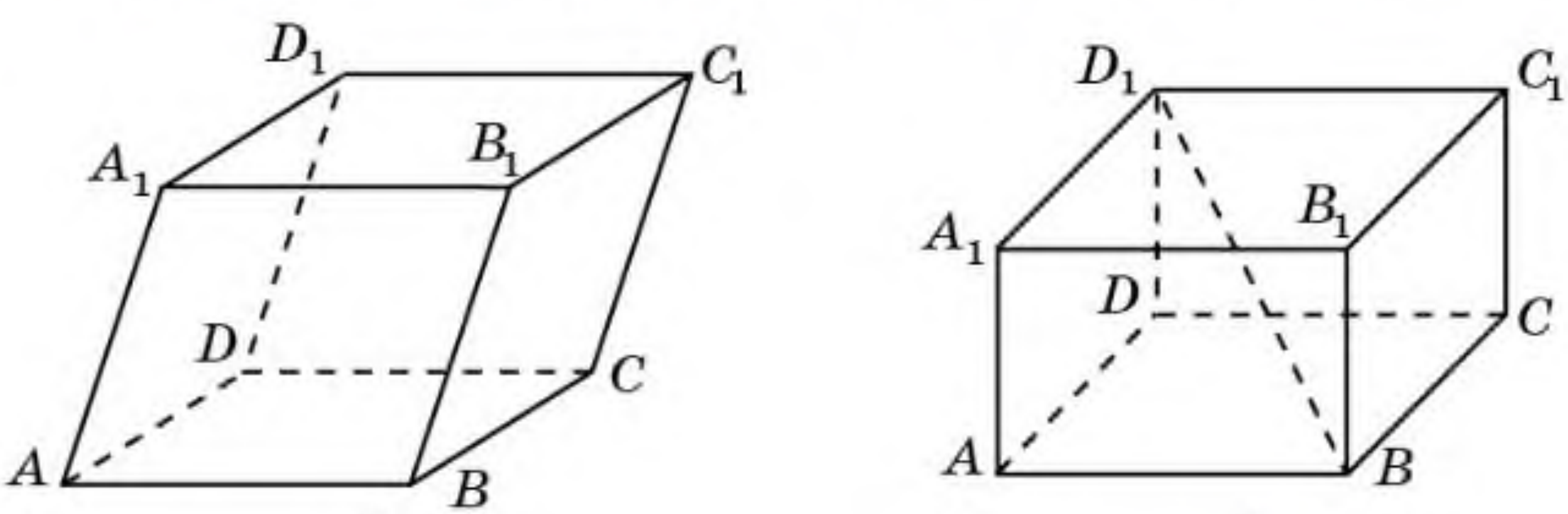
Адәттә, куб униң чоққилирини көрситиш арқилиқ бәлгүлиниду, мәсилән, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Қири 1 гә тәң куб *бирлик куб* дәп атилиду.

Кубниң бир йеқида ятмайдиған икки чоққисини қошудиған кесиндә *кубниң диагонали* дәп атилиду. 1.1-сүрәттә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң BD_1 диагонали тәсвирләнгән.

Параллелепипед дәп қариму-қарши яқлири жүп-жүпи өз ара параллель болидиған көпяқлиқни (алтәяқлиқни) атайду (1.2, а-сүрәт). *Параллелепипедниң яқлириниң һәммиси* параллелограмм болиду. Параллелепипед униң чоққилирини көрситиш арқилиқ бәлгүлиниду, мәсилән, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Әгәр параллелепипедниң ян қирлири асас тәкшилигигә перпендикуляр болса, у чағда у *тик параллелепипед* дәп атилиду. *Асаслири тиктөртбулуңлуқ болидиған тик п*араллелепипедни *тикбулуңлуқ параллелепипед* дәп атайду (1.2, ә-сүрәт). Әгәр параллелепипедниң



а) ә)

1.2-сүрәт

ян қирлири асас тәкшилигигә перпендикуляр болмиса, у чағда *янту параллелепипед* дәп атилиду (1.2, а-сүрәт).

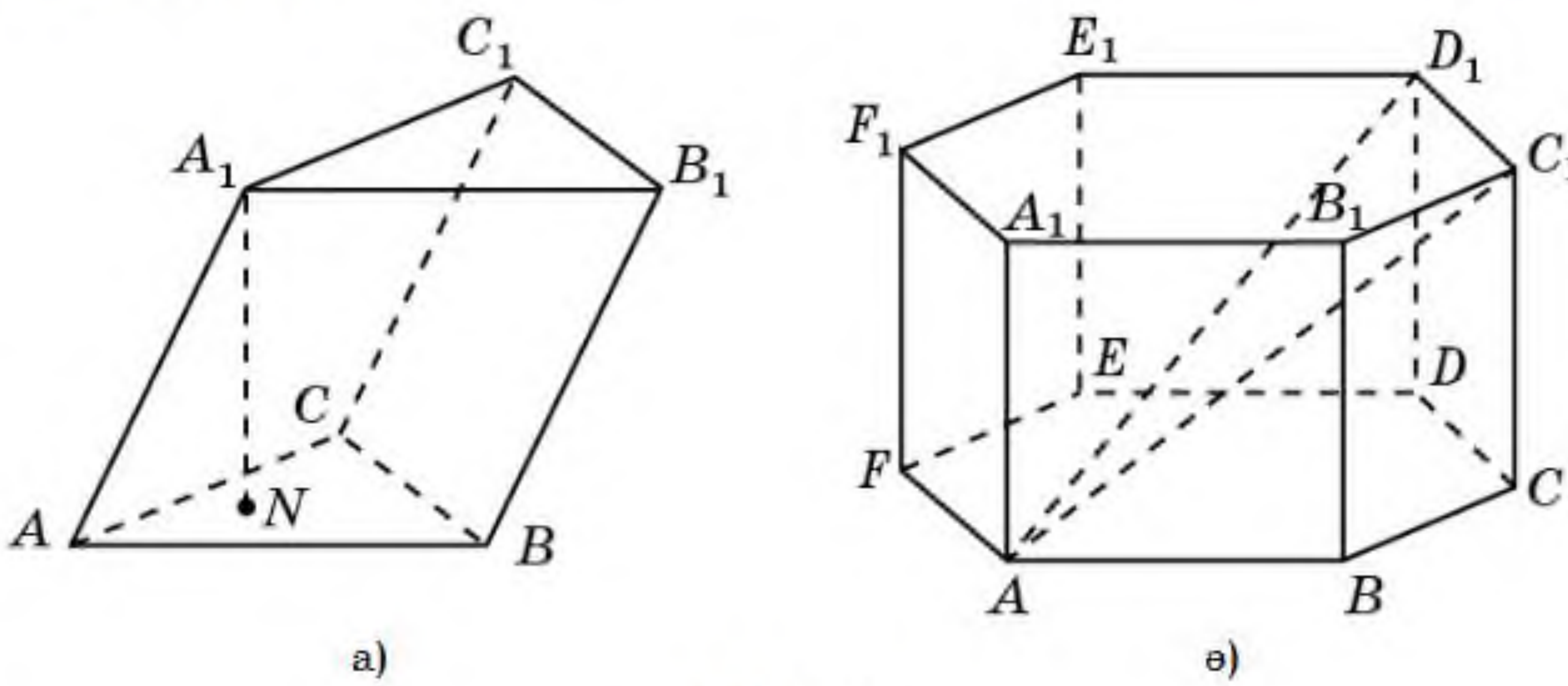
Параллелепипедниң бир йеқида ятмайдиған икки чоққисини қошидиған кесиндә *параллелепипедниң диагонали* дәп атилиду. 1.2, ә-сүрәттә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тик булуңлуқ параллелепипедниң BD_1 диагонали тәсвирләнгән.

Призма дәп икки йеқи параллель тәкшиликләрдә ятидиған өз ара тәң көпбулуңлуқлар, қалған яқлири параллелограмм болидиған көпяқлиқни атайду. Көпбулуңлуқлар призминиң асаслири, параллелограмлар призманиң *ян яқлири* дәп атилиду. Ян яқлиридин қурулған бәт *призминиң ян бети* дәп атилиду. Призминиң ян яқлириниң умумий қирлири *ян қирлири* дәп атилиду.

Призмилар асаслирида ятқан көпбулуңларға бағлиқ (үчбулуңлуқлар, төртбулуңлуқлар, бәшбулуңлуқлар вә ш.о.) мувапиқ үчбулуңлуқ, төртбулуңлуқ, бәшбулуңлуқ вә ш.о. болуп бөлүниду.

Әгәр призминиң асаси n-булуңлуқ болса, у чағда у *n-булуңлуқ призма* дәп атилиду.

Призма униң чоққилири билән бәлгүлиниду мәсилән: $ABCA_1B_1C_1$ — үчбулуңлуқ призма (1.3, а-сүрәт), $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ — алтәбулуңлуқ призма (1.3, ә-сүрәт).



1.3-сүрәт

Призминиң ениқлимисидин униң төвәндики хусусийәтлири чиқиду:

1) ян қирлири тәң;

2) асаслири тәң вә параллель болиду.

Бу хусусийәтләрни өзәңлар испатлаңлар.

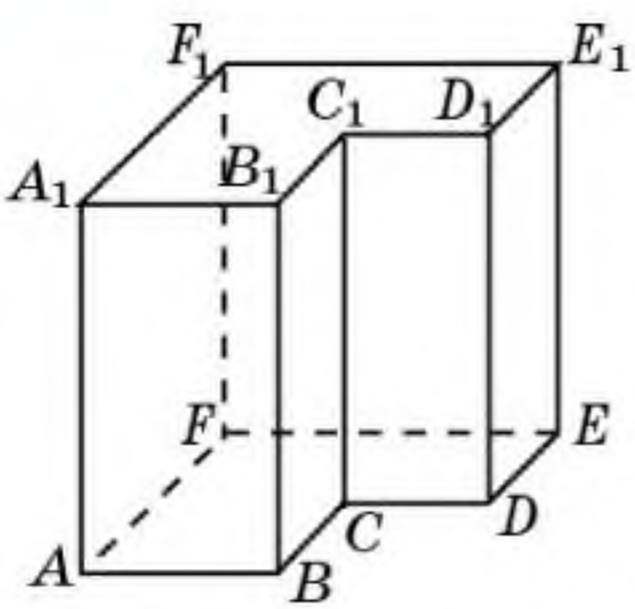
Ян қирлири асаслириға перпендикуляр болидиған призма *тик призма* дәп атилиду. Тик әмәс призма *янту призма* дәп атилиду 1.3, а-сүрәттә үчбулуңлуқ янту призма тәсвирләнгән. 1.3, ә-сүрәттә тик алтәбулуңлуқ призма тәсвирләнгән.

Қандақ ойлайсиләр, параллелепипед төртбулуңлуқ призма боламду?

Асаслири дурус көпбулуңлуқ болидиған тик призма *дурус* дәп атилиду. 1.3, ә-сүрәттә дурус алтәбулуңлуқ призма тәсвирләнгән.

Призминиң асас тәкшиликлириниң арилиғини *призминиң егизлиги дәп атайду,* йәни призминиң бир асасиниң чекитидин иккинчи асас тәкшилигигә чүширилгән перпендикуляр униң егизлиги болуп һесаплиниду. 1.3, а-сүрәттә $ABCA_1B_1C_1$ призмисиниң A_1H егизлиги тәсвирләнгән.

Тик призминиң егизлиги униң ян қириниң узунлуғиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.



1.4-сүрәт

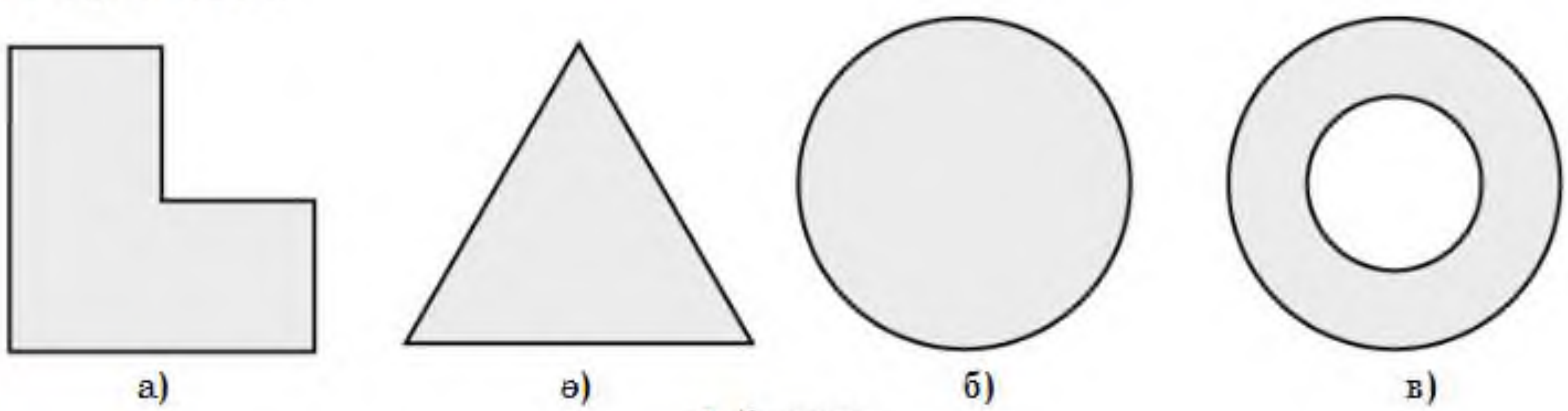
Призминиң бир тәрипидә ятмайдиған икки чоққисини қошидиған кесиндә *призминиң диагонали* дәп атилиду, 1.3, ә-сүрәттә $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмисиниң AC_1 вә AD_1 диагональлири тәсвирләнгән.

Әгәр көпяқлиқта униң һәр қандақ икки чекити билән биллә уларни қошидиған кесиндә ятидиған болса, у чағда бу *томпақ көпяқлиқ* дәп атилиду.

1.3-сүрәттә томпақ көпяқлиқлар тәсвирләнгән. 1.4-сүрәттә томпақ әмәс алтәбулуңлуқ призма тәсвирләнгән.

«Томпақлиқ» чүшәнчиси һәр қандақ фигура үчүн ениқлиниду. Әгәр фигурида униң һәр қандақ икки чекити билән уларни қошидиған кесиндә ятидиған болса, у чағда у *томпақ фигура* дәп атилиду.

1.5-сүрәттә томпақ (ә, б) вә томпақ әмәс (а, в) тәкши фигурилар тәсвирләнгән.

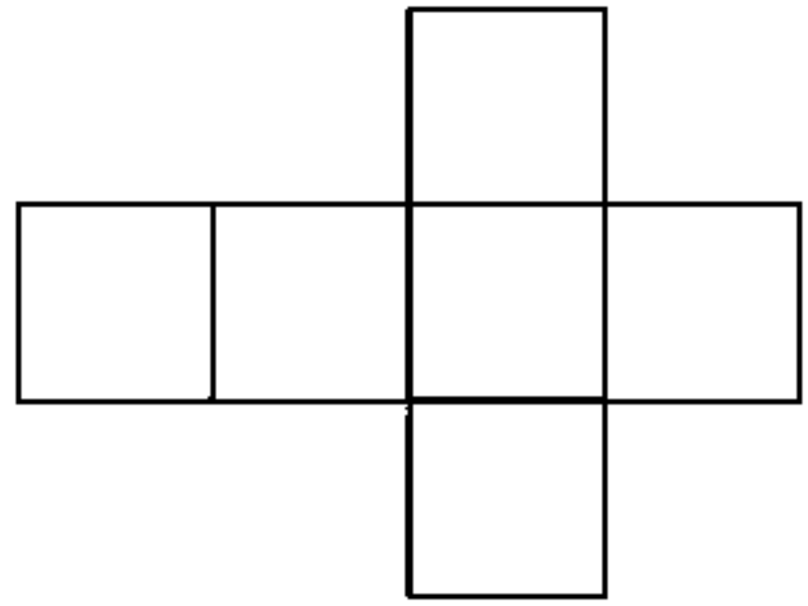


1.5-сүрәт

Икки томпақ фигуриниң қийилишиши (умумий бөләклири) томпақ фигура болидиғанлиғини испатлаңлар.

Әгәр көпяқлиқниң бетини қандақту бир қирлириниң бойи билән қийип, уни тәкшиликкә, йәни бәтни тәшкил қилидиған барлиқ көпбулуңлуқлар берилгән тәкшиликтә ятидиған қилип яйидиған болсақ, у чағда *көпяқлиқниң йейилмиси* дәп атилидиған фигура пәйда болиду.

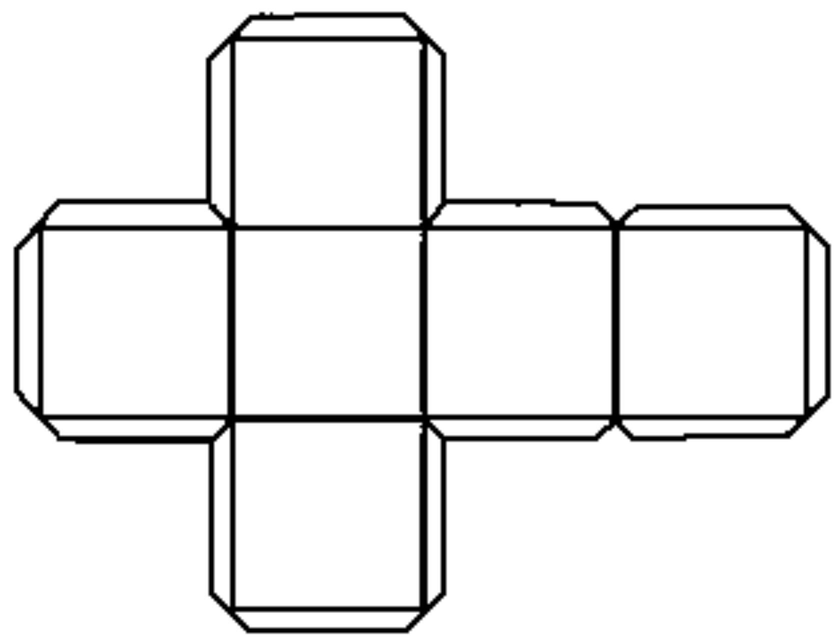
Мәсилән 1.6-сүрәттә кубниң йейилмиси тәсвирләнгән.



1.6-сүрәт

Көпяқлиқлар модельлирини қаттиқ қәғәздин яки қандақту бир қаттиқ материалдин ясаш үчүн, алди билән униң йейилмисини тәйярлап елип, андин мувапиқ қирлирини чаплап чиқиш керәк.

Қолайлиқ болуши үчүн көпяқлиқ йейилмисини қалпақчиси билән ясиған дурус вә шулар арқилиқ чаплиниду. 1.7-сүрәттә кубниң йейилмиси қалпақчилири билән тәсвирләнгән.



1.7-сүрәт

Көпяқлиқларни уларниң йейилмиси бойичә қураштуруш тоғрисида толуғирақ тонушуш үчүн төвәндики китапни тәвсийә қилимиз: Веннинджер М. Модели многогранников. — М.: Мир, 2004.

Ениқлима бойичә, *көпяқлиқ бетиниң мәйдани* мошу бәтниң тәркивидики көпбулуңлуқлар мәйданиниң қошундиси болуп һесаплиниду.

Көпяқлиқ бетиниң мәйдани униң йейилмисиниң мәйданиға тәң болиду.

Призминиң ян бети дәп униң барлиқ ян яқлиридин түзүлгән бәтни атайду. Буниңдин, *призминиң ян бетиниң мәйдани* униң барлиқ ян яқлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң.

Теорема. ***Тик призминиң ян бетиниң мәйдани униң асасиниң периметри билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң.***

Испатлиниши: Ениқлима бойичә $S_{\text{ян бети}} = S_1 + S_2 + ... + S_n$, бу йәрдә S_1, S_2, ..., S_n — ян яқлириниң мәйданлири. Тик призминиң ян яқлири тиктөртбулуңлуқлар болуп, униң асаслири призма асасиниң тәрәплири болиду вә ян қири призминиң h егизлигигә тәң вә $S_1 = a_1h$, $S_2 = a_2h$, ... , $S_n = a_nh$, бу йәрдә a_1, a_2, ..., a_n — асасиниң тәрәплириниң узунлуқлири. Буниңдин призминиң ян бетиниң мәйдани төвәндики формула билән ениқлинидиғанлиғи келип чиқиду:

$$S_{\text{ян бети}} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = (a_1 + a_2 + ... + a_n)h = Ph,$$

бу йәрдә P — призма асасиниң периметри. ◪

Призминиң толуқ бетиниң мәйдани униң ян бети билән асаслириниң мәйданлирининг қошундисиға тәң, йәни төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$S_{\text{призма}} = S_{\text{ян бети}} + 2S_{\text{асаси}}.$$

Қири a-ға тәң болидиған кубниң толуқ бетиниң мәйданини һесаплаш формулисини йезиңлар.

Бир чоққисидин чиқидиған қирлири a, b, c болидиған тикбулуңлуқ параллелепипедниң толуқ бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.

Көпяқлиқларни модельлаш үчүн http://geogebra.org сайтидин GeoGebra компьютерлик программисини қоллинишқа болиду.

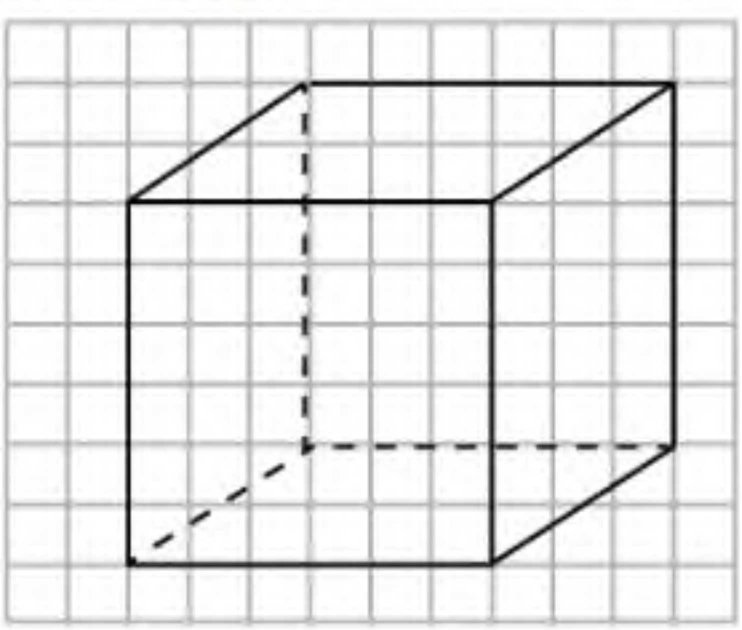
Соаллар

1. Көпяқлиқ дегинимиз немә?
2. Қандақ көпяқлиқ куб дәп атилиду?
3. Кубниң диагонали дегинимиз немә?
4. Қандақ көпяқлиқ параллелепипед дәп атилиду?
5. Параллелепипедниң диагонали дегинимиз немә?
6. Қандақ көпяқлиқ призма дәп атилиду?
7. Қандақ призма дурус призма дәп атилиду?
8. Призминиң егизлиги дегинимиз немә?
9. Призминиң диагонали дегинимиз немә?
10. Қандақ көпяқлиқ томпақ дәп атилиду?
11. Көпяқлиқниң йейилмиси дегинимиз немә?
12. Көпяқлиқ бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
13. Призминиң ян вә толуқ бетиниң мәйданлири қандақ һесаплиниду?

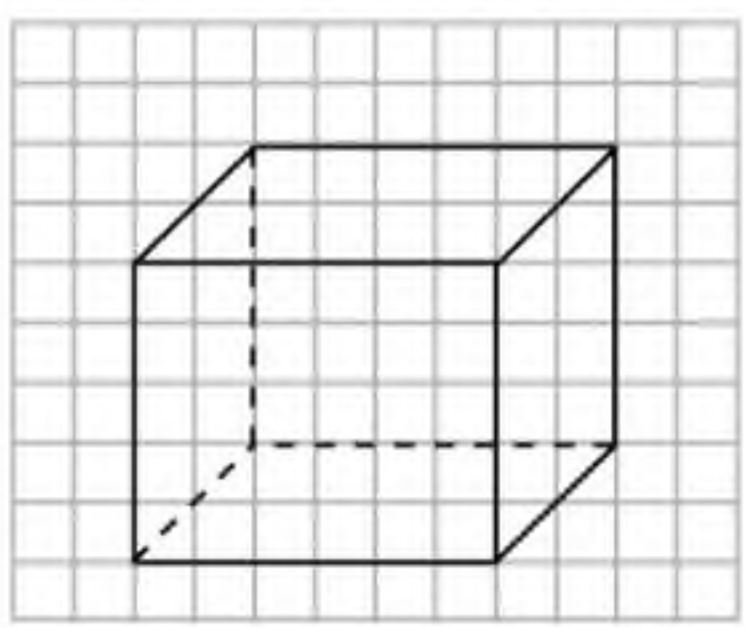
Һесаплар

A

1.1. Чақмақ дәптәргә 1.8-сүрәттикигә охшаш кубни вә параллелепипедни селиңлар.



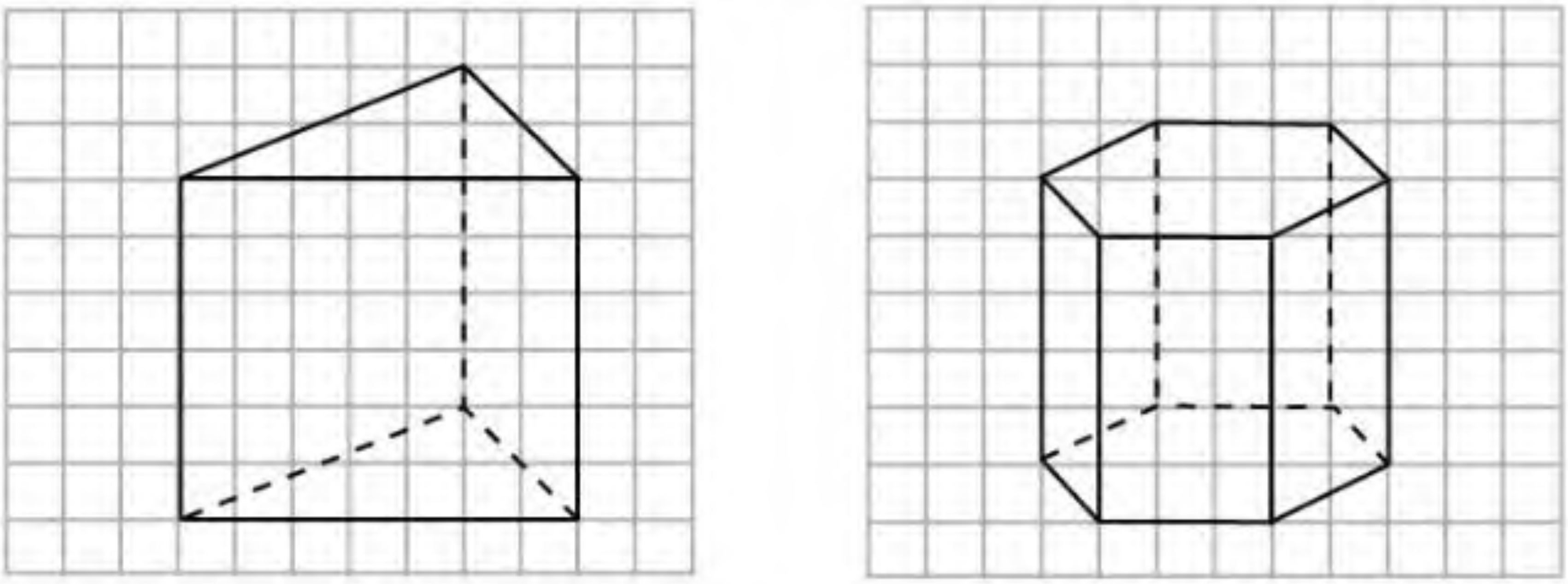
а)



ә)

1.8-сүрәт

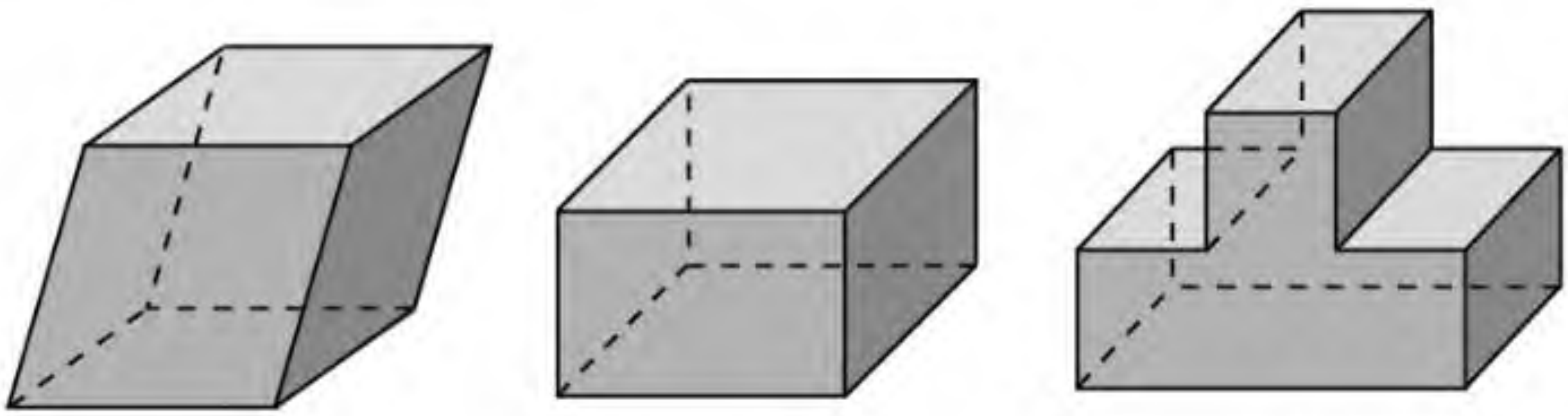
1.2. Чақмақ қәғәзгә 1.9-сүрәттики охшаш призмиларни селиңлар.



а) ә)

1.9-сүрәт

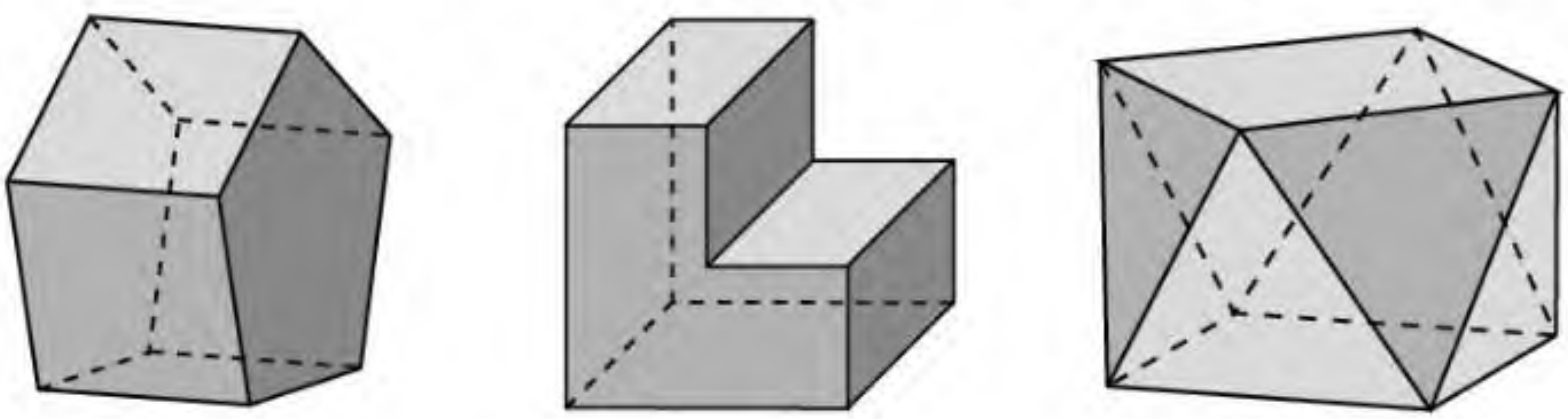
1.3. 1.10-сүрәттә тәсвирләнгән фигурилардиң қайсиси параллелепипед болиду?



а) ә) б)

1.10-сүрәт

1.4. 1.11-сүрәттә тәсвирләнгән фигурилардиң қайсиси призма болиду?



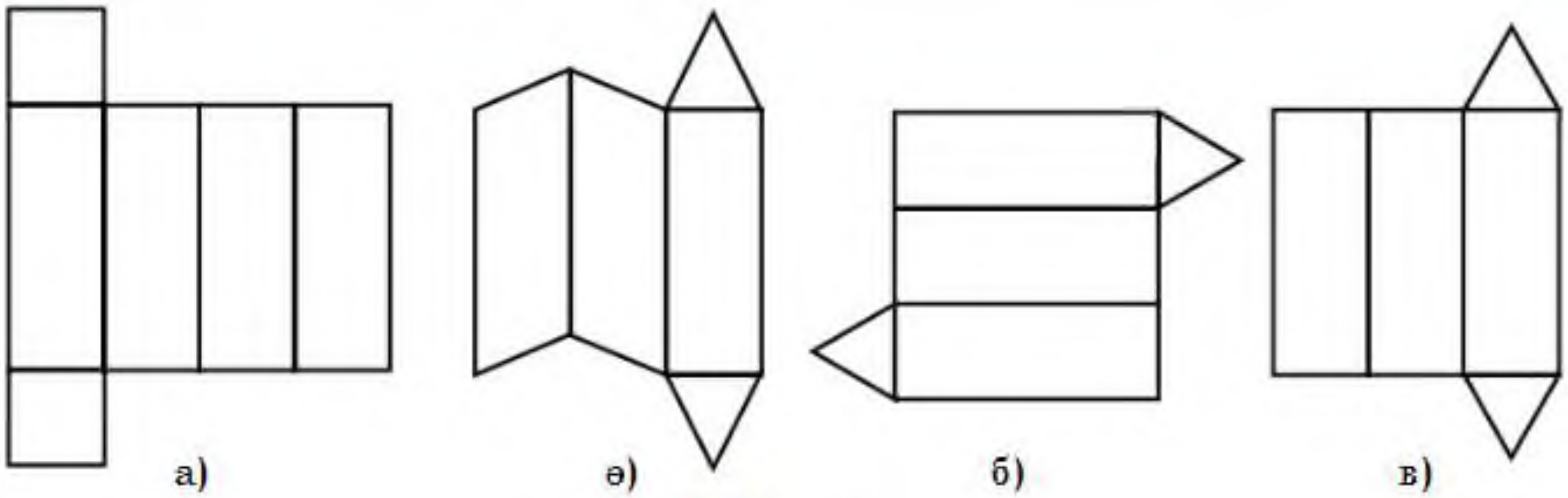
а) ә) б)

1.11-сүрәт

1.5. 1.12-сүрәттә тәсвирләнгән фигурилардиң қайсиси призминиң йейилмиси болиду? Мошу призминиң түрини ениқлаңлар.

1.6. Қири 1 см-ға тәң болған кубниң диагоналини тепиңлар.

1.7. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 2 см, 3 см вә 4 см-ға тәң. Параллелепипедниң диагоналини тепиңлар.



1.12-сүрәт

1.8. Призминиң ян қири 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30°
булуң ясайду. Призминиң егизлигини тепиңлар.

1.9. Әгәр кубниң барлиқ қирлирини 3 һәссә ашурса, у чағда униң толуқ бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

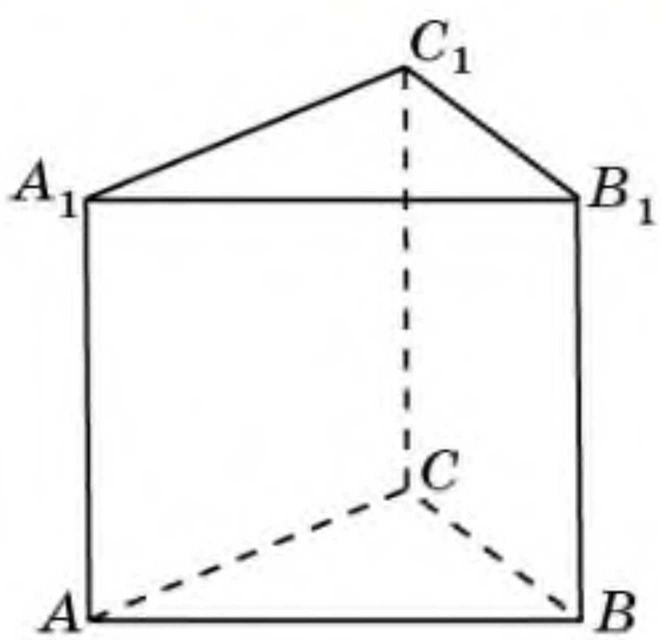
1.10. Әгәр тикбулуңлуқ параллелепипедниң барлиқ қирлирини 2 һәссә кемитсә, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә кемийду?

1.11. Әгәр призминиң барлиқ қирлирини 2 һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

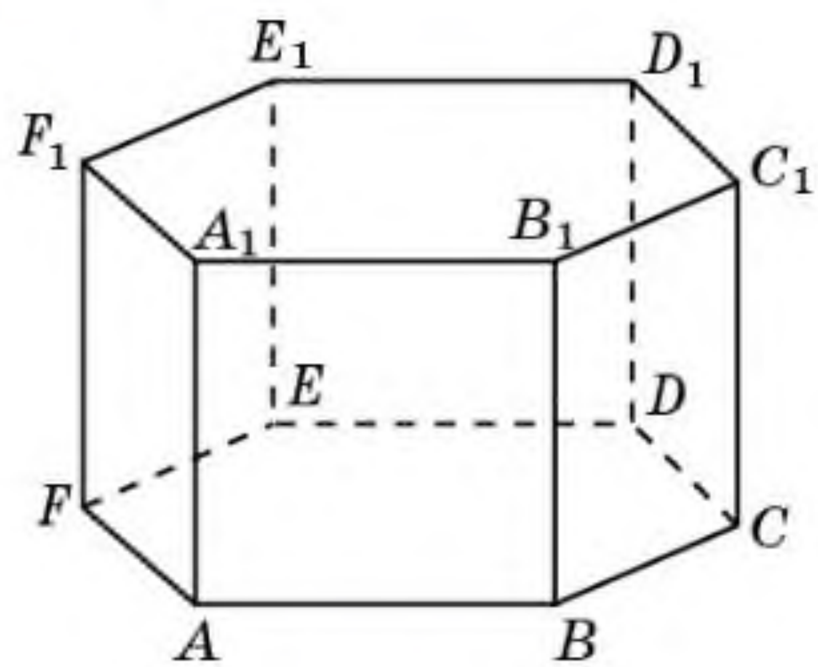
1.12. Бир чоққисидин чиқидиған қирлири 5 см, 4 см, 3 см болидиған тикбулуңлуқ параллелепипед бетиниң мәйданини тепиңлар.

1.13. Барлиқ қирлири 1 см-гә тәң болған дурус үчбулуңлуқ призма бетиниң мәйданини тепиңлар (1.13-сүрәт).

1.14. Барлиқ қирлири 1 см-гә тәң болған дурус алтәбулуңлуқ призма бетиниң мәйданини тепиңлар (1.14-сүрәт).



1.13-сүрәт



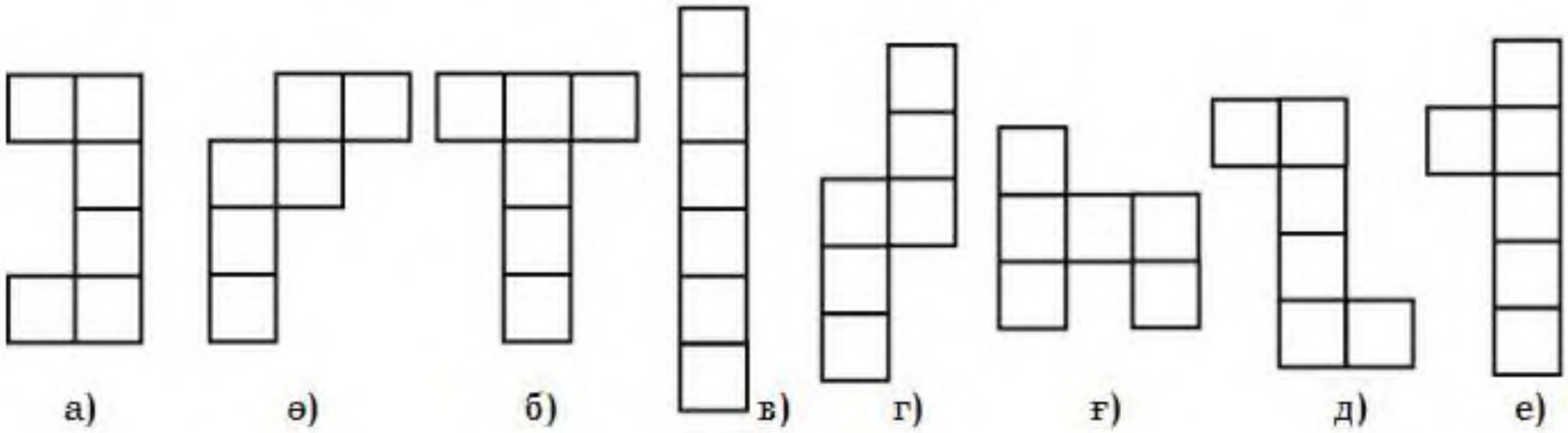
1.14-сүрәт

В

1.15. 1.15-сүрәттә тәсвирләнгән фигурилардиң қайсиси кубниң йейилмиси болиду?

1.16. Кубниң диагонали 1 см ға тәң. Кубниң қирини тепиңлар.

1.17. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң йейилмисини селиңлар.



а) ә) б) в) г) ғ) д) е)

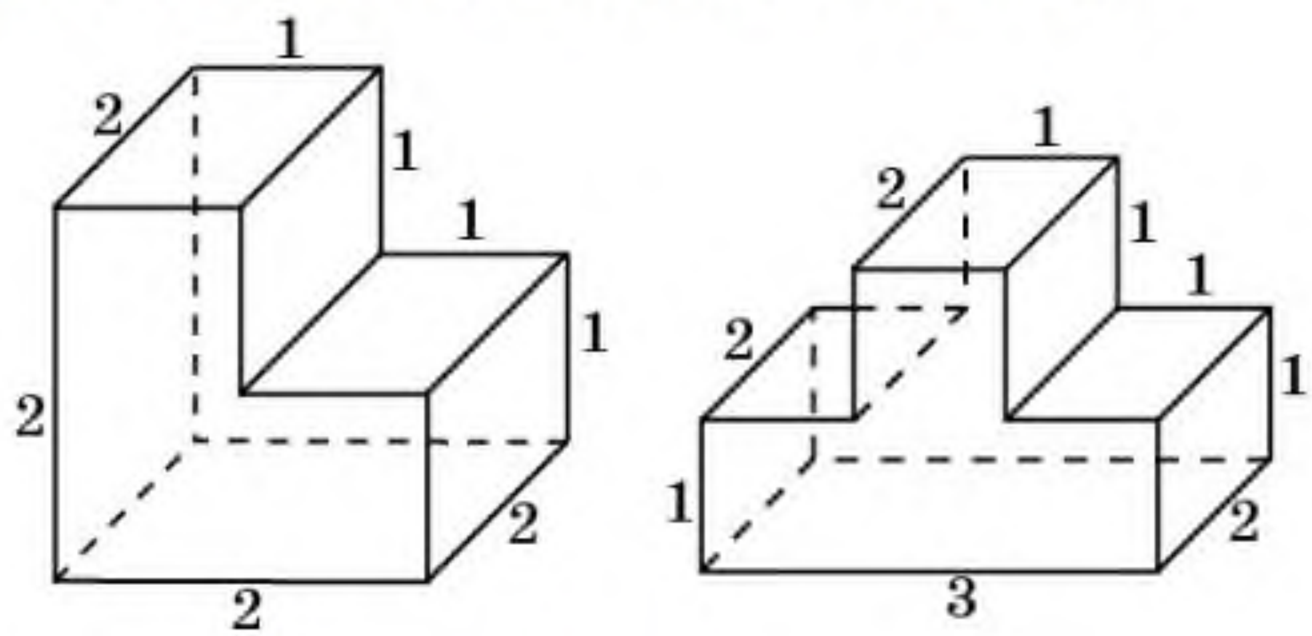
1.15-сүрәт

1.18. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Призминиң диагоналини тепиңлар.

1.19. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң асасиниң тәрипи 1 см, униң чоң диагонали болса 3 см-ға тәң. Призминиң егизлигини тепиңлар.

1.20. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см-ға тәң. Параллелепипед бетиниң мәйдани 40 см^2-ға тәң болуши үчүн мошу чоққисидин чиқидиған үчинчи қири қандақ болуши керәк?

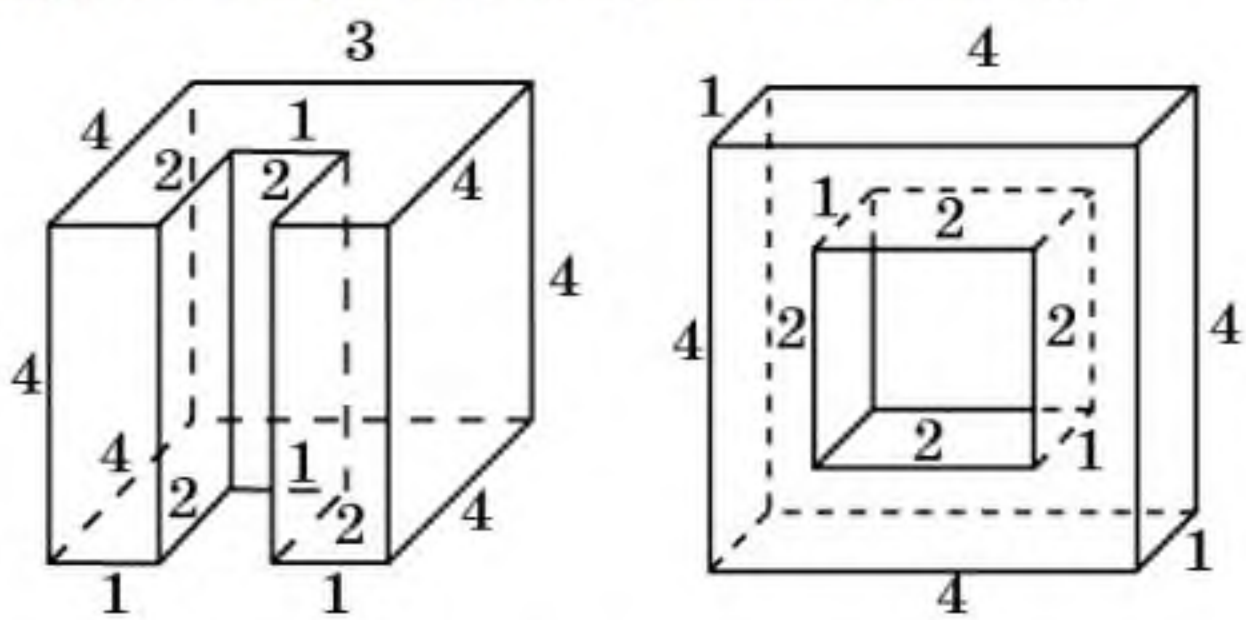
1.21. 1.16-сүрәттә берилгән тикбулуңлуқ параллелепипедлардин тәшкил тапқан фигура бәтлириниң мәйданини тепиңлар.



а) ә)

1.16-сүрәт

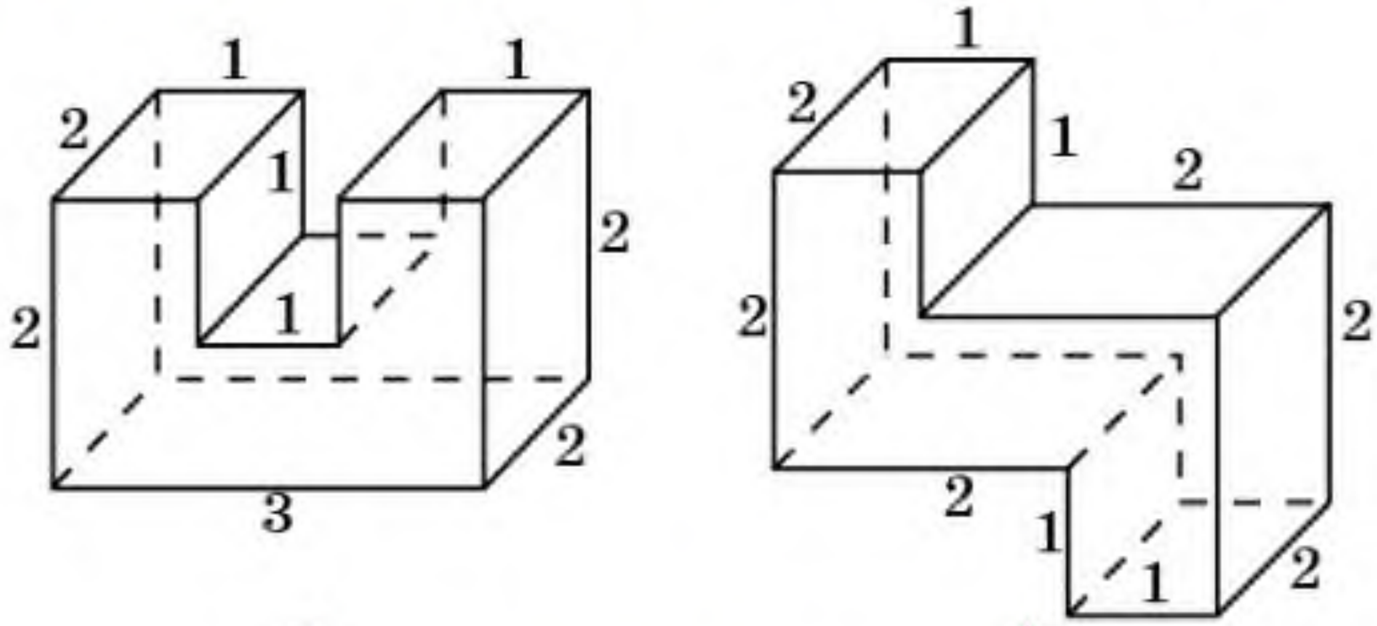
1.22. 1.17-сүрәттә берилгән тикбулуңлуқ параллелепипедлардин тәшкил тапқан фигура бәтлириниң мәйданини тепиңлар



а) ә)

1.17-сүрәт

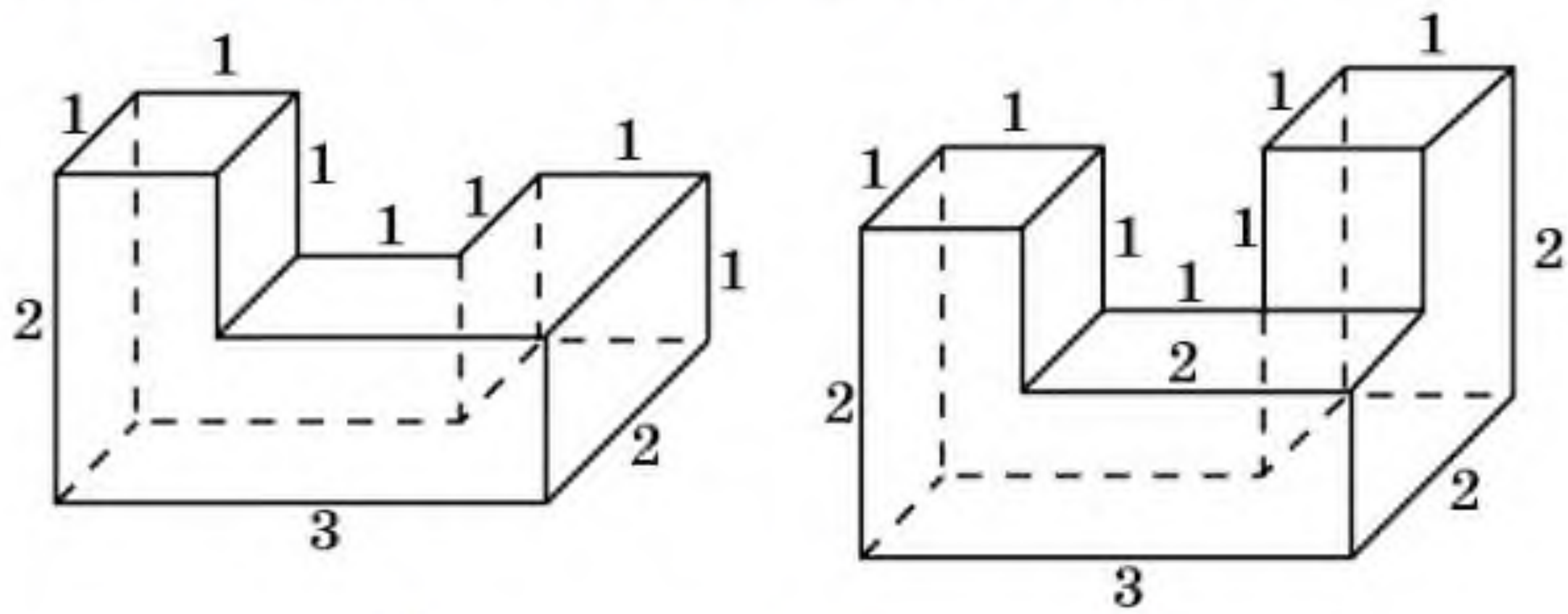
1.23. 1.18-сүрәттә берилгән тикбулуңлуқ параллелепипедлардин тәшкил тапқан фигура бәтлириниң мәйданини тепиңлар.



а) ә)

1.18-сүрәт

1.24. 1.19-сүрәттә берилгән тикбулуңлуқ параллелепипедлардин тәшкил тапқан фигура бәтлириниң мәйданини тепиңлар.

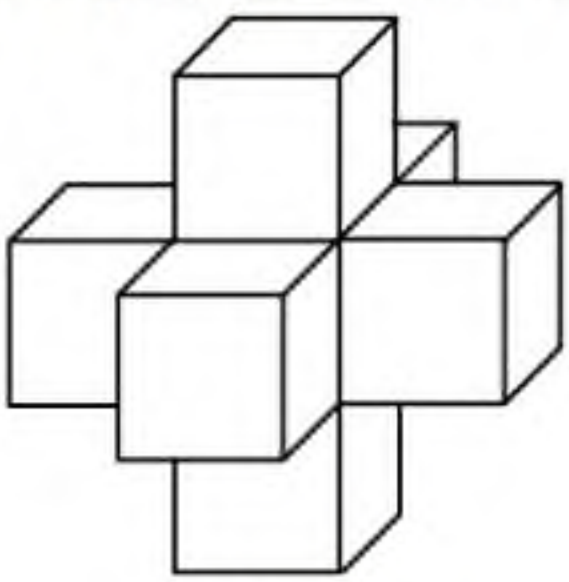


а) ә)

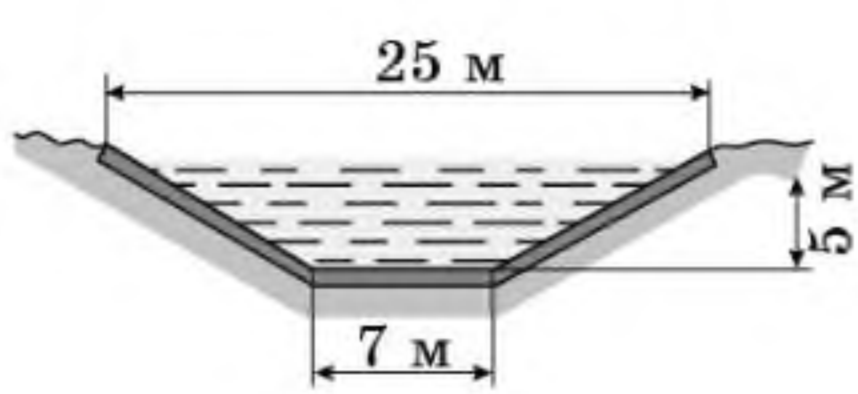
1.19-сүрәт

1.25. 1.20-сүрәттики бошлуқтики җисимни ясиғучи қирлири 1 см-ға тәң болған кублар дәп қараштуруп, җисимниң бетиниң мәйданини тепиңлар.

1.26. 1.21-сүрәттә су йоли каналиниң тоғра қийилмиси тәсвирләнгән. Каналниң төвәнки вә ян яқлири бетонланған. Каналниң һәр бир километрида бетонланған бәтниң мәйданини тепиңлар.



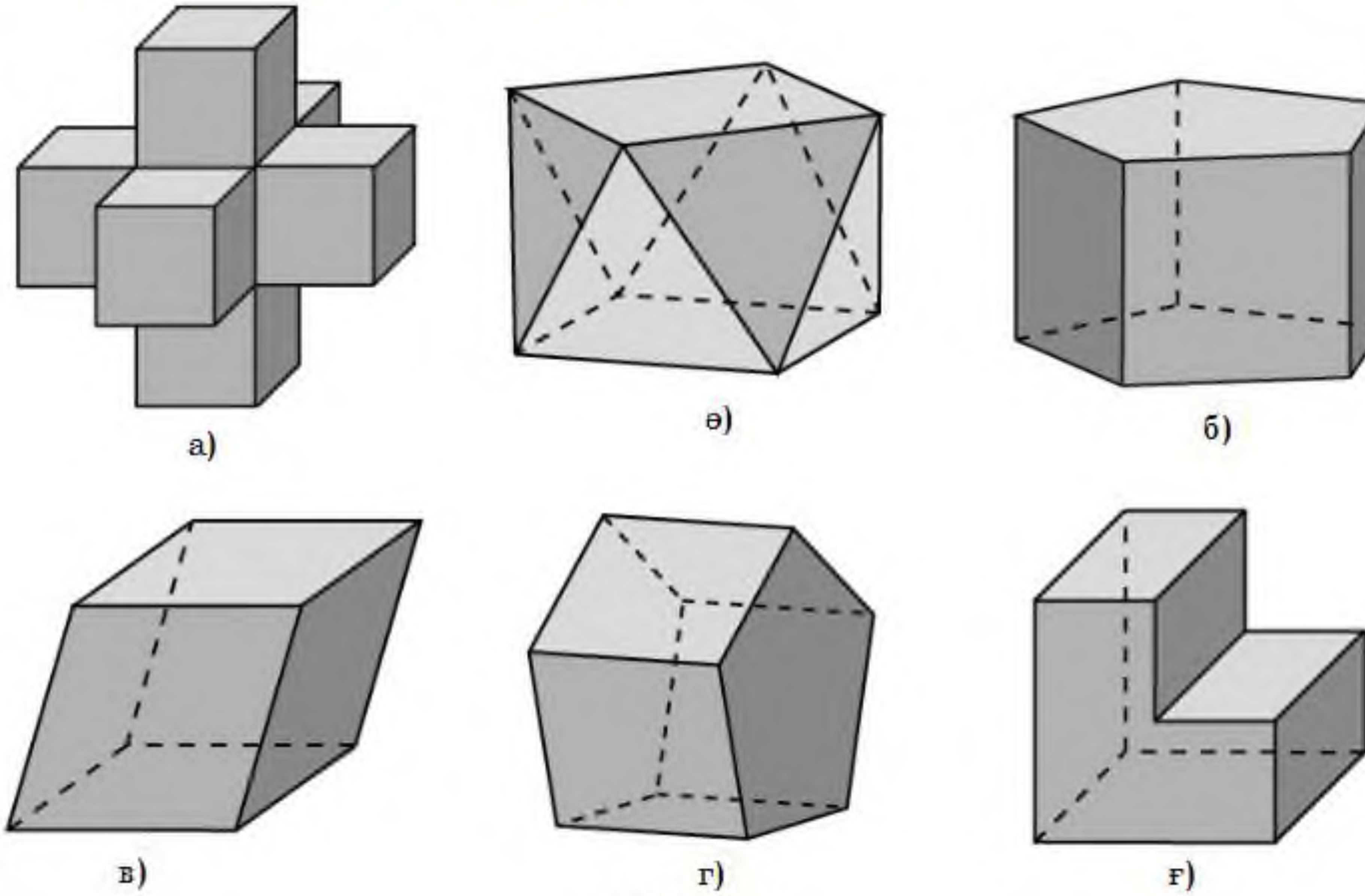
1.20-сүрәт



1.21-сүрәт

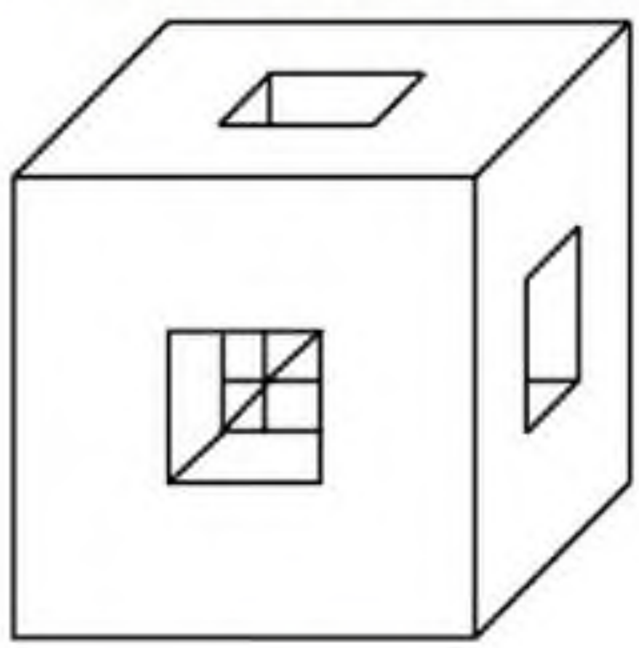
C

1.27. 1.22-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриларниң қайсиси томпақ вә томпақ әмәс көпяқлиқлар болиду?

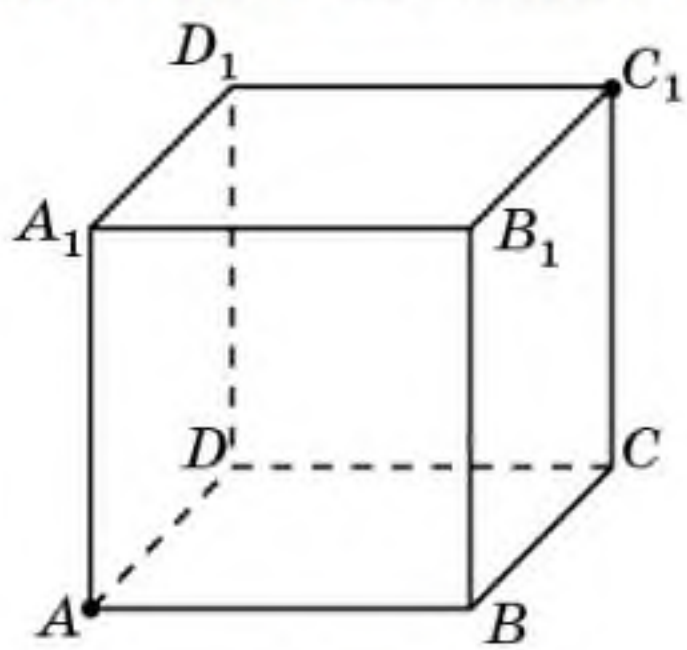


1.22-сүрәт

1.28. Қири 6 см-ға тәң болидиған кубниң һәрбир йеқидин квадрат шәклидә төшүкләр ясалди (1.23-сүрәт). Квадратниң тәрипи 2 см болса, кубниң қалған бөлигиниң бетиниң мәйданини тепиңлар.



1.23-сүрәт



1.24-сүрәт

1.29. Бирлик кубниң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә униң бетидики әң қисқа ариliқни тепиңлар (1.24-сүрәт).

1.30. Томпақ әмәс көпбулуңлуқ томпақ көпяқлиқниң бир йеқи боламду?

1.31. Томпақ фигурилар бириктүрүлсә, томпақ фигура пәйда боламду?

1.32. Барлиқ яқлири томпақ көпбулуңлуқ болидиған томпақ әмәс көпяқлиққа мисал кәлтүрүңлар.

1.33. “Пирамида” чүшәнчисини ениқлап көрүңлар. Униң бети қандақ көпбулуңлуқлардин туриду?

§ 2. Пирамида вә қийиқ пирамида. Пирамидиниң, қийиқ пирамидиниң йейилмиси, ян бети вә толуқ бетиниң мәйданлири

Пирамида дәп бир йеқи һәр қандақ көпбулуңлуқтин, қалған яқлири мошу көпбулуңлуқ тәкшилигидә ятмайдиған чоққилири умумий болған үчбулуңлуқлардин түзүлгән көпяқлиқни ейтиду.

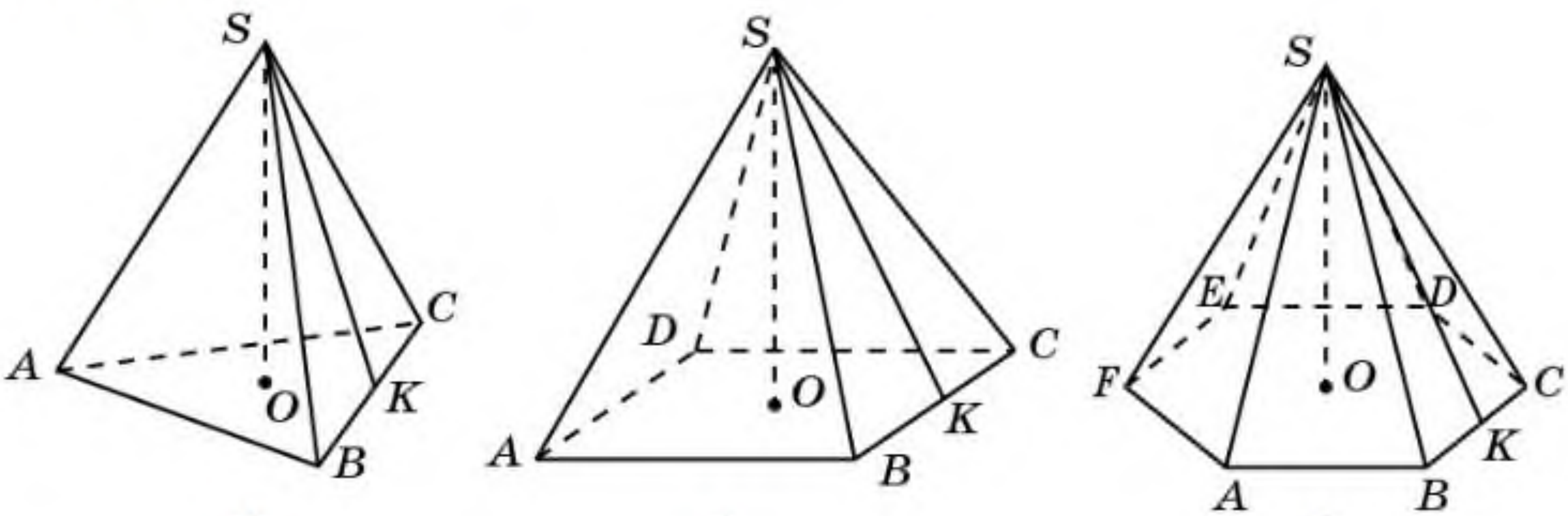
Көпбулуңлуқ пирамидиниң *асаси*, үчбулуңлуқлар болса пирамидиниң *ян яқлири* дәп атилиду.

Ян яқлириниң умумий чоққиси пирамидиниң *чоққиси*, чоққисидин чиқидиған қирлири пирамидиниң *ян қирлири* дәп атилиду.

Пирамидилар асасидики көпбулуңлуқларға (үчбулуңлуқ; төртбулуңлуқ; бәшбулуңлуқ вә ш.о.) бағлиқ мувапиқ үчбулуңлуқ; төртбулуңлуқ; бәшбулуңлуқ вә ш.о. пирамидилар дәп бөлүниду.

Әгәр пирамидиниң асаси n-булуңлуқ болса, у чағда *n-булуңлуқ пирамида* дәп атилиду.

2.1-сүрәттә үчбулуңлуқ, төртбулуңлуқ вә алтәбулуңлуқ пирамидилар тәсвирләнгән.



а) ә) б)

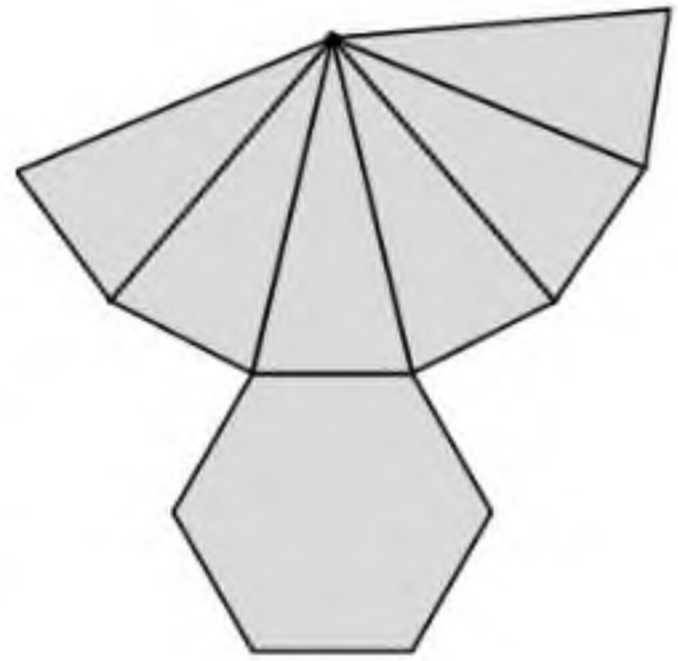
2.1-сүрәт

Пирамида униң чоққилири билән бәлгүлиниду мәсилән: $SABC$ үчбулуңлуқ пирамида (2.1, а-сүрәт), $SABCD$ төртбулуңлуқ пирамида (2.1, ә-сүрәт), $SABCDEF$ алтәбулуңлуқ пирамида (2.1, б-сүрәт). Биринчи умумий чоққиси йезилиду.

Асасида дурус көпбулуңлуқ ятидиған вә барлиқ ян қирлири өз ара тәң болидиған пирамида *дурус* дәп атилиду.

Дурус пирамидиниң чоққисидин жүргүзүлгән ян тәрипиниң егизлиги пирамидиниң *апофемиси* дәп атилиду.

Қандақ ойлайсиләр, тетраэдр үчбулуңлуқ пирамида боламду?



2.2-сүрәт

Пирамида чоққисидин униң асас тәкшилигигә жүргүзүлгән перпендикуляр *пирамидиниң егизлиги* дәп атилиду. 2.1-сүрәттә пирамидиниң SO егизлиги вә SK апофемиси тәсвирләнгән.

2.2-сүрәттә дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң йейилмиси тәсвирләнгән.

Пирамидиниң ян бети дәп мошу пирамидиниң барлиқ ян яқлиридин түзүлгән бәтни ейтиду. Шуңлашқа *пирамидиниң ян бетиниң мәйдани* униң барлиқ ян яқлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң.

Теорема. ***Дурус пирамидиниң ян бетиниң мәйдани униң асасиниң йерим периметри билән апофемисиниң көпәйтиндисигә тәң:***

$$S_{\text{ян бети}} = \frac{1}{2}Pl,$$

бу йәрдә l — пирамидиниң апофемиси, P — асасиниң периметри.

Бу теоремини өзәңлар испатлаңлар.

Пирамидиниң толуқ бетиниң мәйдани униң ян бети билән асасиниң мәйданлириниң қошундисиға тәң, йәни төвәндики формула билән һесаплиниду:

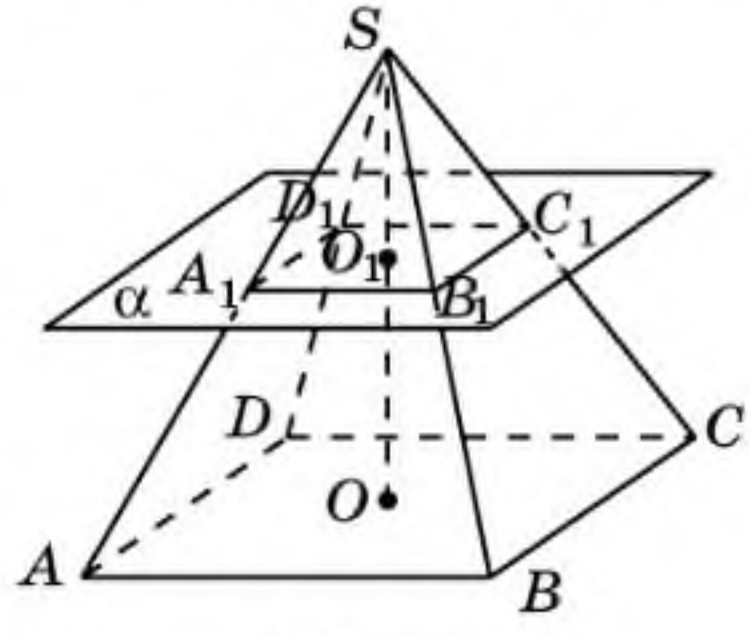
$$S_{\text{пирамида}} = S_{\text{ян бети}} + S_{\text{асаси}}.$$

Пирамидиниң асасиға параллель вә ян қирлирини қийип өтүдиған тәкшиликни қараштурайли. Мошу тәкшилик билән асас тәкшилигиниң арисидики пирамидиниң чәкләнгән бөлиги *қийиқ пирамида* дәп атилиду (2.3-сүрәт).

Берилгән пирамидиниң асаси вә пирамидиниң тәкшилик билән қийилмисидин һасил болған көпбулуңлуқ *қийиқ пирамидиниң асаслири* дәп атилиду.

Қийиқ пирамида униң асаслириниң чоққилири билән бәлгүлиниду, мәсилән 2.3-сүрәттә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қийиқ пирамидиси тәсвирләнгән

Қийиқ пирамидиниң асаслириниң тәрәплири жүп-жүпи билән параллель, демәк *қийиқ пирамидиниң ян яқлири* трапециялар болиду. Ян яқлиридин түзүлгән бәт *қийиқ пирамидиниң ян бети* дәп атилиду.

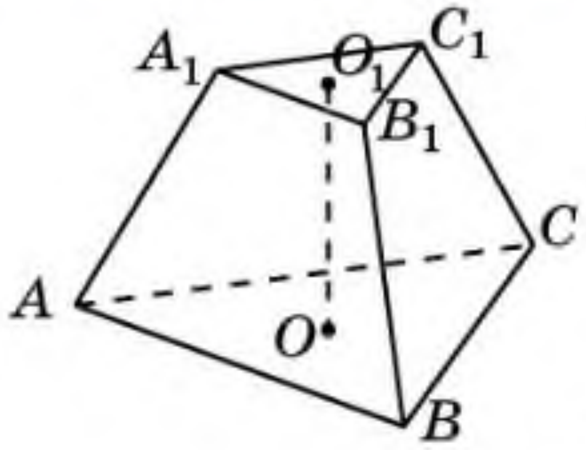


2.3-сүрәт

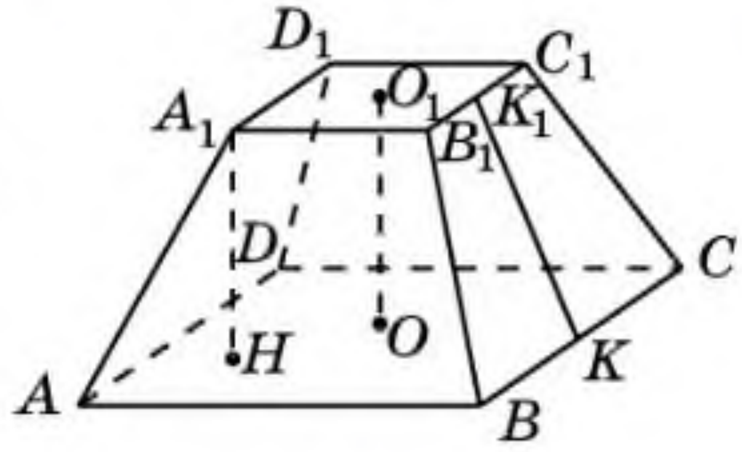
Қийиқ пирамида ян яқлириниң умумий қирлири униң *ян қирлири* дәп атилиду.

Қийиқ пирамида асасидики көпбулуңлуқларға (үчбулуңлуқлар, төртбулуңлуқлар, бәшбулуңлуқлар вә ш.о.) бағлиқ мувапиқ үчбулуңлуқ, төртбулуңлуқ, бәшбулуңлуқ вә ш.о. болуп бөлүниду.

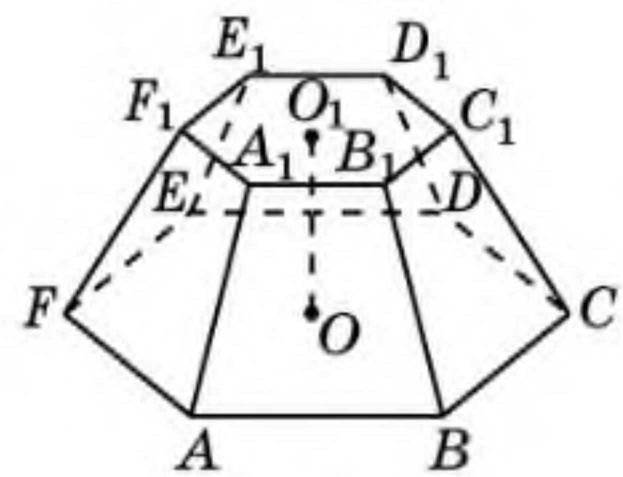
2.4-сүрәттә үчбулуңлуқ қийиқ пирамида (2.4, а-сүрәт), төртбулуңлуқ қийиқ пирамида (2.4, ә-сүрәт) вә алтәбулуңлуқ қийиқ пирамида (2.4, б-сүрәт) тәсвирләнгән.



а)



ә)



б)

2.4-сүрәт

Дурус пирамидидин елинған қийиқ пирамида *дурус дәп атилиду.*

Ян йеқиниң егизлиги дурус қийиқ пирамидиниң *апофемиси* дәп атилиду.

Бир асасиниң һәр қандақ чекитидин иккинчи асасиға жүргүзүлгән перпендикуляр *қийиқ пирамидиниң егизлиги* дәп атилиду. 2.4, ә-сүрәттә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қийиқ пирамидисиниң A_1H егизлиги вә KK_1 апофемиси тәсвирләнгән.

Қийиқ пирамидиниң йейилмиси икки охшаш көпбулуңлуқтин (қийиқ пирамидиниң асаслири) вә трапецияләрдин (қийиқ пирамидиниң ян яқлири) тәшкил тапқан.

Қийиқ пирамидиниң ян бети дәп мошу қийиқ пирамидиниң барлиқ ян бәтлиридин түзүлгән бәтни ейтиду. Демәк, *қийиқ пирамидиниң ян бетиниң мәйдани* униң барлиқ ян бәтлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң.

Теорема. ***Дурус қийиқ пирамидиниң ян бетиниң мәйдани униң асаслири периметрлириниң қошундисиниң йерими билән апофемисиниң көпәйтиндисигә тәң болиду:***

$$S_{\text{ян бети}} = \frac{1}{2}(P + P_1)l,$$

бу йәрдә P вә P_1 — қийиқ пирамида асаслириниң периметрлири, l — апофемиси.

Бу теоремини өзәңлар испатлаңлар.

Қийиқ пирамидиниң толуқ бетиниң мәйдани униң ян бети билән асаслириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду, йәни төвәндә берилгән формула билән һесаплиниду:

$$S_{\text{қийиқ пирамида}} = S_{\text{ян бети}} + S_{\text{асаси}_1} + S_{\text{асаси}_2}.$$

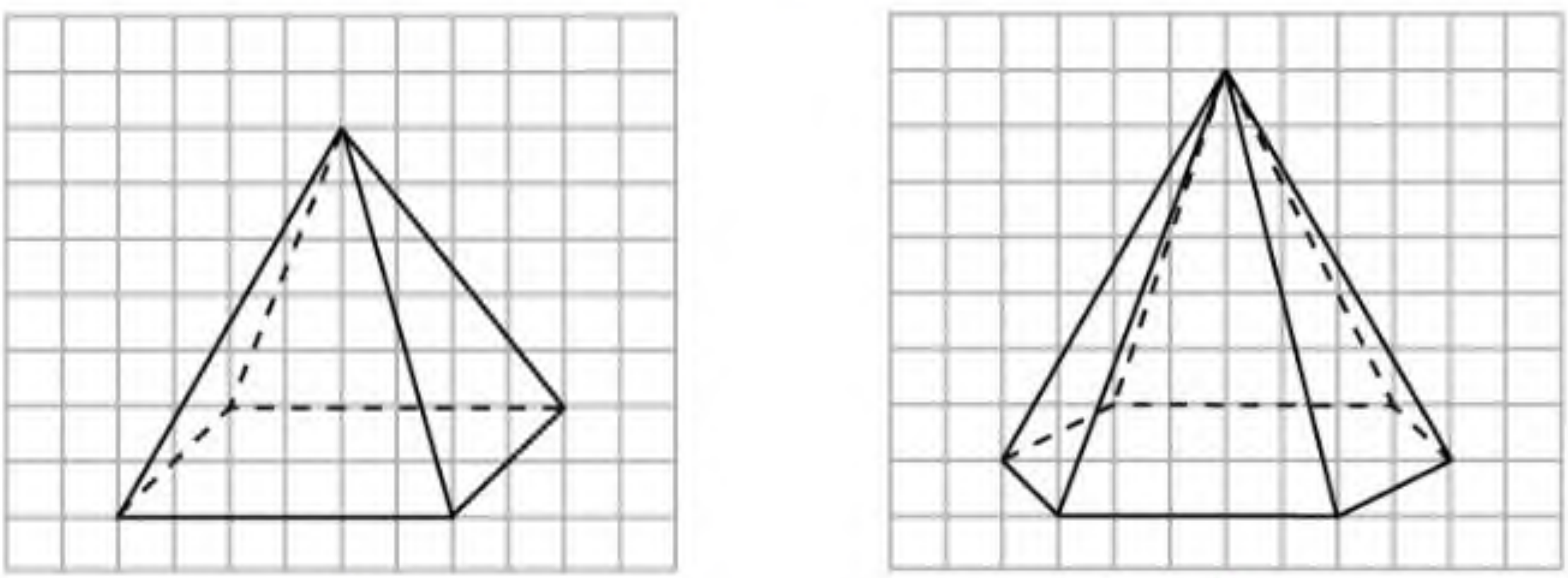
Соаллар

1. Қандақ көпяқлиқ пирамида дәп атилиду?
2. Қандақ пирамида дурус дәп атилиду?
3. Пирамидиниң егизлиги дегинимиз немә?
4. Қандақ көпяқлиқ қийиқ пирамида дәп атилиду?
5. Қандақ қийиқ пирамида дурус дәп атилиду?
6. Қийиқ пирамидиниң егизлиги дегинимиз немә?
7. Пирамида бетиниң мәйдани қандақ һесаплиниду?
8. Қийиқ пирамида бетиниң мәйдани қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

А

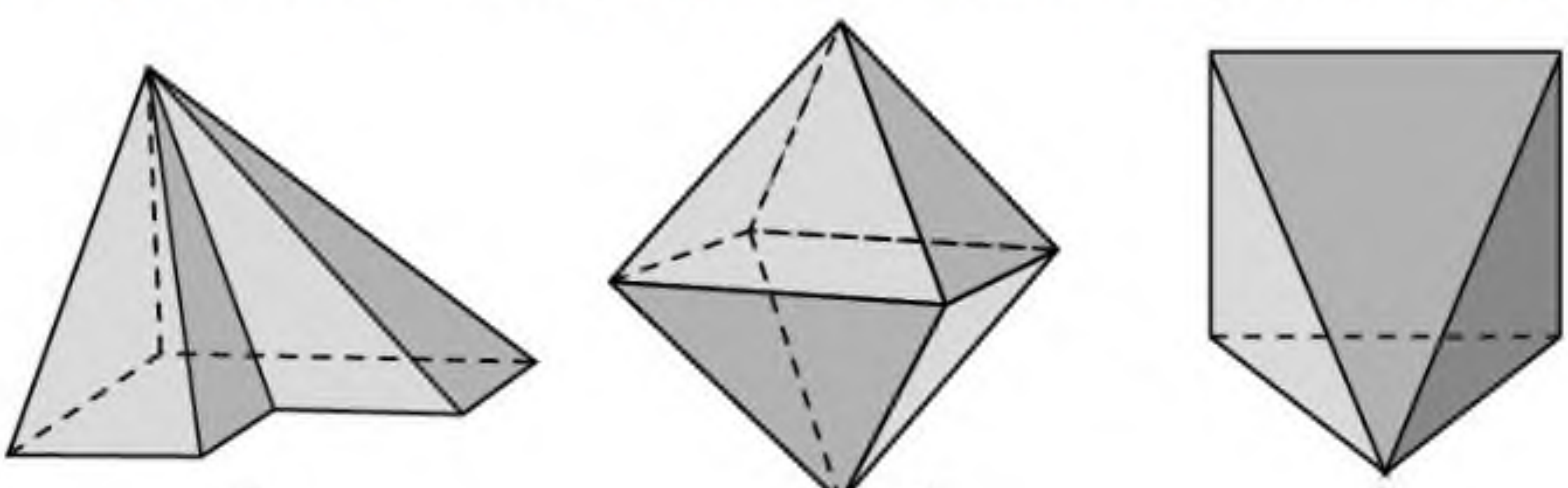
2.1. Чақмақ қәғәзгә 2.5-сүрәттә берилгән пирамидиларни селиңлар вә уларниң егизлигини жүргүзүңлар.



а) ә)

2.5-сүрәт

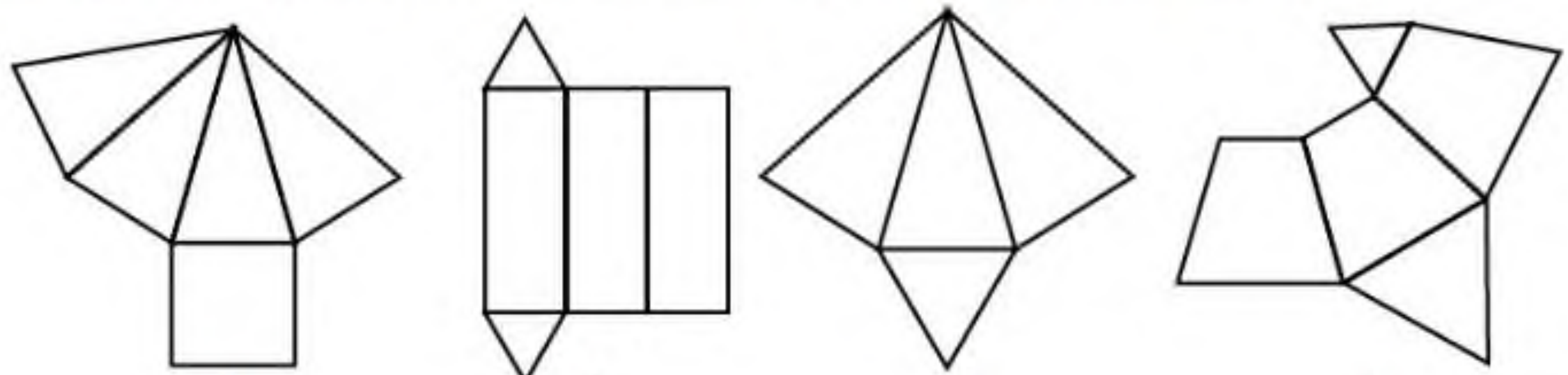
2.2. 2.6-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриларниң қайсиси пирамида болиду?



а) ә) б)

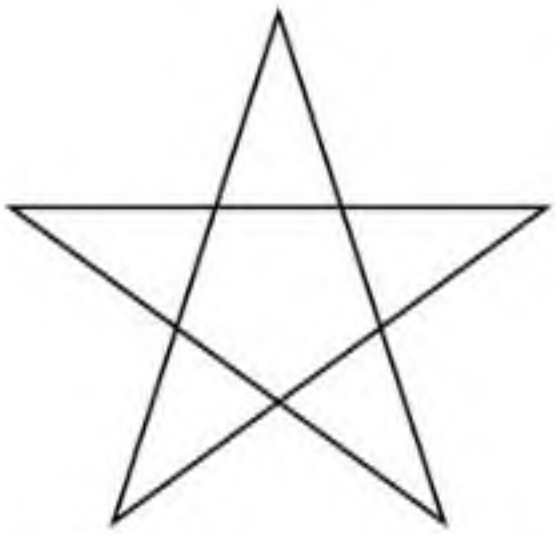
2.6-сүрәт

2.3. 2.7-сүрәттә тәсвирләнгән фигурилардиң қайсиси пирамидиниң йейилмилири болиду? Уларниң түрлирини ениқлаңлар.



а) ә) б) в)

2.7-сүрәт



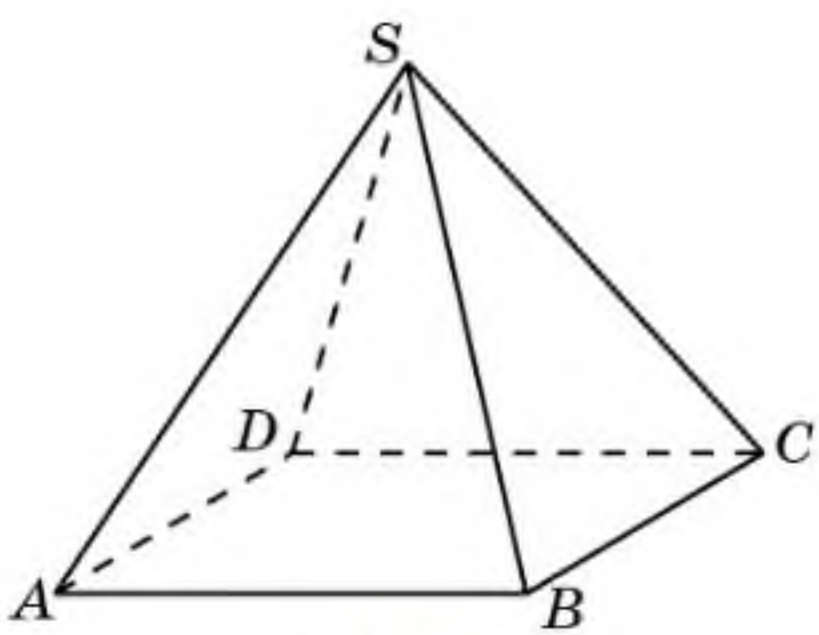
2.8-сүрәт

2.4. 2.8-сүрәттә тәсвирләнгән фигура қайси көпяқлиқниң йейилмиси болиду?

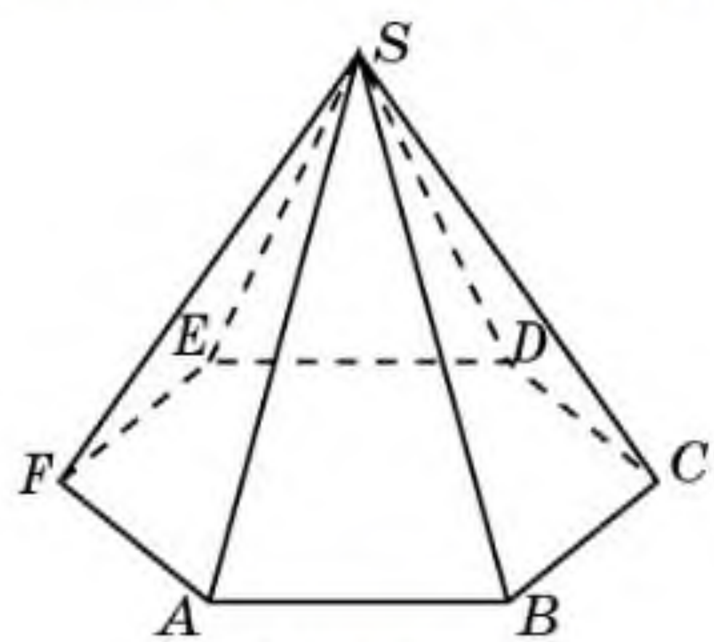
2.5. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң йейилмисини селиңлар.

2.6. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң болса, пирамидиниң егизлигини тепиңлар.

2.7. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Пирамидиниң толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар (2.9-сүрәт).



2.9-сүрәт



2.10-сүрәт

2.8. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрипи 1 см-ға, ян қирлири болса 2 см-ға тәң. Пирамидиниң толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар (2.10-сүрәт).

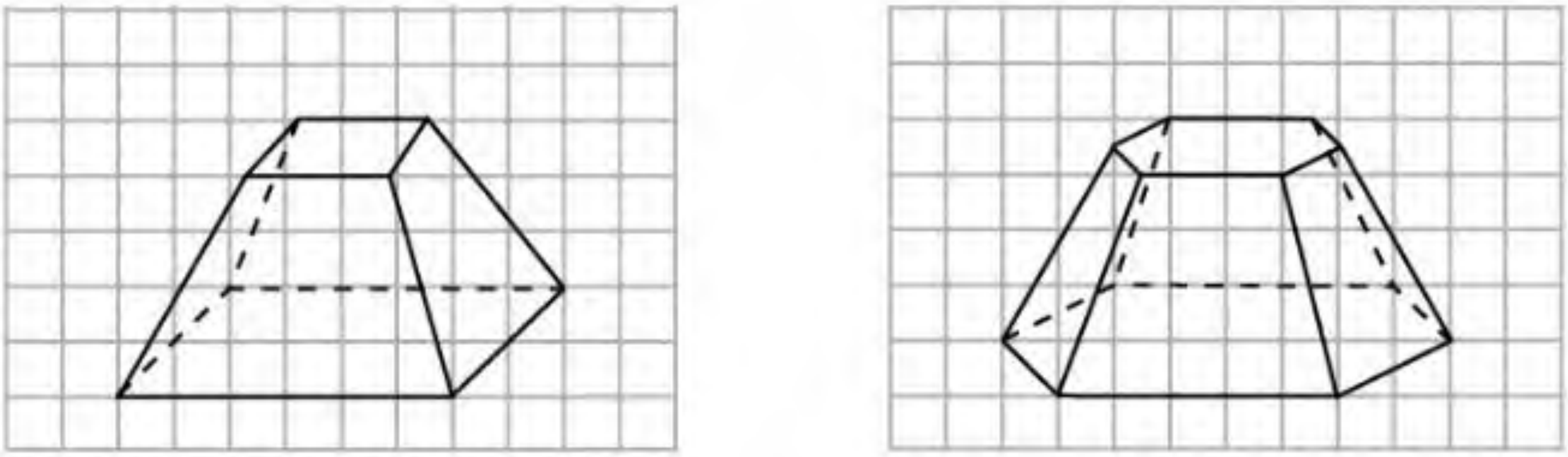
B

2.9. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрипи 1 см-ға, ян қирлири болса 2 см-ға тәң. Пирамидиниң егизлигини тепиңлар.

2.10. Әгәр пирамидиниң барлиқ қирлирини 2 һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани қанчә һәссә ашиду?

2.11. Әгәр пирамидиниң барлиқ қирлирини 3 һәссә кемитсә, у чағда униң бетиниң мәйдани қанчә һәссә кемийду?

2.12. Чақмақ қәғәзгә 2.11-сүрәттики охшаш қийиқ пирамидиларни селиңлар.



а) ә)

2.11-сүрәт

2.13. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң йейилмисини селиңлар.

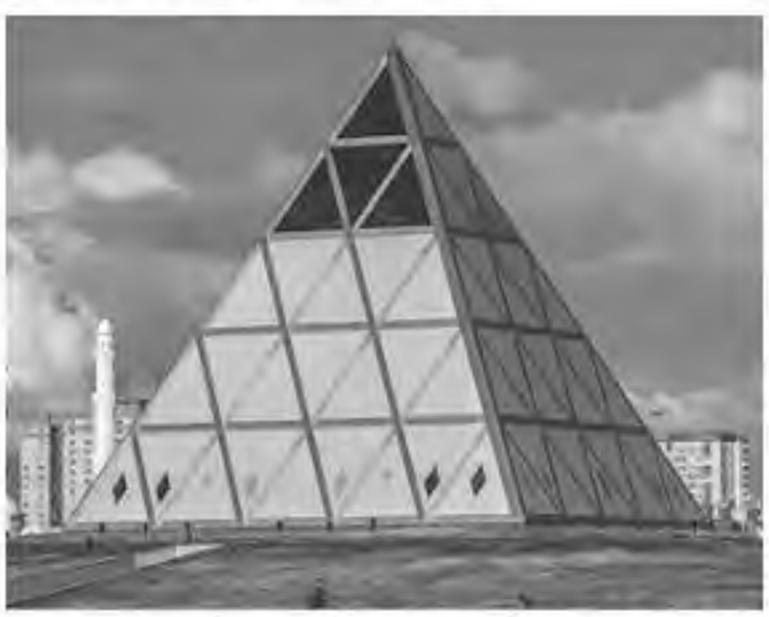
С

2.14. Дурус алтәбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң йейилмисини селиңлар.

2.15. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң асаслириниң тәрәплири 4 см вә 2 см-ға, ян қирлири 3 см-ға тәң. Пирамидиниң егизлигини тепиңлар.

2.16. Дурус алтәбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң асаслириниң тәрәплири 2 см вә 1 см-ға, егизлиги болса 3 см-ға тәң. Пирамидиниң ян қирини тепиңлар.

2.17. Нур-Султан шәһиридики Течлиқ вә разимәнлик сарийи дурус төртбулуңлуқ пирамида шәклидә (2.12-сүрәт). Униң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 62 м-ға тәң. Пирамидиниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

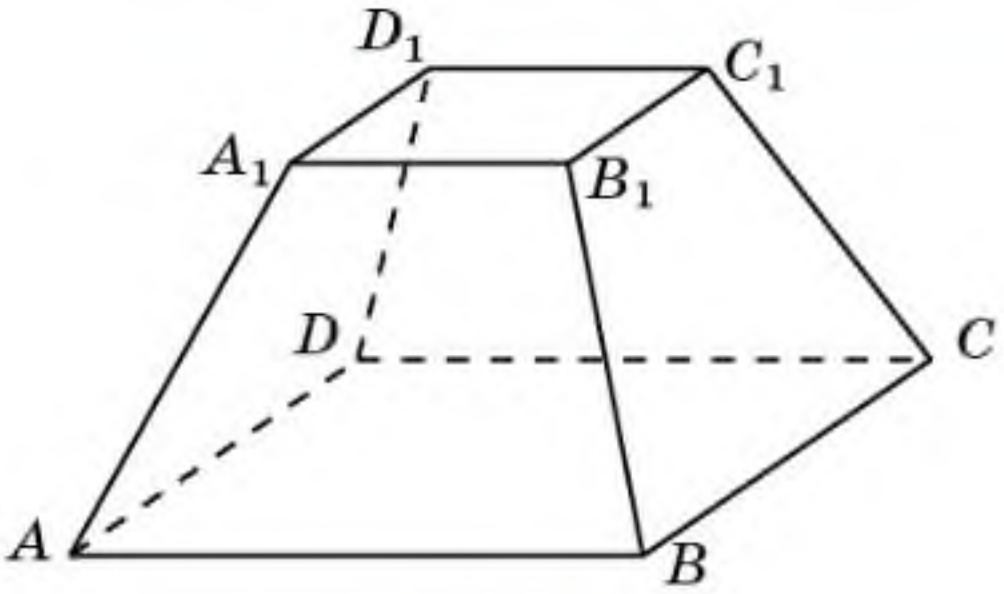


2.12-сүрәт

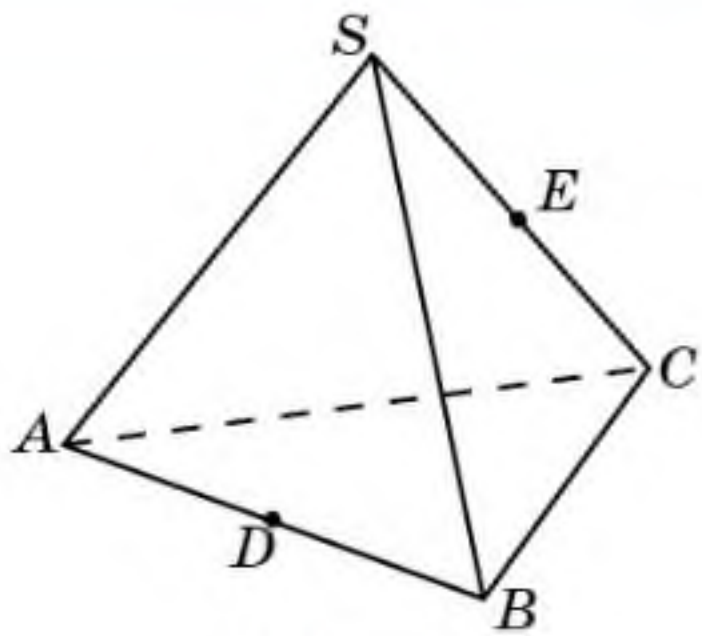
2.13-сүрәт

2.18. Қедимий Мисирдики әң чоң имарәтләрниң бири Хеопс пирамидиси — дурус төртбулуңлуқ пирамида. Униң егизлиги тәхминән 140 м-ға, асасиниң мәйдани 5,3 га-ға тәң (2.13-сүрәт). Мошу пирамидиниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

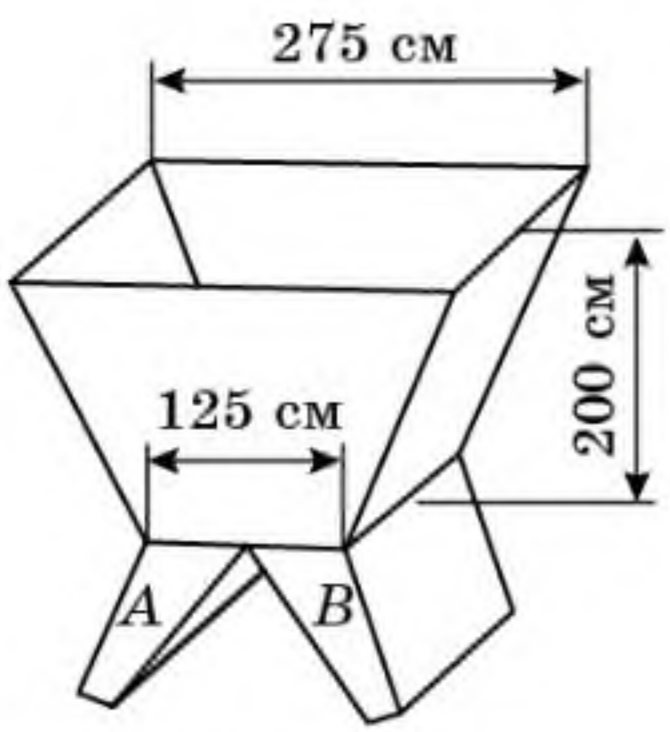
2.19. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң асаслириниң тәрәплири 1 см вә 2 см-ға, ян қирлири 1 см-ға тәң. Пирамидиниң толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар (2.14-сүрәт).



2.14-сүрәт



2.15-сүрәт



2.16-сүрәт

2.20. *SABC* дурус пирамидисиниң *AB* вә *SC* қирлириниң оттурилирини қошидиған пирамида бетидики әң қисқа ариликни тепиңлар (2.15-сүрәт).

2.21. 2.16-сүрәттә дан сақлинидиған бункер тәсвирләнгән. Униң асасий бөлигиниң бетини дурус төртбулуңлук кийиқ пирамидиниң ян бети түзәйду. Сүрәттә көрситилгән өлчәмлири бойичә бункерни ясаш үчүн қанчә квадрат дециметр қәләй керәк? (*A* вә *B* бөләклирини һесапқа алмиғанда).

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

2.22. 1) Параллелепипед; 2) призма; 3) пирамида чоққилириниң (Ч), қирлириниң (Қ) вә яқлириниң (Я) сани үчүн Ч – Қ + Я = 2 тәңлиги орунлуқ болидиғанлиғини тәкшүрүңлар.

§ 3*. Эйлер теоремиси

Бизгә бәлгүлүк көпяқлиқларни қараштуруп, уларниң чоққилирини (Ч), қирлирини (Қ), яқлирини болса (Я) сани бойичә җәдвәл толтуримиз.

1-җәдвәл

Көпяқлиқниң нами	Ч	Қ	Я
Параллелепипед	8	12	6
Үчбулуңлуқ пирамида	4	6	4
Төртбулуңлуқ пирамида	5	8	5
Үчбулуңлуқ призма	6	9	5

Давами

Төртбулуңлуқ призма	8	12	6
n-булуңлуқ пирамида	$n + 1$	$2n$	$n + 1$
n-булуңлуқ призма	$2n$	$3n$	$n + 2$

Мошу жәдвәлдә қараштурулған барлиқ көпяқлиқлар үчүн: Ч – Қ + Я = 2 тәңлиги орунлуқ екәнлигини көримиз. Бу тәңлик қараштурулған көпяқлиқлар үчүнла әмәс, һәр қандақ томпақ көпяқлиқлар үчүнму орунлуқ болиду.

Томпақ көпяқлиқларниң мошу хусусийитини дәсләп 1752-жили Леонард Эйлер испатлиған вә Эйлер теоремиси дегән нам берилгән.

Эйлер теоремиси: ***Һәр қандақ томпақ көпяқлиқлар үчүн:***

$$\text{Ч} - \text{Қ} + \text{Я} = 2$$

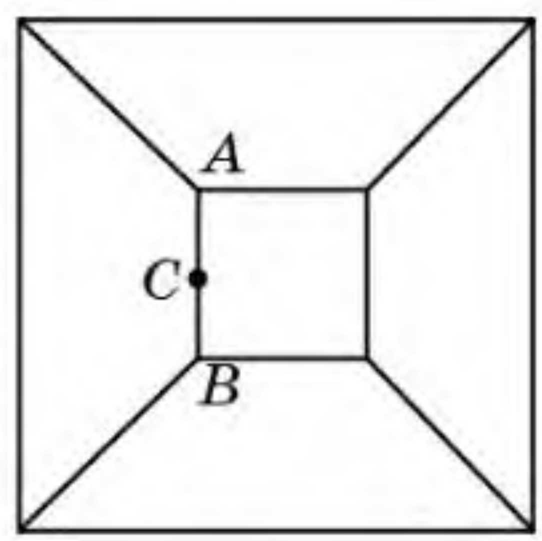
тәңлиги орунлуқ болиду.

Бу йәрдә Ч — берилгән көпяқлиқниң чоққилириниң сани, Қ — қирлириниң сани, Я — яқлириниң сани.

Испатлиниши. Көпяқлиқ моделиниң бетини қараштурайли. Униң бир йеқини кесип, қалған бетини тәкшиликкә яйимиз. Буниңдин Ч чоққилири, Қ қирлиридин туридиған сизмини вә сизминиң тәкшиликни бөлидиған Я яқлирини алимиз.

Әгәр сизмидики икки чоққиси бар қандақту бир қирини униң чоққилириниң биригә мошу қириниң бойи билән жиғип чиқсақ, у чағда сизмидики Ч – Қ + Я мәнасиниң өзгәрмәйдиғинини испатлайли.

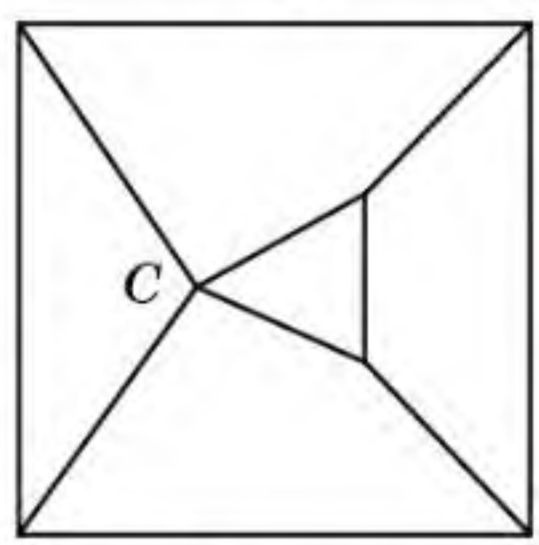
Мисал ретидә 3.1-сүрәттики кубниң сизмисини қараштурайли. Бу йәрдә Ч = 8, Қ = 12, Я = 6 болиду.



3.1-сүрәт

AB қирини *C* чекитигә қисип жиққанда 3.2-сүрәттикигә охшаш сизма елиниду. Нәтижидә Ч чоққилириниң сани биргә азийиду. Қ қирлириниңму сани биргә азийиду, Я яқлириниң сани өзгәрмәйду. Демәк Ч – Қ + Я мәнаси өзгәрмәйду.

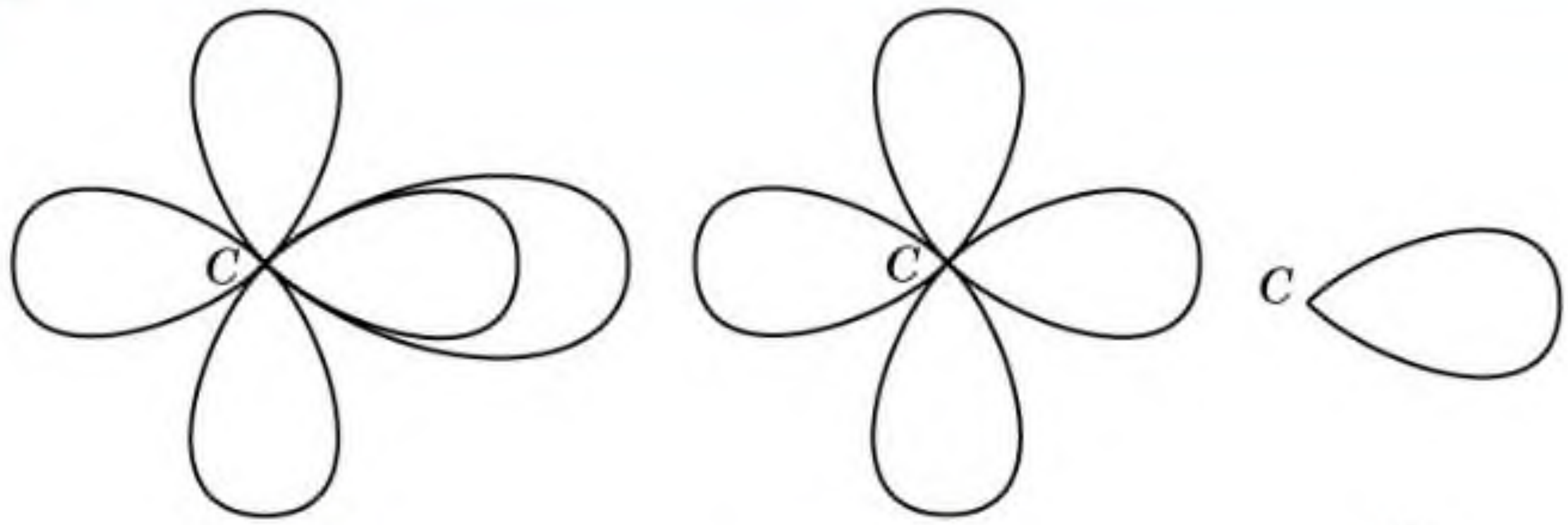
Мошу хусусийәтлирини пайдилинип, икки чоққиси бар барлиқ қирлирини жиғип чиқимиз. Буниңдин бир чоққиси бар, қирлири болса мошу чоққиси билән илмәклири болидиған 3.3, а-сүрәттики сизмини алимиз.



3.2-сүрәт

Бу сизмидиму Ч – Қ + Я мәнаси өзгиришсиз дәсләпки мәнасида қалидиғинини көрүшкә болиду.

Әнди әгәр һасил болған сизмидики қандақту бир илмәкни елип ташлисақ, Ч – Қ + Я мәнасиниң өзгәрмәйдиғанлиғини испатлайли.



3.3-сүрәт

Һәқиқәтәнму бу һаләттә Ч чоққилириниң сани өзгәрмәйду, у 1 гә тәң. Қ қирлириниң саниму, Я яқлириниң саниму 1 гә кемийду. (3.3, ә-сүрәт). Демәк, Ч − Қ + Я мәнасиму өзгәрмәйдиған болиду.

Мошу хусусийәтләрни пайдилинип, бирдин башқа барлиқ илмәкләрни елип ташлаймиз. Буниңдин бир чоққиси вә бир қири (чоққиси билән илмиги) бар сизмини алимиз. (3.3, б-сүрәт). Бу сизма үчүн Ч = 1, Қ = 1, Я = 2, йәни Ч − Қ + Я = 2 болиду. Демәк, бу тәңлимә дәсләпки көпяқлиқ үчүн орунлуқ болуп һесаплиниду. ◻

Эйлер теоремисини пайдилинип, томпақ көпяқлиқниң чоққилири (Ч), қирлири (Қ) вә яқлириниң (Я) санини тепишқа мисаллар кәлтүрәйли.

Мисал. Томпақ көпяқлиқниң һәрбир чоққисида бәш үчбулуңлуқ жиғилиду. Мошу томпақ көпяқлиқниң чоққилириниң (Ч), қирлириниң (Қ) вә яқлириниң (Я) санини тепиңлар.

Йешилиши: Берилгән көпяқлиқниң һәр бир чоққисида бәш қири жиғилиду. Һәр бир қириниң икки чоққиси болғанлиқтин, 5Ч = 2Қ тәңлиги орунлиниду.

Буниңдин $Ч = \frac{2Қ}{5}$. Бу көпяқлиқниң яқлири пәқәт үчбулуңлуқлар, һәр бир үчбулуңлуқниң үч қири болғанлиқтан, 3Я = 2Қ тәңлиги орунлиниду. Демәк $Я = \frac{2Қ}{3}$. Ениқланаған Ч вә Я мәналирини Эйлер тәңлигигә қоюп, төвәндики тәңлимини алимиз:

$$\frac{2Қ}{5} - Қ + \frac{2Қ}{3} = 2.$$

Мошу тәңлимини йешип, көпяқлиқниң қирлириниң (Қ) санини тапимиз, йәни Қ = 30. Бу мәнани Ч вә Я ипадилиригә қоюш арқилиқ, көпяқлиқниң чоққилири билән яқлириниң санлирини тапимиз; Ч = 12, Я = 20.

Тарихий мәлуматлар

Леонард Эйлер (1707—1783-жж.) — дунияға мәшһур швейцария математиги. Униң әмгәклири математикиниң заманивий бөлүмлириниң тәрәққий етишигә түрткә болди.

Алимниң илмий мираси көп. Һазирқи заманда униң 800 дин ошуқ әмгәклири мәлум. Һаятиниң ахирқи 12 жилида Эйлер ағриқ сәвәвидин көрүш қабилийитидин айрилиду, бирақ ағриғиға қаримастин ишини давамлаштуруп, көплигән нәтижиләргә еришиду. Статистикилиқ һесаплашлар бойичә, Эйлер һәптисигә оттура һесапта бир йеңилиқ ечип олтарған.

Эйлер әмгәклиридә тәтқиқат қилинмиған математикилиқ мәсилиләрни тепиш қийин. Кейинки әвладниң математиклири Эйлердин билим алған. Атақлиқ француз алими П.С.Лаплас: "Эйлерни оқуңлар, у һәммимизниң устази", — дәгән.

Математика тарихчилири Эйлер теоремисини *топологияниң дәсләпки теоремиси* дәп атиған. Топология — үзлүксиз деформация вақтида өзгәрмәйдиған, үзүлүшсиз яки қошумчә чаплашсиз созулидиған вә қисилидиған фигуриларниң хусусийитини тәтқиқ қилидиған геометрияниң бөлүми. Мундақ хусусийәтләр *топологиялиқ* дәп атилиду.

Томпақ көпяқлиқлар үчүн Ч – Қ + Я = 2 Эйлер нисбити мошу топологиялиқ хусусийәтни тәриплэйду. Көпяқлиқни деформациялэшкә болиду, униң қирлири билән яқлири әгилиши мүмкин, бирақ уларниң сани, йәни Эйлер нисбити өзгәрмәйду.

Эйлер нисбитини испатлаш вақтида биз деформациялэшни қоллан-дуқ, йәни көпяқлиқниң бир йеқини кесип, тәкшиликкә яйған едуқ. Қирлири билән көпбулуңлуқларниң өзлири әгилиши мүмкин, бирақ Эйлер нисбити өзгәрмәйду.

Леонард Эйлерниң һаяти вә иҗадийити билән тонушуш үчүн биз мону китапни тәвсийә қилимиз: Тиле Р. Леонард Эйлер. Киев: Вища школа, 1983.

Соаллар

1. 1) n-булуңлуқ призминиң; 2) n-булуңлуқ пирамидиниң чоққилири, қирлири билән яқлириниң санлири қанчигә тәң?
2. Эйлер теоремисини ейтиңлар.
3. Эйлер теоремиси қачан испатланған?
4. Топология немини тәтқиқ қилиду?

Һесаплар

А

3.1. Томпақ көпяқлиқниң 6 чоққиси вә 12 қири бар. Қанчә йеқи бар?

3.2. Томпақ көпяқлиқниң 8 чоққиси вә 6 йеқи бар болса, униң қанчә қири болиду?

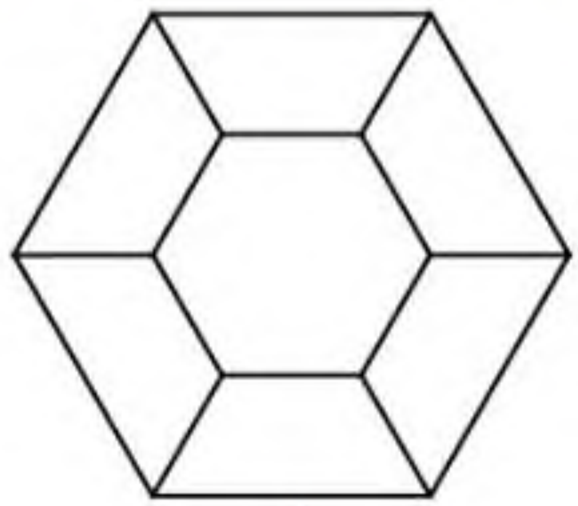
3.3. Томпақ көпяқлиқниң 9 қири вә 5 йеқи бар. Униң қанчә чоққиси бар?

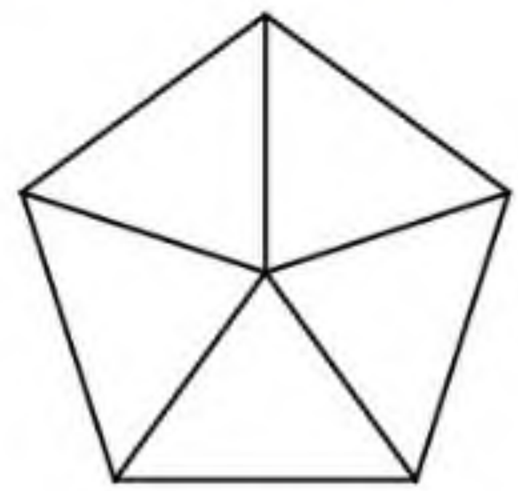
B

3.4. Эластик материалдин ясалған үчбулуңлуқ призминиң бир асаси кесип елинди вә қалған қисми тәкшиликкә йейилди. Һасил болған фигуриниң сизмисини селиңлар.

3.5. Эластик материалдин ясалған төртбулуңлуқ пирамидиниң асаси кесип елинип, қалған яқлири тәкшиликкә йейилди. Һасил болған фигуриниң сизмисини селиңлар.

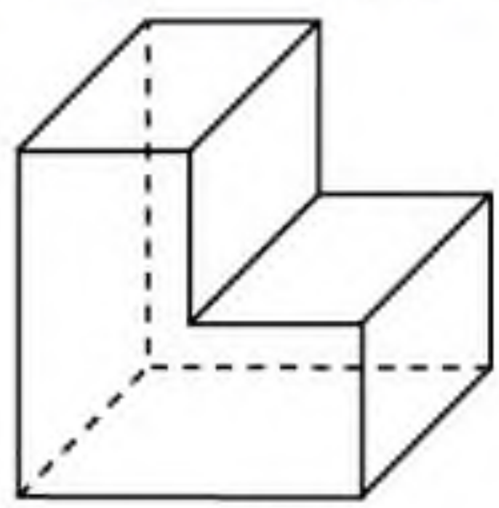
3.6. 3.4-сүрәттә тәсвирләнгән сизмиға қарап, көпяқлиқларни атаңлар.

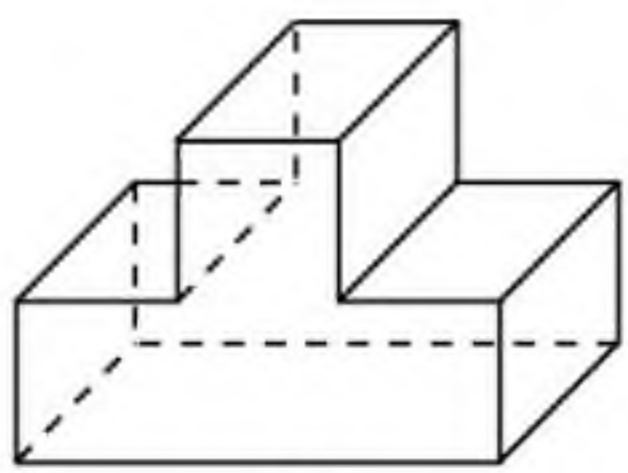

а)


ә)

3.4-сүрәт

3.7. 3.5-сүрәттики көпяқлиқлар үчүн Эйлер тәңлиги орунлинамду яки орунланмамду, тәкшүрүңлар.


а)

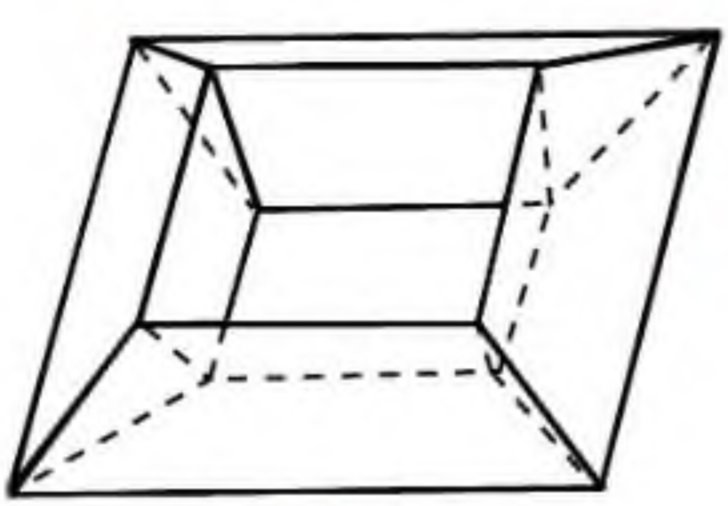

ә)

3.5-сүрәт

C

3.8. Томпақ әмәс призма үчүн Эйлер тәңлиги орунлинамду?

3.9. Томпақ әмәс пирамида үчүн Эйлер тәңлиги орунлинамду?


3.6-сүрәт

3.10. 3.6-сүрәттики көпяқлиқниң чоққилириниң, қирлириниң вә яқлириниң санини тепиңлар. Мошу көпяқлиқ үчүн Эйлер тәңлиги орунлинамду?

3.11. Томпақ көпбулуңлуқниң һәр бир чоққисида төрт үчбулуңлуқ жиғилиду. Мошу көпяқлиқниң чоққилириниң (Ч), қирлириниң (Қ), яқлириниң (Я) санини тепиңлар.

3.12. Томпақ көпяқлиқниң һәрбир чоққисида үч бәшбулуңлуқ жиғилиду. Мошу көпяқлиқниң чоққилири (Ч), қирлири (Қ) вә яқлириниң (Я) санини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

3.13. Дурус көпбулуңлуқниң ениқлимисини тәкрарлаңлар. Дурус көпяқлиқниң ениқлимисини ейтип көрүңлар.

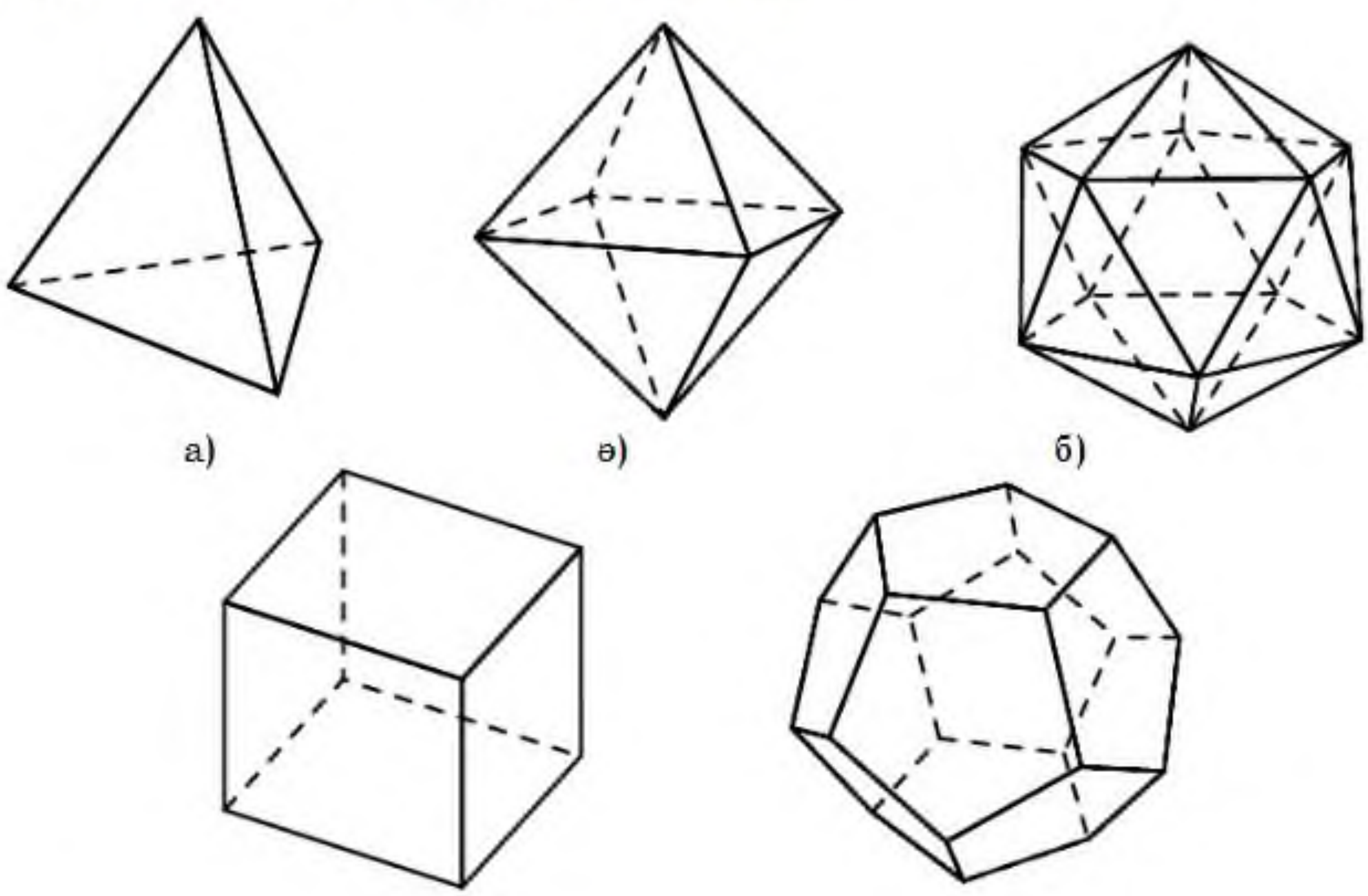
§ 4. Дурус көпяқлиқлар

Әгәр дурус көпяқлиқниң яң тәрәплирниң сани бирдәк дурус көпбулуңлуқлар болса вә һәрбир чоққисида жиғилидиған яқлириниң сани бирдәк болса, бу көпяқлиқ *дурус көпяқлиқ* дәп атилиду.

Дурус көпяқлиқниң чоққилирида қандақ вә қанчә дурус көпбулуңлуқлар жиғилидиғинини ениқлайли.

Дурус көпяқлиқларниң ичидики әң аддий түри, у яқлири төрт дурус үчбулуңлуқлардин тәркип тапқан (4.1, а-сүрәт) вә һәрбир чоққисида үч йеқи жиғилидиған көпяқлиқ болуп һесаплиниду. Бу көпяқлиқ *дурус тетраэдр* дәп атилиду. Грек тилидин тәржимә қилғанда “тетраэдр” сөзи “төртяқ” (“тетра” — төрт, “эдра” — яқ) дегәнни билдүриду.

4.1, ә-сүрәттә яқлири дурус үчбулуңлуқлардин тәркип тапқан вә һәрбир чоққисида төрт йеқи жиғилидиған көпяқлиқ тәсвирләнгән. Униң бети сәккиз дурус үчбулуңлуқлардин түзүлгән, шуниң үчүн у *октаэдр* (“окта” — сәккиз) дәп атилиду.



а) ә) б) в) г)

4.1-сүрәт

4.1, б-сүрәттә һәрбир чоққисида бәш дурус үчбулуңлар жиғилидиған көпяқлиқ тәсвирләнгән. Униң бети жигирмә дурус үчбулуңлуқтин тәркип тапқан. Шуниң үчүн у *икосаэдр* (“икоси” — жигирмә) дәп атилиду.

Томпақ көпяқлиқниң бир чоққисида бәштин көп әмәс дурус үчбулуңлуқларниң жиғилидиғинини байқаймиз, сәвәви әкси һаләттә бу чоққидики тәкши булуңларниң қошундиси 360°-тин ошуқ яки тәң болиду. Демәк яқлири дурус үчбулуңлуқлар болидиған башқа дурус көпяқлиқ болмайду.

Мошуниңға охшаш, томпақ көпяқлиқниң чоққилирида пәқәт үч квадрат жиғилидиған болғанлиқтин, кубтин (4.1, в-сүрәт) башқа яқлири квадрат болидиған башқичә дурус көпяқлиқ болмайду. Кубниң алтә йеқи бар, шуңлашқа уни *гексаэдр* (“гекса” — алтә) дәп атайду.

4.1, г-сүрәттә яқлири дурус бәшбулуңлуқлар болған вә һәрбир чоққисида үч йеқи жиғилидиған көпяқлиқ тәсвирләнгән. Униң бети он икки дурус бәшбулуңлуқтин тәркип тапқан, шуңлашқа у *додекаэдр* (“додека” — он икки) дәп атилиду.

Томпақ көпяқлиқлар чоққисида тәрәплириниң сани бәштин көп дурус көпбулуңлуқлар жиғилмиғанлиқтин, башқа дурус көпяқлиқлар болмайду. Шуниң билән, томпақ дурус көпяқлиқниң бәш түри болиду: *дурус тетраэдр, гексаэдр* (*куб*), *октаэдр, додекаэдр* вә *икосаэдр*.

Қандақ ойлайсиләр, немә үчүн ян яқлири квадратлар болуп келидиған дурус үчбулуңлуқ призма дурус көпяқлиқ болмайду?

Тарихий мәлуматлар

Қедимий замандин бери дурус көпяқлиқлар алимларниң, қурулушчиларниң, архитекторлар вә башқиларниңму диққитини җәлип қилған. Уларни мошу көпяқлиқларниң гөзәллиги вә алаһидилиги һәйран қалдурған. Пифагорлиқлар бу көпяқлиқларни худа бәргән мөҗүзә дәп санап, уларни аләм тоғрилиқ философиялик язмилирида қолланған. Қедимий грек алими Платон (б.э.б. 429–347) дурус көпяқлиқларниң хусусийәтлирини тәпсилий тәриплигән. Шуниң үчүнму дурус көпяқлиқлар *Платон җисимлири* дәпму атилиду. Евклидниң атақлиқ «Башланмилар» намлиқ ахирқи XIII китави мошу дурус көпяқлиқларға беғишланған.

Қайта риваҗлиниш дәвридә (XV—XVI әә. илим билән һүнәрниң қайта риваҗланған дәври) дурус көпяқлиқларға һәйкәлтарашлар, архитекторлар вә сүрәтчиләр чоң қизиқиш билдүрди. Мәсилән, Леонардо да Винчи (1452—1519 жж.), көпяқлиқлар теорияси билән шуғулланған вә уларни өзиниң сүрәтлиридә тәсвирлигән. У өзиниң дости монах Лука Пачолиниң (1445—1517 жж.) “Әҗайип пропорцияләр тоғрилиқ” китавини дурус вә йерим дурус көпяқлиқларниң сүрити билән тәсвирлигән. Шундақла қайта риваҗлиниш дәвридә геометрия билән шуғулланған йәнә бир мәшһур рәссам Альбрехт Дюрер (1471—1528-жж.) болди.

Униң әлгә мәлум “Меланхолия” әмгигидә алдинқи қатарда додекаэдр селинған. 1525-жили Дюрер трактат язди, униңда у бәтлири келәчәкниң яхши моделини көрситидиған бәш дурус көпяқлиқни тәвсийә қилди.

Иоганн Кеплер (1571—1630-жж.) өзиниң 1596-жили йоруқ көргән “Аләмниң сири” намлиқ әмгигидә сфериға (шу замандики бәлгүлүк планетиларниң орбитиси) сиртидин сизилған дурус көпяқлиқларни пайдилинип, Күн системисиниң моделини қураштурған. У мәркизигә йәрниң орбитисини орунлаштурди. Кеплерниң ойичә, Күн системисиниң геометрияси: “Йәр (Йәр орбитиси) — барлиқ орбитиларниң өлчими дәп ойлиди. Униңға сиртидин додекаэдр салимиз. Додекаэдрға сиртидин сизилған сфера — Марс сфериси. Марс сферисиға сиртидин тетраэдр салимиз. Тетраэдрға сиртидин сизилған сфера Юпитерниң сфериси болуп һесаплиниду. Юпитер сферисиға сиртидин куб салимиз. Кубқа сиртидин сизилған сфера Сатурн сфериси болуп һесаплиниду. Йәрниң сферисиға ичидин икосаэдр салимиз. Униңға ичидин сизилған сфера Чолпан сфериси болиду. Чолпан сферисиға ичидин октаэдр салимиз. Униңға ичидин сизилған сфера Меркурий сфериси болиду. Шу заманда башқа планетилар техи ечилмиған еди.

Күн системисиниң бу моделини Кеплер “Каинатлиқ куб” дәп атиди.

Соаллар

1. Қандақ томпақ көпяқлиқ дурус дәп атилиду?
2. Қандақ көпяқлиқ: а) дурус тетраэдр; ә) октаэдр; б) икосаэдр; в) гексаэдр; г) додекаэдр дәп атилиду?
3. Кимләр дурус көпяқлиқларни тәтқиқ қилиш билән шуғулланған?

Һесаплар

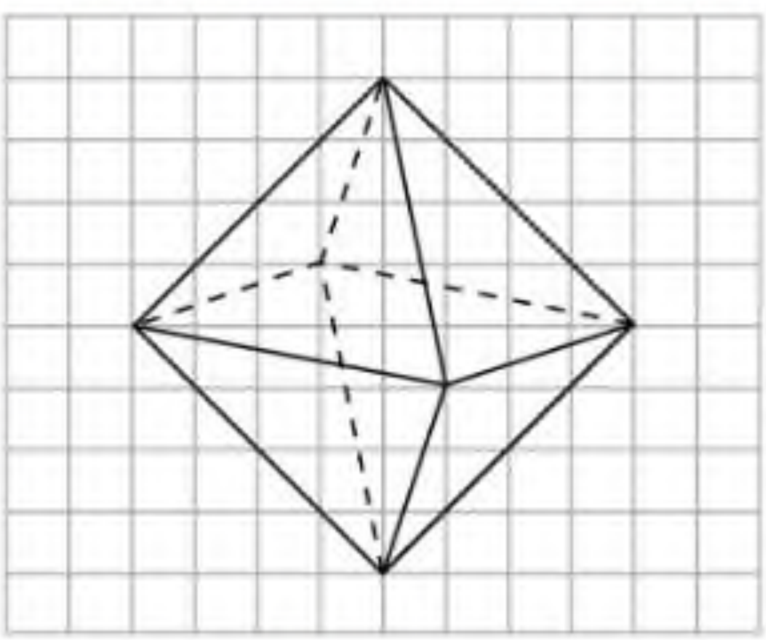
А

4.1. 1) Дурус тетраэдрниң; 2) кубниң; 3) октаэдрниң; 4) икосаэдрниң; 5) додекаэдрниң қанчә чоққиси, қири вә йеқи болиду?

4.2. Үчбулуңлуқ бипирамида икки дурус тетраэдрниң бәтлирини бәтләштүрүп қураштурулиду (“би” қошумчиси иккиләнгән, һәссиләнгән дегәнни билдүриду). Пәйда болған көпяқлиқ дурус боламду? Немә үчүн?

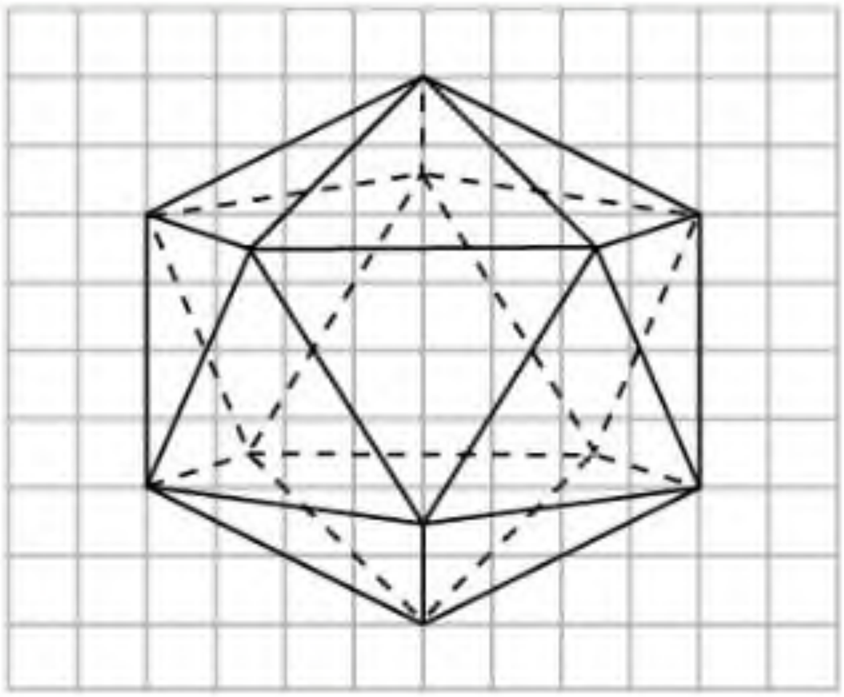
4.3. Төртбулуңлуқ бипирамида ян яқлири дурус үчбулуңлуқлар болидиған икки төртбулуңлуқ пирамидиниң асаслирини бәтләштүрүп қураштурулиду. Пәйда болған көпяқлиқ дурус боламду?

4.4. Чақмақ қәғәзгә 4.2-сүрәттикигә охшаш октаэдрни селиңлар.

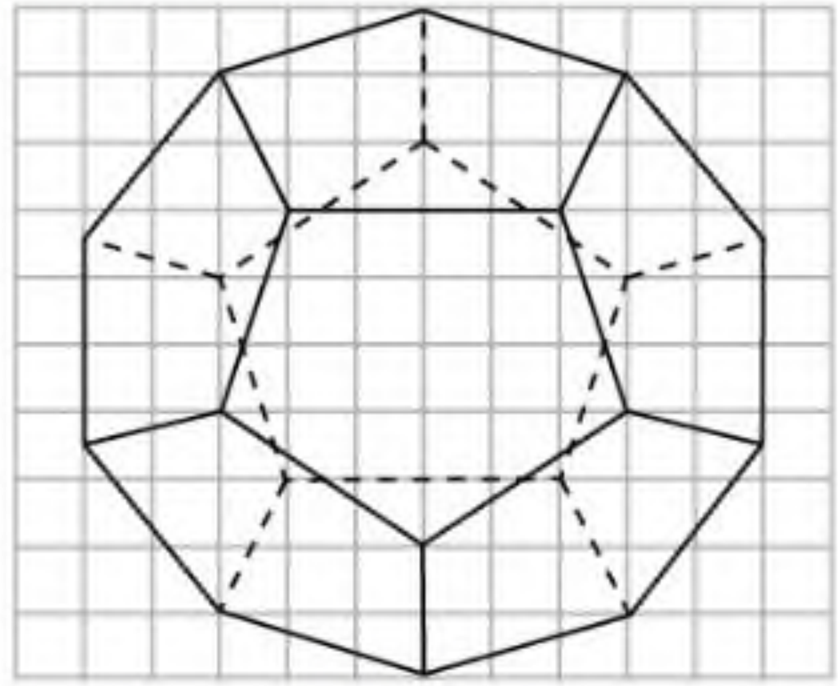


4.2-сүрәт

4.5. Чақмақ қәғәзгә 4.3-сүрәттикигә охшаш икосаэдрни селиңлар.



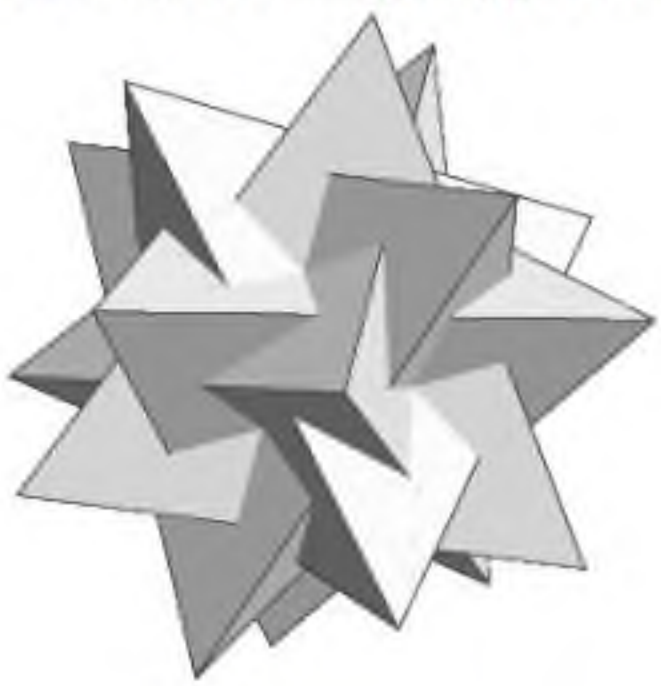
4.3-сүрәт



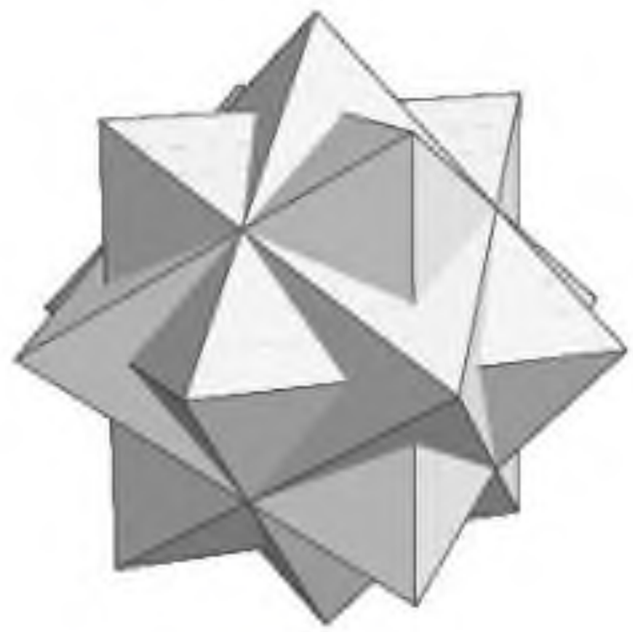
4.4-сүрәт

4.6. Чақмақ қәғәзгә 4.4-сүрәттикигә охшаш додекаэдрни селиңлар.

4.7. 4.5-сүрәттә қанчә тетраэдр тәсвирләнгән?



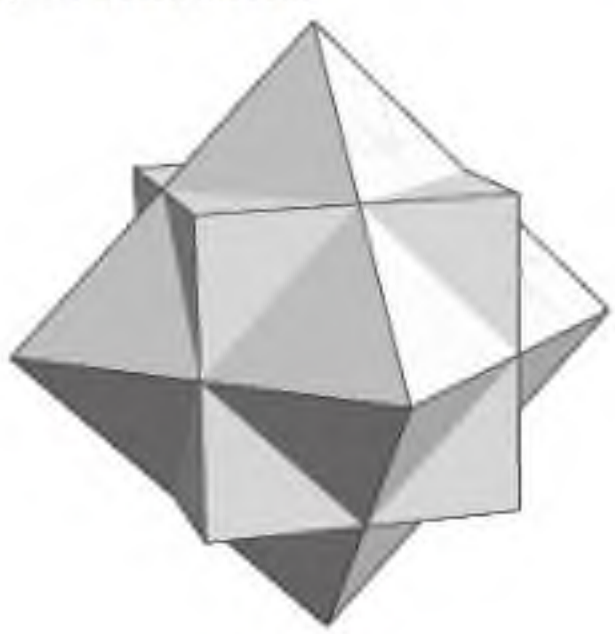
4.5-сүрәт



4.6-сүрәт

4.8. 4.6-сүрәттә қанчә октаэдр тәсвирләнгән?

4.9. 4.7-сүрәттики көпяқлиқ қандақ икки көпяқлиқни бириктүрүш арқилиқ селинған?



4.7-сүрәт

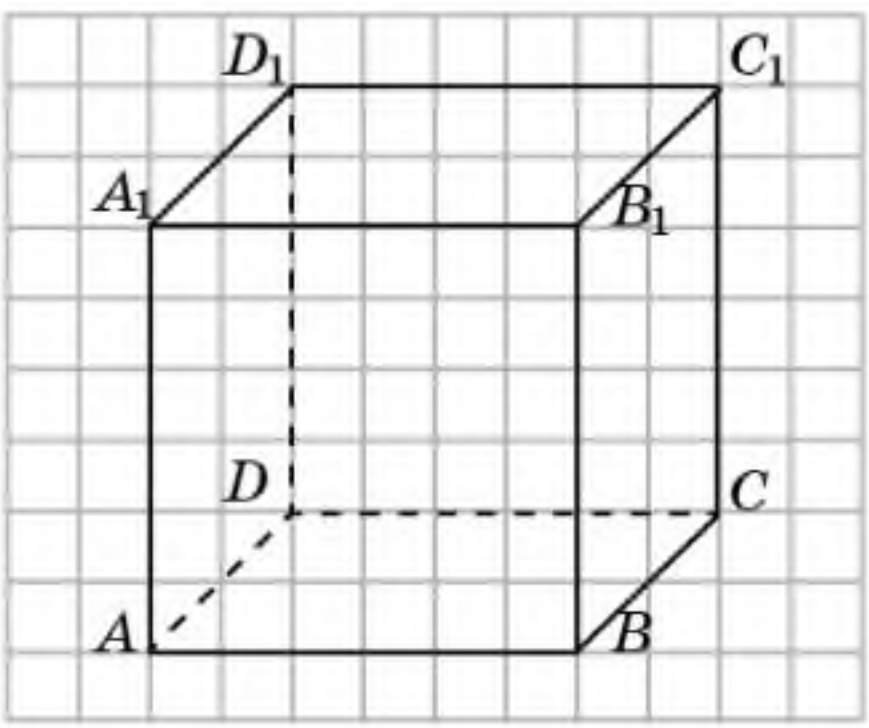
4.8-сүрәт

4.10. 4.8-сүрәттики көпяқлиқ қандақ икки көпяқлиқни бириктүрүш арқилиқ селинған?

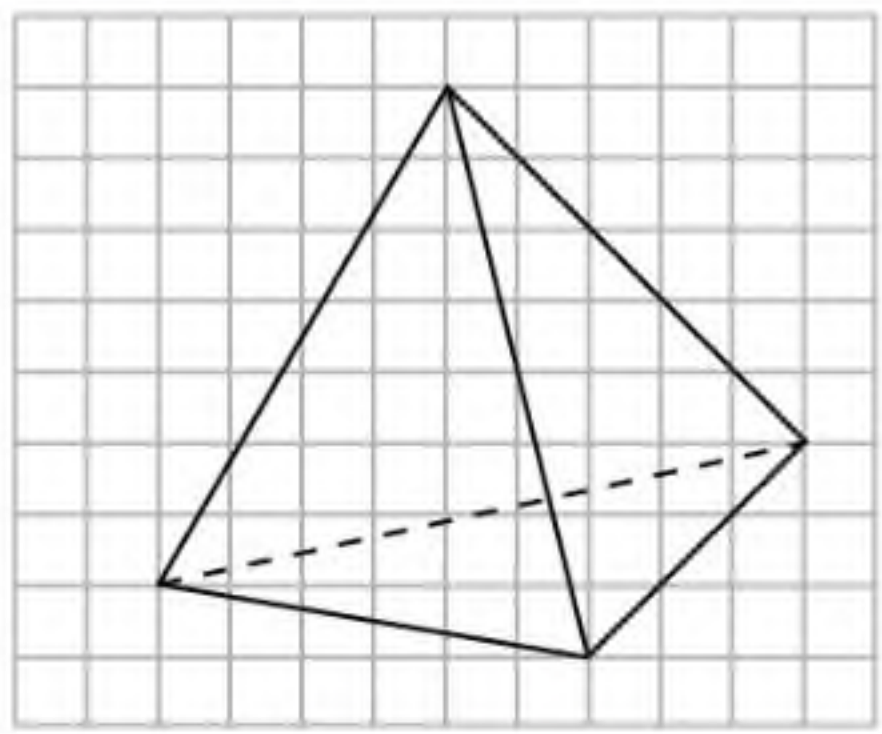
B

4.11. 4.9-сүрәттики охшаш кубни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Кубниң A, C, B_1, D_1 чоққилири қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән кубниң қири 1 гә тәң дәп елип, пәйда болған көпяқлиқ қириниң узунлиғини тепиңлар.

4.12. 4.9-сүрәттики охшаш кубни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Куб яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән кубниң қири 1 гә тәң дәп елип, пәйда болған көпяқлиқ қириниң узунлиғини тепиңлар.



4.9-сүрәт



4.10-сүрәт

4.13. 4.10-сүрәттики охшаш тетраэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Тетраэдр қирлириниң оттурилирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән тетраэдрниң қири 1 гә тәң дәп елип, пәйда болған көпяқлиқниң қирини тепиңлар.

4.14. Қири 2 см-ға тәң тетраэдрниң һәрбир чоққисидин қири 1 см-ға тәң тетраэдр қийилип елинса, қалған бөлиги қандақ көпяқлиқ болиду? Униң қирини тепиңлар.

4.15. Октаэдрниң қири 1 гә тәң. Униң қариму-қарши ятқан чоққилириниң арилиғини тепиңлар.

4.16. Бирлик октаэдрниң қирлири арқилиқ униң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә узунлиғи 2 гә тәң нәччә йол болиду?

4.17. Бирлик октаэдрниң қирлири арқилиқ, униң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә узунлиғи 3 кә тәң нәччә йол болиду?

C

4.18. 4.10-сүрәттики охшаш тетраэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Тетраэдр яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән тетраэдрниң қири 1 гә тәң дәп елип, пәйда болған көпяқлиқниң қирини тепиңлар.

4.19. 4.2-сүрәттики охшаш октаэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Октаэдр яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду? Мошу көпяқлиқни селиңлар. Берилгән октаэдрниң қири 1 гә тәң дәп елип, пәйда болған көпяқлиқниң қирини тепиңлар.

4.20. 4.3-сүрәттики охшаш икосаэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Икосаэдр яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду?

4.21. 4.4-сүрәттикигә охшаш додекаэдрни чақмақ қәғәзгә селиңлар. Додекаэдр яқлириниң мәркәзлирини бәлгүләңлар. Улар қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду?

4.22. Бирлик икосаэдрниң қирлири арқилиқ униң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә узунлиғи 3 кә тәң нәччә йол болиду?

4.23. Бирлик додекаэдрниң қирлири арқилиқ униң бир чоққисидин униңға қарши ятқан чоққисиғичә узунлиғи 5 кә тәң нәччә йол болиду?

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

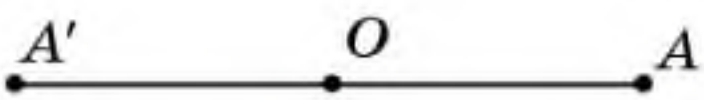
4.24. Тәкшиликтики мәркәзлик симметрия билән оқлуқ симметрияниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§ 5*. Көпяқлиқларниң симметрияси

“Тәкшиликтики фигуриларниң симметрияси” чүшәнчисини планиметрия бөлүмидә оқуп үгәнгән. “Мәркәзлик вә оқлуқ симметрия” чүшәнчисини үгәндуқ. “Бошлуқтики фигурилар үчүн симметрия” чүшәнчиси шуниңға охшаш ениқлиниду.

Немис математиги Г.Вейльниң (1885—1955-жж.) ейтишичә: “Симметрия — адәмләрниң әсирләр бойи тәртипни, гөзәллик билән мужәссәмликни чүшинишкә вә ясашқа тиришқан идеялири”.

Симметрияниң чирайлиқ тәсвирлири һүнәр әсәрлирини — архитектура, бәдиий сүрәтләрни, һәйкәлләрни вә башқиларни тәсвирләйду.



5.1-сүрәт

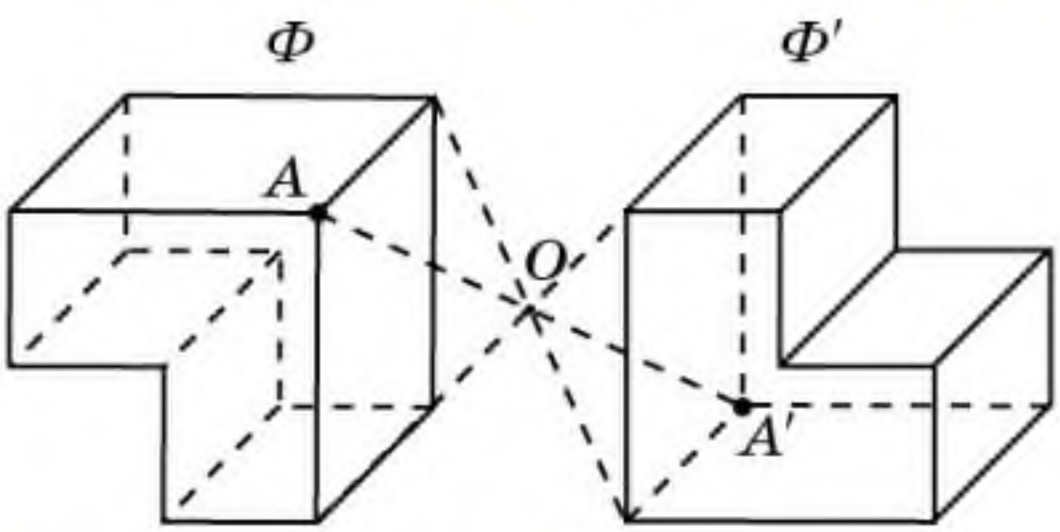
Әгәр бошлуқтики O чекити AA' кесиндисиниң оттуриси болса, A вә A' чекитлири *O чекитигә нисбәтән симметриялик* дәп атилиду (5.1-сүрәт). O чекити өзигә-өзи симметриялик болиду.

Бошлуқниң һәрбир A чекитини берилгән O чекитигә нисбәтән симметриялик A' чекитигә тәсвирләйдиған бошлуқтики түрләндүрүш *мәркәзлик симметрия* дәп атилиду. O чекити *симметрия мәркизи* дәп атилиду.

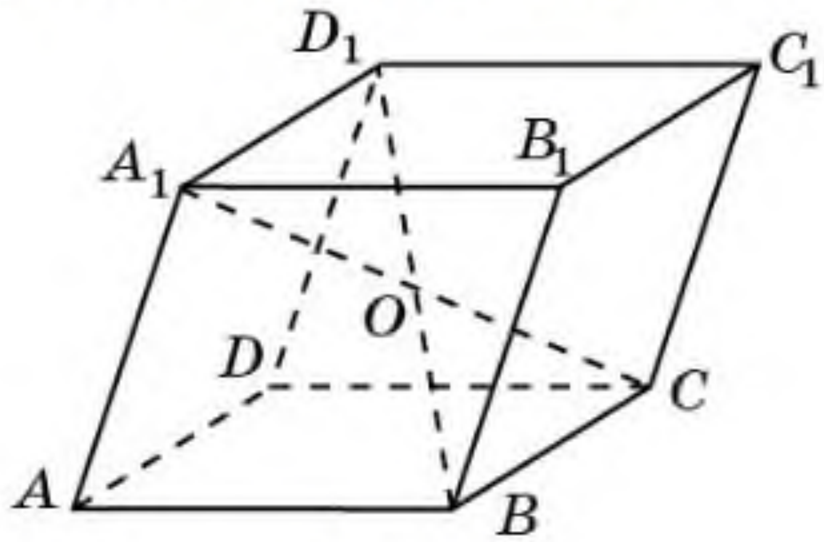
Әгәр бошлуқтики O чекитигә нисбәтән Φ фигурисиниң һәрбир A чекити иккинчи Φ' фигурисиниң қандақту бир A' чекитигә симметриялик болса, у чағда Φ вә Φ' фигурилири O мәркизигә нисбәтән *мәркәзлик симметриялик* дәп атилиду (5.2-сүрәт).

Әгәр бошлуқтики О чекитигә нисбәтән Φ фигуриси өзигә-өзи мәркәзлик симметриялик болса, у чағда Φ фигуриси O мәркизигә нисбәтән *мәркәзлик симметриялик* дәп атилиду.

Мәсилән, параллелепипед өзиниң диагональлириниң қийилишиши O чекитигә нисбәтән *мәркәзлик симметриялик* болиду (5.3-сүрәт).



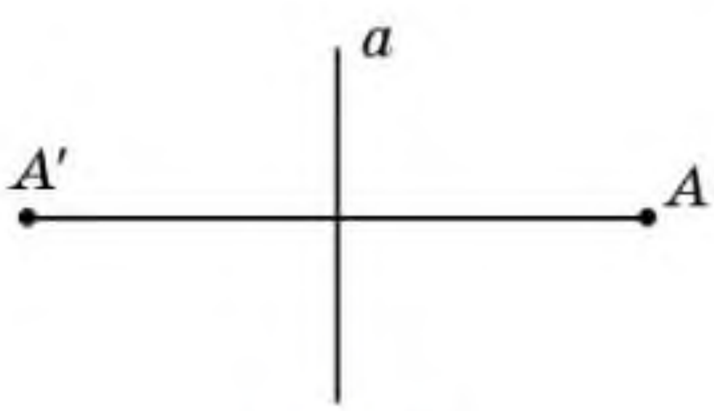
5.2-сүрәт



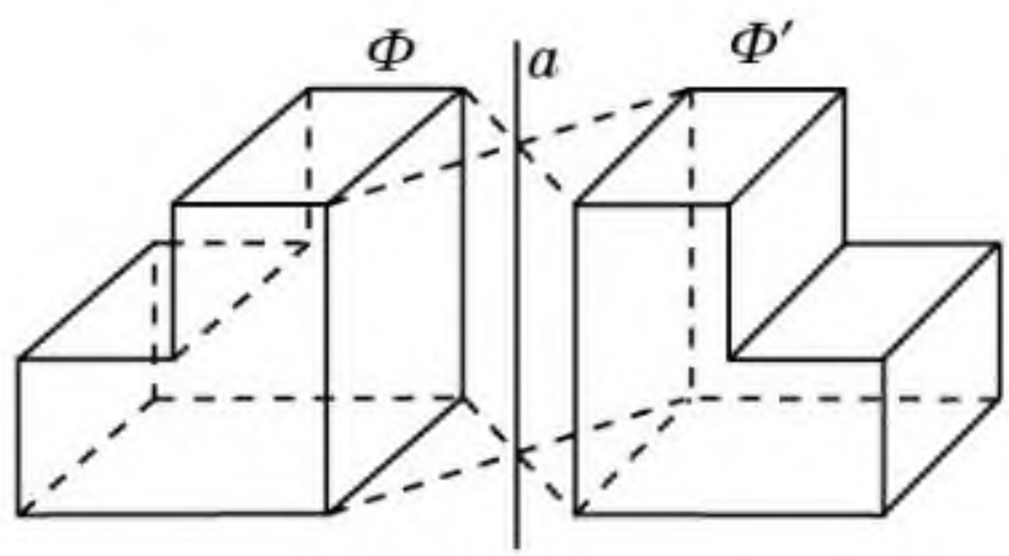
5.3-сүрәт

Қандақ ойлайсиләр, фигуриниң бирнәччә симметрия мәркәзлири болуши мүмкинму?

Әгәр бошлуқтики a түзи AA' кесиндисигә перпендикуляр вә униң оттуриси арқилиқ өтсә, у чағда A вә A' чекитлири *a түзигә нисбәтән симметриялик* дәп атилиду (5.4-сүрәт). a түзиниң һәрбир чекити өзигә-өзи симметриялик болиду.



5.4-сүрәт

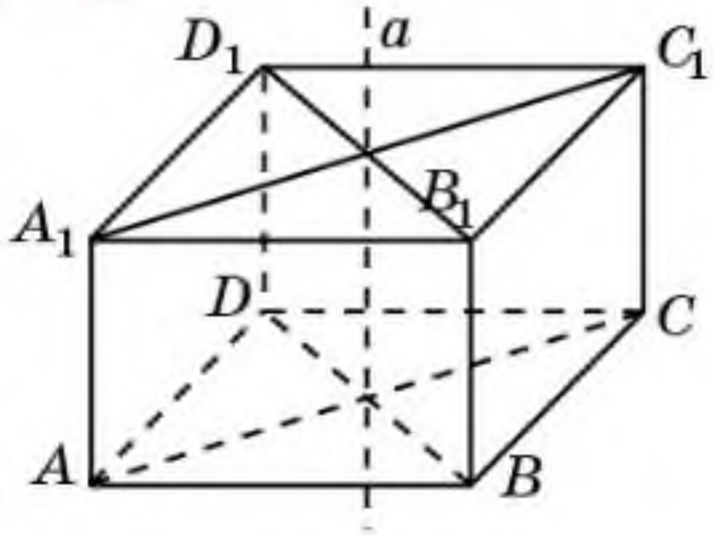


5.5-сүрәт

Бошлуқниң һәрбир A чекитини берилгән a түзигә нисбәтән A' чекитигә тәсвирләйдиған бошлуқтики түрләндүрүш *оқлуқ симметрия* дәп атилиду. a түзи *симметрия оқи* дәп атилиду.

Әгәр бошлуқтики a түзигә нисбәтән Φ фигурисиниң һәрбир A чекити иккинчи Φ' фигурисиниң қандақту бир A' чекитигә симметриялик болса, у чағда Φ вә Φ' фигурилири a оқиға нисбәтән *симметриялик фигурилар* дәп атилиду (5.5-сүрәт).

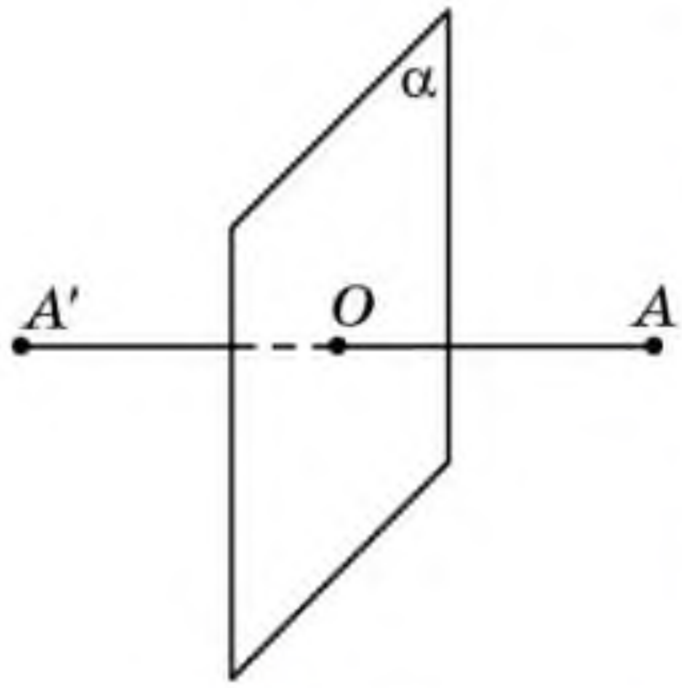
Әгәр бошлуқтики a түзигә нисбәтән Φ фигуриси өзигә-өзи симметриялик болса, у чағда Φ фигуриси *a оқиға нисбәтән симметриялик* дәп атилиду.



5.6-сүрәт

Мәсилән, тикбулуңлуқ параллелепипед өзиниң қариму-қарши ятқан яқлириниң диагональлириниң қийилишиш чекитлири арқилиқ өтүдиған түзгә нисбәтән *оқлуқ симметриялик* болиду (5.6-сүрәт).

Қандақ ойлайсиләр, фигурида бирнәччә симметрия оқлири болуши мүмкинму?



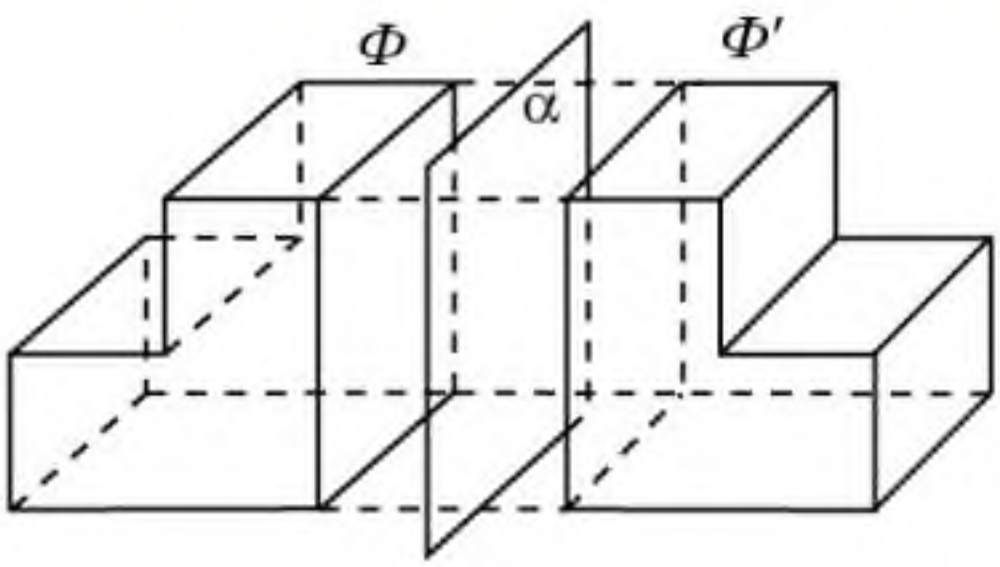
5.7-сүрәт

Әгәр бошлуқтики α тәкшилиги AA' кесиндисигә перпендикуляр вә униң оттуриси арқилиқ өтсә, у чағда A вә A' чекитлири α *тәкшилигигә нисбәтән симметриялик* дәп атилиду (5.7-сүрәт). α тәкшилигиниң һәрбир чекити өзигә-өзи симметриялик болиду.

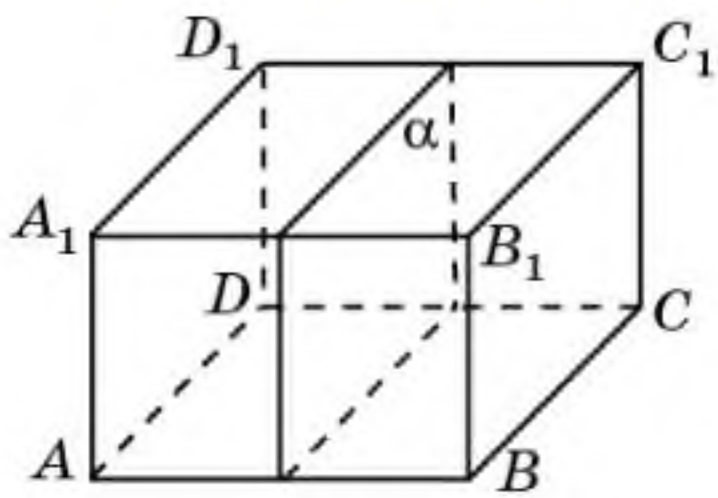
Бошлуқниң һәрбир A чекитини берилгән α тәкшилигигә нисбәтән A' чекитигә тәсвирләйдиған бошлуқтики түрләндүрүш α *тәкшилигигә нисбәтән симметрия* дәп атилиду. α тәкшилиги *симметрия тәкшилиги* дәп атилиду.

Тәкшиликкә нисбәтән симметрия *әйнәклик симметрия* дәпму атилиду.

Әгәр бошлуқтики α тәкшилигигә нисбәтән Φ фигурисиниң һәрбир A чекити иккинчи Φ' фигурисиниң қандақту бир A' чекитигә әйнәклик симметриялик болса, у чағда Φ вә Φ' фигурилири α тәкшилигигә нисбәтән *әйнәклик симметриялик фигурилар* дәп атилиду (5.8-сүрәт).



5.8-сүрәт



5.9-сүрәт

Әгәр бошлуқтики α тәкшилигигә нисбәтән Φ фигуриси өзигә-өзи әйнәклик симметриялик болса, у чағда Φ фигуриси α тәкшилигигә нисбәтән *әйнәклик симметриялик* дәп атилиду.

Мәсилән, тикбулуңлуқ параллелепипед өзиниң симметриялик оқи арқилиқ өтүдиған вә қариму-қарши ятқан яқлириниң биригә параллель болидиған тәкшиликкә нисбәтән әйнәклик симметриялик болиду (5.9-сүрәт).

Қандақ ойлайсиләр, фигурида бирнәччә симметрия тәкшиликлири боламду?

Кристаллар — тәбиий көпяқлиқлар

Көпяқлиқларниң көплигән шәкиллирини адәмләрниң өзлири ойлап тапқини йоқ, улар тәбиий кристаллар түридә түзүлгән. Аш тузиниң кристаллири куб шәклидә (5.10-сүрәт), музниң вә кварцниң кристаллири икки яқлиқ учланған қериндашниң училириға охшап келиду, йәни асаслирида алтәбулуңлуқ пирамида ятидиған алтәбулуңлуқ призма шәклидә болиду (5.11-сүрәт).

5.10-сүрәт

5.11-сүрәт

Алмаз көпинчә октаэдр шәклидә учришиду (5.12-сүрәт). Тәсвирни иккигә бөлидиған исландлиқ шпат янту параллелепипед шәклидә болиду (5.13-сүрәт).

Кристалларниң сиртқи шәкли — уларниң пәқәт физикилиқ вә химиялик хусусийәтлириниң көрүнүшила. Уларниң һәммиси кристалларниң геометриялик түзүлүминиң алаһидилиги билән, мәсилән, кристаллиқ торда атомларниң симметриялик орунлишиши арқилиқ чүшәндүрилиду.

5.12-сүрәт

5.13-сүрәт

Кристалларға башқиму мисаллар кәлтүрүңлар вә уларниң шәкиллирини көрситиңлар.

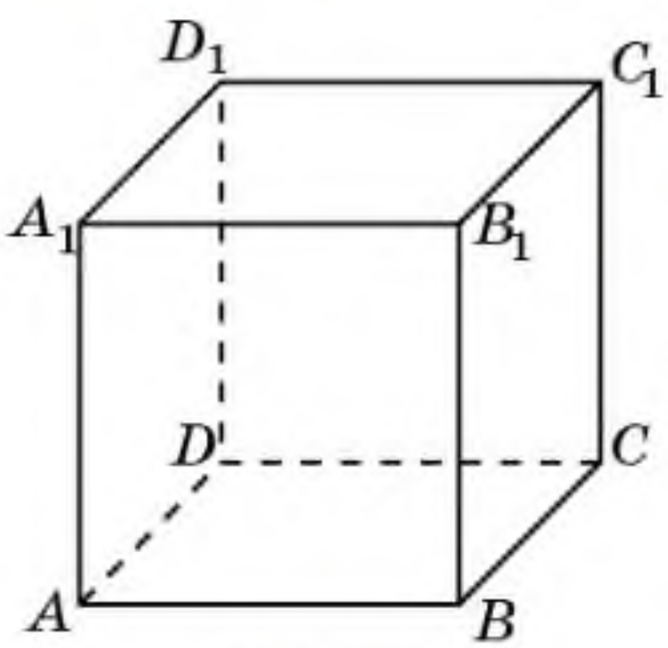
Кристаллар билән чоңқурирақ тонушуш үчүн Қазақстан Җумһурийити Геологиялиқ мирасгаһиниң (музейиниң) вә А.Е.Ферсман намидики Минералогиялиқ мирасгаһиниң сайтлириға кирип көрсәңлар болиду.

Соаллар

1. Бошлуқниң қандақ чекитлири мәркәзлик симметриялик дәп атилиду?
2. Бошлуқтики қандақ түрләндүрүш мәркәзлик симметрия дәп атилиду?
3. Бошлуқтики қандақ икки фигура мәркәзлик симметриялик дәп атилиду?
4. Бошлуқтики қандақ фигура мәркәзлик симметриялик дәп атилиду?
5. Қандақ чекитләр түзгә нисбәтән симметриялик дәп атилиду?
6. Бошлуқтики қандақ түрләндүрүш оқлуқ симметрия дәп атилиду?
7. Бошлуқтики қандақ икки фигура түзгә нисбәтән симметриялик дәп атилиду?
8. Бошлуқтики қандақ фигура түзгә нисбәтән симметриялик дәп атилиду?
9. Бошлуқтики қандақ чекитләр тәкшиликккә нисбәтән симметриялик дәп атилиду?
10. Бошлуқтики қандақ түрләндүрүш әйнәклик симметрия дәп атилиду?
11. Бошлуқтики қандақ икки фигура әйнәклик симметриялик дәп атилиду?
12. Бошлуқтики қандақ фигура әйнәклик симметриялик дәп атилиду?

Һесаплар

А



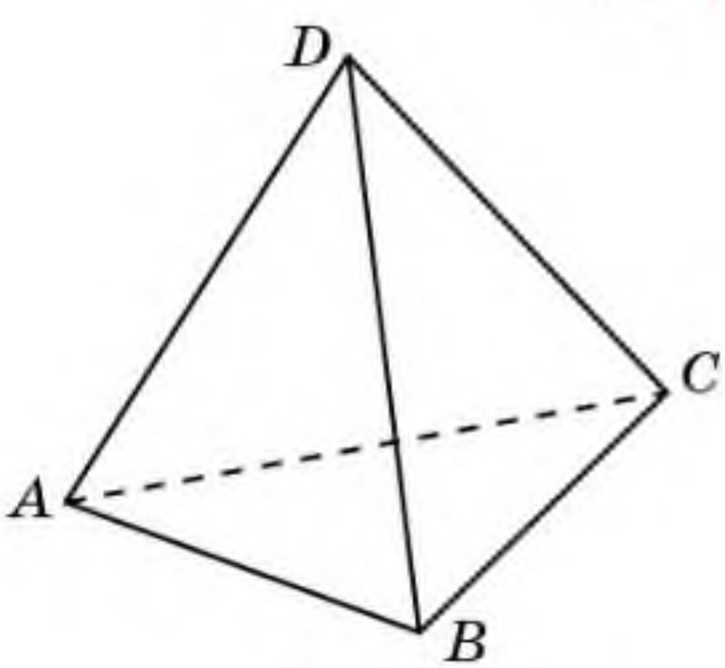
5.14-сүрәт

5.1. Бошлуқтики мәркәзлик симметриялик вә мәркәзлик симметриялик әмәс фигурiларға мисаллар кәлтүрүңлар.

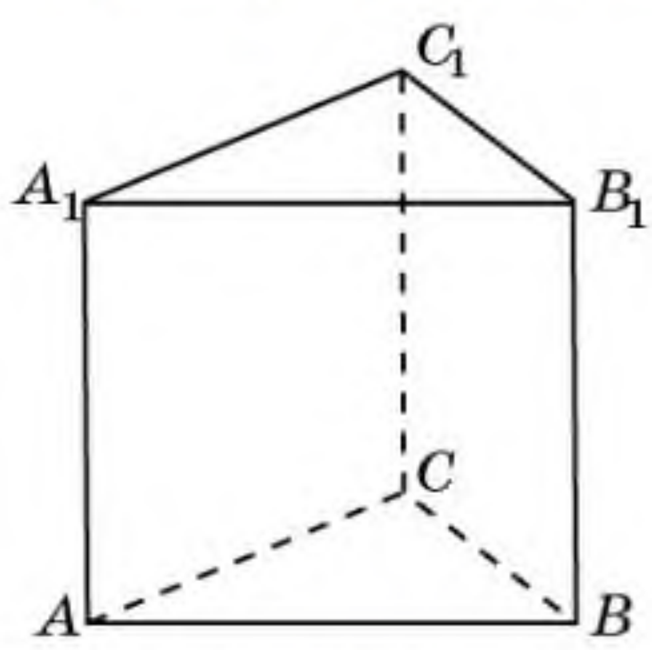
5.2. 5.14-сүрәттики кубниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

5.3. 5.15-сүрәттики тетраэдрниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

5.4. 5.16-сүрәттики дурус үчбулуңлуқ призминиң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

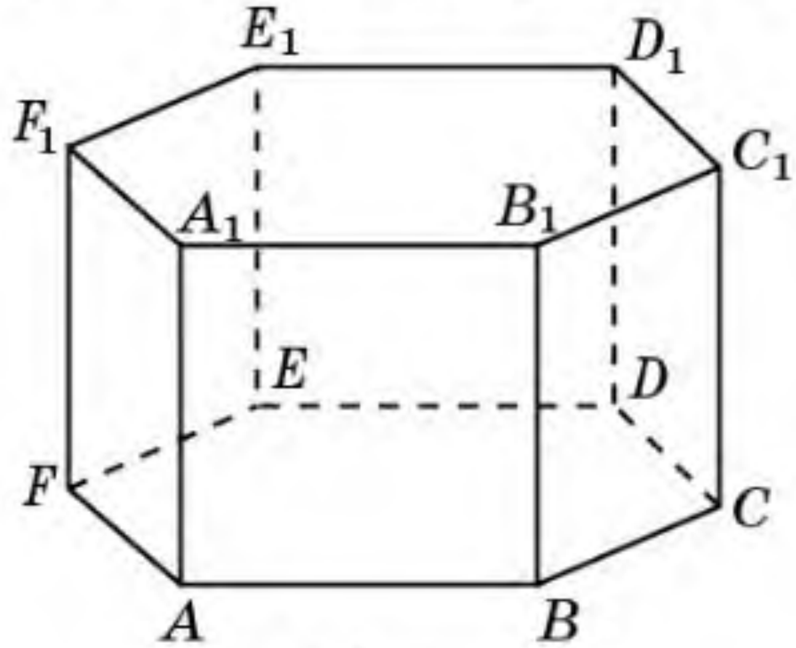


5.15-сүрәт

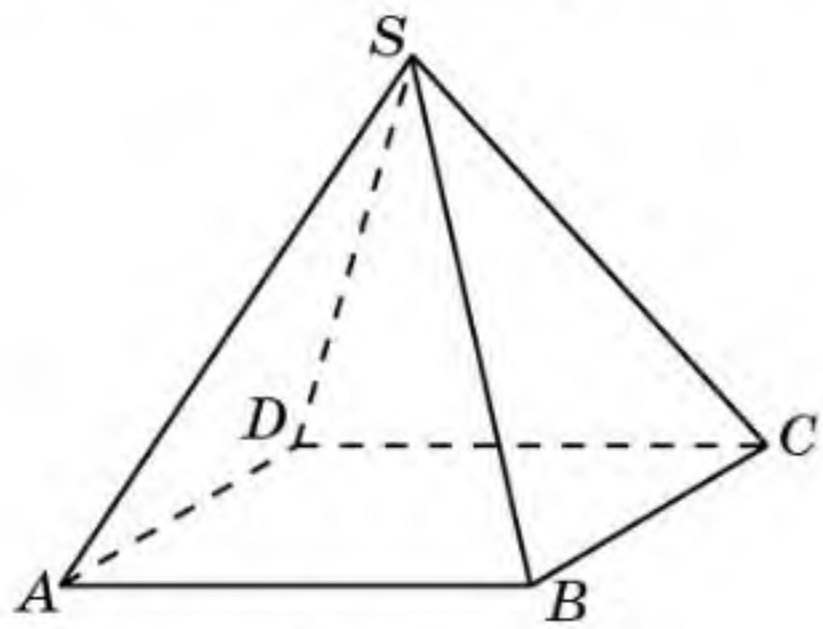


5.16-сүрәт

5.5. 5.17-сүрәттики дурус алтәбулуңлуқ призминиң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?



5.17-сүрәт

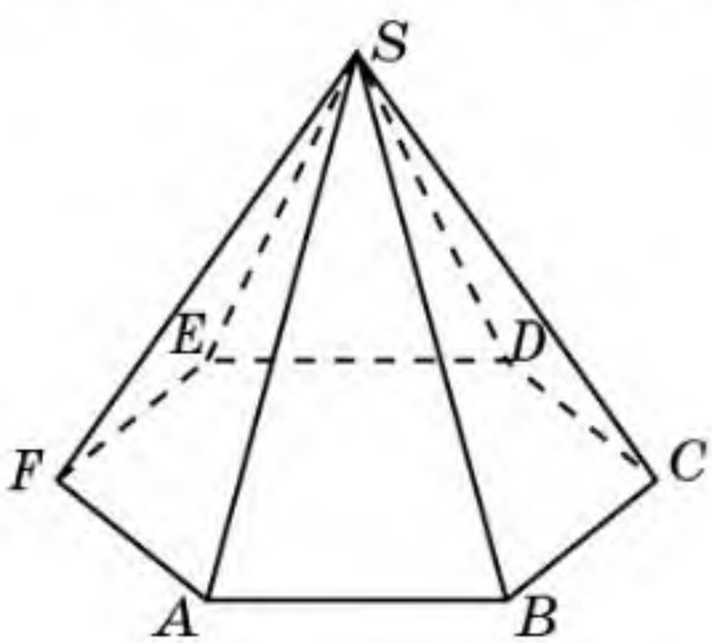


5.18-сүрәт

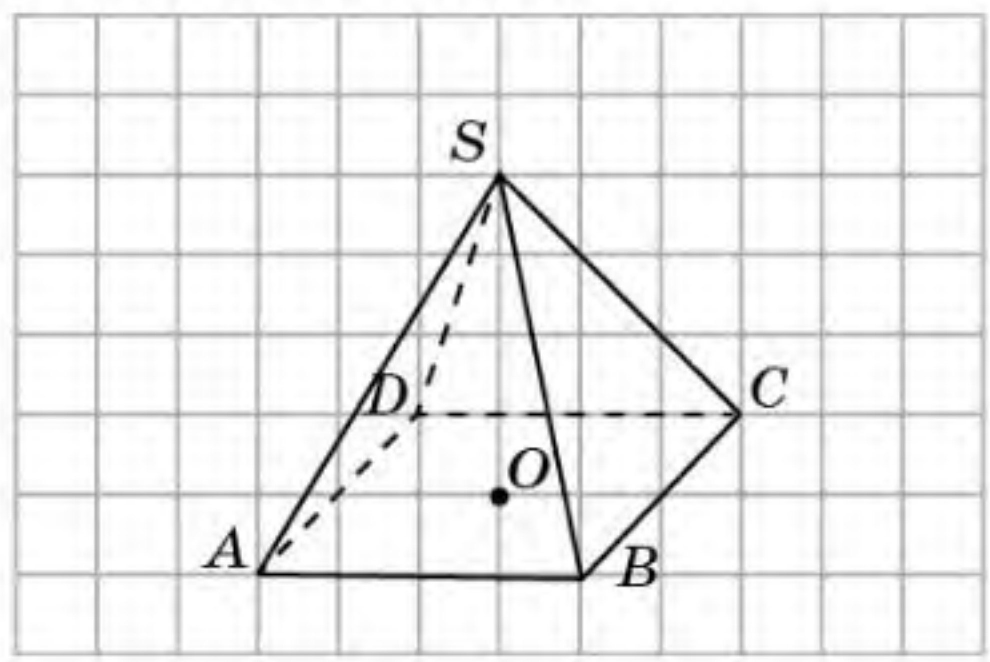
5.6. 5.18-сүрәттики дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

5.7. 5.19-сүрәттики дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

5.8. Чақмақ қәғәзгә 5.20-сүрәттики O чекитигә нисбәтән $SABCD$ пирамидисиға симметриялик пирамидини селиңлар.



5.19-сүрәт



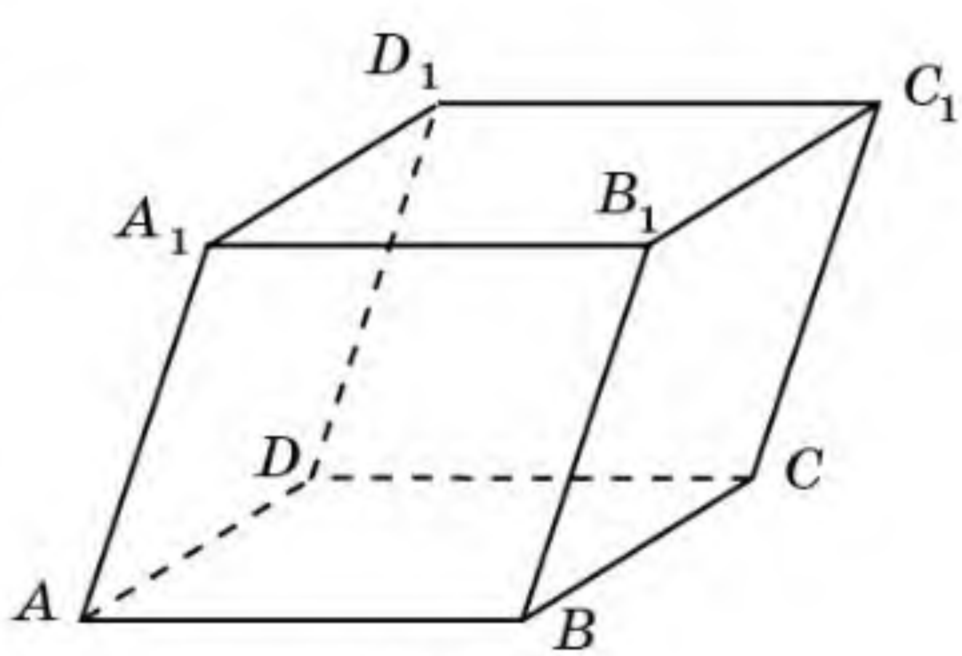
5.20-сүрәт

B

5.9. Параллель икки түздин туридиған фигурiларниң симметрия мәркизини көрситиңлар.

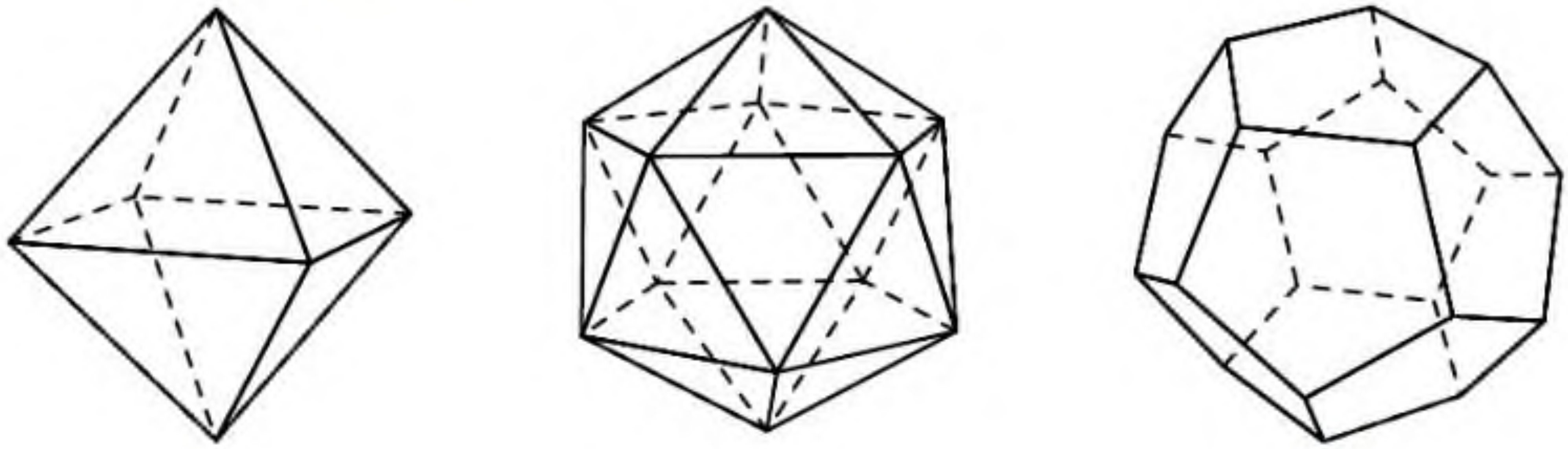
5.10. 1) Қийилишқан икки тәкшиликтин; 2) параллель икки тәкшиликтин туридиған фигурiларниң симметрия мәркизини көрситиңлар.

5.11. Янту параллелепипедниң симметрия мәркизи боламду (5.21-сүрәт)?



5.21-сүрәт

5.12. 1) Октаэдрниң; 2) икосаэдрниң; 3) додекаэдрниң симметрия мәркизи боламду (5.22-сүрәт)?



а) ә) б)

5.22-сүрәт

5.13. Дурус: 1) үчбулуңлуқ призминиң (5.16-сүрәт); 2) алтәбулуңлуқ призминиң нәччә симметрия оқи болиду (5.17-сүрәт)?

5.14. Дурус: 1) үчбулуңлуқ призминиң (5.16-сүрәт); 2) алтәбулуңлуқ призминиң нәччә симметрия тәкшилиги болиду (5.17-сүрәт)?

5.15. Дурус: 1) төртбулуңлуқ пирамидиниң (5.18-сүрәт); 2) алтәбулуңлуқ пирамидиниң нәччә симметрия оқи болиду (5.19-сүрәт)?

5.16. Дурус: 1) төртбулуңлуқ пирамидиниң (5.18-сүрәт); 2) алтәбулуңлуқ пирамидиниң нәччә симметрия тәкшилиги болиду (5.19-сүрәт)?

C

5.17. Дурус: 1) n-булуңлуқ призминиң; 2) n-булуңлуқ пирамидиниң нәччә симметрия оқи болиду?

5.18. Дурус: 1) n-булуңлуқ призминиң; 2) n-булуңлуқ пирамидиниң нәччә симметрия тәкшилиги болиду?

5.19. 1) Октаэдрниң; 2) икосаэдрниң; 3) додекаэдрниң нәччә симметрия оқи болиду (5.22-сүрәт)?

5.20. 1) Октаэдрниң; 2) икосаэдрниң; 3) додекаэдрниң нәччә симметрия тәкшилиги болиду (5.22-сүрәт)?

5.21. Бошлуқтики фигуриниң симметрия мәркизи униңға тегишлик болмиши мүмкинму? Мисал кәлтүрүңлар.

5.22. 1) Симметрия мәркизи бар, бирақ симметрия оқи йоқ; 2) симметрия оқи бар, бирақ симметрия мәркизи йоқ бошлуқтики фигурилирға мисал кәлтүрүңлар.

5.23. 1) Симметрия мәркизи бар, бирақ симметрия тәкшилиги йоқ; 2) симметрия оқи бар, бирақ симметрия тәкшилиги йоқ бошлуқтики фигуриларға мисал кәлтүрүңлар.

5.24. 1) Симметрия тәкшилиги бар, бирақ симметрия мәркизи йоқ; 2) симметрия тәкшилиги бар, бирақ симметрия оқи йоқ бошлуқтики фигуриларға мисал кәлтүрүңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

5.25. Тәкшиликтики бурулушниң ениқлимисини тәкрарлаңлар.

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. Томпақ көпяқлиқниң һәрбир чоққисидин үч қири чиқиду. Әгәр униң 12 чоққиси бар болса, у чағда униң нәччә қири болиду:

A) 12; B) 16; C) 18; D) 24?

2. Томпақ көпяқлиқниң һәрбир чоққисида үч үчбулуңлуқ яқлири жиғилиду. Әгәр униң 4 йеқи бар болса, у чағда униң нәччә чоққиси болиду:

A) 4; B) 6; C) 9; D) 12?

3. Томпақ көпяқлиқниң яқлири — үчбулуңлуқлар. Әгәр униң 12 қири бар болса, у чағда униң нәччә йеқи болиду:

A) 6; B) 8; C) 9; D) 12?

4. Томпақ көпяқлиқниң 10 чоққиси билән 15 қири бар. Униң нәччә йеқи болиду:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

5. Томпақ көпяқлиқниң 6 чоққиси билән 5 йеқи бар. Униң нәччә қири болиду:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

6. Томпақ көпяқлиқниң 12 қири билән 8 йеқи бар. Униң нәччә чоққиси болиду:

A) 6; B) 7; C) 8; D) 9?

7. Икосаэдрниң нәччә йеқи болиду:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

8. Додекаэдрниң нәччә чоққиси болиду:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

9. Дурус тетраэдр яқлириниң оттурилири қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду:

A) тетраэдр; B) куб;
C) октаэдр; D) икосаэдр?

10. Куб яқлириниң оттурилири қандақ көпяқлиқниң чоққилири болиду:

A) тетраэдр; B) куб;
C) октаэдр; D) икосаэдр?

11. Додекаэдр йейилмисида нәччә бәшбулуңлук болиду:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

12. Дурус тетраэдрниң қирлири 2 см-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) $\sqrt{3}$ см^2; B) $2\sqrt{3}$ см^2; C) $3\sqrt{3}$ см^2; D) $4\sqrt{3}$ см^2.

13. Тикбулуңлук параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 1 см, 2 см вә 3 см. Параллелепипед бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 11 см^2; B) 18 см^2; C) 22 см^2; D) 28 см^2.

14. Дурус үчбулуңлук призминиң ян қирлири 1 см-ға, асасиниң тәрәплири 2 см-ға тәң. Призма бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) $3 + \sqrt{3}$ см^2; B) $3 + 2\sqrt{3}$ см^2;
C) $6 + \sqrt{3}$ см^2; D) $6 + 2\sqrt{3}$ см^2.

15. Кубниң нәччә симметрия оқи болиду:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

16. Дурус бәшбулуңлук призминиң нәччә симметрия оқи болиду:

A) 5; B) 6; C) 8; D) 9?

17. Дурус тетраэдрниң нәччә симметрия тәкшилиги болиду:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

18. Дурус алтәбулуңлук призминиң нәччә симметрия тәкшилиги болиду:

A) 3; B) 5; C) 7; D) 9?

19. Аш тузиниң кристаллири қандақ көпяқлик шәклини бериду:

A) куб; B) тетраэдр;
C) призма; D) октаэдр?

20. Алмаз кристаллири көпинчә қандақ көпяқлиқниң шәклини бериду:

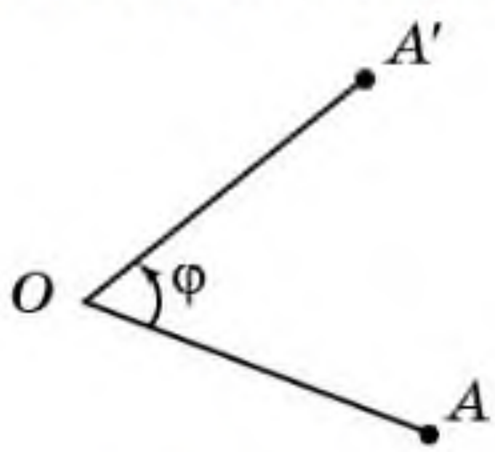
A) куб; B) тетраэдр;
C) призма; D) октаэдр?

II бап АЙЛИНИШ ҖИСИМЛИРИ ВӘ УЛАРНИҢ ЭЛЕМЕНТЛИРИ

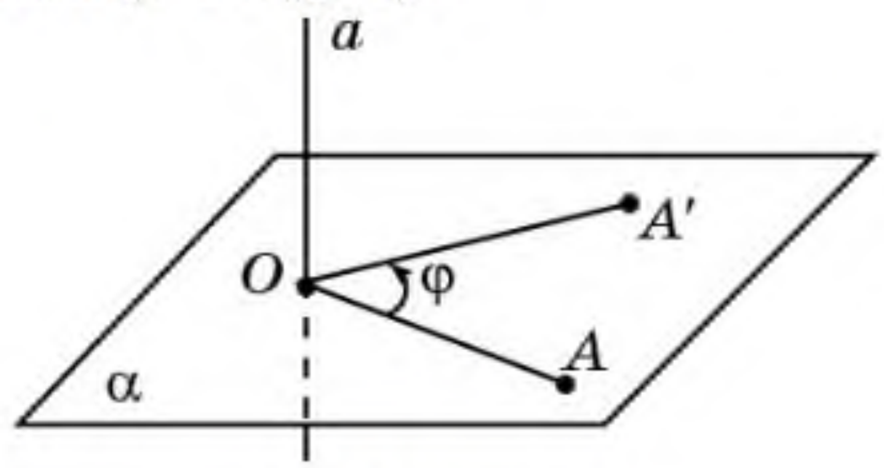
§ 6. Цилиндр вә униң элементлири. Цилиндрниң қийилмиси. Цилиндрниң йейилмиси, ян вә толуқ бетиниң мәйданлири

Бошлуқтики фигурилардиң ичидә көпяқлиқлардин башқа *айлиниш җисимлири* дәп атилидиған фигурилар алаһидә орунни егиләйду.

Әгәр $OA' = OA$ вә $\angle A'OA =$ j болса, у чағда тәкшиликтики A' чекити A чекитини O чекитидин j булуңға айландуруп буриған вақтида пәйда болидиғанлиғини есимизға алайли (6.1-сүрәт).



6.1-сүрәт



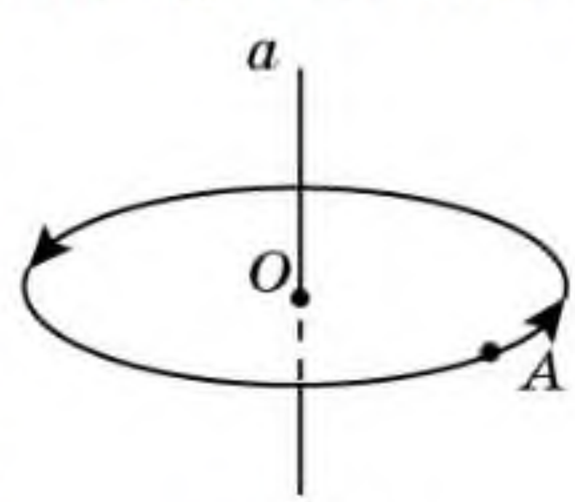
6.2-сүрәт

Бошлуқта a түзи вә мошу түзниң бойида ятмайдиған A чекити берилсун (6.2-сүрәт). A чекити арқилиқ a түзигә перпендикуляр а тәкшилигини җүргүзимиз вә a түзи билән а тәкшилигиниң қийилишиш чекитини O дәп бәлгүләйли. Әгәр а тәкшилигидә A' чекити A чекитини O чекитидин айландуруп j булуңға буриғанда пәйда болса, у чағда бошлуқтики A' чекити A чекитини O чекитидин айландуруп j булуңға бураш арқилиқ елинди дәп ейтиду.

a түзиниң чекитлири орнида қелип, қалған барлиқ чекитләр мошу түздин айлинип, бир йөнилиштә бәлгүлүк j булуңға бурилидиған бошлуқтики түрләндүрүш a түзидин айландуруп *бураш* яки *айлиниш* дәп атилиду. a түзи *айлиниш оқи* дәп атилиду.

Әгәр бошлуқтики Φ фигурисиниң барлиқ чекитлири F фигурисиниң чекитлирини a оқидин айландуруп, бир йөнилиштә бураш вақтида пәйда болса, у чағда Φ фигуриси F фигурисиниң a оқидин айлиниш арқилиқ елинди дәп атайду. Φ фигуриси *айлиниш җисими* дәп атилиду.

Мәсилән, a түзидә ятмайдиған A чекитиниң мошу түзни айлиниш вақтида мәркизи O чекити болидиған чәмбәр пәйда болиду. O чекити A чекити арқилиқ өтүдиған вә a түзигә перпендикуляр тәкшиликниң мошу a түзи билән қийилишиш чекити болиду (6.3-сүрәт).

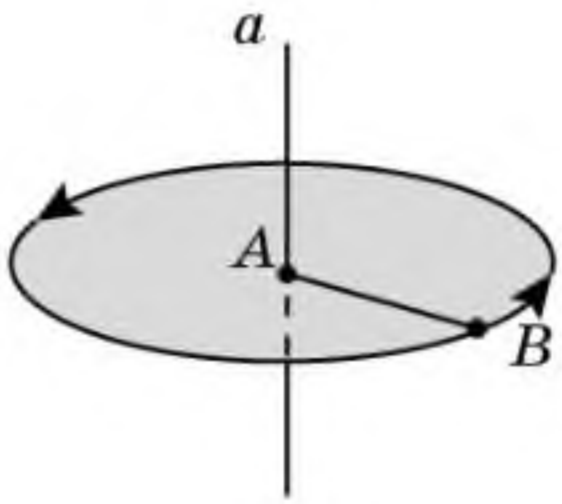


6.3-сүрәт

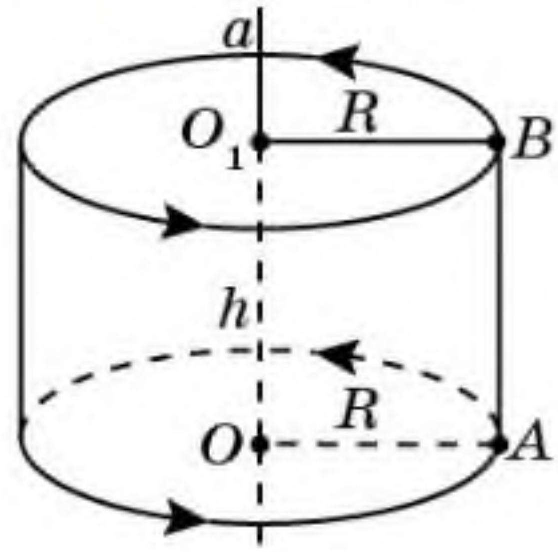
Кесиндиниң униңға перпендикуляр вә униң бир учи арқилиқ өтүдиған түзни айлиниш вақтида радиуси мошу кесиндигә тәң дүгләк пәйда болиду (6.4-сүрәт).

Цилиндр дәп тиктөртбулуңлуқни униң бир тәрипи ятқан түздин айландурғанда пәйда болидиған фигурини (җисимни) атайду.

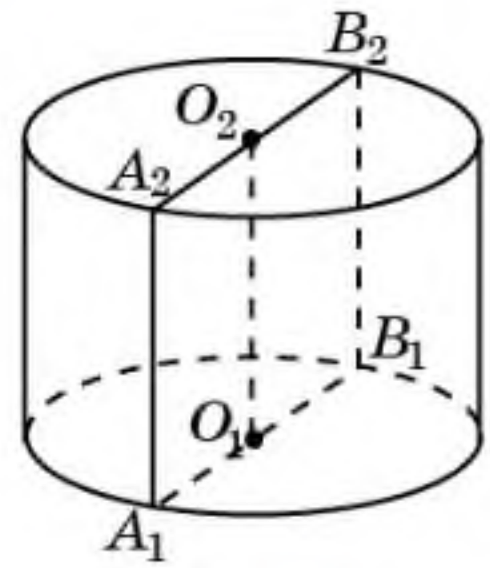
6.5-сүрәттә AOO_1B тиктөртбулуңини OO_1 тәрипи ятқан a түзидин айландурғанда чиққан цилиндр тәсвирләнгән. Тиктөртбулуңлуқниң OO_1 тәрипи *цилиндрниң оқи* дәп атилиду.



6.4-сүрәт



6.5-сүрәт



6.6-сүрәт

Тиктөртбулуңлуқниң OO_1 тәрипигә перпендикуляр болидиған OA вә O_1B тәрәплириниң айлиниши вақтида елинған чәмбәрләр *цилиндрниң асаслири*, уларниң радиуси болса *цилиндрниң радиуси* дәп атилиду.

6.5-сүрәттә цилиндрниң OA радиуси тәсвирләнгән.

Тиктөртбулуңлуқниң OO_1 тәрипигә параллель болидиған AB тәрипиниң айлиниши вақтида елинған бәт *цилиндрниң ян бети* дәп атилиду.

Цилиндрниң толуқ бети асаслири билән ян бетидин туриду. Төртбулуңлуқниң OO_1 тәрипигә параллель болидиған AB тәрипиниң айлиниши вақтида елинған кесиндиләр *цилиндрниң ясиғучиси* дәп атилиду. 6.5-сүрәттә цилиндрниң AB ясиғучиси тәсвирләнгән.

Цилиндрниң асас текшиликлириниң арилиғини *цилиндрниң егизлиги* дәп атайду. 6.5-сүрәттә цилиндрниң OO_1 егизлиги тәсвирләнгән.

Цилиндрниң егизлиги униң ясиғучисиниң узунлиғиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Цилиндрниң оқи арқилиқ өтүдиған текшилик билән кийилмиси *цилиндрниң оқлуқ кийилмиси* дәп атилиду (6.6-сүрәт).

Оқлуқ кийилминиң тәрәплири цилиндрниң асаслириниң диаметрлири вә икки ясиғучиси болуп һесаплиниду. 6.6-сүрәттә $A_1A_2B_2B_1$ оқлуқ кийилмиси тәсвирләнгән.

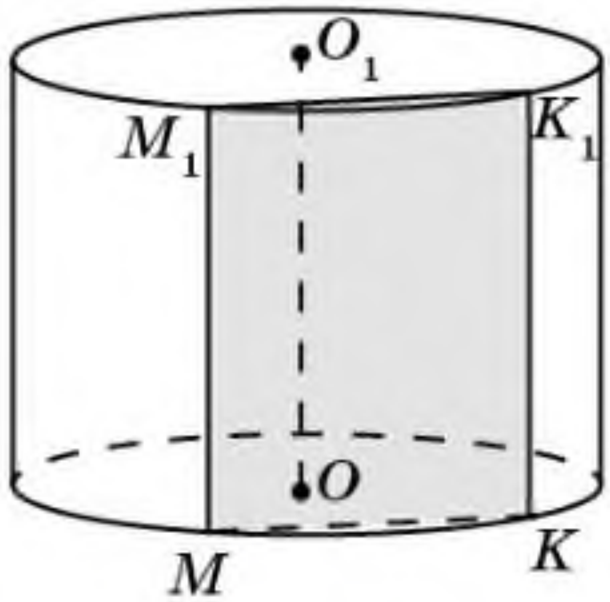
Цилиндрниң оқлуқ кийилмиси тиктөртбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

Цилиндрни мошу тиктөртбулуңлуқни униң қариму-қарши икки тәрипиниң оттуриси арқилиқ өтүдиған түздин айландуруш арқилиқ елишқа болиду.

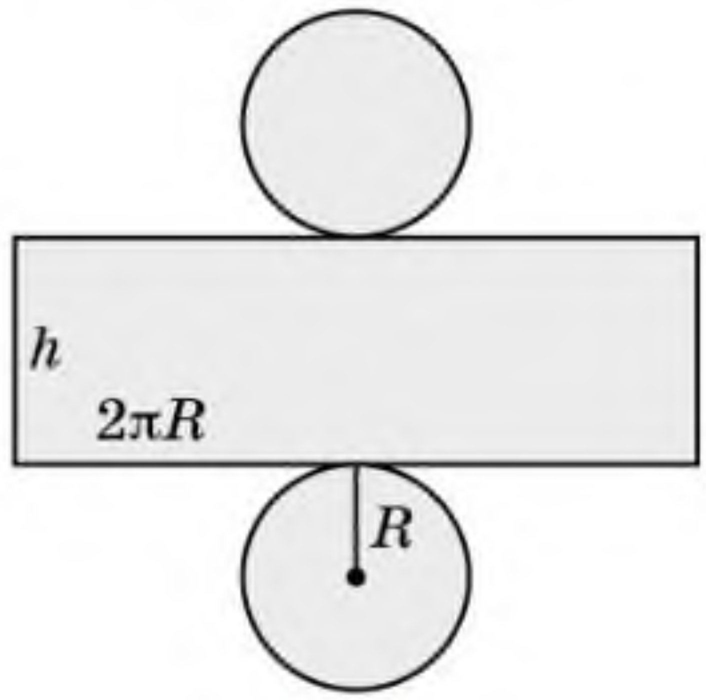
Цилиндрни тиктөртбулуңлуқтин башқа төкши фигуриларни айландуруш арқилиқ елишқа боламду?

Шундақла қийилмини цилиндрниң оқиға параллель жүргүзүшкә болиду (6.7-сүрәт). Сүрәттә MM_1K_1K қийилмиси OO_1 оқиға параллель жүргүзүлгән. Бу қийилма цилиндр билән униң икки ясиғучи арқилиқ өтүдиған тәкшиликниң қийилишишидин пәйда болиду.

Мошу қийилминиңму тиктөртбулуңлуқ болидиғинини испатлаңлар.



6.7-сүрәт



6.8-сүрәт

Әгәр цилиндрниң ян бетини ясиғучиси бойи билән кесип, тәкшиликкә яйсақ вә униңға асаслирини қошсақ, у чағда *цилиндрниң йейилмиси* дәп атилидиған фигура һасил болиду (6.8-сүрәт).

Цилиндрниң толуқ бетиниң мәйдани дәп униң йейилмисиниң мәйданини ейтиду.

Цилиндрниң ян бетиниң мәйдани дәп униң *ян бетиниң йейилмисиниң* мәйданини ейтиду.

Цилиндрниң ян бетиниң мәйдани униң асас чәмбириниң узунлиғи билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду, йәни төвәндики формула билән һесаплиниду:

$$S_{\text{ян бети}} = 2pRh,$$

бу йәрдә R — цилиндр асасиниң радиуси, h — егизлиги.

Цилиндрниң толуқ бетиниң мәйдани униң *ян бети* билән *асаслириниң мәйданлириниң* қошундисиға тәң, йәни төвәндики формула билән һесаплиниду:

$$S_{\text{толуқ}} = 2pRh + 2pR^2 = 2pR(h + R),$$

бу йәрдә R — цилиндр асасиниң радиуси, h — егизлиги.

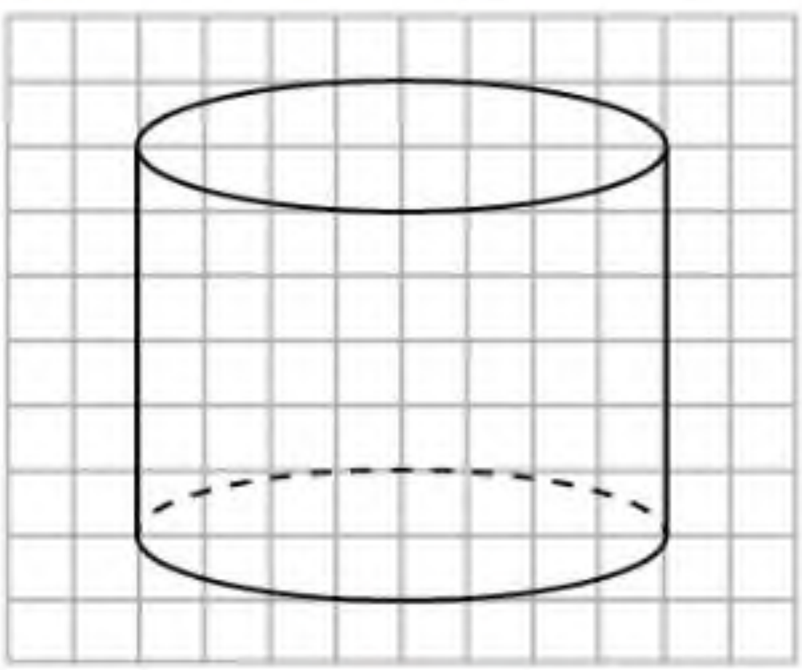
Соаллар

1. Бошлуқтики қандақ түрләндүрүш түздин айландуруп бураш дәп атилиду?
2. Қандақ фигура айлиниш фигуриси дәп атилиду?
3. Қандақ фигура цилиндр дәп атилиду?
4. Цилиндрниң оқи дегинимиз немә?
5. Цилиндрниң асаслири дегинимиз немә?
6. Қандақ фигура цилиндрниң ян бети дәп атилиду?
7. Қандақ кесиндиләр цилиндрниң ясиғучилири дәп атилиду?
8. Цилиндрниң егизлиги дегинимиз немә?
9. Цилиндрниң оқлуқ кийилмиси дегинимиз немә?
10. Цилиндрниң йейилмиси дегинимиз немә?
11. Цилиндр бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
12. Цилиндрниң ян бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
13. Цилиндрниң ян бетиниң мәйданини һесаплаш формулисини йезиңлар.
14. Цилиндрниң толуқ бетиниң мәйданини һесаплаш формулисини йезиңлар?

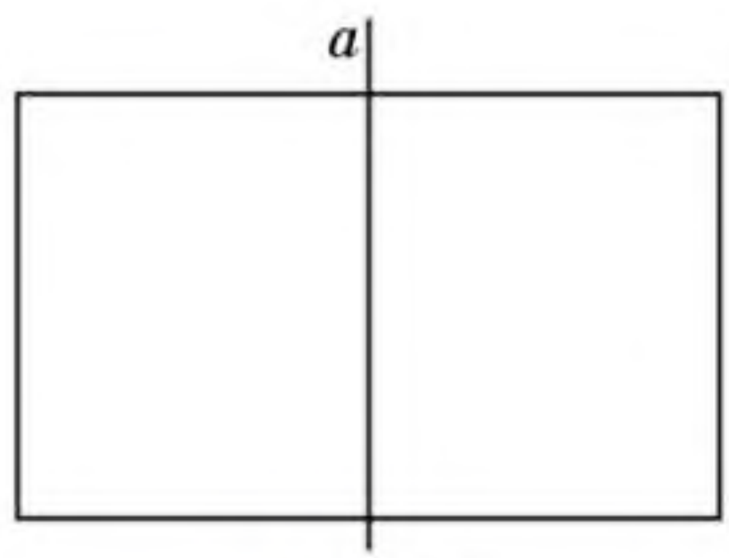
Һесаплар

A

6.1. Чақмақ қәғәзгә 6.9-сүрәттики охшаш цилиндр селиңлар. Цилиндрниң оқлуқ кийилмисини тәсвирләңлар.



6.9-сүрәт



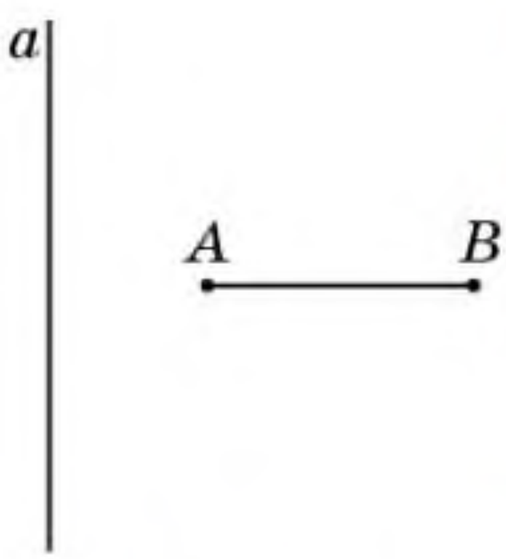
6.10-сүрәт

6.2. Цилиндрниң қанчә ясиғучиси болиду?

6.3. Цилиндрниң асаслириға параллель тәкшилик билән кийилмиси қандақ фигура болиду?

6.4. Тиктөртбулуңлуқни униң қариму-қарши ятқан тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған түз билән айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (6.10-сүрәт)?

6.5. AB кесиндисини мошу кесиндә билән бир тәкшиликтә ятидиған, умумий чекитлири болмайдиған вә униңға перпендикуляр түздин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (6.11-сүрәт)?



6.11-сүрәт

6.6. Цилиндрниң егизлиги 3 см-ға, асасиниң радиуси 2 см-ға тәң болса, униң оқлуқ қийилмисиниң диагоналини тепиңлар.

6.7. Цилиндрниң ян бетиниң йейилмиси — тәрипи 1 см-ға тәң квадрат. Асасиниң радиусини тепиңлар.

6.8. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Униң: 1) ян бетиниң; 2) толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар.

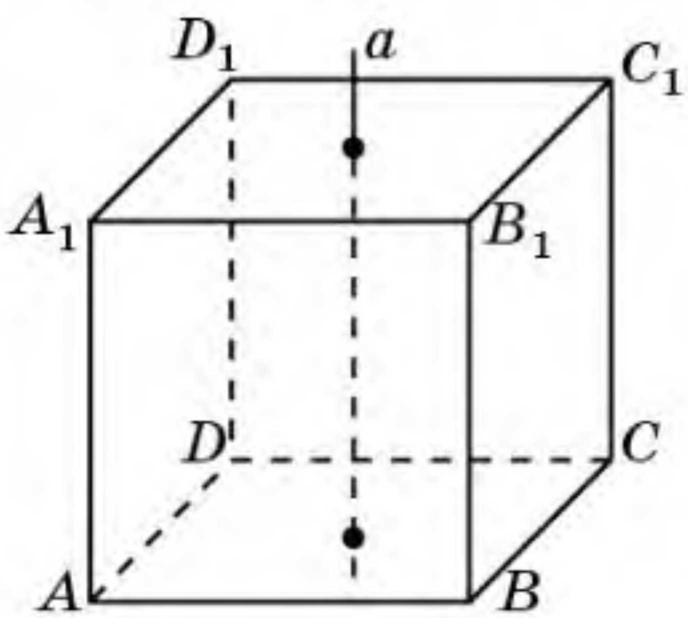
В

6.9. Чақмақ қәғәзгә 6.9-сүрәттики охшаш цилиндр селиңлар. Униң асаслириға параллель тәкшилик билән қийилмисини тәсвирләңлар.

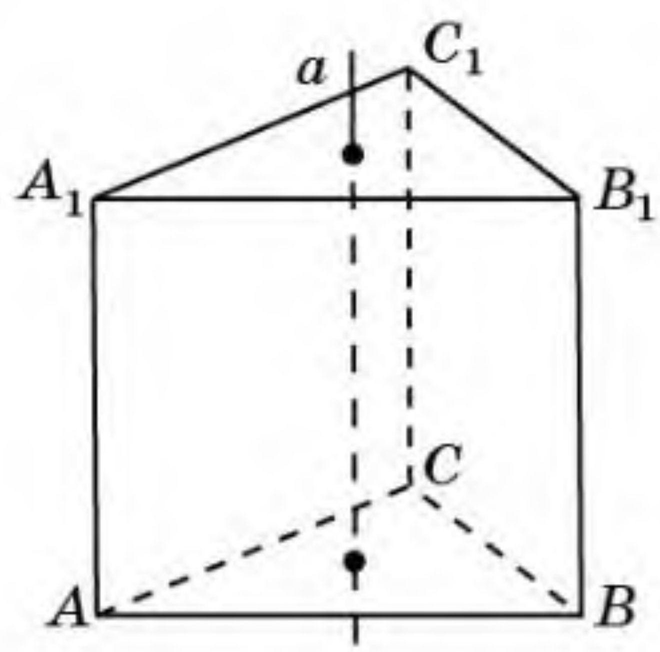
6.10. Чақмақ қәғәзгә 6.9-сүрәттикигә охшаш цилиндр селиңлар. Мошу цилиндрниң оқиға параллель тәкшилик билән қийилмисини тәсвирләңлар. У қандақ фигура болиду?

6.11. Цилиндрниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

6.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубини: 1) AA_1 түзидин; 2) қариму-қарши яқлириниң мәркәзлирини қошидиған түздин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (6.12-сүрәт)?



6.12-сүрәт



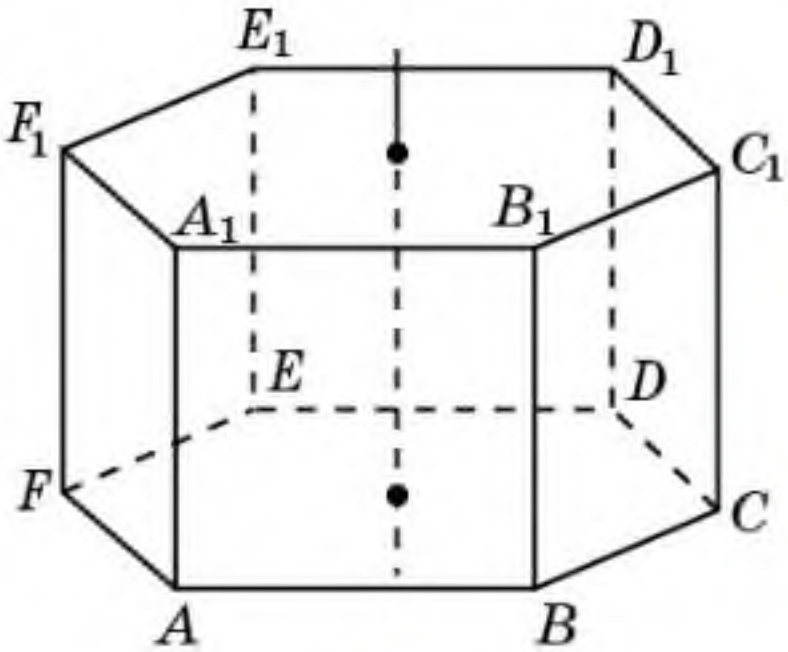
6.13-сүрәт

6.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубни: 1) AA_1 түзидин; 2) қариму-қарши яқлириниң мәркәзлирини қошидиған түздин айландурғанда һасил болған цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

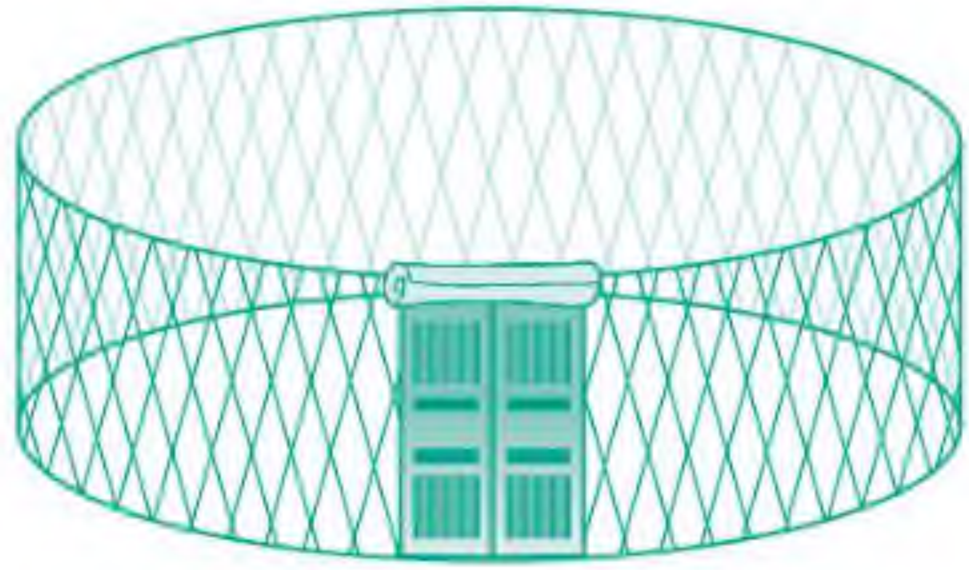
6.14. Дурус үчбулуңлуқ призмини униң: 1) ян қири арқилиқ өтүдиған түздин; 2) асаслириниң мәркәзлири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (6.13-сүрәт)?

6.15. Дурус үчбулуңлуқ призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини униң: 1) ян қирлири арқилиқ өтүдиған түздин; 2) асаслириниң мәркәзлиридин өтүдиған түздин айландурғанда һасил болған цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар (6.13-сүрәт).

6.16. Дурус алтәбулуңлук призмини униң: 1) ян қири ятидиған түздин; 2) асаслириниң мәркәзлири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда қандақ фигура һасил болиду (6.14-сүрәт)?



6.14-сүрәт


6.15-сүрәт

6.17. Дурус алтәбулуңлук призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини униң: 1) ян қири ятқан түздин; 2) асаслириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда һасил болған цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар (6.14-сүрәт).

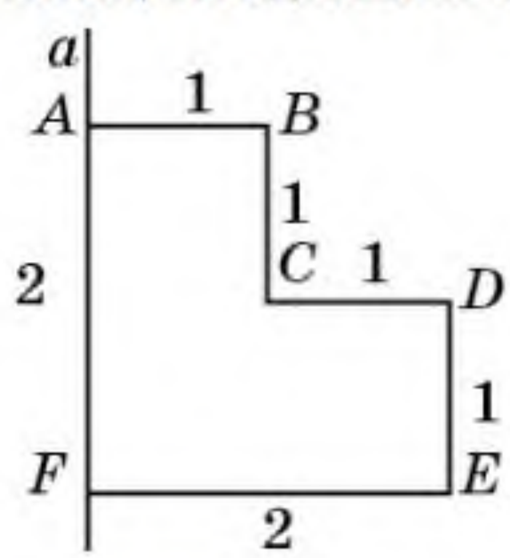
6.18. Кигиз өй — көчмәнләрниң қедимий замандин мәлум яшайдиған өйи (6.15-сүрәт). Егизлиги 2 м, асас диаметри 5 м болидиған кигиз өйниң (керегеси) ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

6.19. Цилиндрниң радиуси 6 см, егизлиги 5 см. Цилиндрниң оқиға параллель вә асас чәмбиридин 60° доғини кийип чүширидиған тәкшилик билән кийгәнда пәйда болған кийилминиң мәйданини тепиңлар.

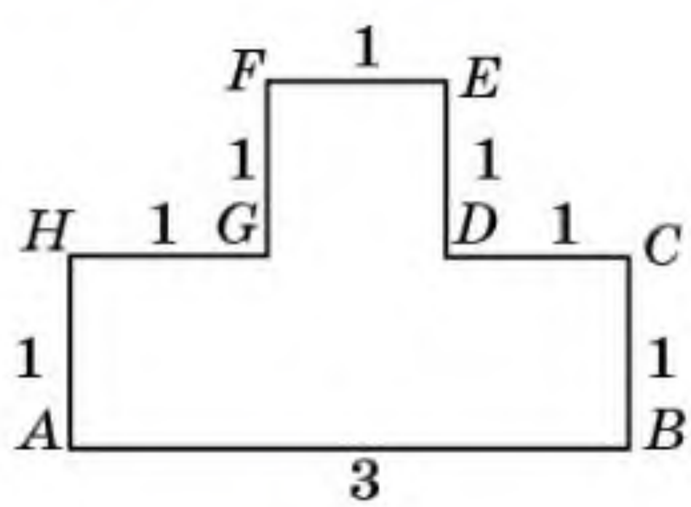
6.20. Цилиндрниң бир ясиғучиси арқилиқ өз ара перпендикуляр икки кийилма жүргүзүлгән вә уларниң мәйданлири 10 см^2 вә 24 см^2. Цилиндрниң оқлуқ кийилмисиниң мәйданини тепиңлар.

C

6.21. 6.16-сүрәттики хошна тәрәплири тикбулуң ясайдиған $ABCDEF$ көпбулуңлуғини AF түзидин айландурғанда пәйда болидиған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.



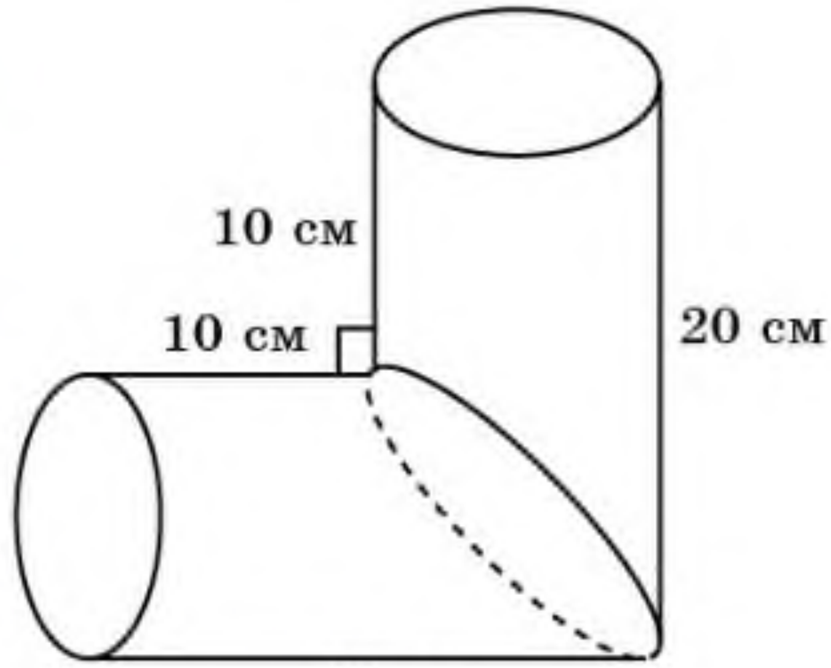
6.16-сүрәт



6.17-сүрәт

6.22. 6.17-сүрәттики хошна тәрәплири тик булуң ясайдиған *ABCDEFGH* көпбулуңлиғини *AB* түзидин айландурғанда пәйда болидиған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

6.23. 6.18-сүрәттики 90° булуң ясайдиған цилиндрларниң икки тәң бөлигидин туридиған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.



6.18-сүрәт

6.24. Цилиндрниң оқиға параллель вә асас чәмбиридин a доғини кийип чүширидиған тәкшилик жүргүзүлгән. Пәйда болған кийилминиң диагонали билән цилиндрниң ясиғучиси арисидики булуң b-ға тәң. Цилиндрниң радиуси *R*-ға тәң. Кийилминиң мәйданини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

6.25. Тәңянлиқ үчбулуңлуқниң вә дүгләк секторниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§ 7. Конус вә униң элементлири. Конусниң тәкшилик билән кийилмиси. Конусниң йейилмиси, ян вә толуқ бетиниң мәйданлири

Конус дәп тикбулуңлуқ үчбулуңлуқни униң бир катети ятқан түздин айландурғанда пәйда болидиған фигурини (жисимни) атайду.

Бизгә *ABO* тикбулуңлуқ үчбулуңлиғи берилсун (7.1-сүрәт). Әгәр мошу тикбулуңлуқ үчбулуңлуқни униң *AO* катети арқилиқ өтүдиған *a* түзи арқилиқ айландурсақ, нәтижисидә айлиниш жисими — конусни алимиз.

Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң *AO* катети *конусниң оқи* дәп атилиду.

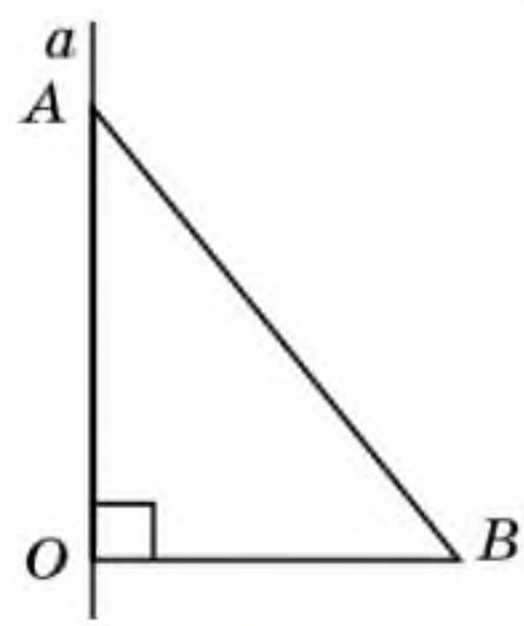
AO катетиға перпендикуляр болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң *BO* тәрипиниң айлиниши нәтижисидә елинған дүгләк *конусниң асаси*, униң радиуси болса *конусниң радиуси* дәп атилиду.

7.2-сүрәттә конусниң *OB* радиуси тәсвирләнгән.

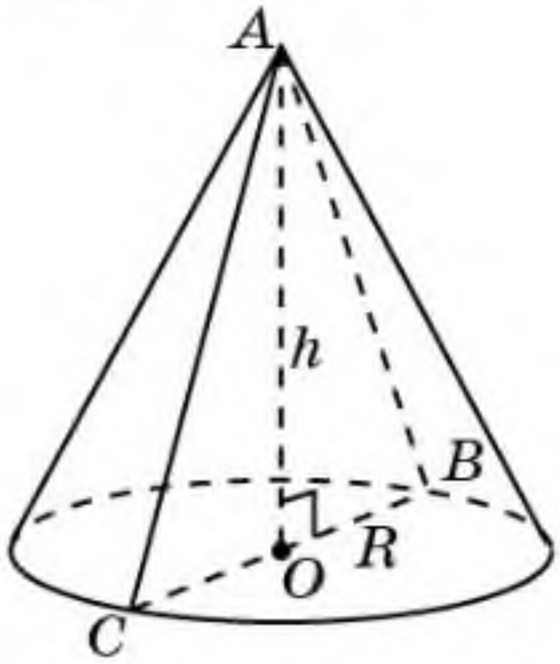
Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң *AB* гипотенузисиниң айлиниши вақтида пәйда болидиған бәт *конусниң ян бети* дәп атилиду.

Конусниң толуқ бети асаси билән ян бетидин туриду.

Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң *AB* гипотенузисиниң *AO* катетидин айлиниш вақтида елинған кесиндиләр *конусниң ясиғучиси* дәп атилиду.



7.1-сүрәт



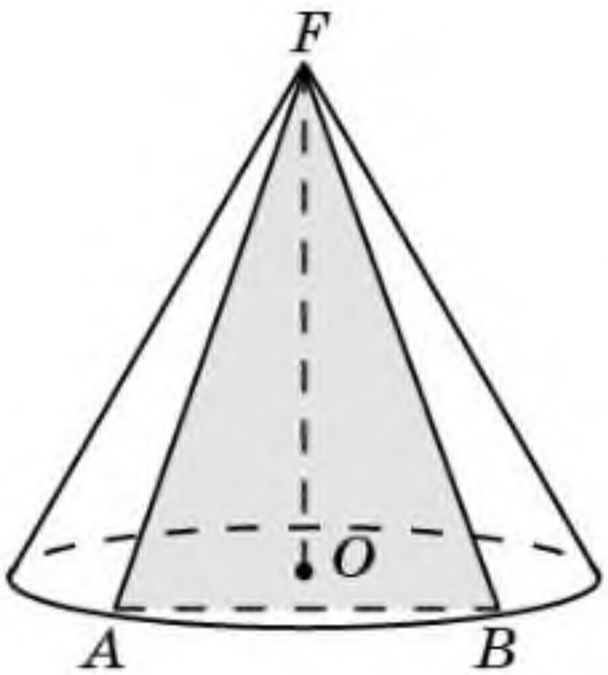
7.2-сүрәт

7.2-сүрәттә конусниң AB вә AC ясиғучилири тәсвирләнгән.

Конусниң оқи арқилиқ өтүдиған тәкшилик билән қийилмиси конусниң *оқлуқ қийилмиси* дәп атилиду (7.2-сүрәт).

Оқлуқ қийилминиң ян тәрәплири конус асасиниң диаметри вә икки ясиғучиси болуп һесаплиниду. 7.2-сүрәттә CAB оқлуқ қийилмиси тәсвирләнгән.

Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңянлиқ үчбулуңлуқ, униң асаси конус асасиниң диаметри болидиғанлиғини испатлаңлар.



7.3-сүрәт

Конусни мошу тәңянлиқ үчбулуңлуқниң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландуруш арқилиқ елишқа болиду. Тәңянлиқ үчбулуңлуқниң асасиға қарши ятқан чоққиси *конусниң чоққиси* дәп атилиду.

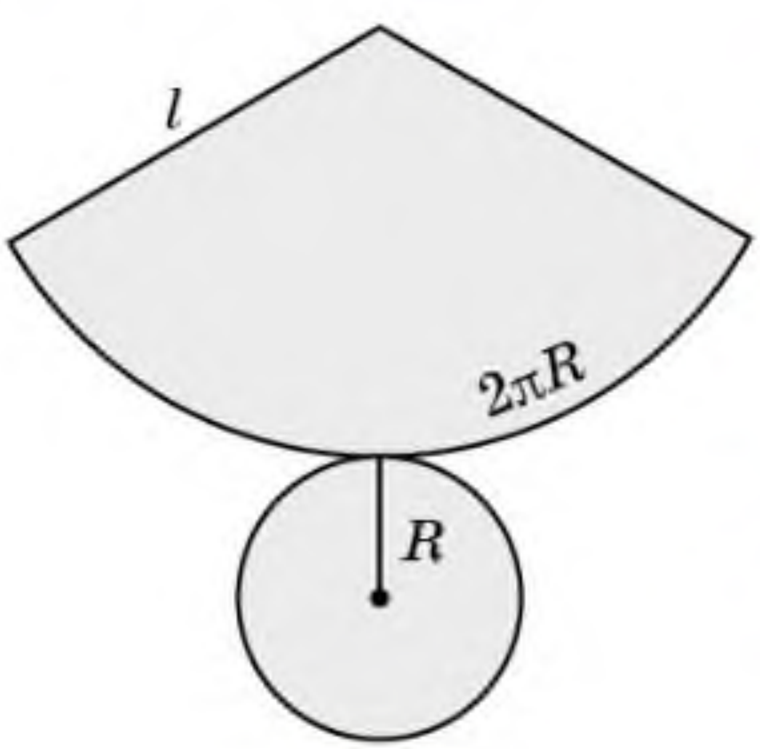
Конусниң чоққисидин униң асас тәкшилигигә чүширилгән перпендикулярниң узунлиғи *конусниң егизлиги* дәп атилиду.

7.2-сүрәттә конусниң AO егизлиги тәсвирләнгән.

Қандақ ойлайсиләр, конусни үчбулуңлуқ әмәс вә тәңянлиқ әмәс үчбулуңлуқни айландуруш арқилиқ елишқа боламду?

Шундақла қийилмини конусниң чоққиси вә асасиниң хордиси арқилиқму жүргүзүшкә болиду (7.3-сүрәт). Сүрәттә AFB қийилмиси конусниң F чоққиси вә асасиниң AB хордиси арқилиқ өтүдиған тәкшилик билән қийилишишидин елинған. Йәни, тәкшилик конусниң асасини хорда бойи билән, ян тәрипини икки ясиғучиси бойи билән қийип өтиду.

Мошу қийилминиңму тәңянлиқ үчбулуңлуқ болидиғинини испатлаңлар.



7.4-сүрәт

Әгәр конусниң ян бетини ясиғучиси бойи билән кесип, тәкшиликкә яйидиған болсақ вә униңға асасини қошсақ, у чағда *конусниң йейилмиси* дәп атилидиған фигура пәйда болиду (7.4-сүрәт).

Конусниң толуқ бетиниң мәйдани дәп униң йейилмисиниң мәйданини атайду.

Конуснин ян бетиниң мәйдани дәп униң ян бетиниң йейилмисиниң мәйданини атайду.

Конуснин ян бетиниң мәйдани униң асасидики чәмбәрниң узунлиғи билән ясиғучисиниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду, йәни төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$S_{ян} = \mathrm{p}Rl,$$

бу йәрдә R — конус асасиниң радиуси, l — ясиғучиси.

Конуснин толуқ бетиниң мәйдани униң ян бети билән асасиниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду, йәни төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$S_{толуқ} = \mathrm{p}Rl + \mathrm{p}R^2 = \mathrm{p}R(l + R),$$

бу йәрдә R — конус асасиниң радиуси, l — ясиғучиси.

Соаллар

1. Қандақ фигура конус дәп атилиду?
2. Конуснин оқи дегинимиз немә?
3. Конуснин асаси дегинимиз немә?
4. Қандақ фигура конуснин ян бети дәп атилиду?
5. Қандақ кесиндиләр конуснин ясиғучилири дәп атилиду?
6. Конуснин оқлуқ қийилмиси дегинимиз немә?
7. Конуснин чоққиси дегинимиз немә?
8. Конуснин егизлиги дегинимиз немә?
9. Қандақ фигура конуснин йейилмиси дәп атилиду?
10. Конус бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
11. Конуснин ян бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
12. Конуснин ян бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.
13. Конуснин толуқ бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.

Һесаплар

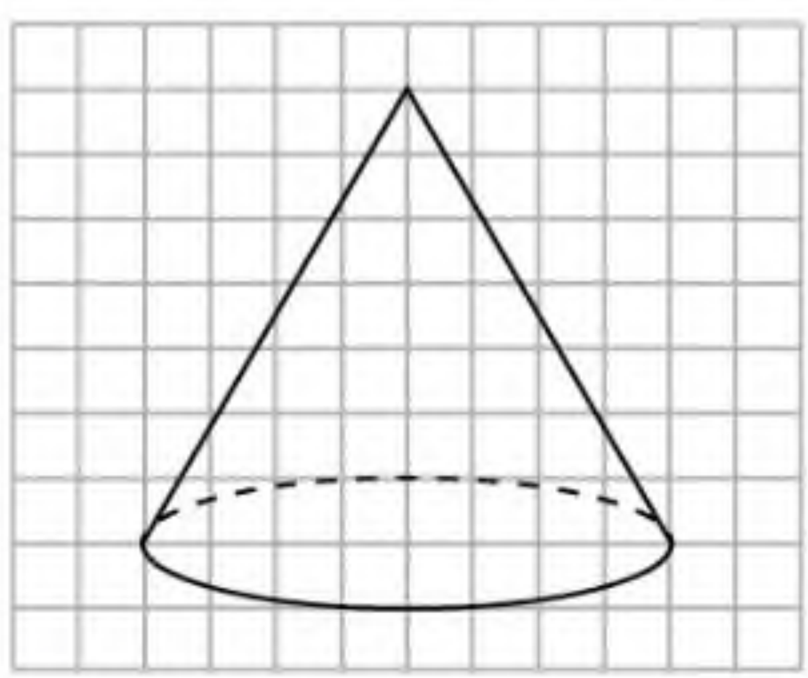
А

7.1. Чақмақ қәғәзгә 7.5-сүрәттикигә охшаш конусни селиңлар. Конуснин оқлуқ қийилмисини тәсвирләңлар.

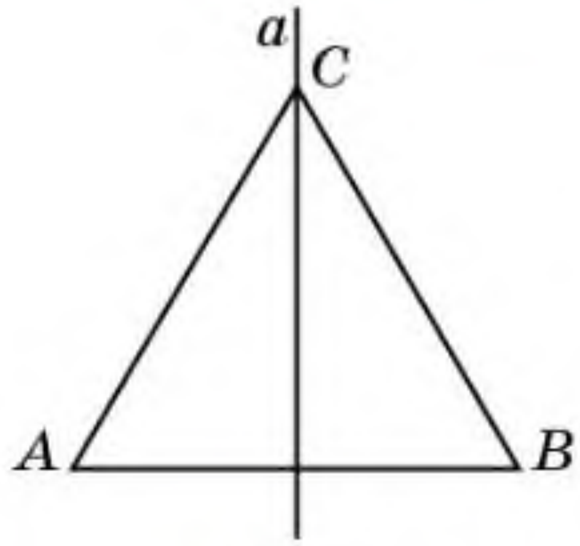
7.2. Конуснин қанчә ясиғучиси болиду?

7.3. Конуснин асасиға параллель тәкшилик билән қийилмиси қандақ фигура болиду?

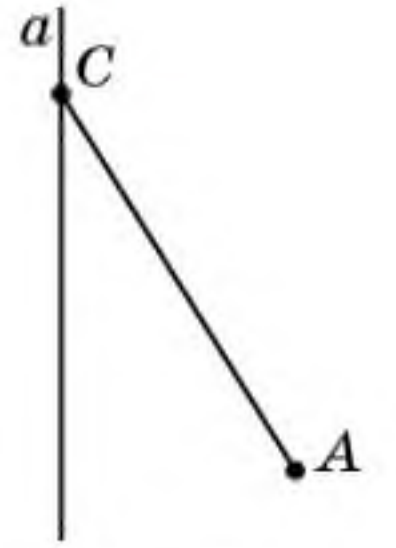
7.4. Тәңянлиқ үчбулуңлуқни униң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (7.6-сүрәт)?



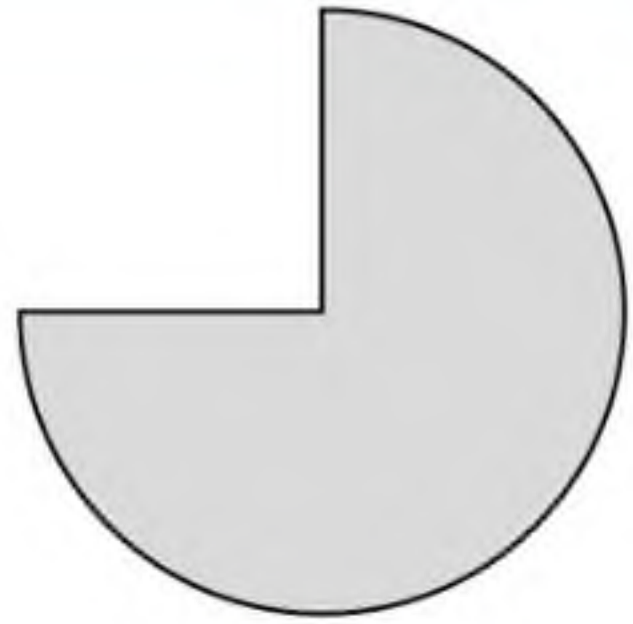
7.5-сүрәт



7.6-сүрәт



7.7-сүрәт



7.8-сүрәт

7.5. *AC* кесиндисини *C* чекити арқилиқ өтүдиған вә униңға перпендикуляр әмәс түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (7.7-сүрәт)?

7.6. Конус асасиниң радиуси 3 см-ға, егизлиги 4 см-ға тәң. Конусниң ясиғучисини тепиңлар.

7.7. Конусниң оқлуқ кийилмиси — тәрәплири 10 см болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Конусниң: 1) асасиниң радиусини; 2) егизлигини тепиңлар.

7.8. Конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилигигә 30° булуң ясап янтийиду. Конусниң егизлигини тепиңлар.

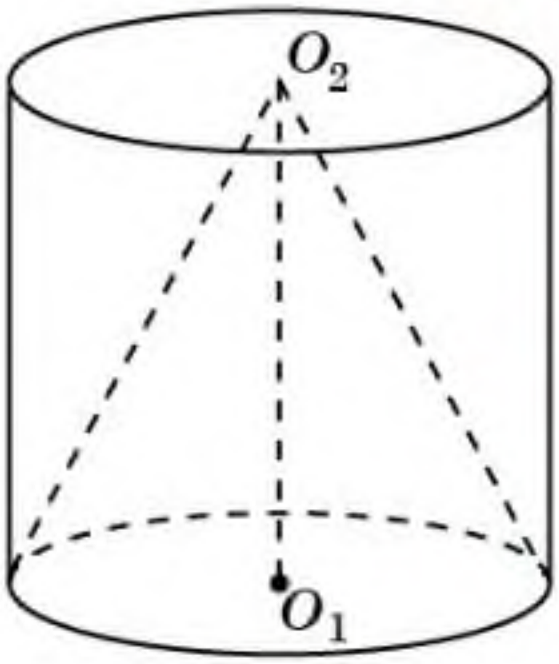
7.9. Конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилигигә 60° булуң ясап янтийиду. Конус асасиниң радиусини тепиңлар.

7.10. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси болса 2 см-ға тәң. Конус бетиниң мәйданини тепиңлар.

7.11. 7.8-сүрәттики дүгләкниң бөлиги конусниң ян бетиниң йейилмиси боламду?

B

7.12. Конус асасиниң радиуси 1см-ға тәң. Конус егизлигиниң оттуриси арқилиқ өтүдиған вә асас тәкшилигигә параллель тәкшилик билән кийилмисиниң мәйданини тепиңлар.



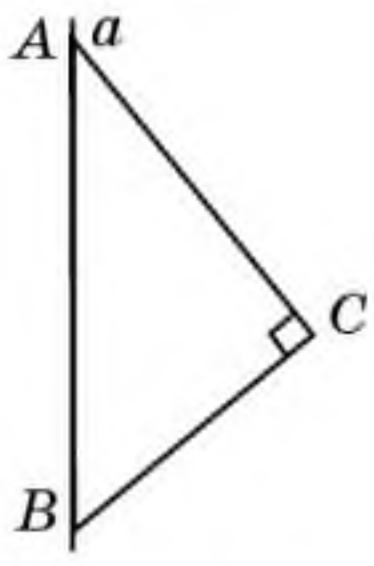
7.9-сүрәт

7.13. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Асаси цилиндрниң бир асаси, чоққиси болса цилиндрниң иккинчи асасиниң мәркизи болидиған конусниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар (7.9.-сүрәт).

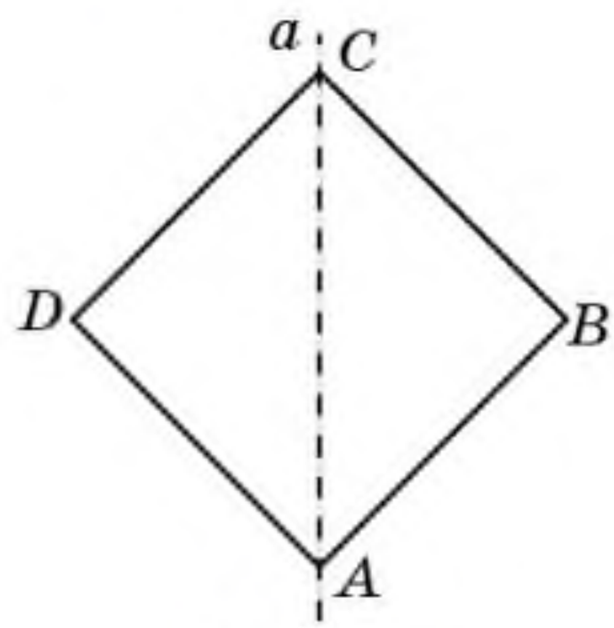
7.14. Конусниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

7.15. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқни униң гипотенузиси ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (7.10-сүрәт)?

7.16. Бирлик квадратни униң диагонали ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (7.11-сүрәт)? Фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.



7.10-сүрәт

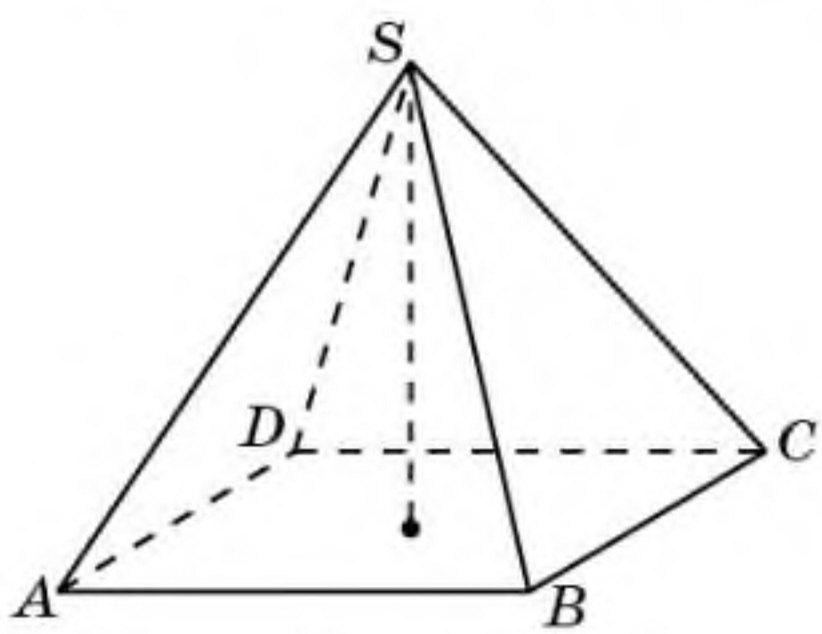


7.11-сүрәт

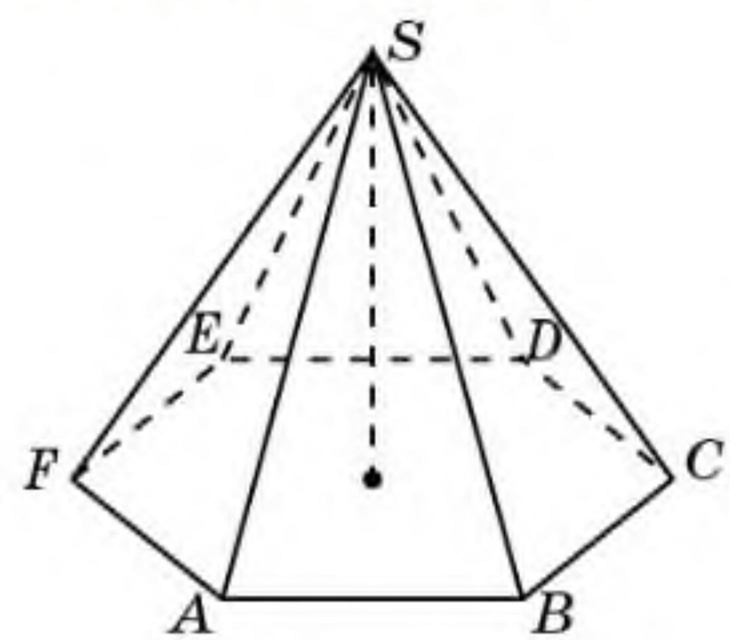
7.17. Дурус төртбулуңлук пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (7.12-сүрәт)?

7.18. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда пәйда болидиған конус бетиниң мәйданини тепиңлар (7.12-сүрәт).

7.19. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (7.13-сүрәт)?



7.12-сүрәт



7.13-сүрәт

7.20. Асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири болса 2 см-ға тәң дурус алтәбулуңлуқ пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда пәйда болидиған конус бетиниң мәйданини тепиңлар (7.13-сүрәт).

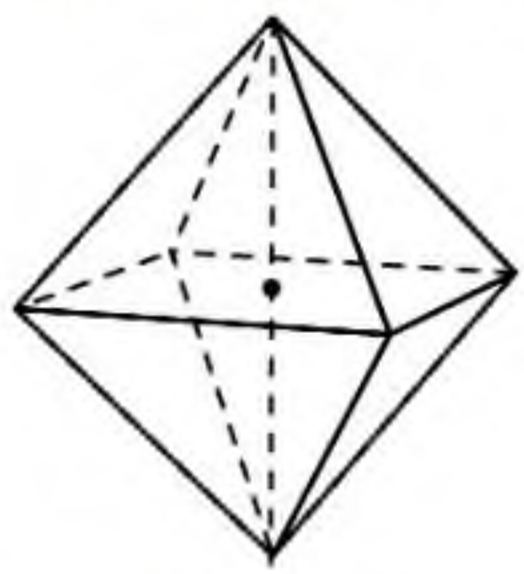
7.21. Конусниң егизлиги 4 см, әнди асас чәмбириниң хордиси 6 см-ға тәң вә у 90°-лиқ доғини кериду. Конусниң чоққиси билән мошу хорда арқилиқ өтүдиған тәкшилик билән кийилмисиниң мәйданини тепиңлар.

7.22. Конусниң егизлиги h-қа тәң, әнди униң егизлиги билән ясиғучисиниң арисидики булуң 60°. Конусниң өз ара перпендикуляр икки ясиғучиси арқилиқ өтүдиған тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданини тепиңлар.

C

7.23. Октаэдрни униң қариму-қарши ятқан чоққилирини қошидиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (7.14-сүрәт)? Октаэдрниң қири 1 см-ға тәң дәп елип, пәйда болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.

7.24. Конусниң ян бетиниң йейилмиси — радиуси 1 см-ға тәң йерим дүгләк. Конус асасиниң радиусини тепиңлар.



7.14-сүрәт

7.15-сүрәт

7.25. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 3 см-ға тәң. Конусниң ян бетиниң йейилмисиниң мәркәзлик булуңини тепиңлар.

7.26. Конус шәклидә жиғилған чөп догисини төмүр тахтиси билән йепиш керәк. Униң егизлиги 2 м-ға, асасиниң диаметри болса 6 м-ға тәң. Әгәр барлиқ тахта бетиниң 10% -и уларни йепиштуридиғанға кетидиған болса, у чағда чөпни йепиш үчүн 0,7 м × 1,4 м өлчимидә қанчә тахта керәк болиду (p d 3)?

7.27. Қурулуш мәйданидики конус шәклидә догиланған қумниң асас чәмбириниң узунлиғини метрлиқ лента билән өлчигәндә 21,6 м болди (7.15-сүрәт). Метрлиқ лентини догиниң чоққиси арқилиқ ташлап өлчигәндә, униң икки ясиғучисиниң узунлиғи 7,8 м екәнлиги ениқланди. Догиланған қум бетиниң мәйданини тепиңлар (p d 3).

7.28. Асийәм туғулған күнигә бағлиқ қәғәздин егизлиги 8 см, асасиниң радиуси болса 6 см болидиған конусниң ян бетигә охшаш 8 тал баш кийим тәйярлимақчи болди. Униңға баш кийимләрни тәйярлаш үчүн қанчә (см^2) қәғәз керәк екәнлигини тепиңлар (p d 3).

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

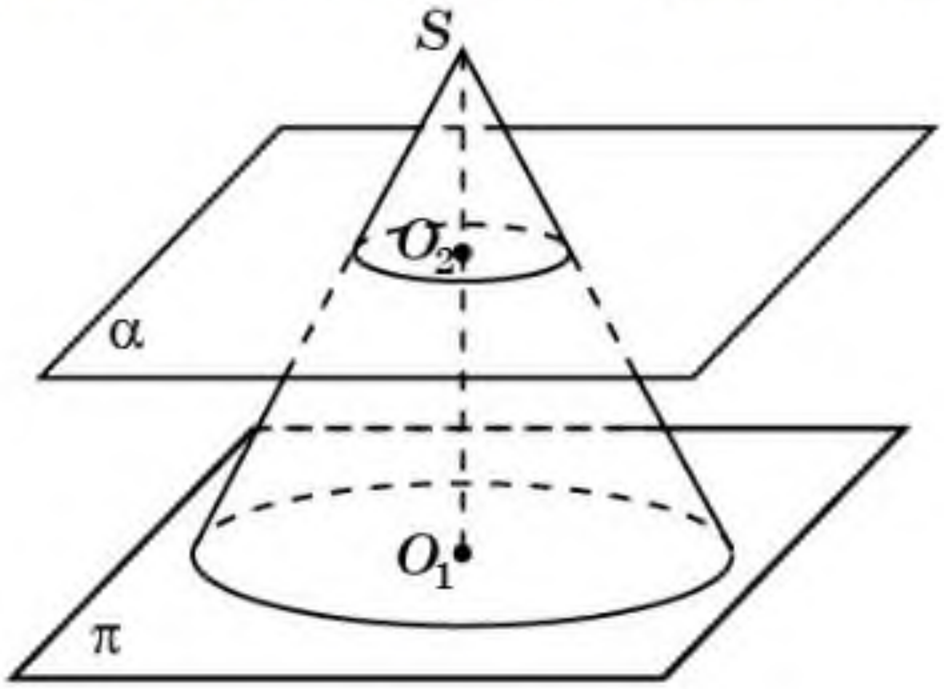
7.29. Дүгләк төңгиниң ениқлимисини вә униң мәйданини тепиш формулисини тәкрарлаңлар.

§ 8. Қийиқ конус вә униң элементлири. Қийиқ конус бетиниң мәйдани

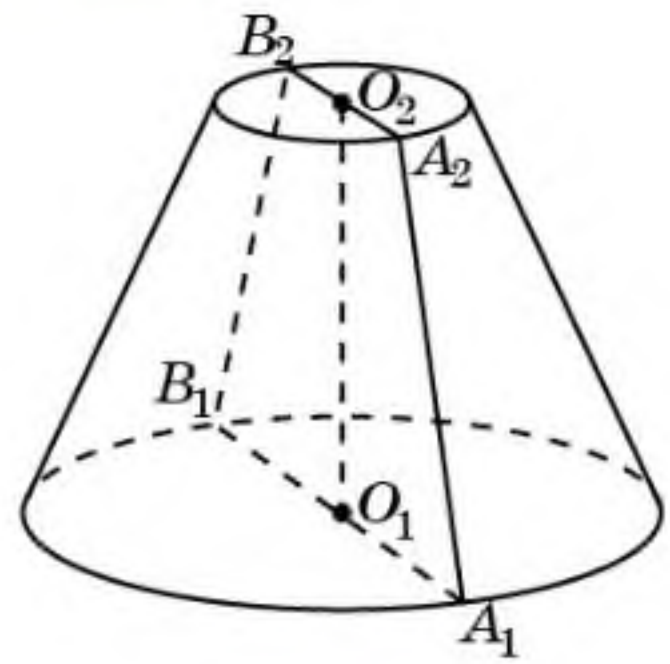
Әгәр конусни асас тәкшилигигә параллель тәкшилик билән қийип өтсә, у чағда конусниң мошу тәкшилик билән асас тәкшилигиниң арисидики чәкләнгән бөлиги *қийиқ конус* дәп атилиду (8.1-сүрәт).

Конусниң асас тәкшилигигә параллель тәкшилик билән қийилмиси *қийиқ конусниң асаси* дәп атилиду. Шуниң билән, қийиқ конусни чәкләйдиған дүгләкләрни униң *асаслири* дәп атайду.

Конусниң оқи *қийиқ конусниң оқи* дәп атилиду.



8.1-сүрәт



8.2-сүрәт

Қийиқ конус асаслириниң арисидики чәкләнгән конусниң ян бетиниң бөлиги *қийиқ конусниң ян бети* дәп атилиду.

Қийиқ конус асаслириниң арисида чәкләнгән конус ясиғучиларниң кесиндилири *қийиқ конус ясиғучилири* дәп атилиду.

Қийиқ конусниң асас тәкшиликлириниң арисидики арилиқ *қийиқ конусниң егизлиги* дәп атилиду.

Қийиқ конусниң оқи арқилиқ өтидиған тәкшилик билән қийилмиси *қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси* дәп атилиду (8.2-сүрәт).

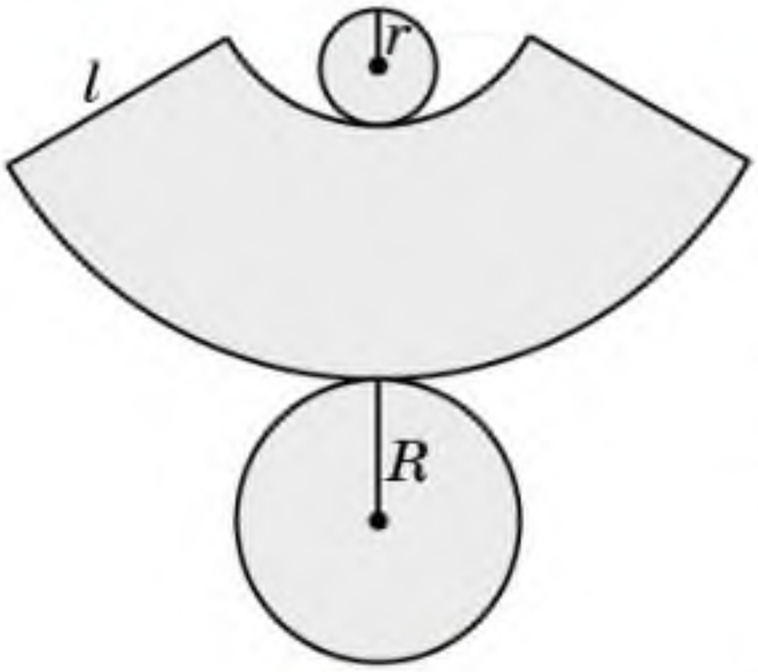
Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси тәңянлиқ трапеция болидиғанлиғини испатлаңлар.

Қийиқ конусни мошу тәңянлиқ трапецияни униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландуруш арқилиқ елишқа болиду.

Қийиқ конусни тәңянлиқ әмәс трапецияни айландуруш арқилиқ елишқа боламду?

Әгәр қийиқ конусниң ян бетини ясиғучиси бойи билән кесип, тәкшиликкә яйидиған болсақ вә униңға асаслирини қошсақ, у чағда қийиқ конусниң йейилмиси дәп атилидиған фигура пәйда болиду (8.3-сүрәт).

Қийиқ конус бетиниң мәйдани дәп униң йейилмисиниң мәйданини атайду.



8.3-сүрәт

Қийиқ конусниң ян бетиниң мәйдани дәп униң ян бетиниң йейилмисиниң мәйданини атайду.

Әгәр қийиқ конус асаслириниң радиуслири R вә r, ясиғучиси l-ға тәң болса, у чағда қийиқ конусниң ян бетиниң мәйдани төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$S_{\text{ян}} = \pi(R + r)l.$$

Қийиқ конусниң толуқ бетиниң мәйданини елиш үчүн униң ян бетиниң мәйданиға асаслириниң мәйданлирини қошуш керәк:

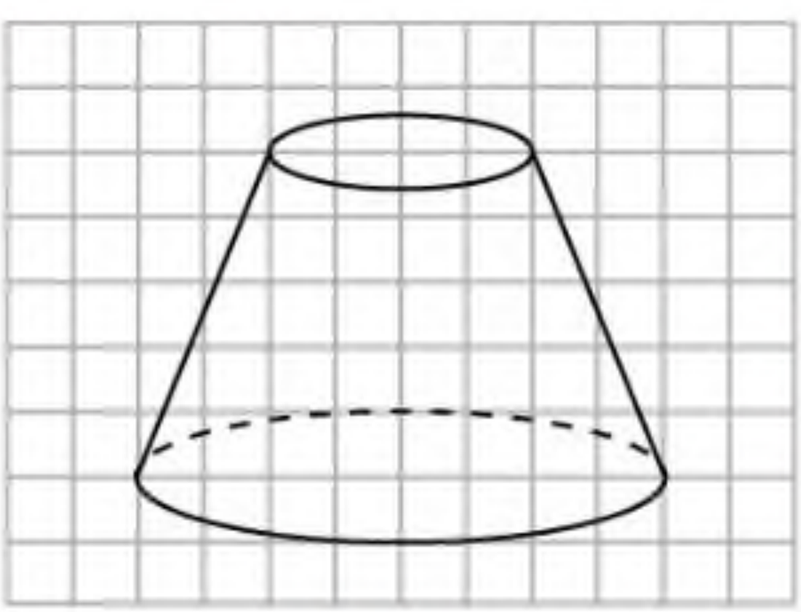
$$S_{\text{толуқ}} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Соаллар

1. Қандақ фигура қийиқ конус дәп атилиду?
2. Қийиқ конусниң асаслири дегинимиз немә?
3. Қийиқ конусниң егизлиги дегинимиз немә?
4. Қийиқ конусниң оқи дегинимиз немә?
5. Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси дегинимиз немә?
6. Қандақ фигура қийиқ конусниң йейилмиси дәп атилиду?
7. Қийиқ конус бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
8. Қийиқ конусниң ян бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
9. Қийиқ конусниң ян бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.
10. Қийиқ конусниң толуқ бетиниң мәйданини тепиш формулисини йезиңлар.

Һесаплар

A



8.4-сүрәт

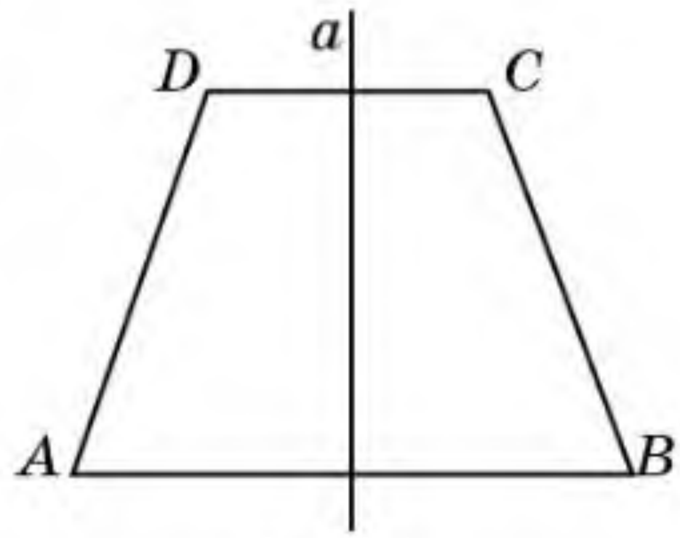
8.1. Чақмақ қәғәзгә 8.4-сүрәттики охшаш қийиқ конусни селиңлар. Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмисини тәсвирләңлар.

8.2. Қийиқ конусниң қанчә ясиғучиси болиду?

8.3. Қийиқ конусниң асасиға параллель тәкшилик билән қийилмиси қандақ фигура болиду?

8.4. Тәңянлиқ трапецияни униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (8.5-сүрәт)?

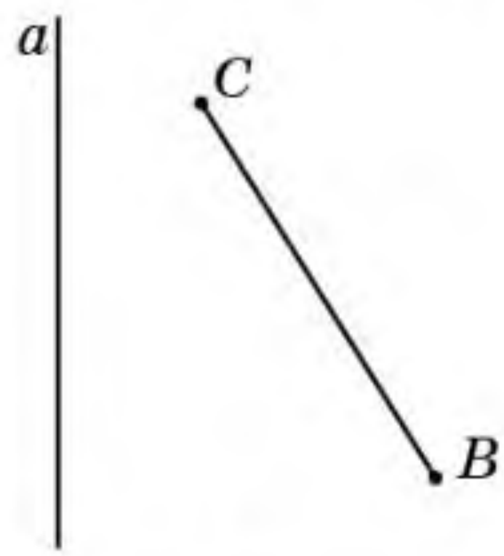
8.5. *BC* кесиндисини мошу кесиндә билән бир тәкшиликтә ятидиған, умумий чекити болмайдиған вә униңға параллельму, перпендикулярму әмәс түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (8.6-сүрәт)?



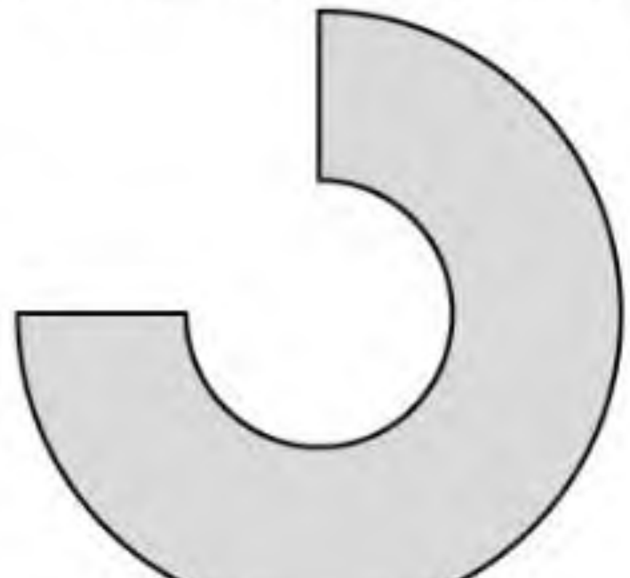
8.5-сүрәт

8.6. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 6 см вә 2 см, егизлиги болса 3 см-ға тәң. Қийиқ конусниң ясиғучисини тепиңлар.

8.7. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 6 см вә 2 см, ясиғучиси 5 см-ға тәң. Қийиқ конус бетиниң мәйданини тепиңлар.



8.6-сүрәт



8.7-сүрәт

8.8. 8.7-сүрәттики дүгләкниң бөлиги қийиқ конусниң ян бетиниң йейилмиси боламду?

B

8.9. Чақмақ қәғәзгә 8.4-сүрәттикигә охшаш қийиқ конусни селиңлар. Мошу конусниң оқиға параллель болидиған вә асаслири билән қийилишидиған тәкшилик билән қийилмисини тәсвирләңлар.

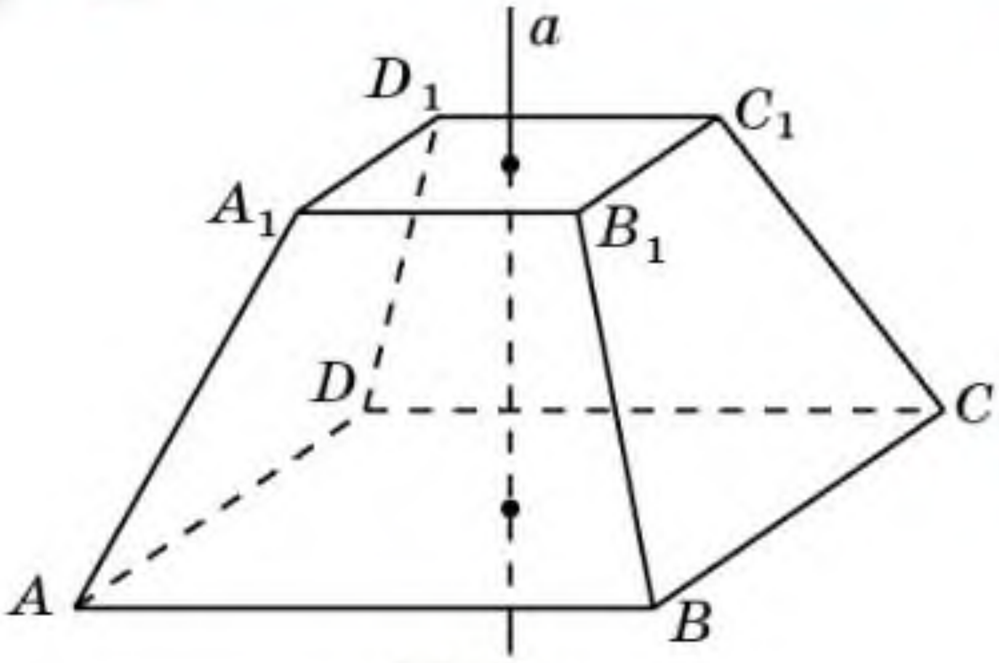
8.10. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 2 см вә 4 см. Қийиқ конус егизлигиниң оттуриси арқилиқ асас тәкшилигигә параллель тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданини тепиңлар.

8.11. Қийиқ конусниң: 1) симметрия мәркизи; 2) симметрия оқи; 3) симметрия тәкшилиги боламду?

8.12. Қийиқ конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясап янтийиду. Қийиқ конусниң егизлигини тепиңлар.

8.13. Қийиқ конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 60° булуң ясап янтийиду. Қийиқ конусниң кичик асасиниң радиуси 1 см-ға тәң болса, чоң асасиниң радиусини тепиңлар.

8.14. Тәңянлиқ трапецияниң асаслири 1 см вә 2 см, ян тәрәплири болса 2 см. Мошу трапецияни униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтидиған түздин айландурғанда пәйда болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.



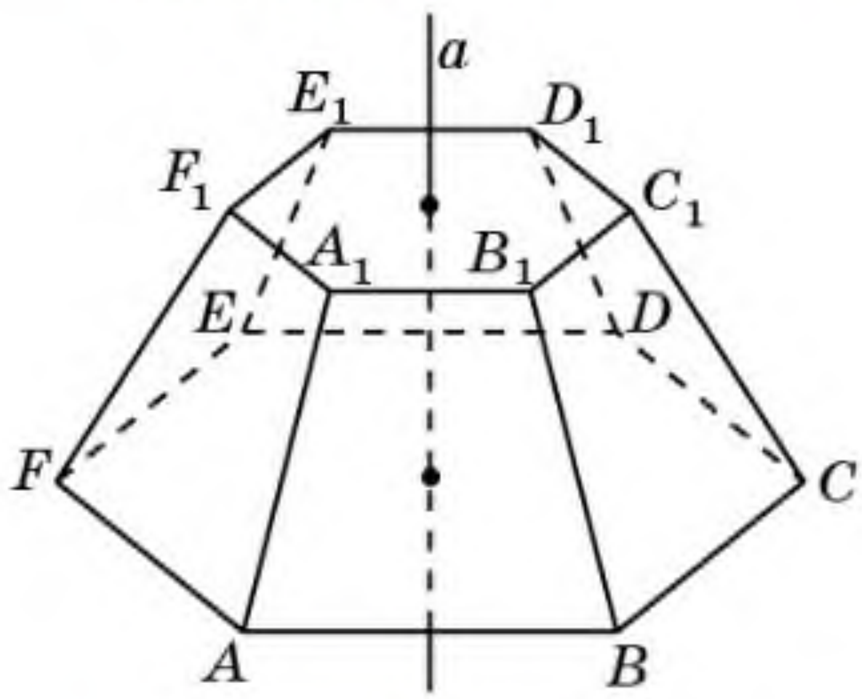
8.8-сүрәт

8.15. Дурус төртбулуңлук қийиқ пирамидини униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (8.8-сүрәт)?

8.16. Дурус төртбулуңлук қийиқ пирамида асаслириниң тәрәплири 4 см вә 2 см, ян қирлири болса 3 см-ға тәң. Мошу пирамидини униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда пәйда болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар. (8.8-сүрәт)?.

8.17. Дурус алтәбулуңлук қийиқ пирамидини униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (8.9-сүрәт)?

8.18. Дурус алтәбулуңлук қийиқ пирамида асаслириниң тәрәплири 2 см вә 1 см, ян қирлири болса 3 см-ға тәң. Мошу пирамидини униң асаслириниң мәркәзлири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда пәйда болған фигуриниң толуқ бетиниң мәйданини тепиңлар (8.9-сүрәт).



8.9-сүрәт

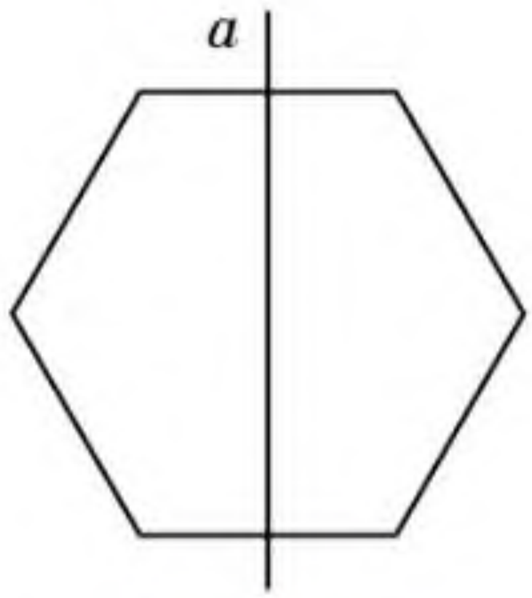
8.10-сүрәт

8.19. Қийиқ конус шәклидики кигиз өй түңлиги асаслириниң диаметрлири 5 м вә 1 м, егизлиги 2 м-ға тәң (8.10-сүрәт). Кигиз өй гүмбизиниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

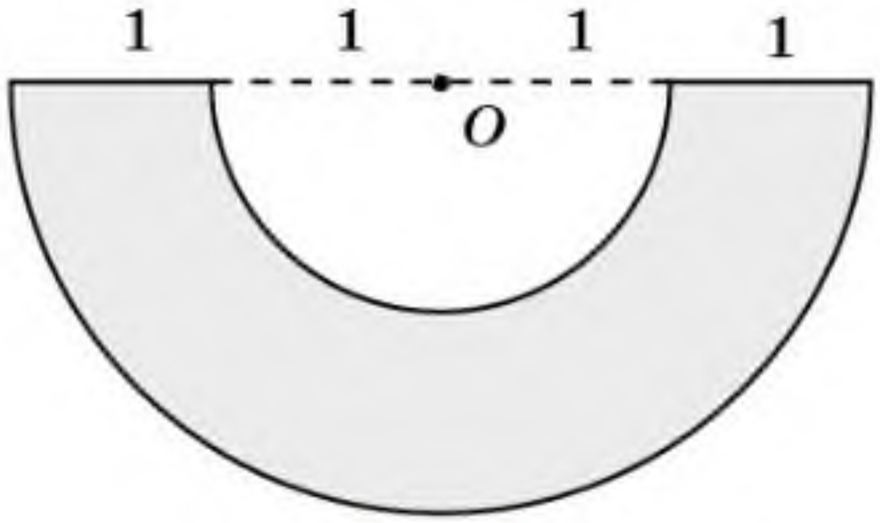
C

8.20. Дурус алтәбулуңлуқни униң қариму-қарши ятқан тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда қандақ фигура пәйда болиду (8.11-сүрәт)? Дурус алтәбулуңлуқниң тәрәплири

1 см-ға тәң болса, пәйда болған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар.



8.11-сүрәт



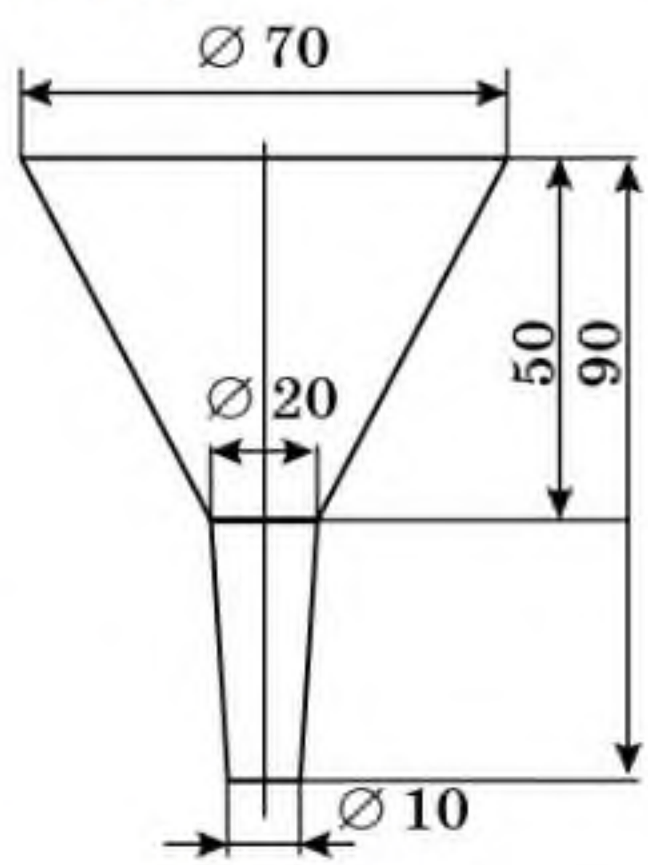
8.12-сүрәт

8.21. 8.12-сүрәттә чәмбәрлириниң радиуслири 1 см вә 2 см болидиған дүгләк төңгиниң йерими — қийиқ конусниң ян бетиниң йейилмиси тәсвирләнгән. Қийиқ конус асаслириниң радиуслирини тепиңлар.

8.22. Қийиқ конус шәклидики челәкниң ичи-тешини бояш керәк. Униң асаслириниң диаметрлири 30 см вә 20 см, ясиғучиси болса 30 см-ға тәң. Әгәр бояқниң оттура чиқими 1 м^2-ға 300 г болса, у чағда бу ишни орунлаш үчүн қанчә бояқ һаҗәт болиду?

8.23. 8.13-сүрәттә төмүр тахтилардин ясалған суюқлуқ қуйғучиниң өлчәмлири миллиметр билән көрситилгән. Әгәр барлиқ тахтилар бетиниң 10%-и уларни йепиштурушқа кетидиған болса, у чағда қуйғучни тәйярлаш үчүн қанчә квадрат дециметр тахтилар һаҗәт болиду?

8.24. Қийиқ конус шәклидики челәкни төмүр тахтилардин ясаш керәк. Униң асаслириниң диаметрлири 28 см вә 20 см, егизлиги 24 см-ға тәң. Йепиштурушқа кетидиған чиқимни һесапқа алмиғанда челәкниң ян бети йейилмисиниң өлчәмлири қандақ болиду?



8.13-сүрәт

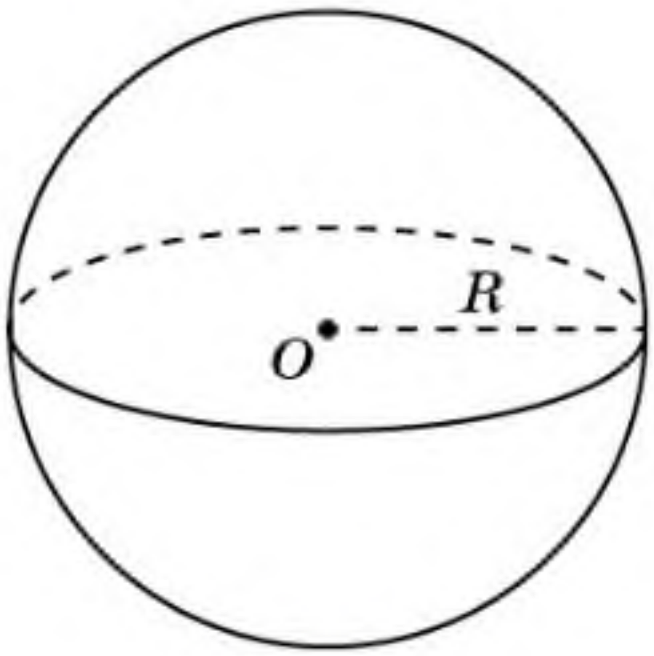
Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

8.25. Чәмбәрниң, дүгләкниң вә уларниң элементлириниң ениқлимилирини, чәмбәргә жүргүзүлгән яндашминиң ениқлимисини вә чәмбәр билән түзниң өз ара орунлишиш һаләтлирини тәкрарлаңлар.

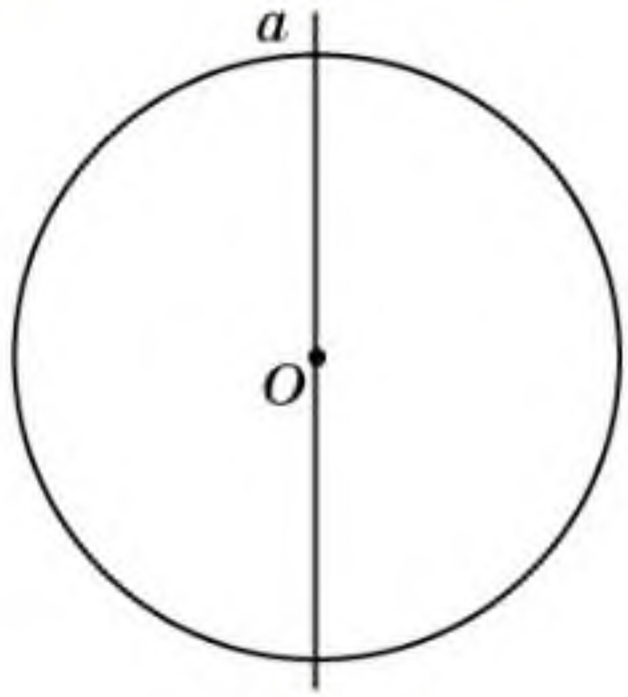
§ 9. Сфера вә шар

Сфера вә шар — тәкшиликтики мувапиқ чәмбәр билән дүгләкниң бошлуқтики аналоглири болуп һесаплиниду.

Берилгән чекиттин бәлгүлүк ариliқта орунлашқан бошлуқниң барлиқ чекитлиридин туридиған фигура *сфера* дәп атилиду (9.1-сүрәт).



9.1-сүрәт



9.2-сүрәт

Берилгән чекит *сфериниң мәркизи*, берилгән арилиқ *сфериниң радиуси* дәп атилиду.

Сфериниң мәркизини униң бойида ятқан қандақту бир чекити билән қошидиған кесиндини *сфериниң радиуси* дәп атайду.

Шуниң билән, мәркизи O чекити вә радиуси R болидиған сфера мошу O чекитидин арилиғи R-ға тәң бошлуқниң барлиқ чекитлиридин туридиған геометриялиқ фигурини тәшкил қилиду.

Сфериниң бойида ятқан һәр қандақ икки чекитни қошидиған кесиндә *сфериниң хордиси* дәп атилиду. Сфериниң мәркизи арқилиқ өтүдиған хорда мошу *сфериниң диаметри* дәп атилиду.

Сфериниң мәркизи арқилиқ өтүдиған тәкшилик билән қийилмиси *чоң чәмбири* болиду

Сферини мошу чәмбәрни униң диаметри ятқан түздин айландуруш арқилиқ елишқа болиду (9.2-сүрәт).

Берилгән чекиттин бәлгүлүк ариliқтин ашмайдиған бошлуқниң барлиқ чекитлиридин туридиған фигура *шар* дәп атилиду.

Берилгән чекит *шарниң мәркизи*, берилгән арилиқ *шарниң радиуси* дәп атилиду.

Шарниң мәркизини униң бетидә ятидиған қандақту бир чекити билән қошидиған кесиндиниму *шарниң радиуси* дәп атайду.

Шуниң билән, мәркизи O чекити вә радиуси R болған шар мошу O чекитидин арилиғи R-дин ашмайдиған бошлуқниң барлиқ чекитлиридин туридиған геометриялиқ фигурини тәшкил қилиду.

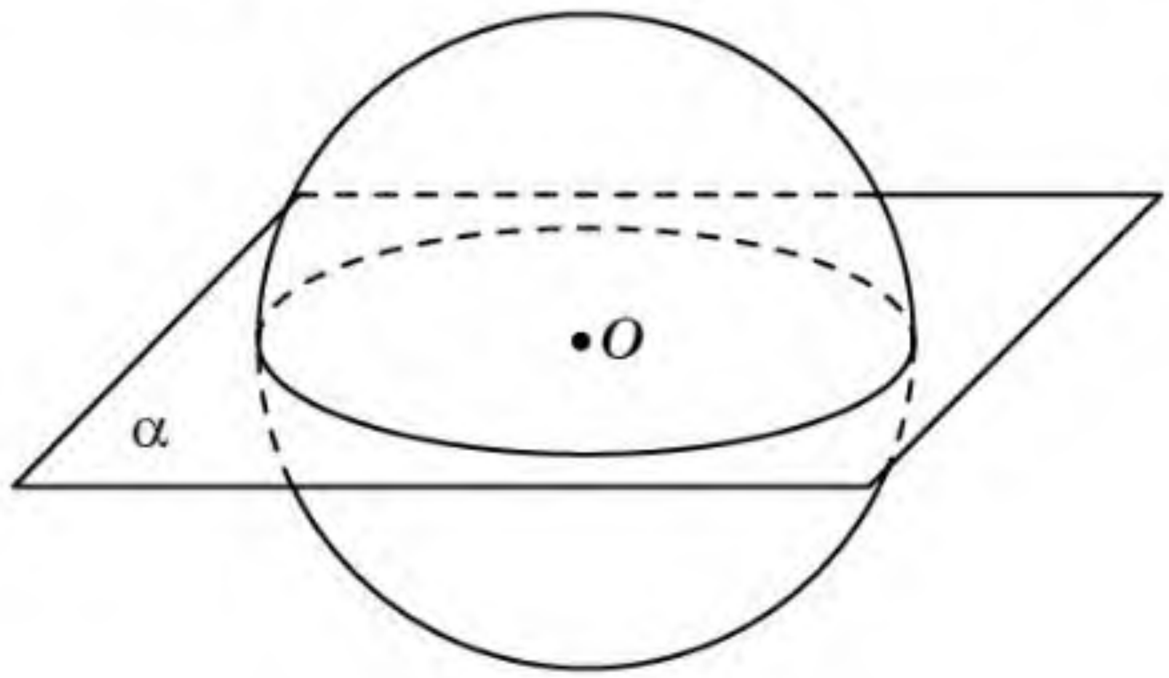
Шарниң бетидә ятқан һәр қандақ икки чекитни қошидиған кесиндини мошу *шарниң хордиси* дәп атайду. Шарниң мәркизи арқилиқ өтүдиған хорда *шарниң диаметри*, шарниң мәркизи арқилиқ өтүдиған тәкшилик билән қийилмиси *чоң дүглиги* дәп атилиду.

Шарни мошу дүгләкни униң диаметри ятқан түздин айландуруш арқилиқ елишқа болиду.

Мәркизи вә радиуси берилгән шар билән бирдәк болидиған сфера мошу *шарниң бети* дәп атилиду.

Сфера билән тәкшиликниң өз ара орунлишиш һаләтлирини қараштурайли .

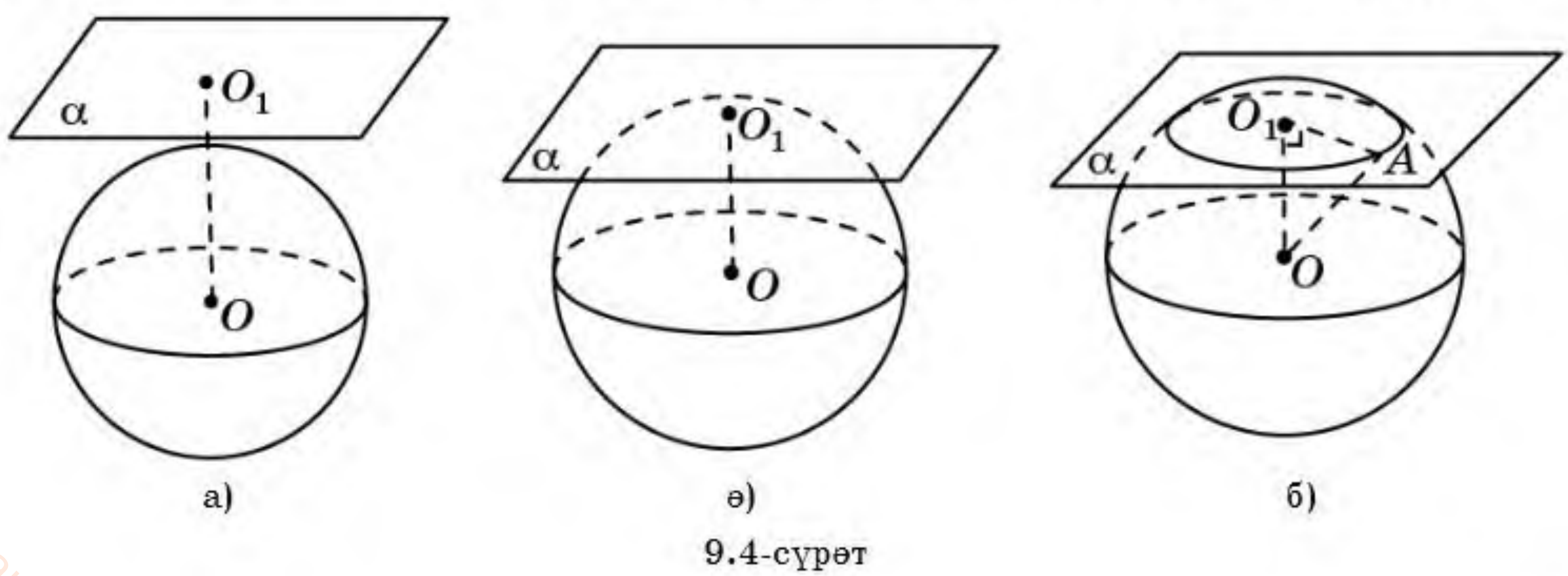
Әгәр a тәкшилиги сфериниң мәркизи арқилиқ өтсә, у чағда сфериниң мошу тәкшилик билән қийилмисида чәмбәр пәйда болиду (9.3-сүрәт).



9.3-сүрәт

Әгәр a тәкшилиги сфериниң мәркизи арқилиқ өтмисә, у чағда мошу мәркәздин a тәкшилигигә OO_1 перпендикулярини чүширимиз. Бу төвәндики һаләтләрдә орунлиниши мүмкин.

1-һаләт. Әгәр OO_1 перпендикуляриниң узунлиғи сфериниң R радиусидин чоң болса, у чағда O чекитидин a тәкшилигиниң һәр қандақ чекитигичә болған арилиқ R-дин чоң болиду. Демәк, бу һаләттә сфера билән тәкшиликниң умумий чекитлири болмайду (9.4, а-сүрәт).



9.4-сүрәт

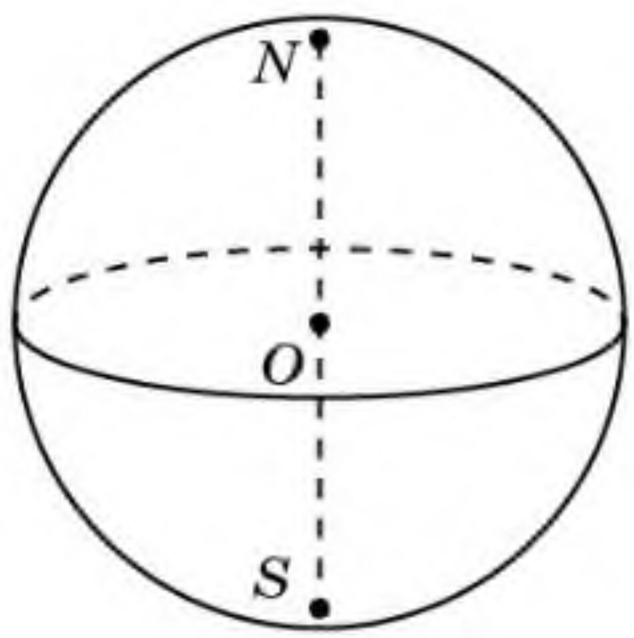
2-һәләт. Әгәр OO_1 перпендикулярниң узунлиғи сфериниң R радиусиға тәң болса, у чағда сфера билән тәкшиликниң пәқәт бирла умумий чекити — O_1 чекити бар болиду (94, ә-сүрәт).

Сфера билән пәқәт бир умумий чекити болидиған тәкшилик *сфериға яндашма тәкшилик* дәп атилиду. Бу сфера билән тәкшиликниң умумий чекити *яндашма чекити* дәп атилиду. Шуниң билән биллә мошу чекиттә сфера тәкшиликкә *янтийиду* яки тәкшилик сфера билән *яндишиду* дәпму атилиду.

Яндашма тәкшилик яндишиш чекитигә жүргүзүлгән сфериниң радиусиға перпендикуляр болидиғанлиғини испатлаңлар.

3-һаләт. Әгәр OO_1 перпендикуляриниң узунлиғи, йәни O чекитидин a тәкшилигигичә болған d арилиғи сфериниң R радиусидин кичик болса, у чағда сфера билән тәкшилик қийилишиду вә уларниң қийилишиш мәркизи O_1 чекити вә радиуси $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ болидиған чәмбәр болиду (9.4, б-сүрәт).

Һәқиқәтән, сфера билән a тәкшилигиниң қийилишишида ятидиған қандақту бир A чекити үчүн $OO_1 = d$, $OA = R$ болидиған OO_1A тикбулуңлук үчбулуңлиғидин $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$ тәңлиги чиқиду. Әксичә, әгәр a тәкшилигидә ятқан A чекити үчүн бу тәңлик орунланса, у чағда $OA = R$-ға болиду, йәни A чекити сфериниң бойида ятиду.



9.5-сүрәт

Адәттә, сфера 9.5-сүрәттики охшаш тәсвирлиниду. Бу сүрәттә чәмбәрдин башқа:

а) сфериниң мәркизи арқилиқ өтүдиған тәкшилик билән қийилмиси — *сфериниң чоң чәмбири* яки *экватор*;

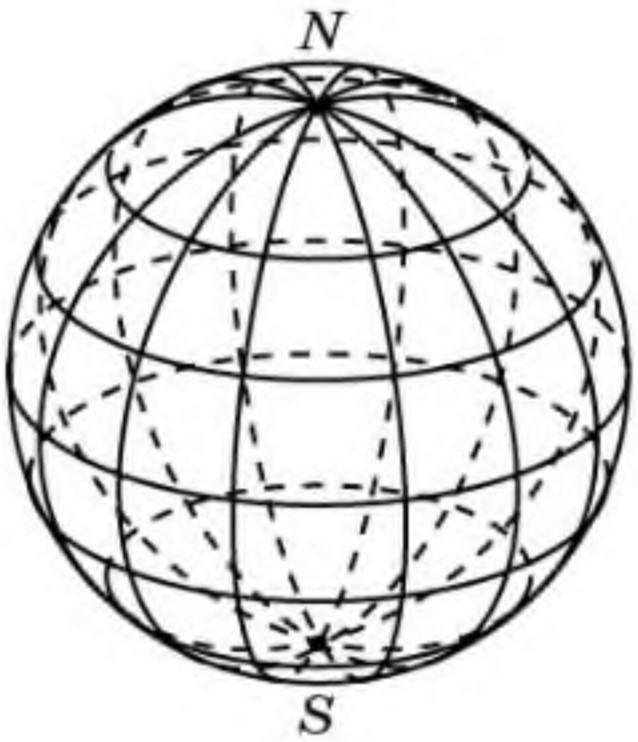
ә) сфериниң мәркизи арқилиқ өтүдиған вә экватор тәкшилигигә перпендикуляр түз — *сфериниң оқи*;

б) оқниң сфера билән қийилишиш чекитлири — *сфериниң полюслири* тәсвирләнгән. Адәттә, уларни N (шималий полюс) вә S (җәнубий полюс) һәриплири билән бәлгүләйду.

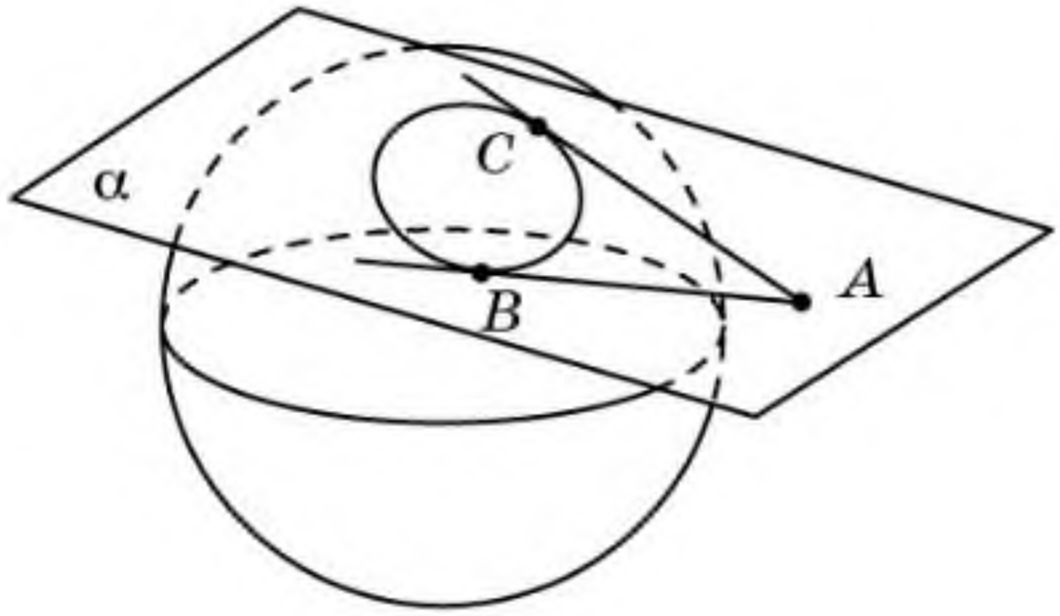
Сфериниң сүритидә полюс билән экватор таллап елинғандин кейин параллельлар билән меридианларниң тәсвирини селишқа болиду.

Параллельлар — сфериниң экватор тәкшилигигә параллель тәкшиликләр билән қийилмилири. *Меридианлар* — сфериниң оқи арқилиқ өтүдиған тәкшиликләр билән қийилмилири (9.6-сүрәт). Адәттә, дәл мошундақ Йәр шариниң тәсвири — глобус тәсвирлиниду.

Шарниң тәкшилик билән қийилмиси қандақ фигура болиду?



9.6-сүрәт



9.7-сүрәт

Сфера билән тәкшиликниң өз ара орунлишиш һаләтлиригә охшаш сфера билән түзниң өз ара орунлишишини өзәңлар қараштуруңлар.

Сфера билән пәқәт бир умумий чекити болидиған түз сфериға *яндашма түз* дәп атилиду.

Теорема. ***Сферидин сирт ятқан бир чекиттин мошу сфериға жүргүзүлгән яндашма түзләрниң кесиндилири өз ара тәң болиду.***

Испатлиниши. AB вә AC қандақту бир A чекитидин сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндилири болсун, бу йәрдики B вә C — яндишиш чекитлири (9.7-сүрәт).

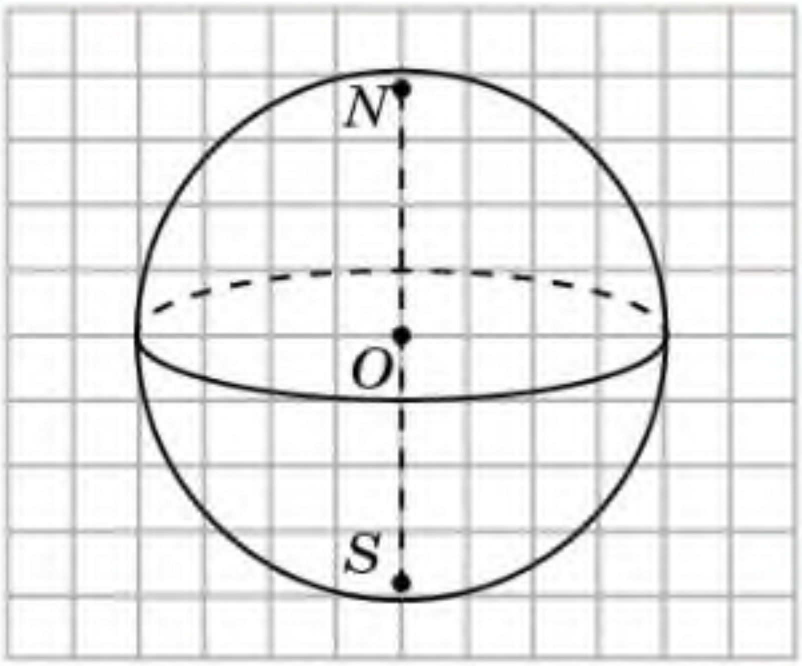
A, B вә C чекитлири арқилиқ өтүдиған тәкшиликни қараштурайли. Бу тәкшилик сфера билән мувапиқ B вә C чекитлиридә AB вә AC түзлири билән яндишидиған чәмбәр бойи билән қийилишиду. Чәмбәрдин сирт ятқан чекиттин мошу чәмбәргә жүргүзүлгән яндашма кесиндиләрниң хусусийәтлири бойичә $AB = AC$ болиду. ◻

Соаллар

1. Қандақ фигура сфера дәп атилиду?
2. Сфериниң радиуси дегинимиз немә?
3. Сфериниң хордиси дегинимиз немә?
4. Сфериниң диаметри дегинимиз немә?
5. Қандақ фигурини айландурғанда сферини елишқа болиду?
6. Қандақ фигура шар дәп атилиду?
7. Шарниң радиуси дегинимиз немә?
8. Шарниң хордиси дегинимиз немә?
9. Шарниң диаметри дегинимиз немә?
10. Қандақ фигурини айландурғанда шарни елишқа болиду?
11. Шарниң бети дегинимиз немә?
12. Қандақ һаләттә сфера билән тәкшиликниң умумий чекити болмайду?
13. Қандақ һаләттә сфера билән тәкшиликниң бир умумий чекити болиду?
14. Қандақ һаләттә сфера билән тәкшилик чәмбәр бойи билән қийилишиду?
15. Қандақ тәкшилик сфериға жүргүзүлгән яндашма тәкшилик дәп атилиду?
16. Қандақ түз сфериға жүргүзүлгән яндашма түз дәп атилиду?

А

9.1. Чақмақ қәғәзгә 9.8-сүрәттики охшаш сферини селиңлар. Қандақту бир параллельлар билән меридианиларни тәсвирләңлар.



9.8-сүрәт

9.2. Мәркизи O чекити вә радиуси R болидиған: 1) шарниң ичидә ятқан; 2) шардин сирт ятқан A чекити қандақ тәңсизликни қанаәтләндүриду ?

9.3. Сфериниң радиуси 4 см-ға тәң. Әгәр берилгән чекиттин сфериниң мәркизигичә болған арилиқ: 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см болса, у чағда мошу чекит сфериға нисбәтән қандақ орунлишиду?

9.4. Сфериниң мәркизи арқилиқ қанчә диаметр жүргүзүшкә болиду?

9.5. Сфериниң диаметри униң радиусидин 55 мм-ға артуқ. Сфериниң диаметрини тепиңлар.

9.6. A вә B чекитлириниң арилиғи 2 см-ға тәң. Мошу чекитләр арқилиқ өтүдиған сфериниң әң кичик радиусини тепиңлар.

9.7. Сфериниң радиуси 7 см-ға тәң вә қандақту бир тәкшилик униң мәркизидин: 1) 6 см; 2) 7 см; 3) 8 см арилиқта орунлашқан. Мошу сфера билән тәкшиликниң бир-биригә нисбәтән қандақ орунлашқанлиғини ениқлаңлар.

В

9.8. 1) Сфериниң бойида ятқан чекит арқилиқ; 2) сфериниң ичидә ятқан чекити арқилиқ; 3) сферидин сирт ятқан чекит арқилиқ мошу сфериға қанчә яндашма тәкшилик жүргүзүшкә болиду?

9.9. Шарниң радиуси 5 см-ға тәң. Шарниң мәркизидин 3 см арилиқтики тәкшилик билән қийилмиси болидиған дүгләкниң радиусини тепиңлар.

9.10. Сфериниң радиуси 3 см-ға тәң, берилгән чекиттин мошу сфериниң мәркизигичә болған арилиқ 5 см. Мошу чекиттин сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндисиниң узунлиғини тепиңлар.

9.11. Сфериниң радиуси 3 см-ға тәң вә униң мәркизидин қандақту бир түз: 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 7 см арилиқта орунлашқан. Мошу сфера билән түзниң бир-биригә нисбәтән қандақ орунлашқанлиғини ениқлаңлар .

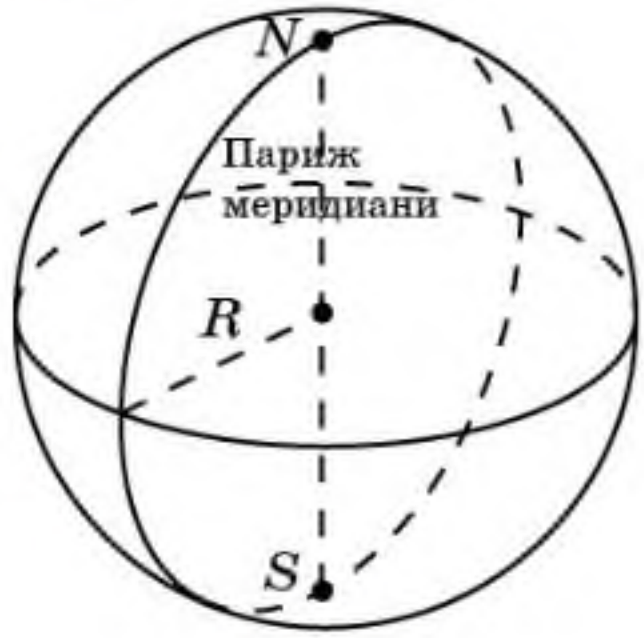
9.12. Сфериниң радиуси 3 см-ға тәң. Берилгән чекиттин мошу сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндисиниң узунлиғи 4 см-ға тәң. Мошу чекиттин сфериниң мәркизигичә болған ариліқни тепиңлар.

9.13. Сферинин радиуси 6 см-ға тәң. Берилгән чекиттин мошу сферинин мәркизигичә болған арилиқ 10 см-ға тәң. Мошу чекиттин сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндисиниң узунлиғини тепиңлар.

9.14. Берилгән чекиттин сфериниң мәркизигичә болған арилиқ 13 см-ға тәң. Мошу чекиттин сфериға жүргүзүлгән яндашма кесиндисиниң узунлиғи 12 см-ға тәң. Сфериниң радиусини тепиңлар.

9.15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ тәңлимиси билән берилгән сфера вә: 1) $z = 1$; 2) $z = 2$; $z = 3$ тәңлимиси билән берилгән тәкшиликниң өз ара орунлишишини ениқлаңлар.

9.16. Париж меридианиниң узунлиғи 40 000 км-ға тәң. Йәр шариниң радиусини тепиңлар (9.9-сүрәт).



9.9-сүрәт

9.17. Сфериниң радиуси 4 см-ға, берилгән чекиттин мошу сфериниң мәркизигичә болған арилиқ 6 см-ға тәң. Мошу чекиттин сфериниң бойида ятқан чекитлиригичә болған әң чоң вә әң кичик арилиқларни тепиңлар.

9.18. Сферидин сирт ятқан чекиттин мошу сфериниң бойида ятқан чекитлиригичә болған әң кичик вә әң чоң арилиқлар 4 см вә 6 см. Сфериниң радиусини тепиңлар.

C

9.19. 1) $x + y + z = \sqrt{2}$; 2) $x + y + z = \sqrt{3}$; 3) $x + y + z = 2$ тәңлимиси билән берилгән тәкшилик билән $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тәңлимиси билән берилгән сфериниң өз ара орунлишишини ениқлаңлар.

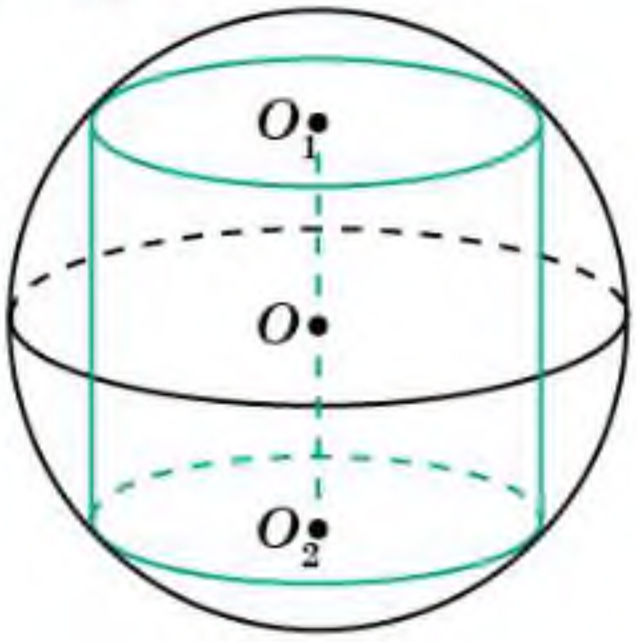
Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

9.20. Тиктөртбулуңлуққа, үчбулуңлуққа, трапецияға ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләрниң ениқлимилирини вә уларниң радиуслирини тепиш формулилирини тәкрарлаңлар.

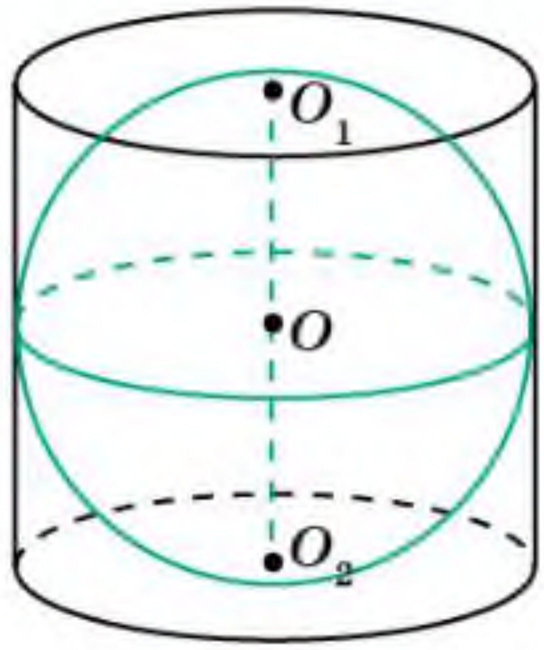
§ 10*. Айлиниш җисимлириниң комбинациялири

“Тиктөртбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәр” вә “квадратқа ичидин сизилған чәмбәр” чүшәнчилиригә охшаш “цилиндрға сиртидин сизилған сфера” вә “цилиндрға ичидин сизилған сфера” чүшәнчилирини ениқлайли.

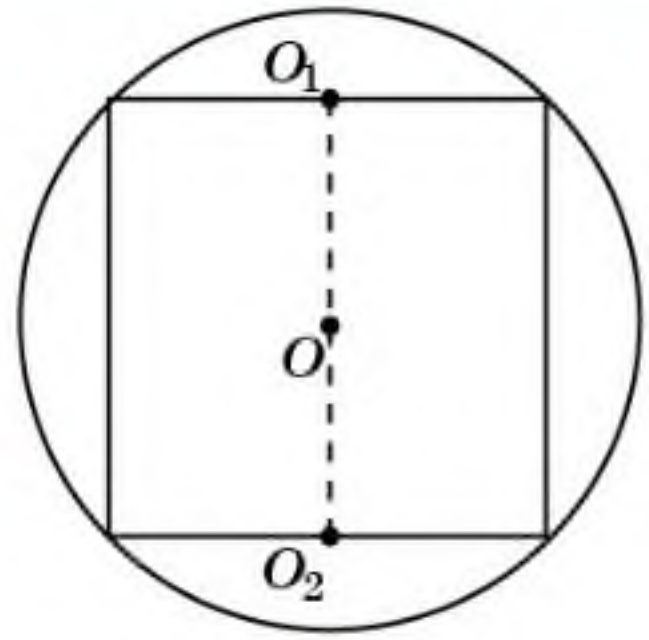
Әгәр цилиндр асаслириниң чәмбәрлири сфериниң бойида ятса, у чағда сфера *цилиндрға сиртидин сизилған* яки *цилиндр сфериға ичидин сизилған* дәп атилиду (10.1-сүрәт).



10.1-сүрәт



10.2-сүрәт



10.3-сүрәт

Әгәр сфера цилиндр асасиниң мәркизи билән вә ян бети билән (һәрбир ясиғучиси билән) яндишидиған болса, у чағда сфера *цилиндрға ичидин сизилған* яки *цилиндр сфериға сиртидин сизилған* дәп атилиду (10.2-сүрәт).

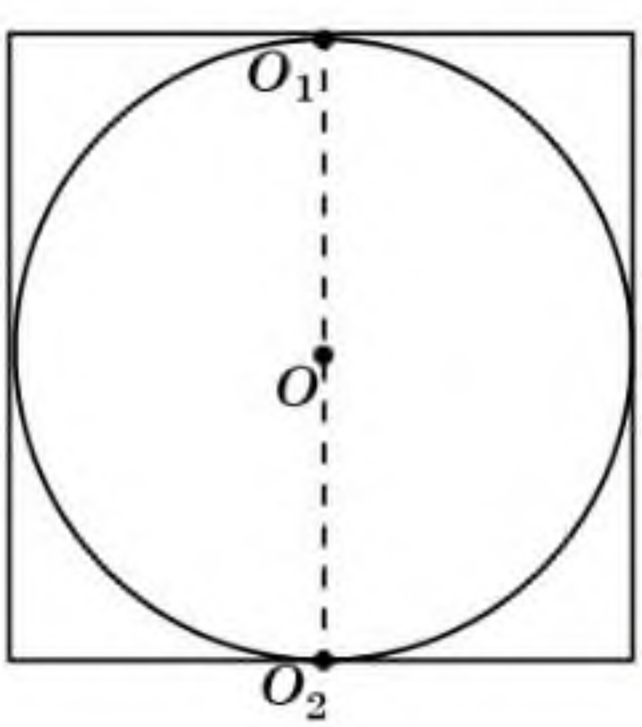
Бошлуқтики фигуриларниң комбинациясини селиш қаидилиригә мувапиқ, әгәр берилгән фигуриға ичидин сизилған фигура башқичә рәң билән тәсвирләнгән болса, у чағда у туташ (көрүнидиған) сизиқлар билән айрим фигура ретидә тәсвирлинидиғанлиғиға нәзәр салимиз. Биз бу йәрдә вә униңдин кейинму мошу қаидигә реайә қилимиз.

Теорема. ***Цилиндрға сиртидин сфера сизишқа болиду. Униң радиуси мошу цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тиктөртбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.***

Испатлиниши. Цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тиктөртбулуңлуқ вә униңға сиртидин сизилған чәмбәрни қараштурайли (10.3-сүрәт). Цилиндр мошу тиктөртбулуңлуқни униң қариму-қарши икки тәрипиниң O_1, O_2 оттурилири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда елиниду. Чәмбәрни мошу түздин айландурғанда берилгән цилиндрға сиртидин сизилған сфера пәйда болиду. Бу сфериниң радиуси тиктөртбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.

Әгәр цилиндр асасиниң радиуси r-ға вә егизлиги h-қа тәң болса, у чағда мошу цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң R радиуси төвәндики формула билән ениқлиниду:

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} \,.$$



10.4-сүрәт

Теорема. ***Әгәр цилиндрниң оқлуқ қийилмиси квадрат болса, у чағда униңға ичидин сфера сизишқа болиду. Ичидин сизилған сфериниң радиуси цилиндрниң оқлуқ қийилмисиға ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.***

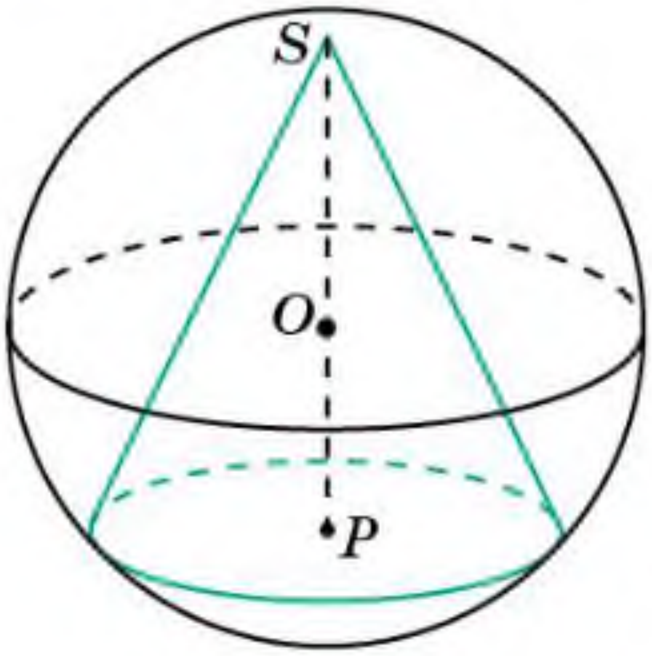
Испатлиниши. Цилиндрниң оқлуқ қийилмисини қараштурайли (10.4-сүрәт).

Әгәр цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тиктөртбулуңлуққа ичидин чәмбәр сизилған болса, у чағда мошу цилиндрға ичидин сфера сизилиду. Бу тиктөртбулуңлуқ квадрат болған һаләттила орунлиниду. Демәк, ичидин сизилған сфериниң радиуси цилиндрниң оқлуқ қийилмисиға ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду. $\square$

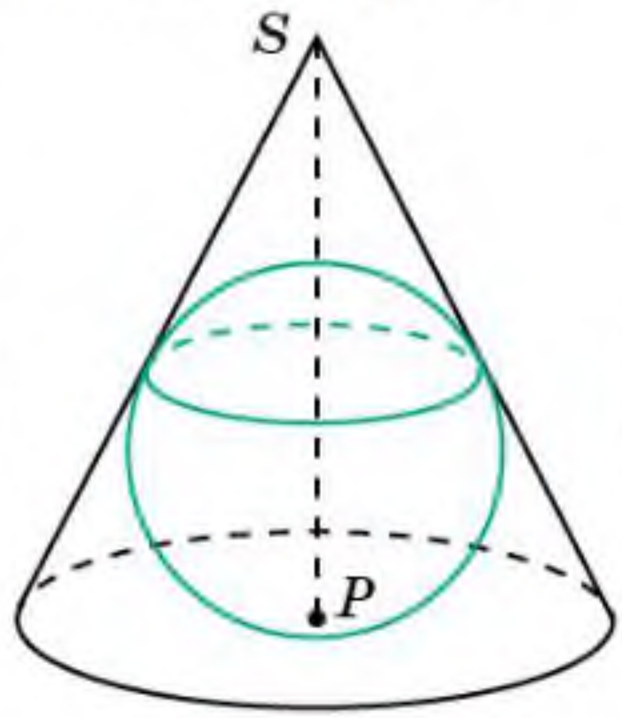
Әгәр цилиндр асасиниң радиуси R-ға тәң болса, у чағда сфериниң радиусиму R-ға тәң болиду.

"Үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәр" вә "үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәр" чүшәнчилиригә охшаш "конусқа сиртидин сизилған сфера" вә "конусқа ичидин сизилған сфера" чүшәнчилирини ениқлайли.

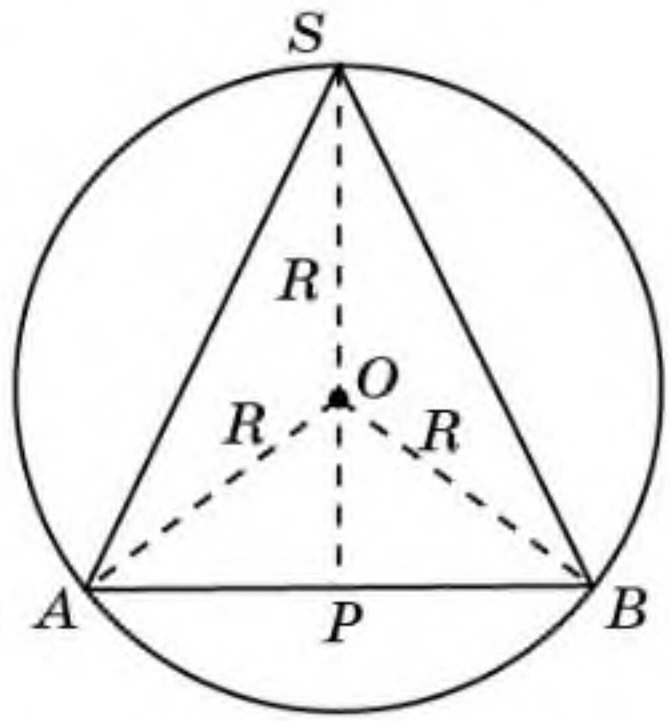
Әгәр конусниң чоққиси билән асасиниң чәмбири сфериниң бойида ятса, у чағда *сфера конусқа сиртидин сизилған* яки *конус сфериға ичидин сизилған* дәп атилиду (10.5-сүрәт).



10.5-сүрәт



10.6-сүрәт



10.7-сүрәт

Әгәр сфера конусниң асасиға вә ян бети билән яндишидиған болса, у чағда *сфера конусқа ичидин сизилған* яки *конус сфериға сиртидин сизилған* дәп атилиду (10.6-сүрәт).

Теорема. ***Конусқа сиртидин сфера сизишқа болиду. Униң радиуси мошу конусниң оқлуқ қийилмиси — үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.***

Испатлиниши. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңянлиқ үчбулуңлуқни вә униңға сиртидин сизилған чәмбәрни қараштурайли (10.7-сүрәт). Конус мошу үчбулуңлуқни униң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландурғанда елиниду. Чәмбәрни мошу түздин айландурғанда берилгән конусқа сиртидин сизилған сфера пәйда болиду. Бу сфериниң радиуси тәңянлиқ үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду. $\square$

Тәрәплири a, b, c вә мәйдани S болидиған үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң R радиуси үчүн төвәндики формула орунлуқ болидиғанлиғини есимизға алайли:

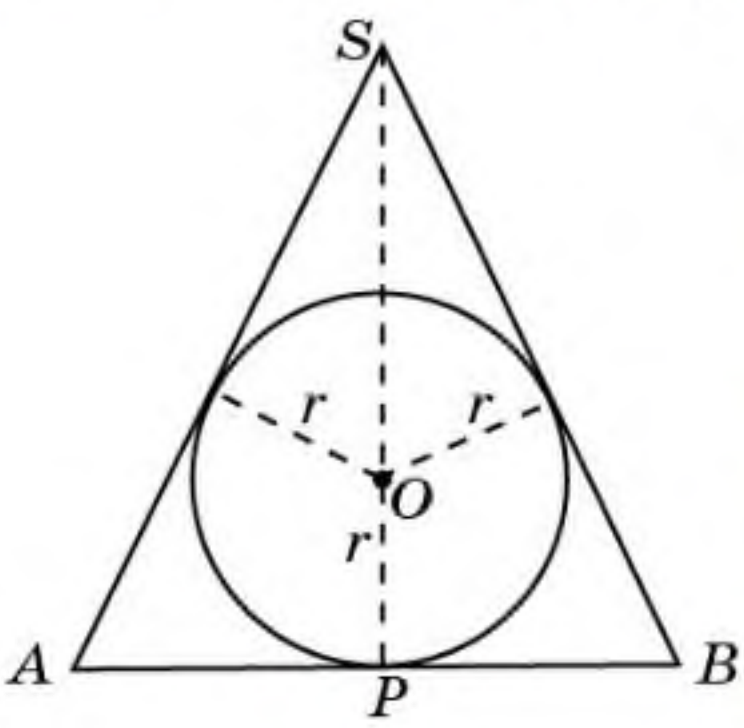
$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Мошу формула билән оқлуқ қийилмиси үчбулуңлуқ болидиған конусқа сиртидин сизилған сфериниң R радиусиму ениқлиниду. Бу йәрдә, a, b, c — үчбулуңлуқниң тәрәплири, S — үчбулуңлуқниң мәйдани.

1-мисал. Конус асасиниң радиуси 6 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

Йешилиши. Конусниң оқлуқ қийилмиси тәрәплири 12 см, 10 см, 10 см болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқ болиду. Мошу үчбулуңлуқниң асасиға чүширилгән егизлиги 8 см-ға, мәйдани болса 48 см^2-ға тәң. Демәк, конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиуси $6\frac{1}{4}$ см-ға тәң болиду.

Теорема. ***Конусқа ичидин сфера сизишқа болиду. Ичидин сизилған сфериниң радиуси конусниң оқлуқ қийилмиси — үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.***



10.8-сүрәт

Испатлиниши. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңянлиқ үчбулуңлуқ вә униңға ичидин сизилған чәмбәрни қараштурайли (10.8-сүрәт). Конус мошу үчбулуңлуқни униң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландурғанда елиниду. Чәмбәрни мошу түздин айландурғанда берилгән конусқа ичидин сизилған сфера пәйда болиду. Бу сфериниң радиуси тәңянлиқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң болиду.

Тәрәплири a, b, c вә мәйдани S болидиған үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң r радиуси үчүн төвәндики формула орунлуқ болидиғанлиғини есимизға алайли:

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

Мошу формула билән оқлуқ қийилмиси үчбулуңлуқ болидиған конусқа ичидин сизилған сфериниң r радиусиму ениқлиниду. Бу йәрдики a, b, c — үчбулуңлуқниң тәрәплири, S — үчбулуңлуқниң мәйдани.

2-мисал. Конус асасиниң радиуси 6 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

Йешилиши. Конусниң оқлуқ қийилмисиниң тәрәплири 12 см, 10 см, 10 см болидиған тәңянлиқ үчбулуңлуқ болиду. Мошу үчбулуңлуқниң асасиға чүширилгән егизлиги 8 см-ға, мәйдани болса 48 см^2-ға тәң. Демәк, конусқа ичидин сизилған сфериниң радиуси 3 см-ға тәң болиду.

Соаллар

1. Қандақ сфера цилиндрға сиртидин сизилған дәп атилиду?
2. Қандақ сфериға ичидин цилиндр сизилиду?

3. Цилиндрға сиртидин һәрдайим сфера сизишқа боламду?
4. Қандақ цилиндрға сфера ичидин сизилиду?
5. Қандақ цилиндр сфериға сиртидин сизилған дәп атилиду?
6. Қандақ конусқа сфера сиртидин сизилиду?
7. Қандақ сфериға конус ичидин сизилиду?
8. Конусқа сиртидин һәрдайим сфера сизишқа боламду?
9. Қандақ конусқа сфера ичидин сизилиду?
10. Қандақ сфериға конус сиртидини сизилиду?
11. Конусқа ичидин сферини һәрдайим сизишқа боламду?

Һесаплар

A

10.1. Сфериниң радиуси R-ға тәң. Сфериға ичидин сизилған цилиндр асасиниң радиусини вә егизлигини тепиңлар.

10.2. Цилиндрниң егизлиги h-қа тәң. Цилиндрға ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

10.3. Цилиндрниң егизлиги билән асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

10.4. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиуси 2 см-ға тәң дәп елип, цилиндрниң егизлигини тепиңлар.

10.5. Цилиндрниң егизлиги 2 см-ға тәң. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиуси 2 см-ға тәң дәп елип, цилиндр асасиниң радиусини тепиңлар.

10.6. Цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тәрәплири 3 см вә 4 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

10.7. Сфериниң радиуси 1 см-ға тәң. Сфериға сиртидини сизилған цилиндр бетиниң мәйданини тепиңлар.

B

10.8. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәрипи 1 см-ға тәң тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Конусқа: 1) сиртидин сизилған; 2) ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

10.9. Конусқа сиртидин сизилған сфериниң R радиусини конусниң h егизлиги билән асасиниң r радиуси арқилиқ ипадиләңлар.

10.10. Конус асасиниң радиуси 3 см-ға, егизлиги болса 4 см-ға тәң. Конусқа сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

10.11. Конусқа ичидин сизилған сфериниң r радиусини конусниң h егизлиги билән асасиниң r_0 радиуси арқилиқ ипадиләңлар.

10.12. Конус асасиниң радиуси 3 см-ға, егизлиги болса 4 см-ға тәң. Конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

10.13. Конусниң ясиғучиси билән униңға сиртидин сизилған сфериниң радиуси 2 см-ға тәң. Конус асасиниң радиусини тепиңлар.

10.14. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Униң ясиғучиси асас тәкшилиги билән 45° булуң ясайду. Конусқа: 1) сиртидин сизилған; 2) ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

10.15. Конусниң ясиғучиси 1 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Конусқа: 1) сиртидин сизилған; 2) ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

10.16. Чәмбәр узунлиғиниң ениқлимисини вә чәмбәр узунлиғини тепиш формулисини тәкрарлаңлар.

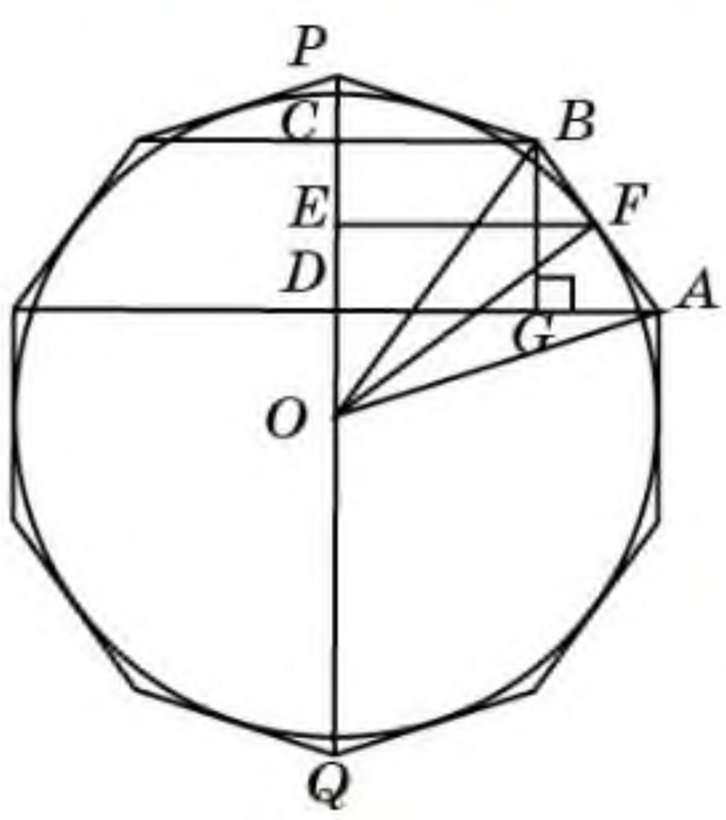
§ 11. Сфера бетиниң мәйдани

Сфера мәйданиниң ениқлимиси чәмбәр узунлиғиниң ениқлимисиға охшаш келиду.

Чәмбәргә ичидин сизилған дурус көпбулуңлуқ тәрәплириниң санини чәксиз ашурған вақиттики көпбулуңлуқ периметри интилидиған сан чәмбәр узунлиғиниң дәл мәнасини беридиғанлиғини әскә чүширимиз.

Чәмбәргә сиртидин сизилған дурус көпбулуңлуқни чәмбәрниң PQ диаметри ятидиған түздин айландурғанда пәйда болған фигурини қараштурайли (11.1-сүрәт). Бу фигуриниң бети конусниң, қийиқ конусниң вә цилиндрниң ян бәтлиридин туриду, фигуриниң өзи чәмбәрни айландурғанда пәйда болған сфериға сиртидин сизилиду. Фигура бетиниң мәйдани униңға тәәллуқ конусниң, қийиқ конусниң вә цилиндрниң ян бәтлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду.

Чәмбәрни униң диаметри ятидиған түздин айландурғанда елинған сфериниң мәйдани мошу чәмбәргә сиртидин сизилған дурус көпбулуңлуқ тәрәплириниң санини чәксиз ашуруп, айландурғандин пәйда болған фигура бетиниң мәйдани интилидиған сан *сфериниң мәйдани* болуп һесаплиниду.



11.1-сүрәт

Әнди радиуси R болидиған сфериниң мәйданини тепиш формулисини ениқлайли.

Сфериниң мәйдани дәп мошу сфера билән чәкләнгән шар бетиниң мәйданини атайду.

Чәмбәргә сиртидин сизилған M дурус көпбулуңлиғиниң AB тәрипини айландурғанда пәйда болған бетини қараштурайли. У $ABCD$ тикбулуңлуқ трапециясини CD түзидин айландурғанда елинған қийиқ конусниң ян бетини бериду (11.1-сүрәт).

Мошу бәтниң $S(AB)$ мәйдани трапецияниң EF оттура сизиға радиуси болидиған чәмбәрниң узунлиғи билән AB ян тәрипиниң көпәйтиндисигә тәң болиду, йәни

$$S(AB) = 2p \cdot EF \cdot AB.$$

$ABCD$ тикбулуңлуқ трапециядин тапимиз: $CD = BG = AB \cdot \sin\angle BAD$. Демәк,

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD}.$$

$\angle BAD = \angle EOF$ (мувапиқ перпендикуляр тәрәплиридики булуңлар ретидә тәң) екәнлигини һесапқа елип, төвәндики тәңликни алимиз:

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD} = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle EOF} = 2p \cdot OF \cdot CD = 2pR \cdot CD.$$

Мошуниңға охшаш M көпбулуңлиғиниң башқичә тәрәплирини айландурғанда пәйда болған бәтләрниң мәйданлириниң формулилири елиниду. Мошу мәйданларни қошуп, M көпбулуңлиғини айландурғанда пәйда болған бәтниң $S(M)$ мәйданини тапимиз:

$$S(M) = 2p \cdot OF \cdot PQ = 2pR \cdot 2R = 4pR^2.$$

Чәмбәргә сиртидин сизилған дурус көпбулуңлуқларниң тәрәплириниң санини чәксиз ашуруп, айландурғанда пәйда болидиған фигура бетиниң мәйдани интилидиған сан *сфериниң мәйдани* болуп һесаплиниду. Шуниң билән, сфериниң S мәйданини төвәндики формула билән тепишқа болиду:

$$S = 4pR^2.$$

Сфериниң мәйдани мошу сфериға сиртидин сизилған цилиндрниң ян бетиниң мәйданиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Соаллар

1. Сфериниң мәйдани қандақ ениқлиниду?
2. Шар бетиниң мәйдани дегинимиз немә?
3. Радиуси R болидиған сфериниң мәйдани қандақ формула билән һесаплиниду?

Һесаплар

A

11.1. Радиуси 1 см-ға тәң сфериниң мәйданини тепиңлар.

11.2. Мәйдани 1 см^2-ға тәң сфериниң радиусини тепиңлар.

11.3. Шарниң чоң дүглүгиниң мәйдани 3 см^2-ға тәң. Шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

11.4. Әгәр шарниң радиуси: 1) 2 һәссә; 2) 3 һәссә; 3) n һәссә ашидиған болса, у чағда униң бетиниң мәйдани қандақ өзгириду?

11.5. Икки шар бәтлириниң мәйданлири 4 : 9 нисбитигә тәң болса, у чағда уларниң радиуслириниң нисбитини тепиңлар.

11.6. Икки шарниң радиуслири 6 см вә 8 см. Бетиниң мәйдани берилгән шарларниң бәтлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болидиған шарниң радиусини тепиңлар.

11.7. Шарға сиртидин цилиндр сизилған. Шар бети мәйданиниң цилиндрниң ян бетиниң мәйданиға нисбитини тепиңлар.

В

11.8. Оқлуқ қийилмиси бирлик квадрат болидиған цилиндрға ичидин сизилған сфера бетиниң мәйданини тепиңлар.

11.9. Оқлуқ қийилмиси бирлик квадрат болидиған цилиндрға сиртидин сизилған сфера бетиниң мәйданини тепиңлар.

11.10. Күнниң диаметри Айниң диаметридин 400 һәссә чоң. Күн бетиниң мәйдани Ай бетиниң мәйданидин нәччә һәссә чоң болиду?

11.11. Кубқа ичидин сизилған сфера бетиниң мәйдани мошу кубқа сиртидин сизилған сфера бетиниң мәйданидин нәччә һәссә кичик болиду?

11.12. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Конусқа сиртидин сизилған сфера бетиниң мәйданини мошу конусқа ичидин сизилған сфера бетиниң мәйданидин нәччә һәссә чоң болиду?

11.13. Шарниң мәркизидин 8 см арилиқта ятидиған тәкшилик билән қийилмиси болидиған дүгләкниң радиуси 6 см. Шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

11.14. Париж меридианиниң узунлиғи тәхминән 40 000 км-ға тәң. Йәр шари бетиниң мәйданини тепиңлар.

11.15. Нур-Султан шәһиридики “Бәйтерек” монументи шариниң диаметри 22 м-ға тәң (11.2-сүрәт). Мошу шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

11.16. ЭКСПО-2017 — Қазақстанниң пайтәхтидә 2017-жили Хәлиқара көргәзмиләр бюроси уюштурған хәлиқара көргәзмә (11.3-сүрәт).

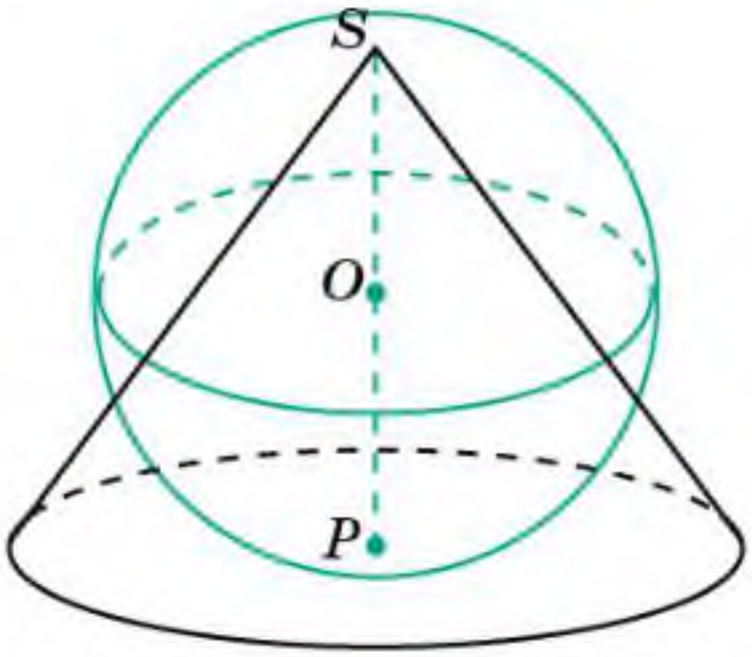
11.2-сүрәт

11.3-сүрәт

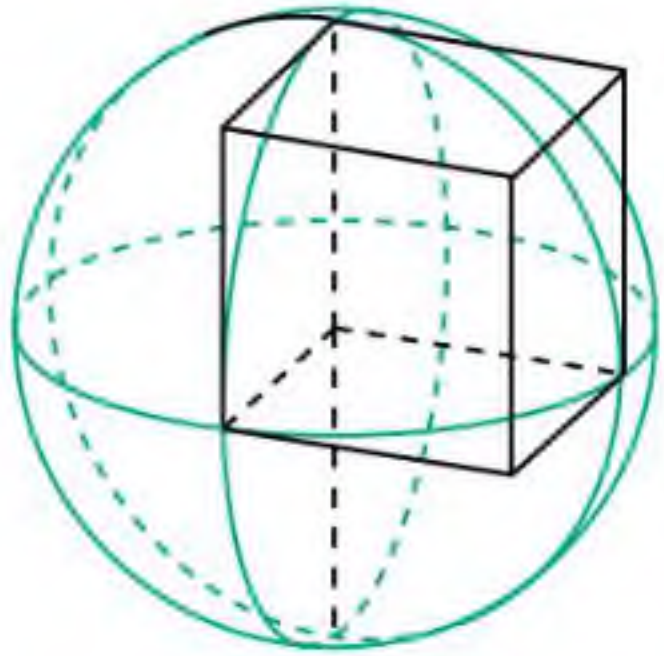
Көргәзминиң мәркизий элементи дуниядики әң чоң сферилиқ имарәт болидиған “Нур Әлем” комплекси болди. Униң диаметри 80 м. Мошу сфера бетиниң мәйданини тепиңлар (p d 3).

C

11.17. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәңтәрәплик үчбулуңлуқ (11.4-сүрәт). Конус бетиниң мәйдани диаметри мошу конусниң егизлиги билән бирдәк шар бетиниң мәйданиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.



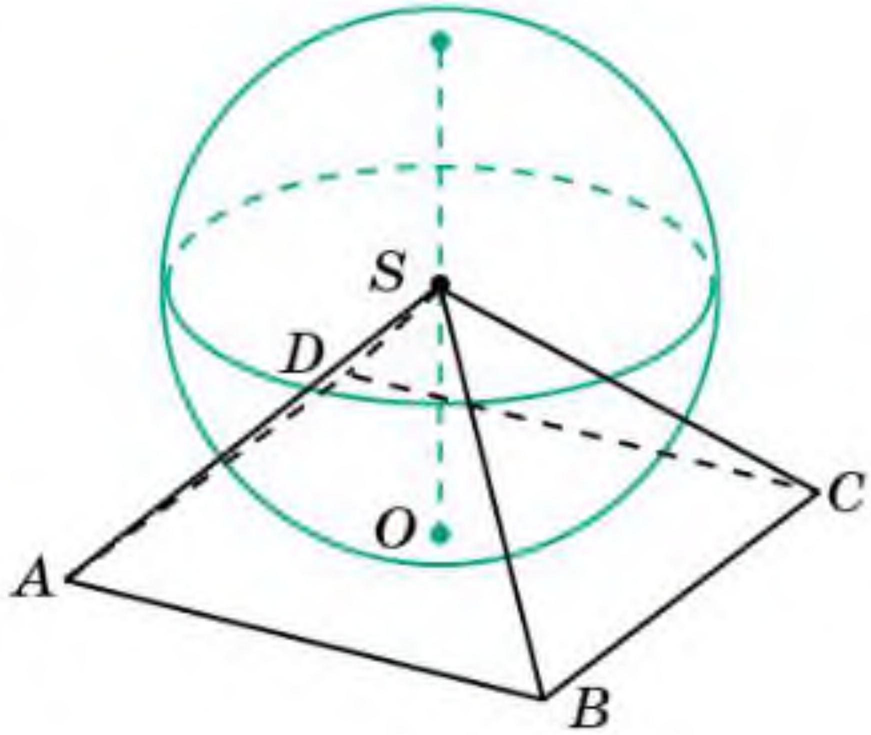
11.4-сүрәт



11.5-сүрәт

11.18. Радиуси 1 см-ға тәң шарниң мәркизи — бирлик кубниң чоққиси (11.5-сүрәт). Мошу кубниң ичидә орунлашқан шар бети бөлигиниң мәйданини тепиңлар.

11.19. Дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға, егизлиги 1 см-ға тәң. Радиуси 1 см-ға тәң шарниң мәркизи — мошу пирамидиниң чоққиси (11.6-сүрәт). Пирамидиниң ичидә орунлашқан шар бети бөлигиниң мәйданини тепиңлар.



11.6-сүрәт

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

11.20. Ичидин вә сиртидин сизилған көпбулуңлуқларниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. Цилиндр асасиниң радиуси 3 см, ясиғучиси 8 см. Цилиндрниң оқлуқ қийилмисиниң диагоналини тепиңлар:

A) 6 см; B) 10 см; C) 12 см; D) 16 см.

2. Тиктөртбулуңлуқниң тәрәплири 1 см вә 2 см. Мошу тиктөртбулуңлуқни униң чоң тәрипи ятқан түздин айландурғанда пәйда болған цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 2p см^2; B) 3p см^2; C) 4p см^2; D) 6p см^2.

3. Дурус үчбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға вә ян қирлири 2 см-ға тәң. Мошу призмини униң ян қири ятқан түздин айландурғанда пәйда болған цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 2p см^2; B) 3p см^2; C) 4p см^2; D) 6p см^2.

4. Конус асасиниң радиуси 6 см-ға, ясиғучиси болса 10 см-ға тәң. Конусниң егизлигини тепиңлар:

A) 6 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $6\sqrt{2}$ см; D) 8 см.

5. Конусниң ясиғучиси 6 см-ға тәң вә у асас тәкшилигигә 45° булуң ясап янтайған. Мошу конус асасиниң радиусини тепиңлар:

A) 3 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $3\sqrt{3}$ см; D) 6 см.

6. Конус асасиниң радиуси 2 см-ға, ясиғучиси болса 3 см-ға тәң. Конус бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 6p см^2; B) 8p см^2; C) 10p см^2; D) 12p см^2.

7. Конус асасиниң радиуси 2 см-ға тәң. Конус егизлигиниң оттуриси арқилиқ асас тәкшилигигә параллель тәкшилик билән қийилмисиниң мәйданини тепиңлар:

A) p см^2; B) 2p см^2; C) 3p см^2; D) 4p см^2.

8. Тәңянлиқ үчбулуңлуқниң асаси 2 см-ға вә ян тәрәплири 4 см-ға тәң. Мошу үчбулуңлуқни униң асасиға чүширилгән егизлиги ятидиған түздин айландурғанда пәйда болған конус бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 3p см^2; B) 4p см^2; C) 5p см^2; D) 6p см^2.

9. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға вә ян қирлири 3 см-ға тәң. Мошу пирамидини униң егизлиги ятидиған түздин айландурғанда пәйда болған конусниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 3p см^2; B) 4p см^2; C) 5p см^2; D) 6p см^2.

10. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 4 см вә 1 см, егизлиги 4 см-ға тәң. Қийиқ конусниң ясиғучисини тепиңлар:

A) 3 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 6 см.

11. Қийиқ конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 45° булуң ясап янтайған. Конусниң чоң асасиниң радиуси 2 см-ға тәң болса, кичик асасиниң радиусини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ см; D) $2 - \sqrt{2}$ см.

12. Тәңянлиқ трапецияниң асаслири 2 см вә 4 см, ян тәрәплири 3 см-ға тәң. Мошу трапецияни униң асаслириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған түздин айландурғанда пәйда болидиған фигура бетиниң мәйданини тепиңлар:

A) 8р см^2; B) 10р см^2; C) 12р см^2; D) 14р см^2.

13. Шарниң радиуси 2 см-ға тәң. Шарниң мәркизидин 1 см арилиқтики тәкшилик билән қийилмиси болидиған дүгләкниң мәйданини тепиңлар:

A) р см^2; B) 2р см^2; C) 3р см^2; D) 4р см^2.

14. Сфериниң ичидә ятқан чекиттин сфериниң бойида ятқан чекитләргичә болған әң кичик вә әң чоң ариликлар мувапиқ 4 см-ға вә 6 см-ға тәң. Сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 2 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 10 см.

15. Цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — тәрәплири 6 см вә 8 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Цилиндрға сиртидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 5 см; B) 6 см; C) 8 см; D) 10 см.

16. Конусниң оқлуқ қийилмиси — тәрәплири 2 см болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Мошу конусқа ичидин сизилған сфериниң радиусини тепиңлар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.

17. Радиуси 2 см-ға тәң сфериниң мәйданини тепиңлар:

A) 12р см^2; B) 14р см^2; C) 16р см^2; D) 18р см^2.

18. Бирлик кубқа ичидин сизилған сфериниң мәйданини тепиңлар:

A) $\frac{\pi}{2}$ см^2; B) р см^2; C) 2р см^2; D) 3р см^2.

19. Бирлик кубқа сиртидин сизилған сфериниң мәйданини тепиңлар:

A) р см^2; B) 2р см^2; C) 3р см^2; D) 4р см^2.

20. Икки шарниң радиуслири 2 : 3 нисбитидәк. Уларниң бәтлири мәйданлириниң нисбитини тепиңлар:

A) 2 : 3; B) 4 : 6; C) 6 : 9; D) 4 : 9.

III бап ЖИСИМЛАРНИҢ ҺӘЖИМЛИРИ

§ 12. Жисимлар һәжимлириниң умумий хусусийәтлири

Һәжим — геометриялиқ фигуриларниң бошлуқтики бөлигини тәрипәйдиған миқдар. Һәжим геометриялиқ жисимларға бағлиқ асасий миқдарларниң бири болуп һесаплиниду.

Һәжимниң өлчәм бирлиги ретидә қириниң узунлиғи 1 гә тәң куб елиниду. Уни *бирлик куб* дәп атайду.

Мәсилән, әгәр узунлуқниң өлчәм бирлиги 1 мм, 1 см яки 1 м болса, у чағда һәжимниң өлчәм бирлиги ретидә қириниң узунлиғи мувапиқ 1 мм, 1 см яки 1 м-ға тәң куб елиниду. Мошундақ куб мувапиқ *миллиметр куб*, *сантиметр куб* яки *метр куб* дәп атилиду.

Аддий һаләттә фигуриниң һәжими мошу фигура ичигә патидиған бирлик кубларниң вә униң бөләклириниң сани билән өлчиниду. Бу сан натурал, рационал яки иррационал болуши мүмкин. Фигуриниң һәжими өлчәм бирлигигә бағлиқ болғанлиқтин, чүшинишлик болуши үчүн әмәлиятта мошу сандин кейин һәжимниң өлчәм бирлиги көрситилиду. Мисалға, V мм^3, V см^3, V м^3.

Бошлуқтики фигуриниң һәжими үчүн төвәндики хусусийәтләр орунлуқ болиду:

1) бошлуқтики фигуриниң һәжими иҗабий сан;

2) бирдәк фигуриларниң һәжимлири тәң;

3) әгәр Φ фигуриси Φ_1 вә Φ_2 фигурилиридин түзүлгән болса, у чағда Φ фигурисиниң һәжими Φ_1 вә Φ_2 фигурилириниң һәжимлириниң қошундисиға тәң, йәни

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2);$$

4) бир чоққисидин чиқидиған қирлири a, b, c болған *тикбулуңлуқ параллелепипедниң V һәжими* төвәндики формула билән һесаплиниду:

$$V(\Phi) = a \cdot b \cdot c.$$

Бәзидә *тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәжими* униң сизиқлиқ өлчәмлириниң көпәйтиндисигә тәң яки униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң дәп ейтиду. Ахирқи йәкүнлимә һәр қандақ параллелепипед үчүн дурус болиду.

Айрим һаләтләрдә қири a-ға тәң кубниң V һәжими төвәндики формула билән һесаплиниду:

$$V = a^3.$$

? Қандақ ойлайсиләр, фигуриниң һәжими нөлгә тәң боламду?

Һәҗимлири тәң икки фигура *тәңмиқдарлиқ фигурилар* дәп атилиду.

Чекитлириниң арилиғи бирдәк иҗабий санға көпәйтилидиған тәкшиликни түрләндүрүш *охшашлиқ* дәп атилидиғанлиғини есимизға чүширимиз. Йәни, охшашлиқ түрләндүрүш вақтида һәр қандақ A, B чекитлири мувапиқ A', B' чекитлиригә көчидиған болса, $A'B' = k \cdot AB$ болиду, бу йәрдә k — *охшашлиқ коэффициенти* дәп атилидиған иҗабий сан.

Әгәр бошлуқтики икки фигуриниң бирини иккинчисигә көчиридиған охшашлиқ түрләндүрүш бар болса, у чағда мошу икки фигура *охшаш* дәп атилиду.

Охшаш фигуриларға мисаллар:

1) икки кубниң охшашлиқ коэффициенти мошу кублар қирлири узунлуқлириниң нисбитигә тәң болиду;

2) икки тикбулуңлуқ параллелепипедларниң a', b', c' билән a, b, c қирлири үчүн мону тәңликләр орунлиниду:

$$a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc,$$

бу йәрдә k — қандақту бир турақлиқ сан;

3) икки шарниң охшашлиқ коэффициенти мошу шарлар радиуслириниң нисбитигә тәң болиду.

Икки охшаш көпяқлиқ бәтлириниң мәйданлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң квадратиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Икки охшаш шар бәтлириниң мәйданлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң квадратиға тәң болидиғанлиғини тәкшүрүңлар.

Икки тикбулуңлуқ параллелепипед һәҗимлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң кубиға тәң болидиғанлиғини тәкшүрүңлар.

Икки охшаш фигура һәҗимлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң кубиға тәң болидиғинини испатлимисиз беримиз, йәни әгәр k охшашлиқ коэффициенти бойичә Φ_2 фигуриси Φ_1 фигурисиға охшаш болса, у чағда мошу фигуриларниң һәҗимлири үчүн төвәндики формула орунлуқ болиду:

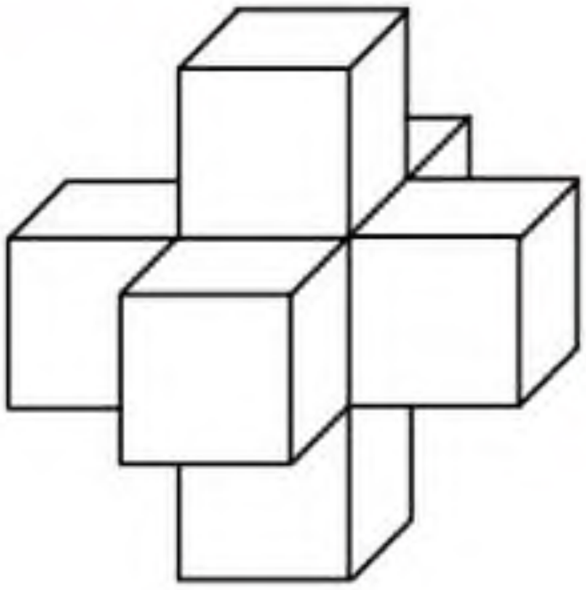
$$V(\Phi_2) = k^3 V(\Phi_1).$$

Соаллар

1. Һәҗим қандақ миқдарни тәрипләйду?
2. Һәҗимниң өлчәм бирлиги ретидә немә елиниду?
3. Һәҗимниң хусусийәтлирини атаңлар.
4. Бошлуқтики қандақ фигурилар тәңмиқдарлиқ дәп атилиду?
5. Бошлуқтики қандақ түрләндүрүш охшашлиқ дәп атилиду?
6. Бошлуқтики қандақ фигурилар охшаш дәп атилиду?
7. Охшаш фигуриларниң һәҗимлири өз ара қандақ бағлинишқан?
8. Бошлуқтики охшаш фигуриларға мисаллар кәлтүрүңлар.

Һесаплар

A



12.1-сүрәт

12.1. Кубниң һәҗими 27 $см^3$-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.

12.2. Куб бетиниң мәйдани 24 $см^2$-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

12.3. Кубниң диагонали $\sqrt{12}$ см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

12.4. 12.1-сүрәттики бошлуқ фигурисини тәшкил қилидиған кубларниң қирлири 1 см-ға тәң. Мошу фигуриниң һәҗими тепиңлар.

12.5. Әгәр кубниң бирлиқ қирлирини 3 һәссә ашурсақ, у чағда униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?

12.6. Әгәр тикбулуңлуқ параллелепипедниң барлиқ қирлирини 2 һәссә кемитсәк, у чағда униң һәҗими қанчә һәссә кемийду?

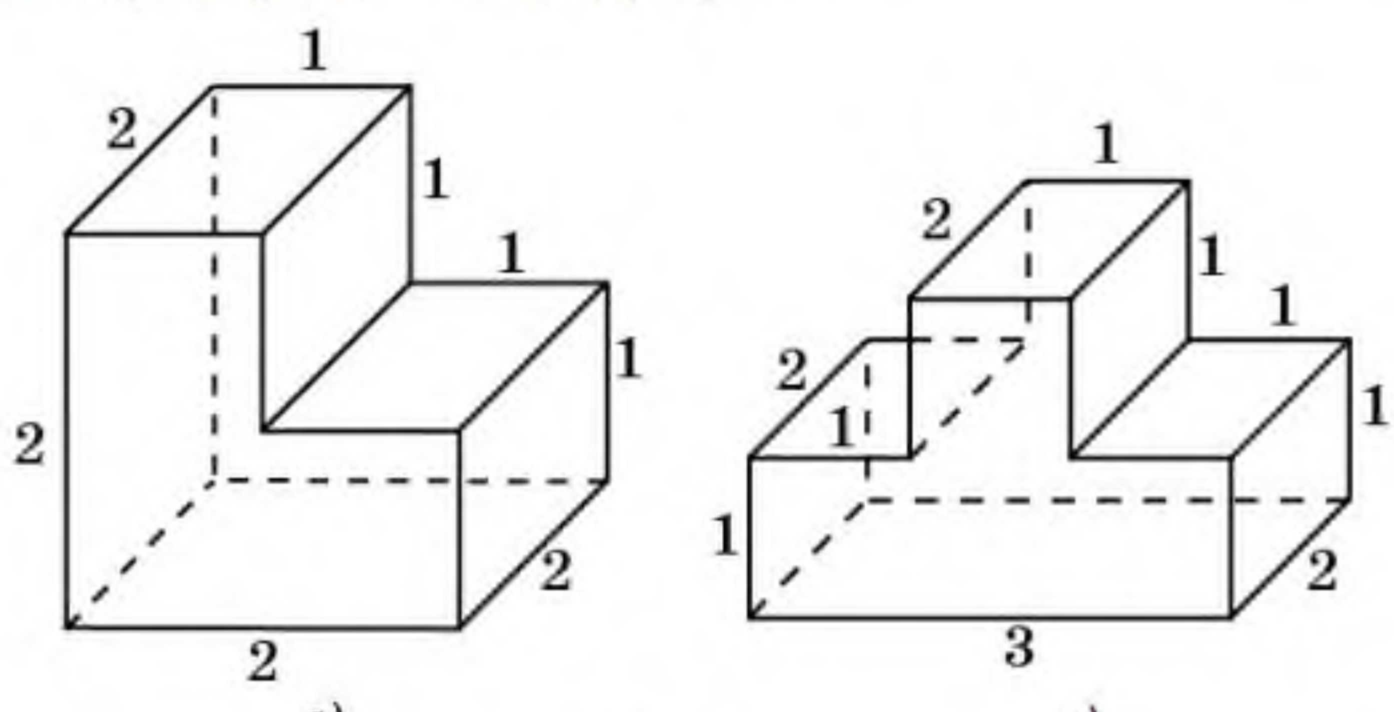
12.7. Әгәр тикбулуңлуқ параллелепипедниң: 1) бир сизиқлиқ өлчимини 2 һәссә ашурса; 2) икки сизиқлиқ өлчимини 3 һәссә қисқартса, у чағда униң һәҗими қандақ өзгириду?

12.8. Қурулуш хишиниң салмиғи 4 кг. Барлиқ сизиқлиқ өлчәмлири мошу хишниң өлчәмлиридин төрт һәссә кичик болидиған оюнчуқ хишниң салмиғи қанчә грамм болиду?

B

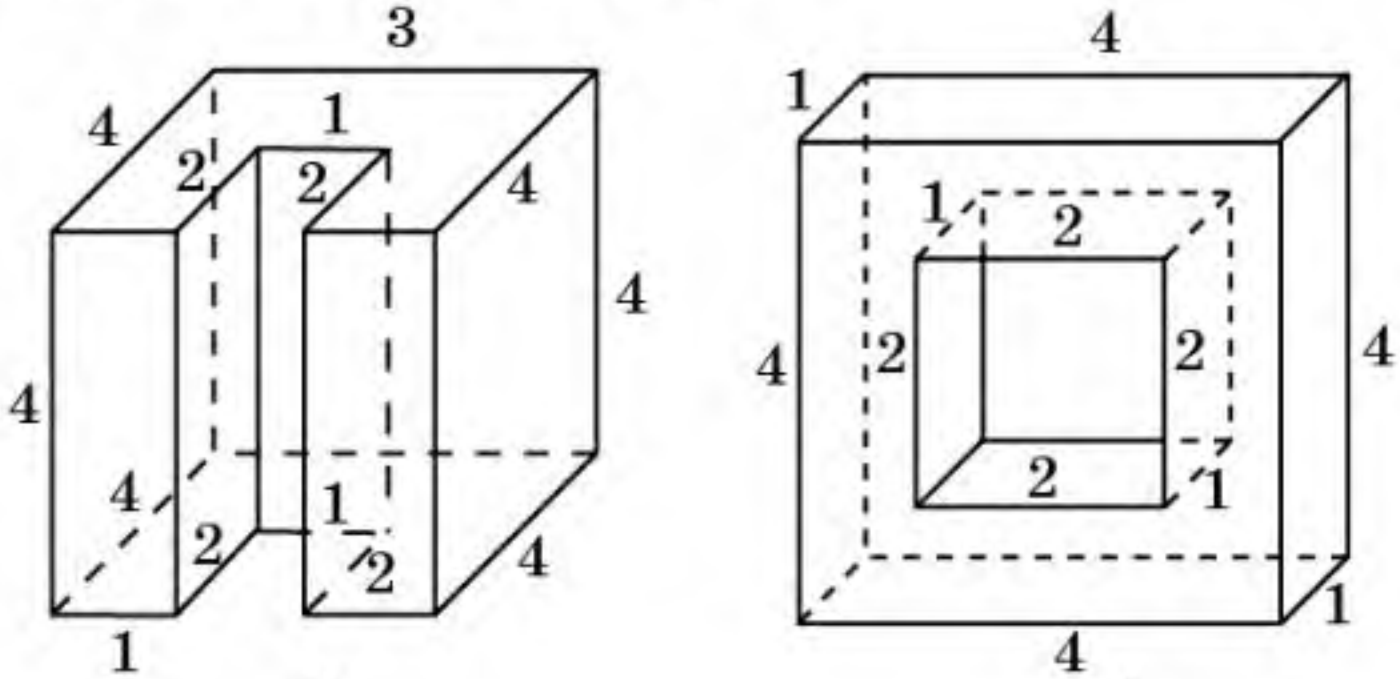
12.9. Мәктәптики синип бөлмисиниң егизлиги 3,5 м-ға тәң. Әгәр һәр бир оқуғучиға 7,5 $м^3$ һава һаҗәт болса, у чағда 28 оқуғучиға беғишланған синип бөлмисиниң мәйдани қандақ болуши керәк?

12.10. 12.2-сүрәттики тикбулуңлуқ параллелепипедлардин туридиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.



12.2-сүрәт

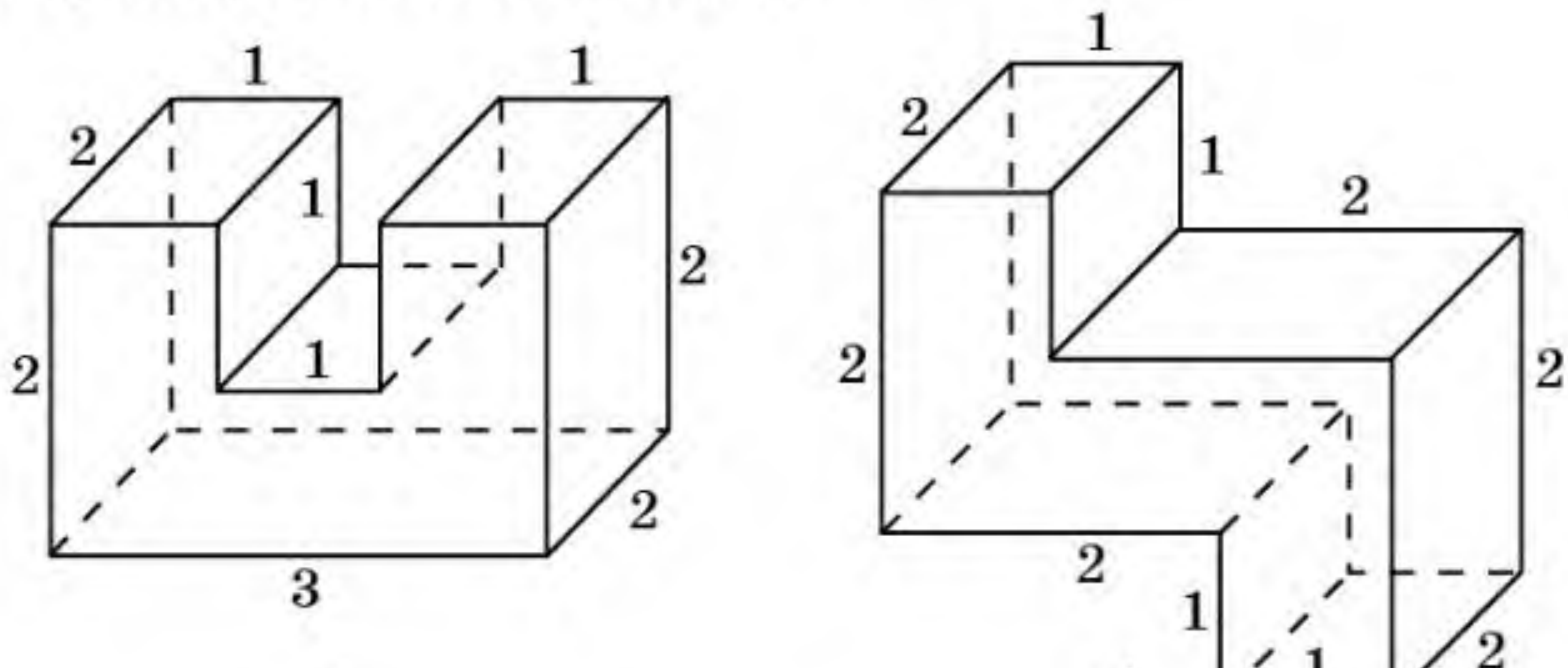
12.11. 12.3-сүрәттики тикбулуңлуқ параллелепипедлардин туридиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.



а) ә)

12.3-сүрәт

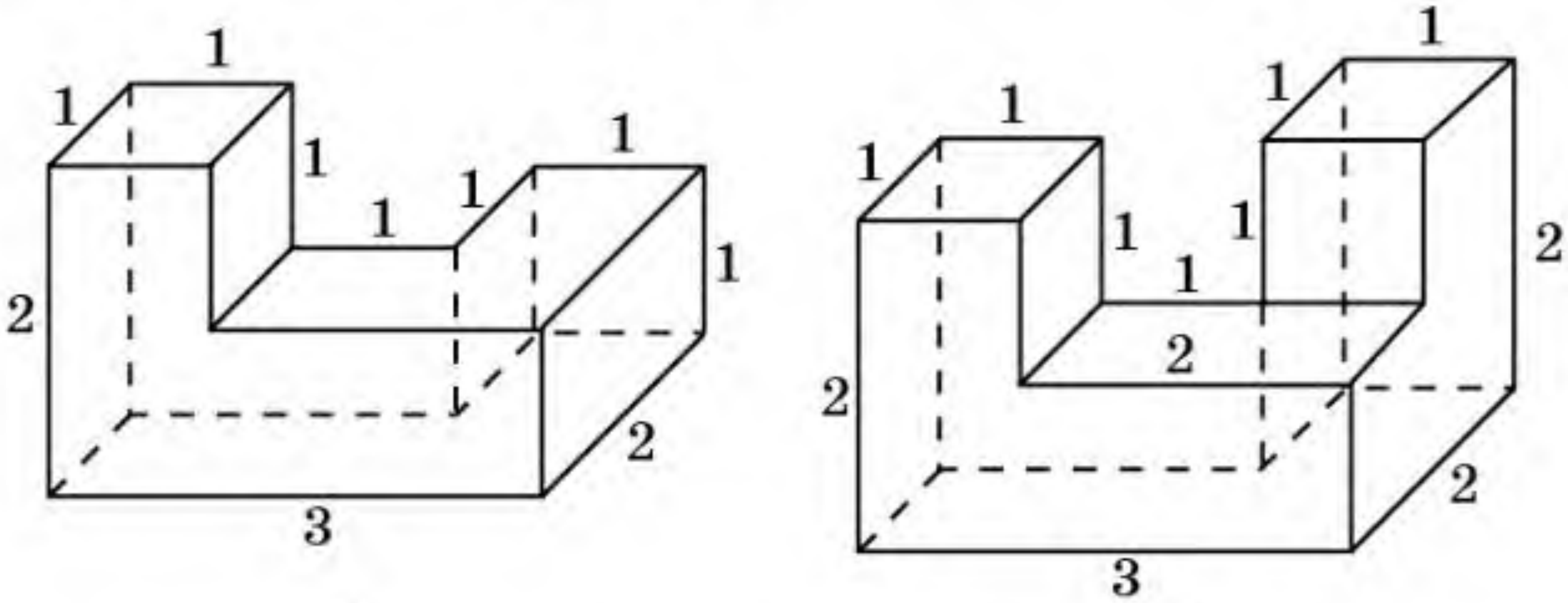
12.12. 12.4-сүрәттики тикбулуңлуқ параллелепипедлардин туридиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.



а) ә)

12.4-сүрәт

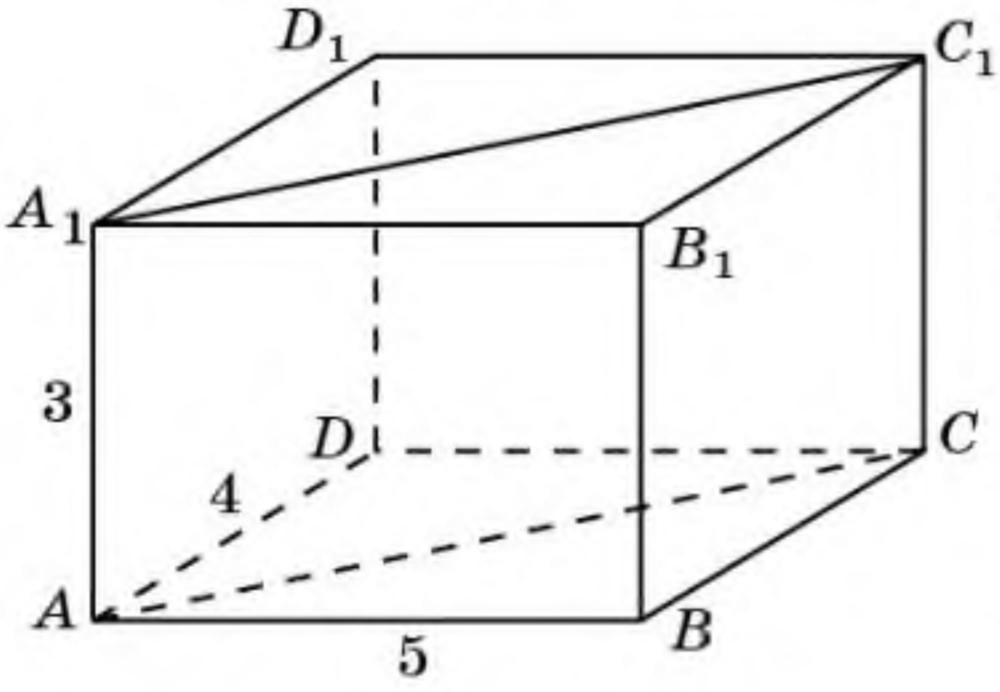
12.13. 12.5-сүрәттики тикбулуңлуқ параллелепипедлардин туридиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.



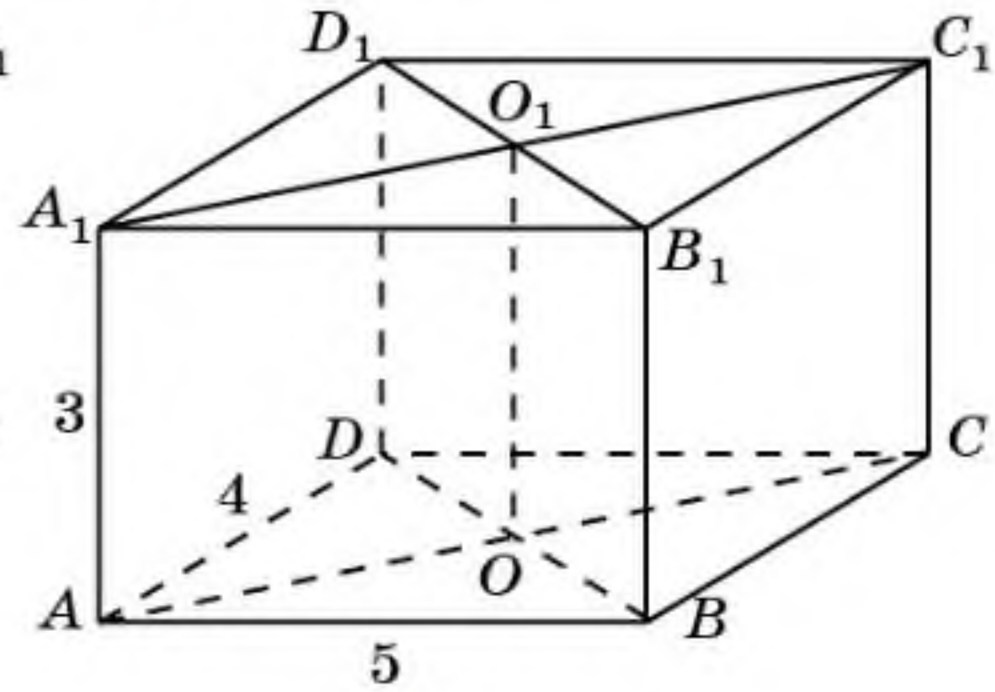
а) ә)

12.5-сүрәт

12.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 5 см, 4 см, 3 см-ға тәң. $ABCA_1B_1C_1$ үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар (12.6-сүрәт).



12.6-сүрәт

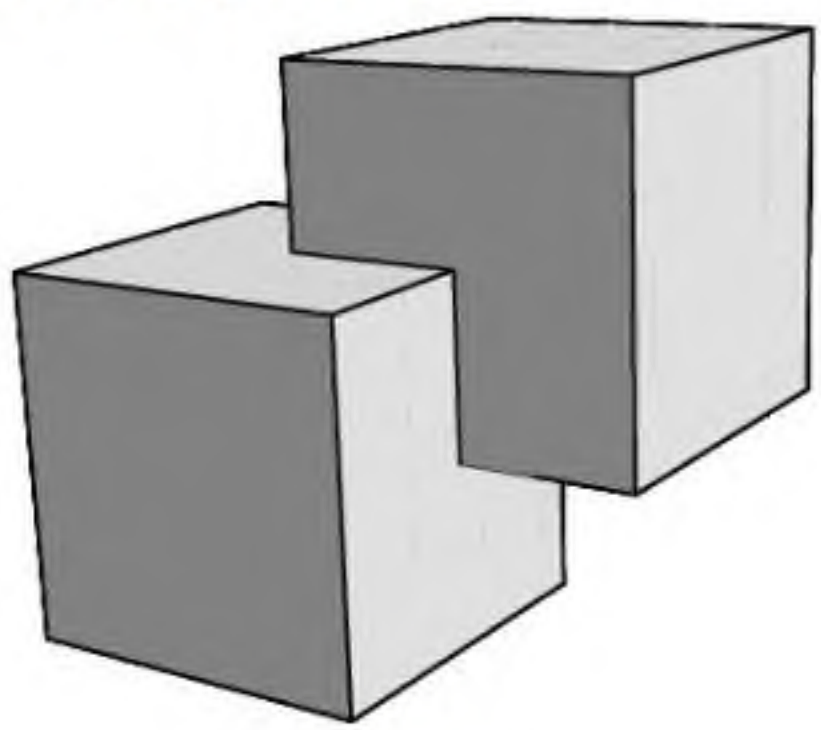


12.7-сүрәт

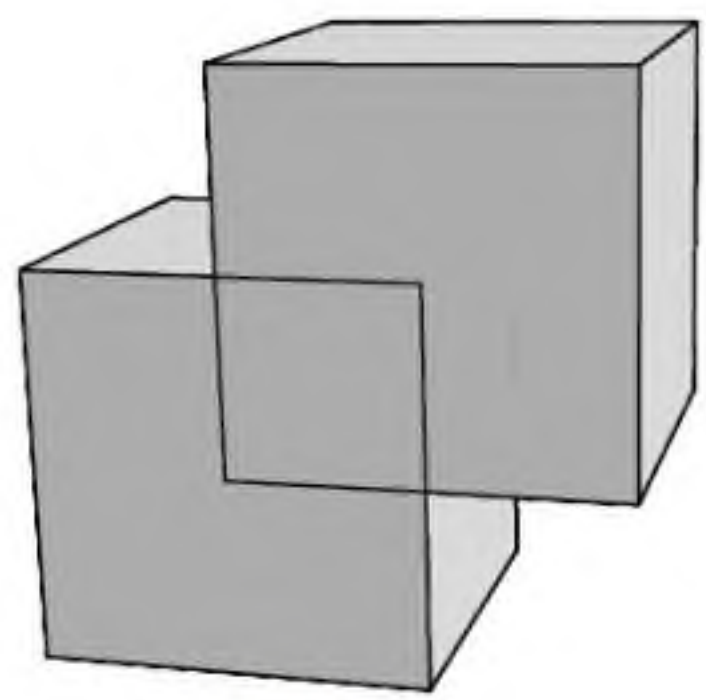
12.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 5 см, 4 см, 3 см-ға тәң. $ABOA_1B_1O_1$ үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар (12.7-сүрәт).

12.16. Белиқни өстүрүшкә беғишланған акварумниң асаси — қирлири 40 см вә 50 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Аквариумдики суниң чоңқурлиғи 80 см-ни тәшкил қилиду. Бу су иккинчи аквариумға қуювелинди. Иккинчи аквариумниң түви — тәрәплири 80 см вә 100 см-ға тәң тиктөртбулуңлуқ. Буниңдики суниң чоңқурлиғи қандақ болиду?

12.17. Бириниң чоққиси иккинчисиниң мәркизидә орунлашқан икки бирлик кублириниң умумий (кийилишкән) бөлигиниң һәҗимини тепиңлар (12.8-сүрәт).



12.8-сүрәт



12.9-сүрәт

12.18. Бириниң икки чоққиси иккинчисиниң икки йеқиниң мәркәзлиридә орунлашқан икки бирлик кублардин түзүлгән фигуриниң һәҗимини тепиңлар (23.9-сүрәт).

12.19. Қурулуш хишиниң өлчими 25 см × 12 см × 6 см. Цементлиқ арилашминиң һәҗимини 15%-қа ашуридиған болса, 10 000 хиштин турғузулған тамниң һәҗимини тепиңлар.

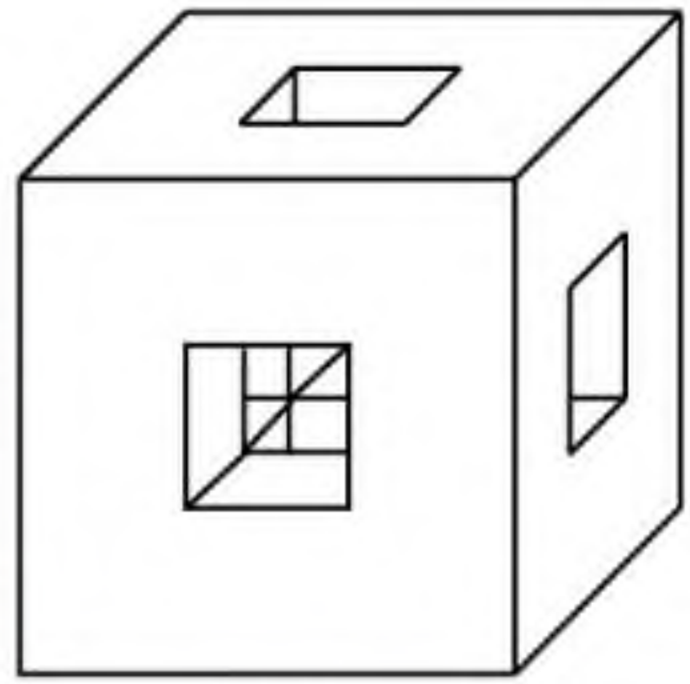
12.20. Қирлири 1 см, 6 см вә 8 см болидиған үч қоғушун кубни суюлдуруп бир куб ясиди. Елинған куб қириниң узунлиғини тепиңлар.

C

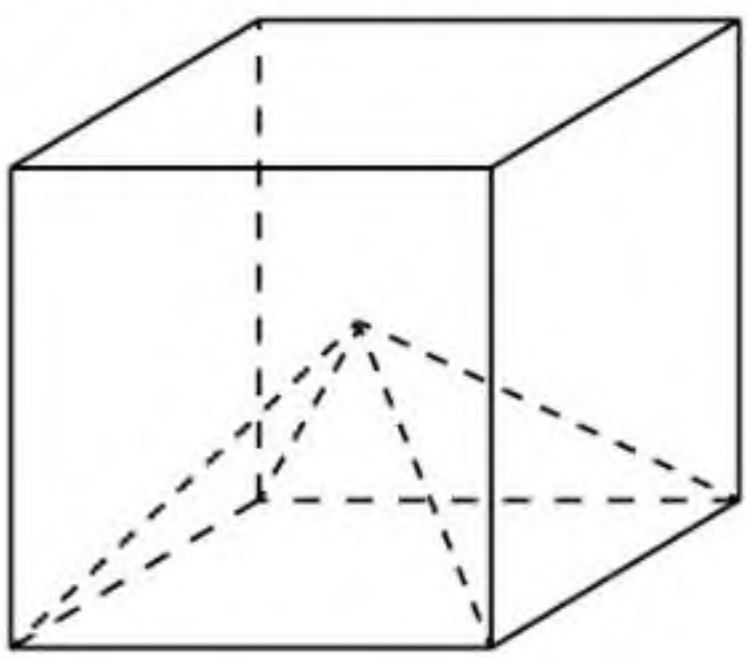
12.21. Әгәр кубниң һәр бир қирини 2 см-ға ашурса, у чағда униң һәҗими 98 $см^3$-ға ашиду. Кубниң қирини тепиңлар.

12.22. Қири 6 см-ға тәң болидиған кубниң һәр бир йеқидин тәрипи 2 см-ға тәң квадрат шәклидә төшүкләр ясалди (12.10-сүрәт). Кубниң қалған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

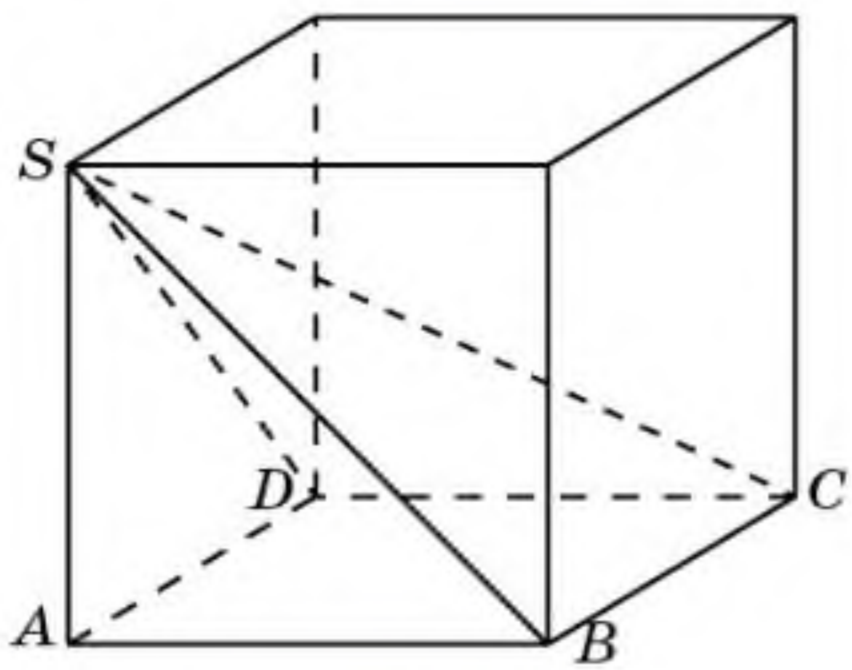
12.23. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң асаси — бирлик кубниң бир йеқи, чоққиси болса мошу кубниң мәркизи болуп һесаплиниду (12.11-сүрәт). Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.



12.10-сүрәт



12.11-сүрәт



12.12-сүрәт

12.24. Төртбулуңлуқ пирамидиниң асаси — бирлик кубниң бир йеқи, чоққиси болса мошу йеқида ятмайдиған кубниң чоққиси болуп һесаплиниду (12.12-сүрәт). Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

12.25. Параллелепипед шәклидики қача берилгән (12.13-сүрәт). Қача һәҗиминиң тәң йерими су билән толтурулған. Сүритини селип көрситиңлар вә чүшәндүрүңлар. Әгәр качиниң узунлиғи 4 м, кәңлиги егизлигидин 0,5 м-ға артуқ, егизлиги узун-

12.13-сүрәт

лиғиниң 37,5%-ни тәшкил қилидиған болса, қуюлған суниң һәҗимини тепиңлар.

12.26. Аквариумниң узунлиғи 80 см, кәңлиги 45 см, егизлиги 55 см. Суниң сәвийәси аквариумниң жуқарқи қиридин 10 см төвән болуши үчүн мошу аквариумға нәччә литр су қуюш керәк?

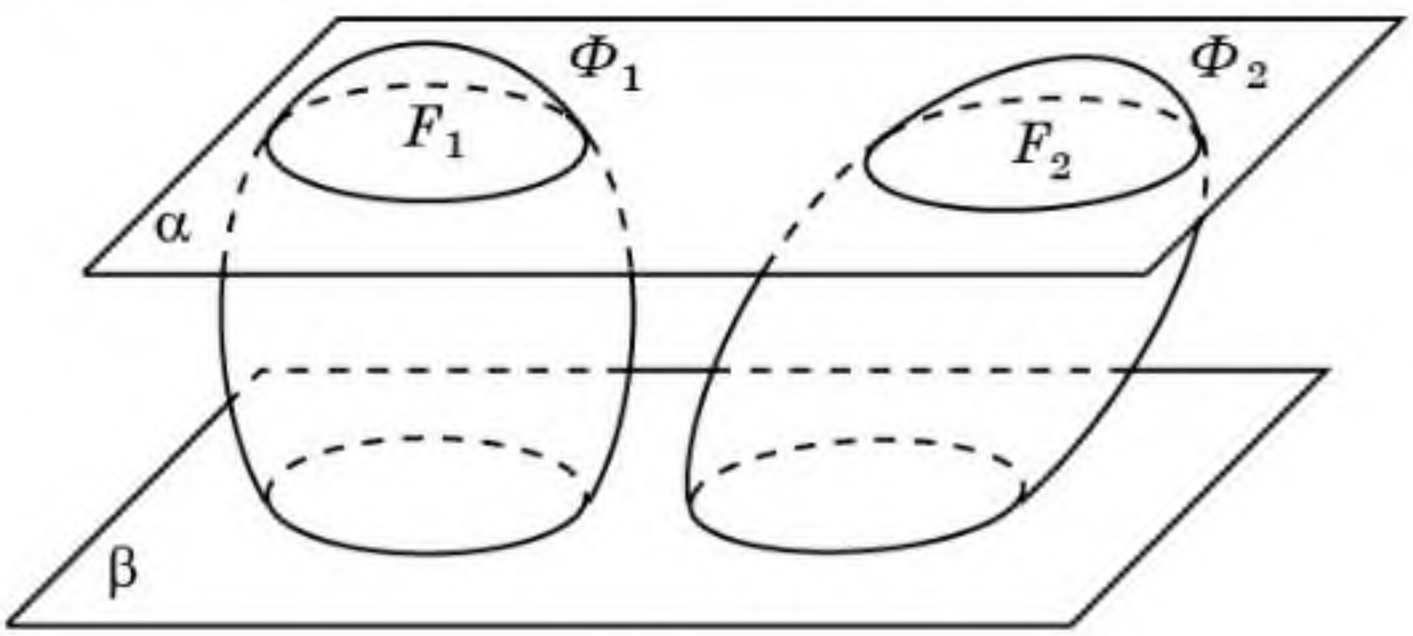
Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

12.27. Призминиң, ичидин сизилған вә сиртидин сизилған призмиларниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§ 13. Призминиң һәҗими

Итальянлиқ математик Бонавентура Кавальери (1598—1647-жж.) тәвсийә қилған бошлуқ фигурилириниң һәҗимини һесаплаш усулини қараштурайли.

Кавальери принципи. ***Әгәр бошлуқтики Φ_1 вә Φ_2 фигурилириниң бир тәкшиликкә параллель тәкшиликләр билән қийилмилирида мәйданлири бирдәк F_1 вә F_2 фигурилири һасил болса, у чағда берилгән бошлуқтики фигуриларниң һәҗимлири тәң болиду.*** (13.1-сүрәт).



13.1-сүрәт

Кавальери принципини асаслаш үчүн Φ_1 вә Φ_2 фигурилирини қелинлиғи бирдәк непиз қәвәтләрдин қураштурулған дәп алимиз. Улар Φ_1 вә Φ_2 фигурилириниң қандақту бир тәкшиликкә параллель тәкшиликлири билән қийилишишидин һасил болиду (13.1-сүрәт). Мошу қәвәтләрниң қелинлиғи билән мәйданлириниң тәңлигидин уларниң һәҗимлириниң тәңлиги чиқиду. Демәк, мошу қәвәтләрдин тәшкил тапқан Φ_1 вә Φ_2 фигурилириниң һәҗимлириму тәң болиду.

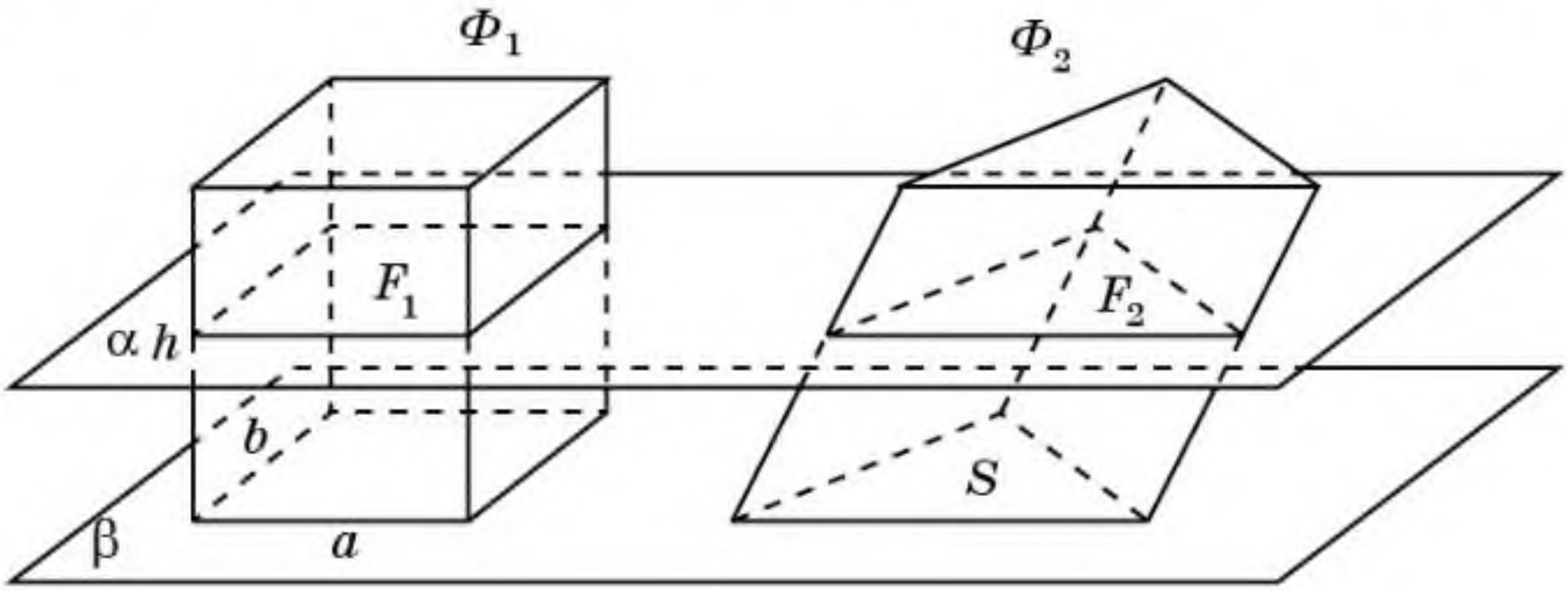
Кавальери принципини қоллинип, һәр қандақ призминиң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқиришқа болиду.

Теорема. ***Призминиң һәҗими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду:***

$$V = S \cdot h,$$

бу йәрдә S — призма асасиниң мәйдани, h — призминиң егизлиги.

Испатлиниши. Асасиниң мәйдани S вә егиздиги h болған призма үчүн тикбулуңлуқ параллелепипедни қараштуримиз. Униң бир чоққисидин чиқидиған қирлири a, b, h-қа тәң вә $a \cdot b = S$ болсун. Призма билән параллелепипедни униң a, b тәрәплири ятқан йеқи призма асасиниң b тәкшилигидә ятидиғандәк вә өзлири мошу тәкшиликниң бир йеқидики бөлигидә болидиғандәк орунлаштуримиз (13.2-сүрәт).



13.2-сүрәт

Параллелепипедниң b тәкшилигигә параллель тәкшилиги билән қийилмисида b тәкшилигидики тәрәплири a, b болидиған тиктөртбулуңлуққа тәң тиктөртбулуңлуқ һасил болиду. Призминиң мошу a тәкшилиги билән қийилмисида призминиң асасиға тәң көпбулуңлуқ елиниду. Бу қийилмиларниң мәйданлири тәң. Демәк, Кавальери принципи бойичә параллелепипед билән призминиң һәҗимлири тәң болиду. Мошуниңдин призминиң һәҗими $V = S \cdot h$ болидиғанлиғи келип чиқиду.

Тик призминиң егизлиги униң ян қири билән бәтлишиду, һәҗими асасиниң мәйдани билән ян қириниң көпәйтиндисигә тәң болиду.

Егизлиги h вә асасиниң тәрәплири a болған дурус: а) үчбулуңлуқ; ә) алтәбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқириңлар.

Соаллар

1. Кавальери принципи қандақ йәкүнлиниду?
2. Призминиң һәҗими қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

А

13.1. Үчбулуңлуқ призминиң асаси — катетлири 3 см вә 4 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуң. Призминиң егизлиги 10 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

13.2. Дурус үчбулуңлуқ призминиң егизлиги 5 см-ға, асасиниң тәрәплири 4 см-ға тәң. Мошу призминиң һәҗимини тепиңлар .

13.3. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң ян қирлири 3 см-ға, асасиниң тәрәплири 2 см-ға тәң. Мошу призминиң һәҗимини тепиңлар.

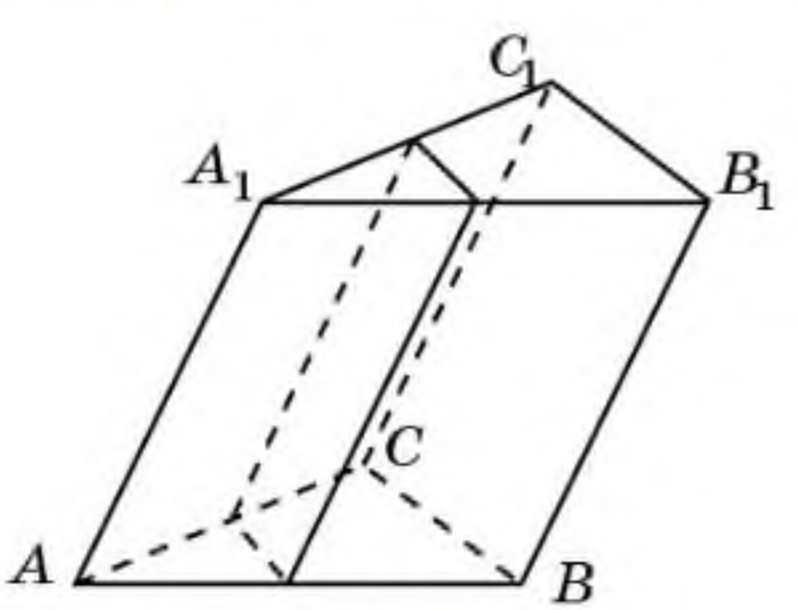
13.4. Төртбулуңлуқ призминиң асаси — тәрәплири 1 см-ға тәң квадрат. Призминиң ян қирлири 2 см-ға тәң вә улар асас тәкшилиги билән 60° булуң ясайду. Призминиң һәҗимини тепиңлар.

13.5. Параллелепипедниң йеқи — тәрәплири 1 см вә тар булуңи 60° болидиған ромб. Параллелепипедниң бир қири 1 см-ға тәң вә мошу йеқи билән 60° булуң ясайду. Униң һәҗимини тепиңлар.

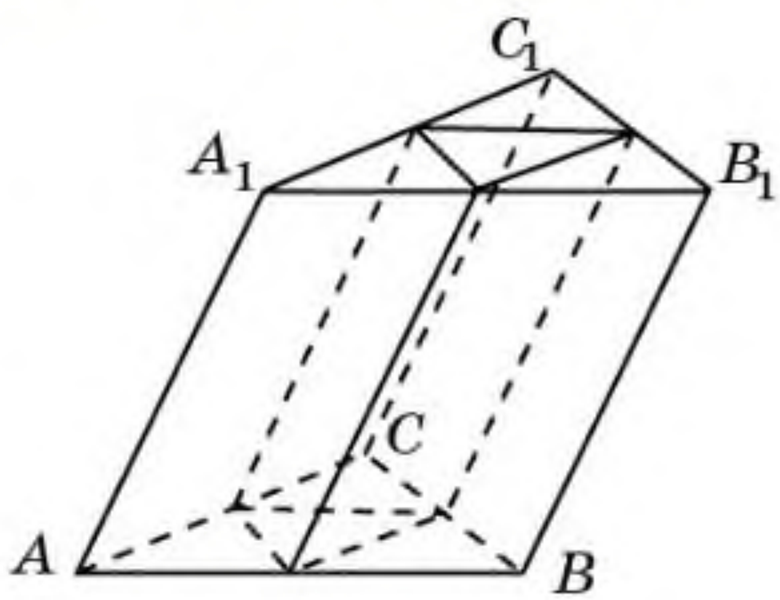
B

13.6. Дурус үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 4800 см^3-ға, асасиниң тәрәплири 20 см-ға тәң. Призминиң егизлигини тепиңлар.

13.7. Үчбулуңлуқ призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ униң ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән (13.3-сүрәт). Бу тәкшилик призминиң һәҗимини қандақ нисбәттә бөлиду?

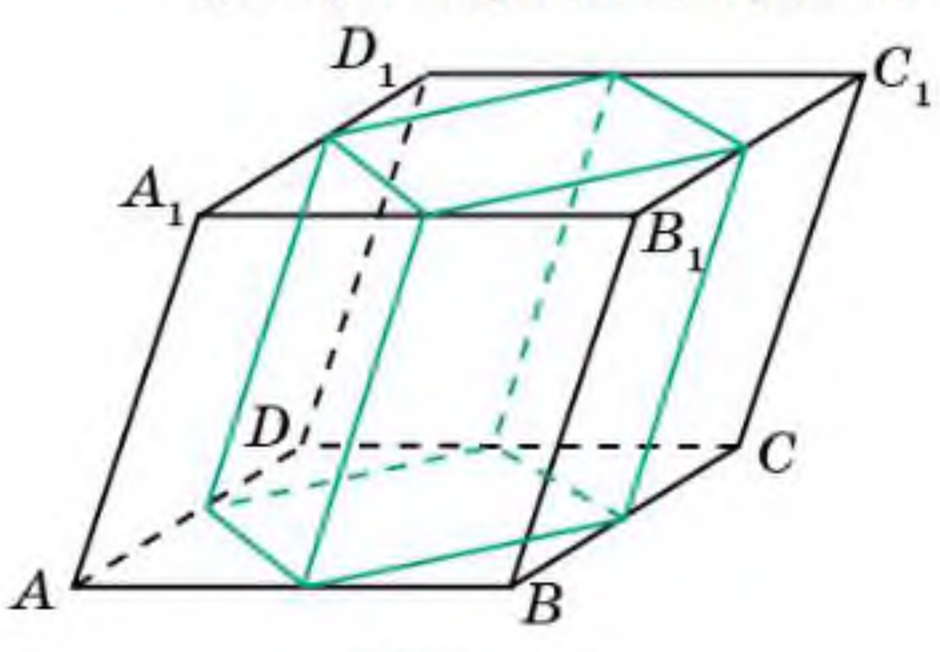


13.3-сүрәт



13.4-сүрәт

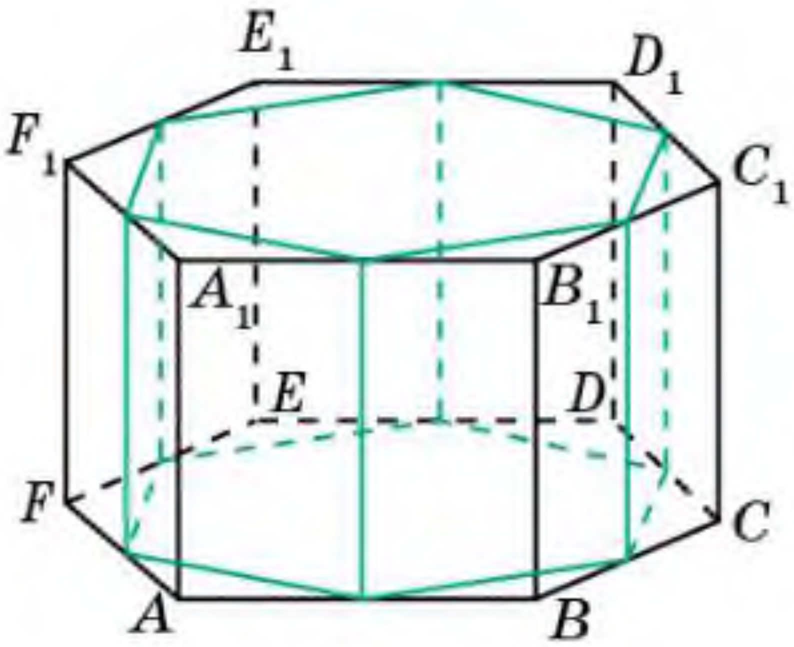
13.8. Үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 12 см^3-ға тәң. Асасиниң чоққилири берилгән призма асасиниң тәрәплириниң оттурилири болидиған иккинчи призминиң һәҗимини тепиңлар (13.4.-сүрәт).



13.5-сүрәт

13.9. Төртбулуңлуқ призминиң һәҗими 10 см^3-ға тәң. Асасиниң чоққилири берилгән призма асасиниң тәрәплириниң оттурилири болидиған иккинчи призминиң һәҗимини тепиңлар (13.5-сүрәт).

13.10. Алтәбулуңлуқ призминиң һәҗими 12 см^3-ға тәң. Асасиниң чоққилири берилгән призма асасиниң тәрәплириниң оттурилири болидиған иккинчи призминиң һәҗимини тепиңлар (13.6-сүрәт).

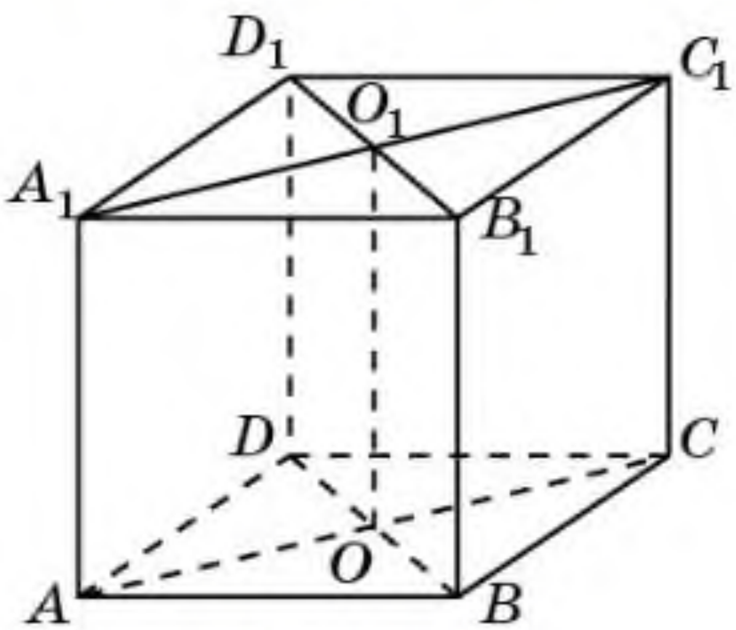


13.6-сүрәт

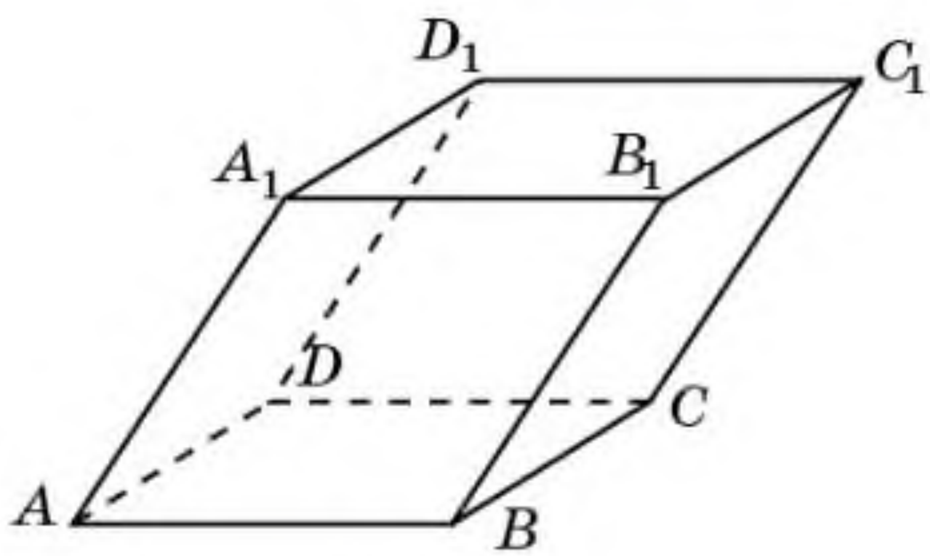
13.11. Дурус n-булуңлуқ икки призма охшаш болуши үчүн уларниң ян қирлири билән асасиниң тәрәплиригә бағлиқ шәртләрни йәкүнләңлар. Мошу призмилар һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

C

13.12. Тик призминиң асаси — мәйдани 1 м^2-ға тәң болидиған ромб. Униң диагональлиқ қийилмилириниң мәйданлири 3 м^2-ға вә 6 м^2-ға тәң (13.7-сүрәт). Призминиң һәҗимини тепиңлар.



13.7-сүрәт



13.8-сүрәт

13.13. Параллелепипедниң умумий чоққиси бар үч йеқи — тәрәплири 1 см вә чоққисидики тар булуңи 60°-қа тәң ромб (13.8-сүрәт). Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

13.14. Айлиниш җисимлириниң вә цилиндрниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар .

§ 14. Цилиндрниң һәҗими

Кавальери принципини цилиндрниң һәҗимини тепишқа коллинайли.

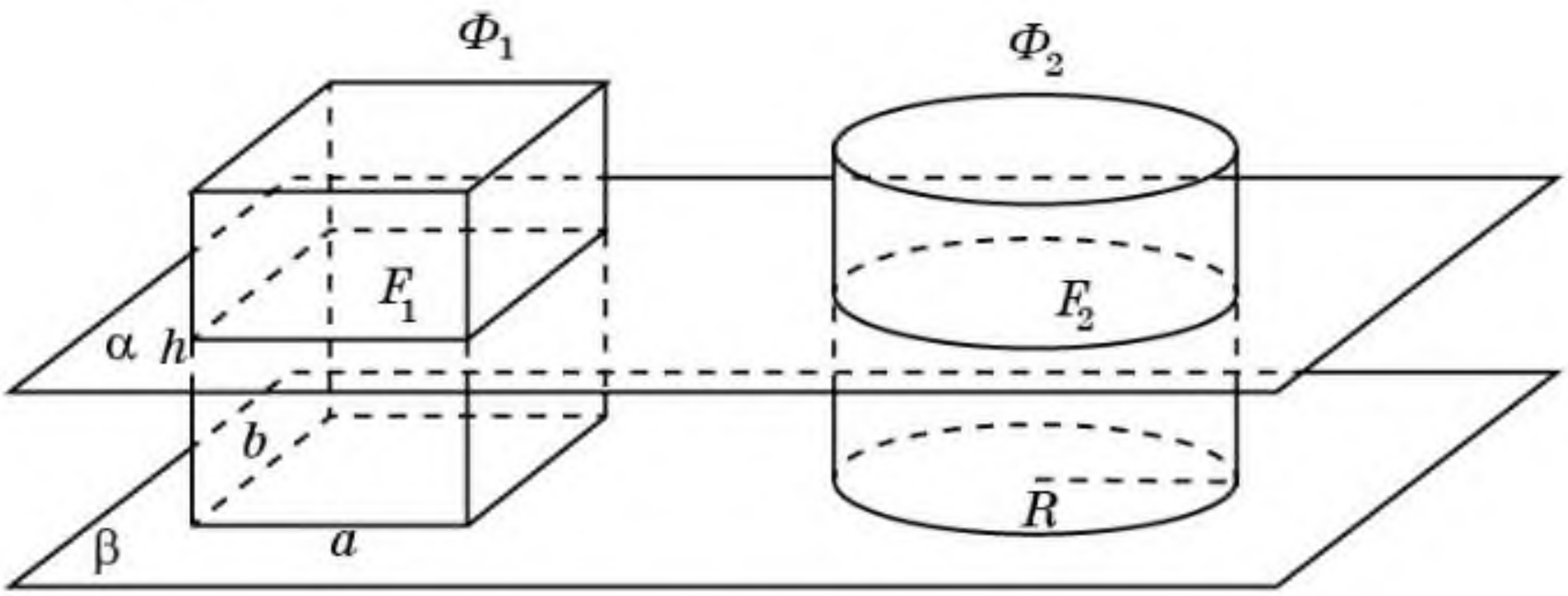
Теорема. ***Цилиндрниң һәҗими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду*:**

$$V = S \cdot h = \pi R^2 \cdot h,$$

бу йәрдә S — цилиндр асасиниң мәйдани, R — асасиниң радиуси, h — цилиндрниң егизлиги.

Испатлиниши. Теореминиң испатлиниши призминиң һәҗимини тепиш формулисиниң испатлинишиға охшаш болуп келиду. Асасиниң радиуси R вә егизлиги h болидиған цилиндр үчүн тикбулуңлуқ параллелепипедни қараштурайли. Униң бир чоққисидин чиқидиған қирлири a, b, h-қа тәң вә $a \cdot b = pR^2$ болсун.

Цилиндр билән параллелепипедни униң a, b тәрәплири ятқан йеқи цилиндр асасиниң b тәкшилигидә ятидиғандәк вә өзлири мошу тәкшиликниң бир йеқида болидиғандәк қилип орунлаштуримиз (14.1-сүрәт).



14.1-сүрәт

Параллелепипедниң b тәкшилигигә параллель a тәкшилиги билән кийилмисида b тәкшилигидики тәрәплири a, b болидиған тиктөртбулуңлуққа тәң тиктөртбулуңлуқ һасил болиду. Цилиндрниң мошу a тәкшилиги билән кийилмисида цилиндрниң асасиға тәң дүгләк елиниду. Бу кийилмиларниң мәйданлири тәң. Демәк, Кавальери принципи бойичә параллелепипед билән цилиндрниң һәҗимлири тәң болиду. Мошуниңдин цилиндрниң һәҗими $pR^2 \cdot h$ келип чиқиду.

Соаллар

1. Цилиндрниң һәҗими қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

A

14.1. Цилиндрниң ясиғучиси 3 см-ға, асасиниң радиуси 2 см-ға тәң. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

14.2. Цилиндрниң оқлук қийилмиси — тәрипи a см болидиған квадрат. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

14.3. Бир қача иккинчисигә қариғанда 2 һәссә егизирәк, иккинчи қача биринчисигә қариғанда 1,5 һәссә кәңирәк. Қайси қачиниң сиғдурушлиғи жуқури?

14.4. Квадратниң тәрипи a-ға тәң. Квадратни тәрипи ятқан түздин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

14.5. Цилиндрниң оқлуқ қийилмисиниң диагонали 1 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясап янтийиду. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

14.6. Бирлик кубқа ичидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

14.7. Тик призминиң асаси — тәрипи 1 см-ға тәң квадрат. Призминиң ян қири 2 см-ға тәң. Мошу призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

В

14.8. Тиктөртбулуңлуқни a вә b-ға тәң тәрәплири ятқан түзләрдин айландурғанда икки цилиндр пәйда болиду. Мошу цилиндрларниң һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

14.9. Дурус төртбулуңлуқ призмиға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗими мошу призмиға ичидин сизилған цилиндрниң һәҗимидин нәччә һәссә артуқ?

14.10. 14.2-сүрәттики цилиндр асасиниң радиуси 2 см-ға, ясиғучиси 3 см-ға тәң. Мошу цилиндрдин иккияқлиқ тик булуң ясап қийилип елинған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

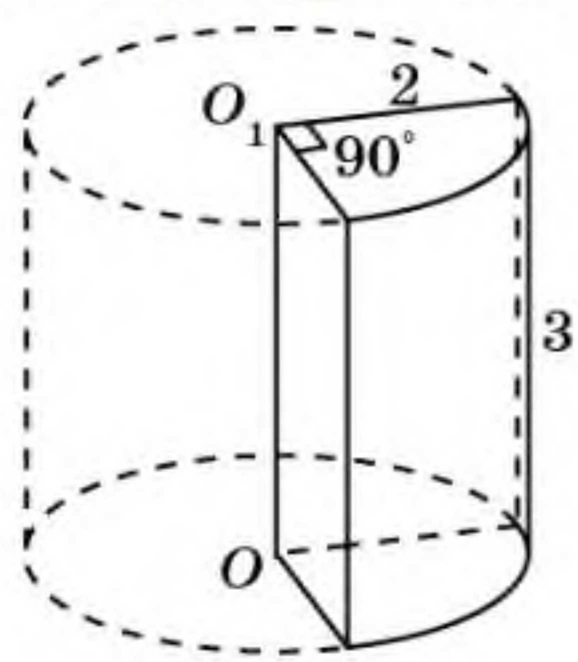
14.11. Цилиндрлиқ қача асасиниң диаметри 9 см-ға тәң. Қачиға қандақту бир җисимни салғанда униң ичидики суюқлуқ мөлчәри 12 см-ға көтирилиду. Җисимниң һәҗимини тепиңлар.

14.12. Цилиндрлиқ қачидики суюқлуқ сәвийәси 16 см-ға тәң. Әгәр мошу суюқлуқни диаметри бу қачидин 2 һәссә чоң болидиған иккинчи қачиға қуйса, у чағда суюқлуқниң сәвийәси қандақ егизликтә болиду?

14.13. Цилиндрниң ян бетиниң йейилмиси — тәрәплири 1 см вә 2 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

14.14. Бирлик сфериға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

14.15. Икки цилиндр охшаш болуши үчүн уларниң асаслириниң радиуслири билән

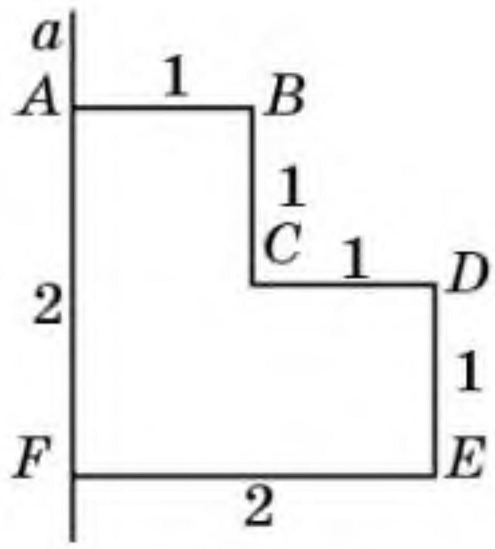


14.2-сүрәт

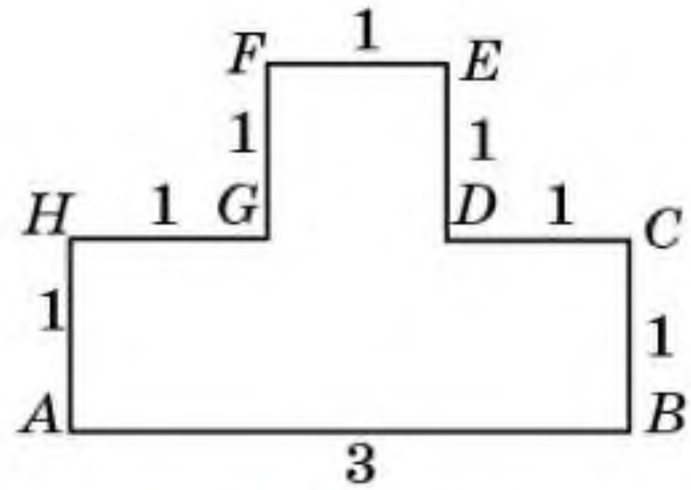
ясиғучилириға бағлиқ шәртләрни йезиңлар. Уларниң һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

C

14.16. 14.3-сүрәттә барлиқ булуңлири тик болидиған көпбулуңлуқ тәсвирләнгән. Мошу көпбулуңлуқни 2 см-ға тәң тәрипи ятидиған түздин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.



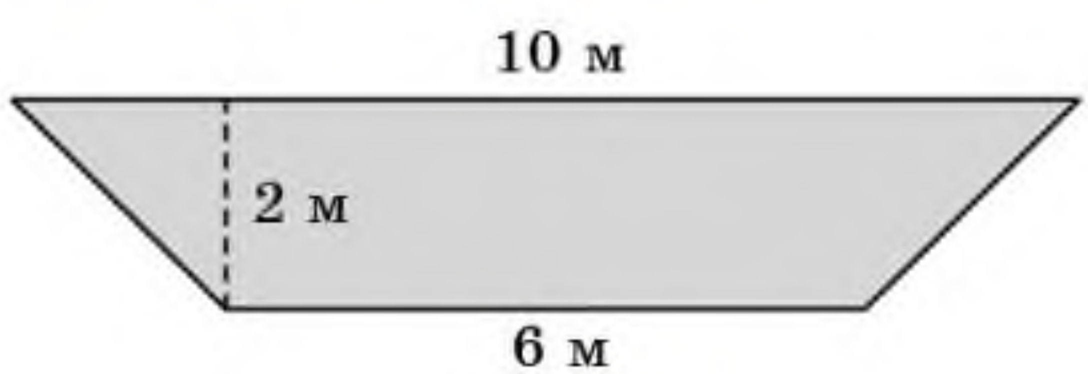
14.3-сүрәт



14.4-сүрәт

14.17. 14.4-сүрәттә барлиқ булуңлири тик болидиған көпбулуңлуқ тәсвирләнгән. Мошу көпбулуңлуқни 3 см-ға тәң тәрипи ятидиған AB түзидин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

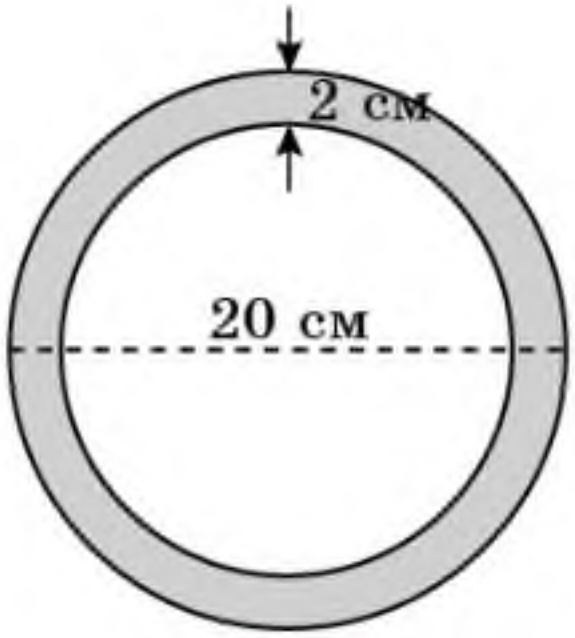
14.18. Дәрия қининиң тоғра қийилмисиниң тәсвири тәңянлиқ трапециға охшаш. Униң асаслири 10 м вә 6 м, егизлиги болса 2 м (14.5-сүрәт). Дәрия еқиминиң илдамлиғи 1 м/с болса, мошу тәсвирдин 1 минутта қандақ һәҗимдики су еқип өтүдиғанлиғини тепиңлар. Җававини метр куб билән йезиңлар.



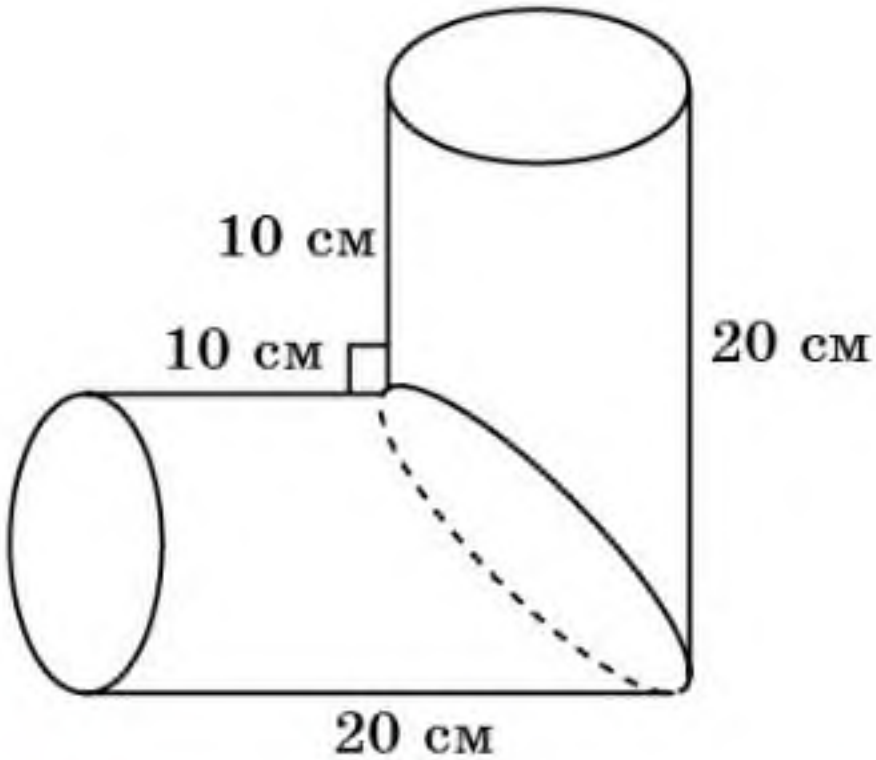
14.5-сүрәт

14.19. Чоюн трубисиниң узунлиғи 2 м, сиртқи диаметри 20 см-ға тәң. Трубиниң қелинлиғи 2 см (14.6-сүрәт). Әгәр чоюнниң зичлиғи тәхминән 7,5 г/см^3 болса, трубиниң салмиғини тепиңлар. Җававини килограмм билән бериңлар (p d 3).

14.20. 14.7-сүрәттики 90° булуң ясайдиған цилиндрларниң икки тәң бөлигидин туридиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар (p d 3).



14.6-сүрәт



14.7-сүрәт

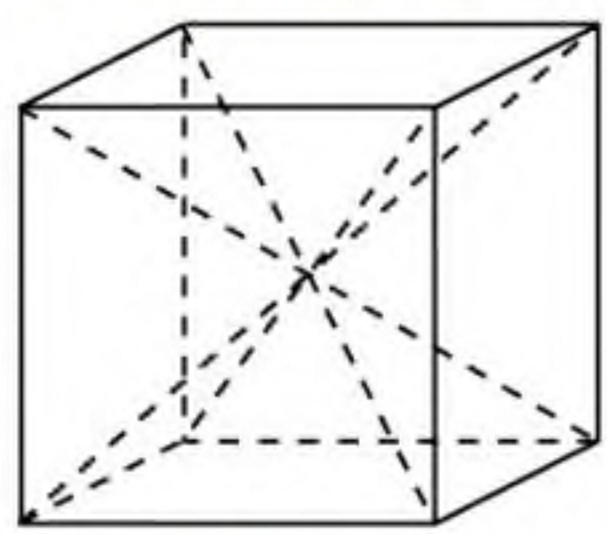
Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

14.21. Пирамидиниң вә қийиқ пирамидиниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§ 15. Пирамидиниң вә қийиқ пирамидиниң һәҗимлири

Пирамидиниң һәҗимини һесаплаш тоғрисида дәсләпки мәлуматлар б.з. 3000 жил бурун қедимий вавилонлиқлар билән мисирлиқларниң папируслиридин тепилған.

Бир қизиқ йери, улар пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқармиған, бирақ пирамидиларниң һәҗимлирини дәл ениқлиған. Мошундақ егизлиги $\frac{1}{2}$ гә, асаси 1 гә тәң дурус төртбулуңлуқ пира мидиниң һәҗимлирини тепишни билгән. Униң үчүн улар қири бирлик өлчәмдики кубни елип, уни 6 тәң дурус төртбулуңлуқ пирамидиларға бөлгән. Бу пирамидиларниң асаслири кубниң яқлири болиду вә уларниң һәрқайсисиниң чоққиси кубниң мәркизидә орунлишиду (15.1-сүрәт). Барлиқ алтә пирамида өз ара тәң болиду. Буниңдин уларниң һәрқайсисиниң һәҗими куб һәҗиминиң $\frac{1}{6}$ гә тәң болидиғанлиғини алимиз.

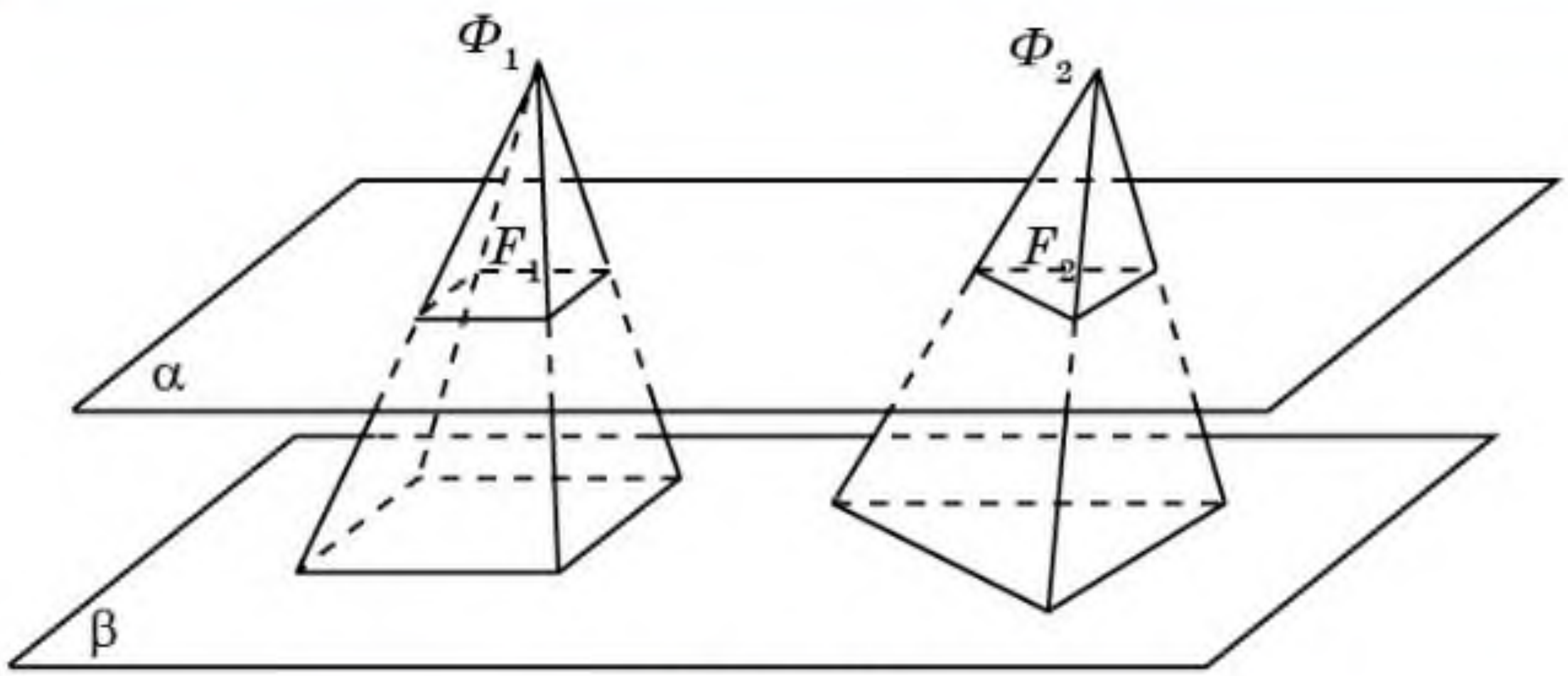


15.1-сүрәт

Кавальери принципини қоллинип, төвәндики ярдәмчи теоремини испатлайли.

Теорема. ***Әгәр икки пирамидиниң егизликлири вә асаслириниң мәйданлири өз ара тәң болса, у чағда уларниң һәҗимлири тәң болиду.***

Испатлиниши. Φ_1 вә Φ_2 пирамидилириниң егизликлири h-қа тәң болсун вә мәйданлири S-қа тәң болидиған асаслири бир ♭ тәкшилигидә ятсун (15.2-сүрәт).



15.2-сүрәт

b тәкшилигигә параллель вә униңдин x (0 m x m h) ариликта болидиған a тәкшилигини жүргүзимиз. Шу чағда пирамидиларниң мошу тәкшилик билән қийилмилирида пәйда болған F_1 вә F_2 фигурилири мувапиқ асаслириға охшаш болиду вә һәр иккилисидә k охшашлиқ коэффициенти $(h - x) : h$ қа тәң болиду. Демәк, F_1 вә F_2 фигурилириниң S_1 вә S_2 мәйданлири мувапиқ $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулилири билән ипадилиниду. Ундақ болса, улар өз ара тәң болиду. Кавальери принципи бойичә пирамидиларниң һәжимлириниң тәң болидиғанлиғи келип чиқиду.

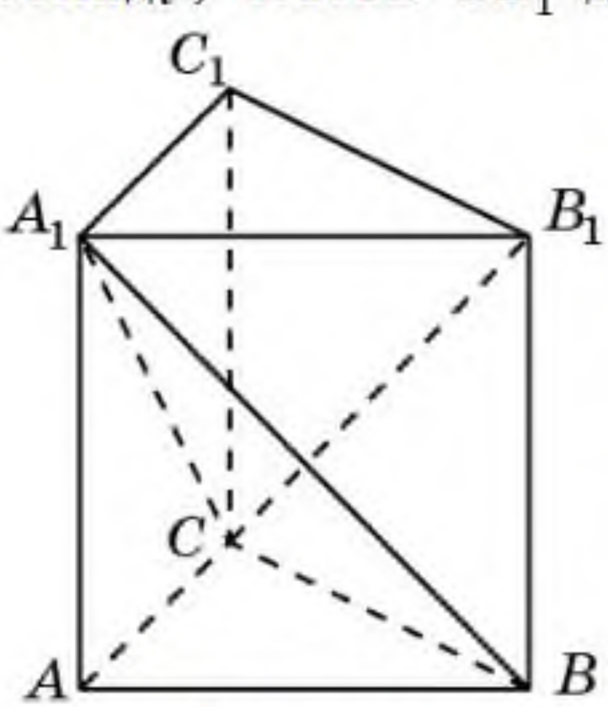
Әнди үчбулуңлуқ пирамидиниң һәжими тоғрилиқ асасий теоремини испатлайли.

Теорема. ***Үчбулуңлуқ пирамидиниң һәжими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисиниң үчтин биригә тәң.***

Испатлиниши. A_1ABC үчбулуңлуқ пирамида болсун. Уни $ABCA_1B_1C_1$ үчбулуңлуқ призмисиғичә толуқтуруп салимиз (15.3-сүрәт).

B, C, A_1 вә C, B_1, A_1 чекитлири арқилиқ өтүдиған тәкшиликләр бу призмини чоққиси A_1 чекити болидиған A_1ABC, A_1CBB_1 вә $A_1CB_1C_1$ пирамидилириға бөлиду.

A_1CBB_1 вә $A_1CB_1C_1$ пирамидилириниң CBB_1 вә CB_1C_1 асаслири тәң болиду, сәвәви CB_1 диагонали CBB_1C_1 параллелограмини икки тәң үчбулуңлуқларға бөлиду. Шуниң билән биллә бу пирамидиларниң чоққилири умумий вә асаслири бир тәкшиликтә ятиду. Демәк, бу пирамидиларниң умумий егизлиги болиду. Буниңдин пирамидиларниң һәжимлири тәң болидиғанлиғи келип чиқиду. Әнди A_1ABC вә $CA_1B_1C_1$ пирамидилирини қараштурайли. Уларниң ABC вә $A_1B_1C_1$ асаслири тәң вә егизликлириму тәң болиду. Демәк, бу пирамидиларниң һәжимлири тәң болиду. Шуниң билән, барлиқ үч пирамидиниң һәжимлири тәң болиду.



15.3-сүрәт

Призминиң һәҗими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң екәнлигини һесапқа елип, үчбулуңлуқ пирамидиниң V һәҗимини тепиш формулисини алимиз:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

бу йәрдә S — пирамида асасиниң мәйдани, h — пирамидиниң егизлиги.

Әнди һәр қандақ пирамидиниң һәҗимини тепиш мәсилисини қараштурайли.

Теорема. ***Пирамидиниң һәҗими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисиниң үчтин биригә тәң болиду.***

Испатлиниши. Берилгән пирамида үчүн асасиниң мәйдани билән егизлиги бирдәк үчбулуңлуқ пирамидини қараштуримиз.

Кавальери принципи бойичә бу пирамидиларниң һәҗимлири тәң болиду. Демәк, мону формула орунлуқ болуп һесаплиниду:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

бу йәрдә S — пирамида асасиниң мәйдани, h — пирамидиниң егизлиги.

Егизлиги h вә асасиниң тәрәплири a болидиған дурус: а) үчбулуңлуқ; ә) алтәбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқириңлар.

Қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисини чиқирайли.

Теорема. ***Қийиқ пирамидиниң V һәҗими мону формула билән һесаплиниду:***

$$V = \frac{1}{3}h_{қ}(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

бу йәрдә S, s — қийиқ пирамида асаслириниң мәйданлири, $h_{қ}$ — униң егизлиги.

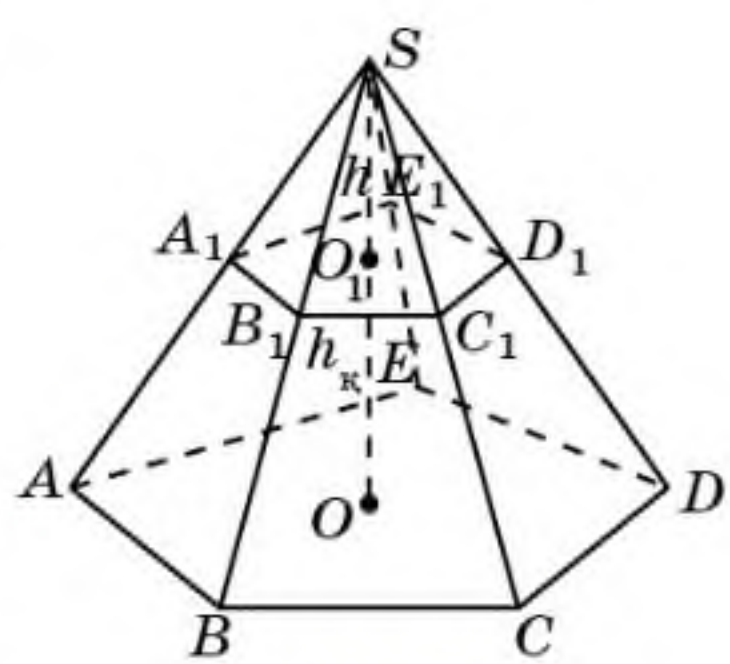
Испатлиниши. Қийиқ пирамида асаслириниң мәйданлири S вә s-қа тәң болсун. Униң $h_{қ}$ егизлиги болса дәсләпки вә қийилип чүшкән пирамидиларниң егизликлириниң $(H - h)$ айримисиға тәң болсун.

15.4-сүрәттә $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ бәшбулуңлуқ қийиқ пирамида тәсвирләнгән.

Қийиқ пирамидиниң V һәҗими үчүн мону формула орунлуқ болиду:

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

Қийиқ пирамидиниң $h_{қ}$ егизлигини униң асаслириниң S, s мәйданлири билән дәсләпки вә қийилип чүшкән пирамидиларниң H, h егизликлири арқилиқ ипадиләймиз.



15.4-сүрәт

Пирамидиниң асасиға параллель тәкшилик билән қийилмисида униң асасиға охшаш фигура пәйда болидиғанлиғини байқаймиз. Охшашлиқ коэффициенти пирамидиниң чоққисидин қийилма тәкшилигигә вә асас тәкшилигигичә болған ариліқларниң нисбитигә тәң, йәни $\frac{h}{H}$ қа тәң болиду. Шуниң билән биллә охшаш фигуриларниң мәйданлириниң нисбити охшашлиқ коэффициентиниң квадратиға тәң болиду.

Буниңдин мону тәңликни алимиз:

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{H - h_{қ}}{H}\right)^2.$$

Бу тәңликтин H вә h егизликлирини тапимиз:

$$H = \frac{h_{қ}\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}},\ h = \frac{h_{қ}\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Тепилған H, h мәналирини қийиқ пирамидиниң V һәҗими үчүн формулиға қоюп, издиливатқан формулини тапимиз:

$$V = \frac{1}{3}\left(S\frac{h_{қ}\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} - s\frac{h_{қ}\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}h_{қ} \cdot \frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} = \frac{1}{3}h_{қ}(S + \sqrt{S \cdot s} + s).$$

Егизлиги $h_{қ}$ вә асаслириниң тәрәплири a вә b болидиған дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисини йәкүнләп чиқириңлар.

Соаллар

1. Үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими қандақ һесаплиниду?
2. Һәр қандақ пирамидиниң һәҗими қандақ һесаплиниду?
3. Қийиқ пирамидиниң һәҗими қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

A

15.1. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги h-қа, асасиниң тәрәплири a-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини һесаплаш формулисини йәкүнләп чиқириңлар.

15.2. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 3 м-ға, ян қирлири болса 5 м-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

15.3. Дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

15.4. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

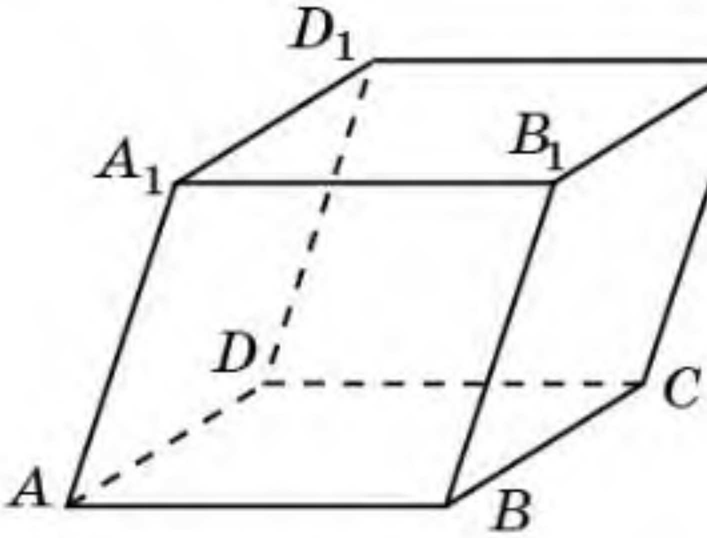
15.5. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асаслириниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири болса 2 см-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

15.6. Тетраэдрниң қири 1 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

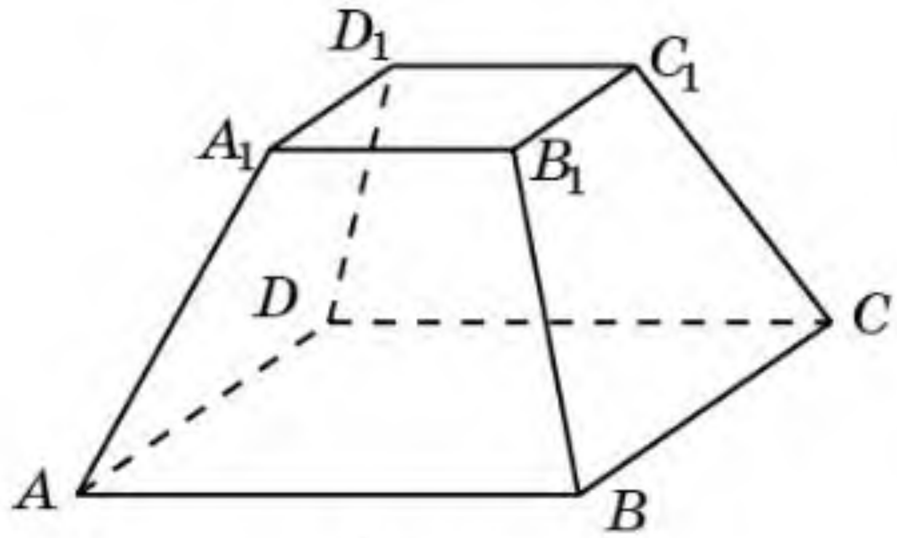
15.7. Әгәр дурус тетраэдрниң барлиқ қирлирини 2 һәссә ашурса, униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?

15.8. Әгәр дурус пирамидиниң егизлигини 3 һәссә ашурса, асасиниң тәрәплирини болса 3 һәссә кемитсә, униң һәҗими қандақ өзгириду?

15.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипединиң һәҗими 1 $см^3$ ға тәң. Чоққилири: 1) A, B, C, D, B_1; 2) A, B, D, C_1 чекитлири болидиған көпяқлиқниң һәҗимини тепиңлар (15.5-сүрәт).



15.5-сүрәт



15.6-сүрәт

15.10. Пирамида егизлигиниң оттуриси арқилиқ өтүдиған вә асасиға параллель тәкшилик билән қийилмиси җүргүзүлгән. Пирамидиниң пәйда болған бөләклири һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

15.11. Дурус төртбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң егизлиги 3 см-ға, асаслириниң тәрәплири болса 2 см вә 1 см-ға тәң. Қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар (15.6-сүрәт).

B

15.12. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң диагональлиқ қийилмиси — тәрипи 1 см болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқ. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

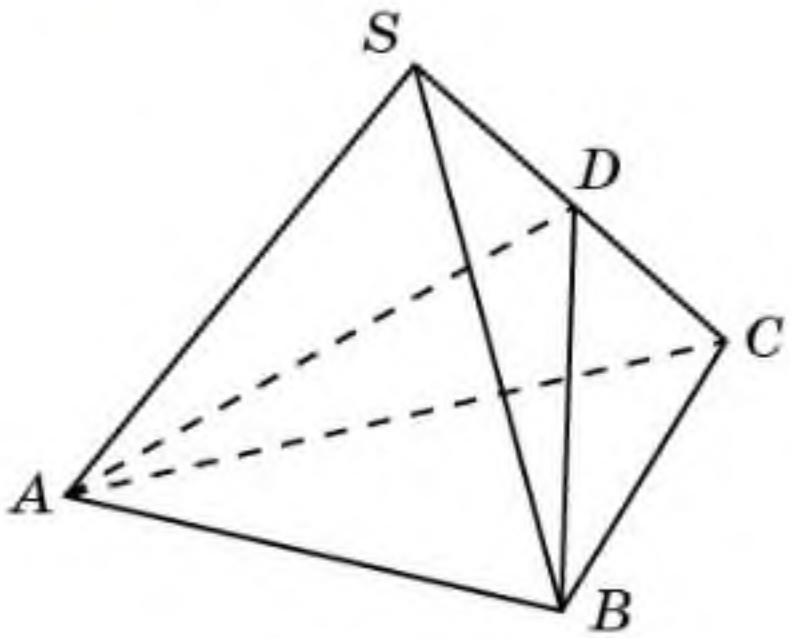
15.13. Үчбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири өз ара перпендикуляр вә уларниң һәрқайсиси 1 см-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

15.14. Үчбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ ян қирлири 1 см-ға, чоққисидики тәкши булуңлири болса 60°, 90° вә 90°-қа тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

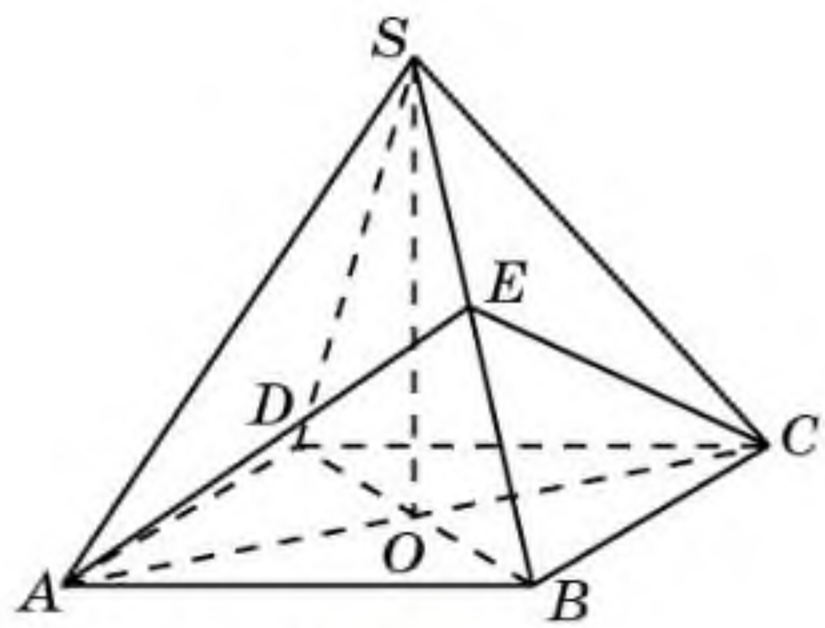
15.15. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 6 $см^3$-ға тәң, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Пирамидиниң егизлигини тепиңлар.

15.16. Параллелепипедниң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң (15.5-сүрәт). BDA_1C_1 тетраэдриниң һәҗимини тепиңлар.

15.17. Үчбулуңлуқ пирамида асасиниң бир тәрипи вә униңға қарши ятқан қириниң оттуриси арқилиқ тәкшилик өтиду (15.7-сүрәт). Бу тәкшилик пирамидиниң һәҗимини қандақ нисбәттә бөлиду?

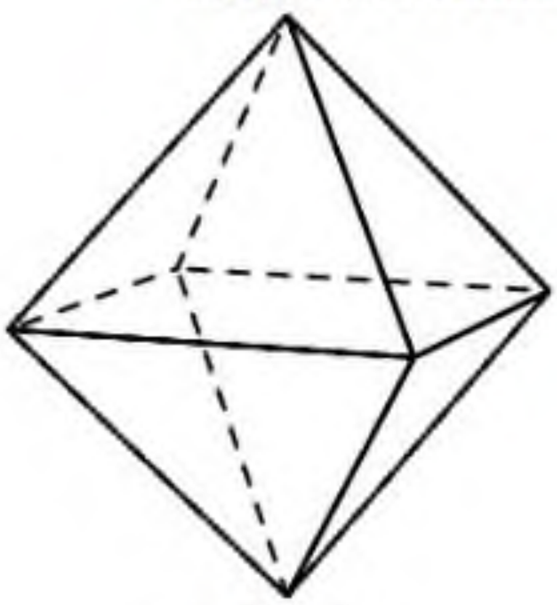


15.7-сүрәт



15.8-сүрәт

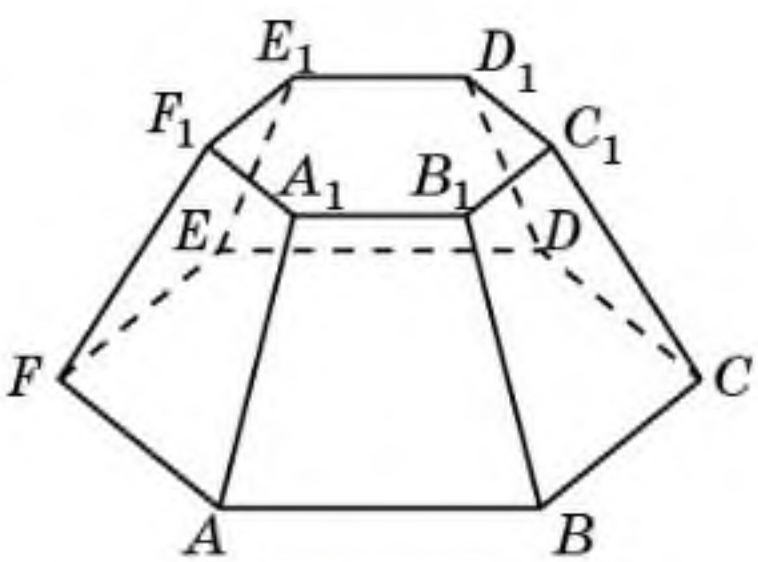
15.18. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 12 см^3-ға тәң. Пирамида асасиниң AC диагонали вә униңға қарши ятқан ян қириниң E оттуриси арқилиқ өтүдиған тәкшилик билән қийилип чүшидиған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар (15.8-сүрәт).



15.9-сүрәт

15.19. Октаэдрниң қирлири 1 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар (15.9-сүрәт).

15.20. Дурус алтәбулуңлуқ қийиқ пирамидиниң егизлиги 3 см-ға, асасиниң тәрәплири болса 2 см вә 1 см-ға тәң (15.10-сүрәт). Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.



15.10-сүрәт

15.11-сүрәт

15.21. Нур-Султан шәһиридики Течлиқ вә разимәнлик сарийи дурус төртбулуңлуқ пирамида шәклидә (15.11-сүрәт). Униң егизлиги билән асасиниң тәрәплири 62 м-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

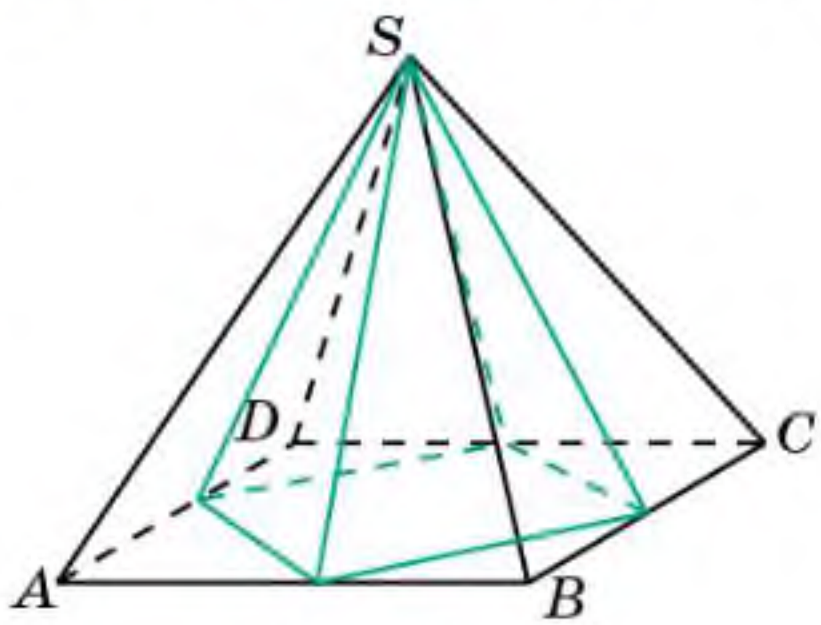
15.22. Дурус n-булуңлуқ икки пирамида охшаш болуши үчүн уларниң ян қирлири билән асаслириниң тәрәплиригә нисбәтән шәртләрни йезиңлар. Мошу пирамидиларниң һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар .

C

15.23. Дурус алтәбулуңлук пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, униң ян қири билән асасиниң арисидики булуңи 45°-қа тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

15.24. $SABCD$ төртбулуңлук пирамидиниң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң. Чоққиси берилгән пирамидиниң S чоққиси билән мувапиқ келидиған, асасиниң чоққилири болса $ABCD$ асасиниң тәрәплириниң оттуриси болидиған пирамидиниң һәҗимини тепиңлар (15.12-сүрәт).

15.25. Тетраэдрниң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң. Чоққилири мошу тетраэдр қирлириниң оттуриси болидиған көпяқлиқниң һәҗимини тепиңлар .



15.12-сүрәт

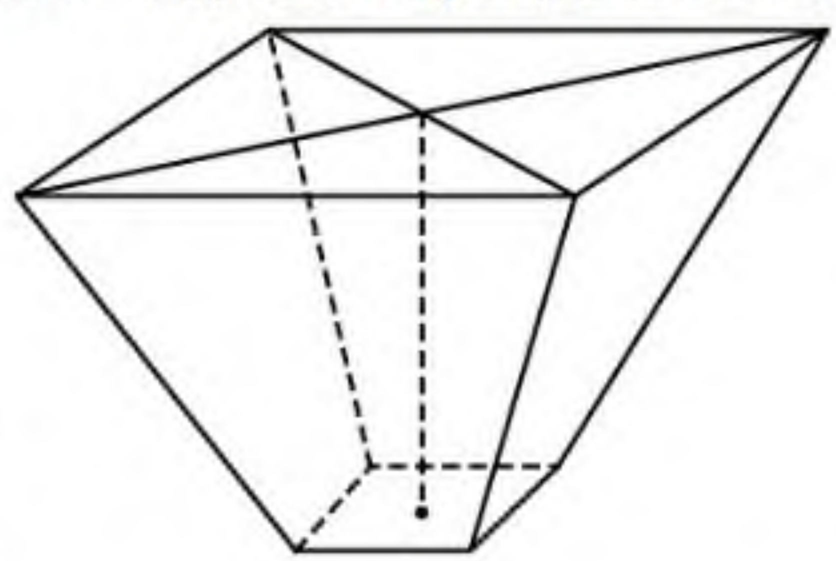
15.26. 15.13-сүрәттә Қедимий Мисирдики әң чоң имарәтләрниң бири — Хеопс пирамидиси — дурус төртбулуңлуқ пирамида тәсвирләнгән. Униң егизлиги 146 м-ға, ян қирлири болса 230 м-ға тәң. Мошу пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

15.13-сүрәт

15.14-сүрәт

15.27. 15.14-сүрәттә чедири пирамида шәклидики вә асаси квадрат болған өй тәсвирләнгән. Пирамидиниң барлиқ қирлири 12 м-ға тәң. Мошу өйниң чедириниң һәҗимини тепиңлар.

15.28. Дурус төртбулуңлук қийиқ пирамида шәклидики көктатларни сақлашқа арналған ящикниң асаслириниң тәрәплири мувапиқ 6 дм вә 14,4 дм-ға тәң (15.15-сүрәт). Пирамидиниң егизлиги 4,3 дм. Әгәр 1 $дм^3$-да



15.15-сүрәт

0,675 кг көктат болса, у чағда ящикниң һәжими билән униң ичидики көктатниң салмиғини тепиңлар.

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

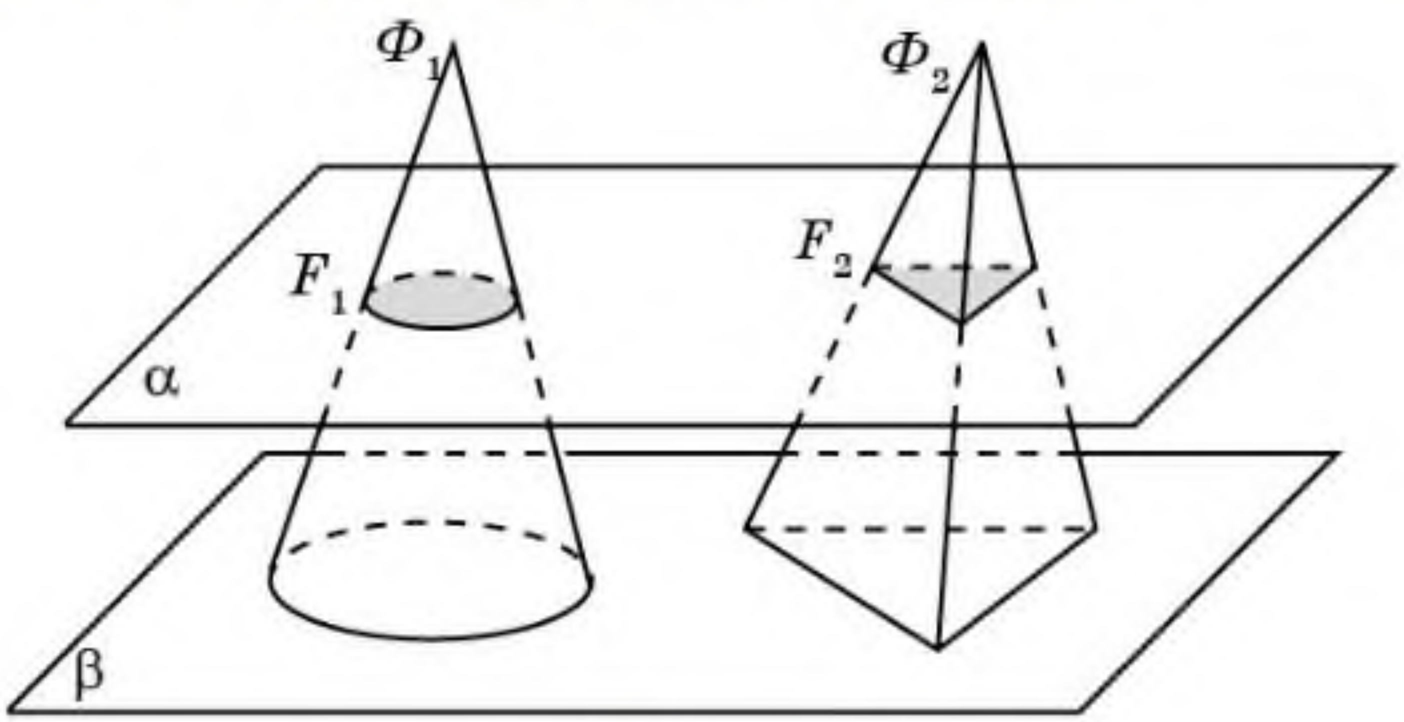
15.29. Конусниң вә қийиқ конусниң ениқлимилирини тәкрарлаңлар.

§ 16. Конус вә қийиқ конус һәжимлири

Кавальери принципини конусниң һәжимини тепишқа қоллинайли.

Теорема. ***Конусниң һәжими униң асасиниң мәйдани билән егизлигиниң көпәйтиндисиниң үчтин биригә тәң болиду.***

Испатлиниши. Асасиниң мәйдани S вә егизлиги h-қа тәң конус үчүн асасиниң мәйдани вә егизлиги дәл мошундақ болидиған қандақту бир пирамидини қараштуримиз. Уларни асаслири β тәкшилигидә ятидиғандәк вә өзлири мошу тәкшиликниң бир яқтики бөлигидә болидиғандәк қилип орунлаштуримиз (16.1-сүрәт).



16.1-сүрәт

β тәкшилигигә параллель вә униңдин x арилиқта болидиған α тәкшилигини җүргүзимиз ($0 \leq x \leq h$). Шу чағда конус билән пирамидиниң мошу тәкшилик билән қийилмилирида пәйда болған F_1 вә F_2 фигурилири мувапиқ асаслириға охшаш болиду вә һәр иккилисидә k охшашлиқ коэффициенти $k = \frac{h - x}{h}$ болиду. Демәк, F_1 вә F_2 фигурилириниң S_1 вә S_2 мәйданлири мувапиқ $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулилири билән ипадилиниду. Ундақ болса, улар өз ара тәң болиду. Кавальери принципи бойичә конус билән пирамидиниң һәжимлири тәң болидиғанлиғи келип чиқиду. Буниңдин конусниң V һәжимини тепиш үчүн мону формула орунлуқ болиду:

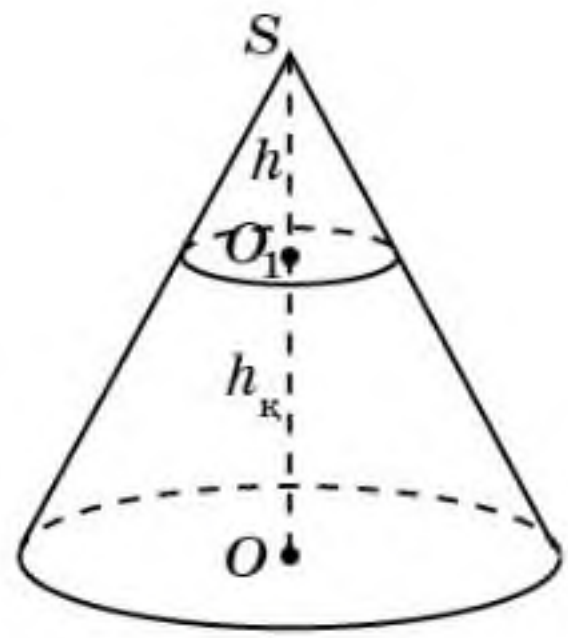
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

бу йәрдә R — конус асасиниң радиуси, h — конусниң егизлиги.

Қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисиға охшаш қийиқ конусниң һәҗимини тепиш үчүн мону формула орунлуқ болиду:

$$V = \frac{1}{3}h_{қ}(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

бу йәрдә S, s — қийиқ конус асаслириниң мәйданлири, $h_{к}$ — қийиқ конусниң егизлиги (16.2-сүрәт).



16.2-сүрәт

Бу формулиниң испатлимиси қийиқ пирамидиниң һәҗимини тепиш формулисиға охшаш болиду. Буни өзәңлар испатлаңлар.

Қийиқ конус асаслириниң мәйданлири мувапиқ $S = \mathrm{p}R^2$ вә $s = \mathrm{p}r^2$ екәнлигини һесапқа елип, униң V һәҗимини тепиш үчүн төвәндики формулини алимиз:

$$V = \frac{1}{3}\mathrm{p}h_{қ}(R^2 + R \cdot r + r^2),$$

бу йәрдә R вә r — қийиқ конус асаслириниң радиуслири, $h_{қ}$ — униң егизлиги.

Соаллар

1. Конусниң һәҗими қандақ һесаплиниду?
2. Қийиқ конусниң һәҗими қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

А

16.1. Әгәр конусниң: 1) егизлигини 3 һәссә ашурса; 2) асасиниң радиусини 2 һәссә ашурса, униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?

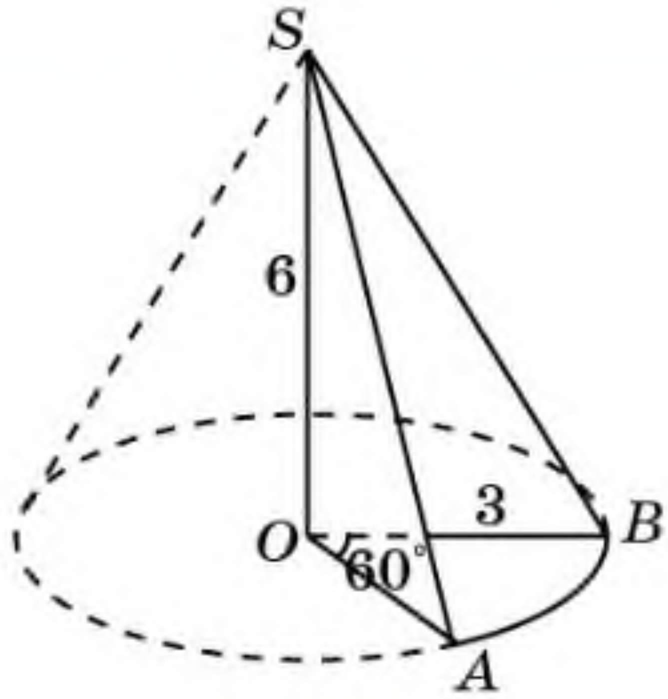
16.2. Әгәр конусниң егизлигини 2 һәссә азайтса, асасиниң радиусини болса 2 һәссә ашурса, у чағда униң һәҗими өзгирәмду?

16.3. Цилиндр билән конусниң умумий асаси бар вә егизлиги бирдәк. Цилиндрниң һәҗими 15 см^3-ға тәң дәп елип, конусниң һәҗимини тепиңлар.

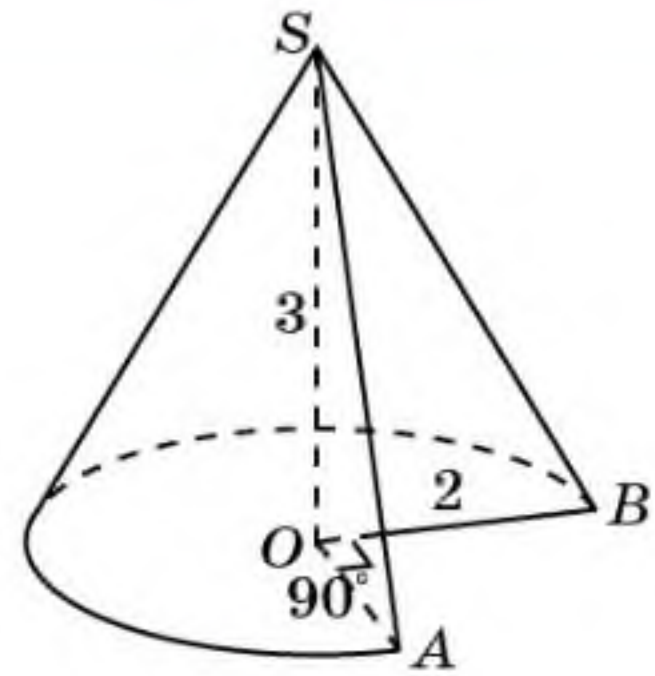
16.4. Конусниң һәҗими V-ға тәң. Конус егизлигиниң оттуриси арқилиқ өтүдиған вә асасиға параллель қийилма жүргүзүлгән. Конусниң пәйда болған бөләклириниң һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар .

16.5. Конусниң егизлиги 3 см-ға, ясиғучиси болса 5 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

16.6. Конус асасиниң радиуси 3 см-ға, егизлиги 6 см-ға тәң вә $\angle AOB = 60^\circ$. 16.3-сүрәттики конус бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.



16.3-сүрәт



16.4-сүрәт

16.7. Конус асасиниң радиуси 2 см-ға, егизлиги болса 3 см-ға тәң вә $\angle AOB = 90^\circ$. 16.4-сүрәттики конус бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

16.8. Қийиқ конусниң асаслириниң радиуслири 1 см вә 2 см-ға, егизлиги болса 3 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

B

16.9. Конус асасиниң диаметри 12 см-ға, оқлуқ қийилмисиниң чоққисидики булуңи 90°-қа тәң. Конусниң һәҗимини тепиңлар.

16.10. Конусниң оқлуқ қийилмиси — мәйдани 9 $см^2$ болидиған тикбулуңлуқ тәң янлиқ үчбулуқлуқ. Конусниң һәҗимини тепиңлар.

16.11. Тәрипи 1 см болидиған тәңянлиқ үчбулуңлуқни униң егизлиги ятидиған түз бойичә айландурғанда пәйда болидиған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

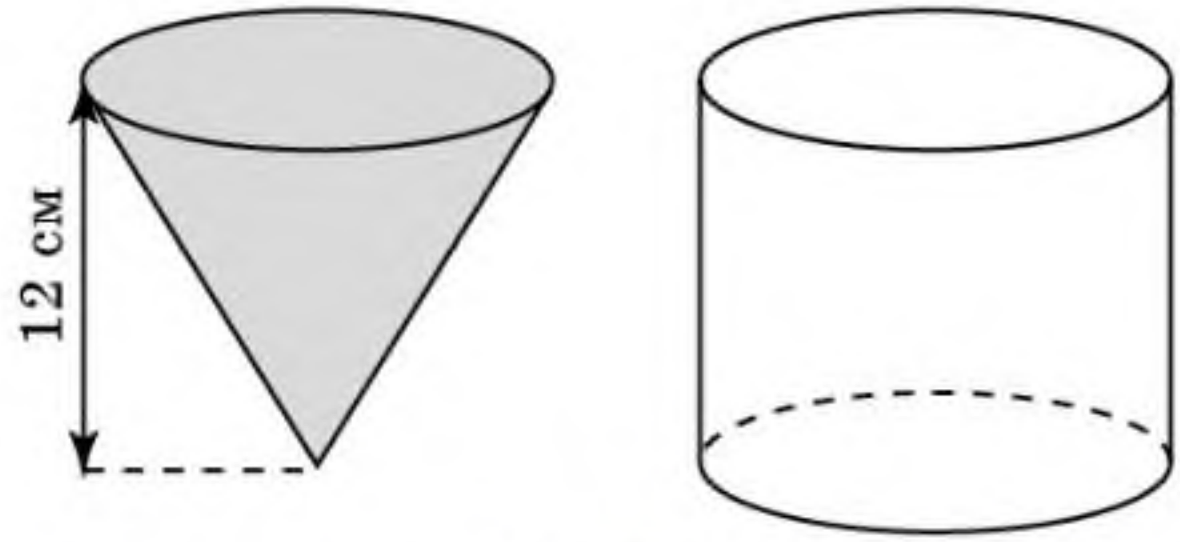
16.12. Тәңянлиқ әмәс тикбулуңлуқ үчбулуңлуқни униң һәр бир катетидин айландурғанда икки конус пәйда болиду. Мошу конусларниң һәҗимлири тәң боламду?

16.13. Конусниң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң. Конусниң егизлиги тәң үч бөләккә бөлүнгән вә бөлүнүш чекитлири арқилиқ униң асасиға параллель тәкшиликләр жүргүзүлгән. Конусниң оттура бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

16.14. Егизлиги 12 см болидиған конус тәхлит қачиға толтурулған су цилиндр тәхлит қачиға авуштуруп қуюлди. Цилиндр тәхлит қачиниң асасиниң радиуси конус тәхлит қачиниң чәмбириниң радиусиға тәң (16.5-сүрәт). Цилиндр тәхлит қачидики суниң бети униң асасидин қандақ егизликтә болиду?

16.15. Қийиқ конус асаслириниң радиуслири 6 см вә 2 см, ясиғучиси болса 5 см-ға тәң. Мошу қийиқ конусниң һәҗимини тепиңлар.

16.16. Тәңянлиқ трапецияниң асаслири 4 см вә 6 см, егизлиги 3 см-ға тәң. Трапецияни униң асаслириниң оттуриси арқилиқ өтүдиған



16.5-сүрәт

түздин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

16.17. Икки конус охшаш болуши үчүн уларниң ясиғучилири билән асаслириниң радиуслириға бағлиқ шәртләрни йезиңлар. Мошу конуслар һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар.

16.18. Кигиз өй — көчмәнләрниң қедимий замандин пайдилинип келиватқан өйи (16.6-сүрәт). Кигиз өйниң ян тәрәплири (керегеси) цилиндр шәкилдә, кереге билән шаңырақни давамлаштуруп туридиған бөлиги (уықлар) конусқа охшайду. Цилиндр асасиниң диаметри 5 м-ға, қийиқ конус асаслириниң диаметри 5 м вә 1 м, цилиндр билән қийиқ конус егизликлири 2 м-ға тәң. Кигиз өйниң һәҗимини тепиңлар.

16.6-сүрәт

C

16.19. Тикбулуңлуқ тәңянлиқ үчбулуңлуқниң узунлиғи 3 см-ға тәң катети ятқан түздин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

16.20. Бирлик квадратни униң диагонали ятқан түздин айландурғанда пәйда болған фигуриниң һәҗимини тепиңлар.

16.21. Конусниң ян бетиниң йейилмиси — радиуси 2 см-ға тәң йерим дүгләк. Конусниң һәҗимини тепиңлар.

16.22. Қурулуш мәйданидики конус шәкиллик дога қумниң асасидики чәмбәрниң узунлиғини лентилиқ метр билән өлчигәндә 21,6 м болди (16.7-сүрәт). Лентилиқ метрни догиниң үстигә атландуруп өлчигәндә, униң икки ясиғучисиниң узунлиғи 7,8 м екәнлиги ениқланди. Догиланған қумниң һәҗимини тепиңлар (p d 3 дәп елиңлар).

16.7-сүрәт

Йеңи билимни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

16.23. Шарниң еницлимисини вә Кавальери принципини тәкрарлаңлар.

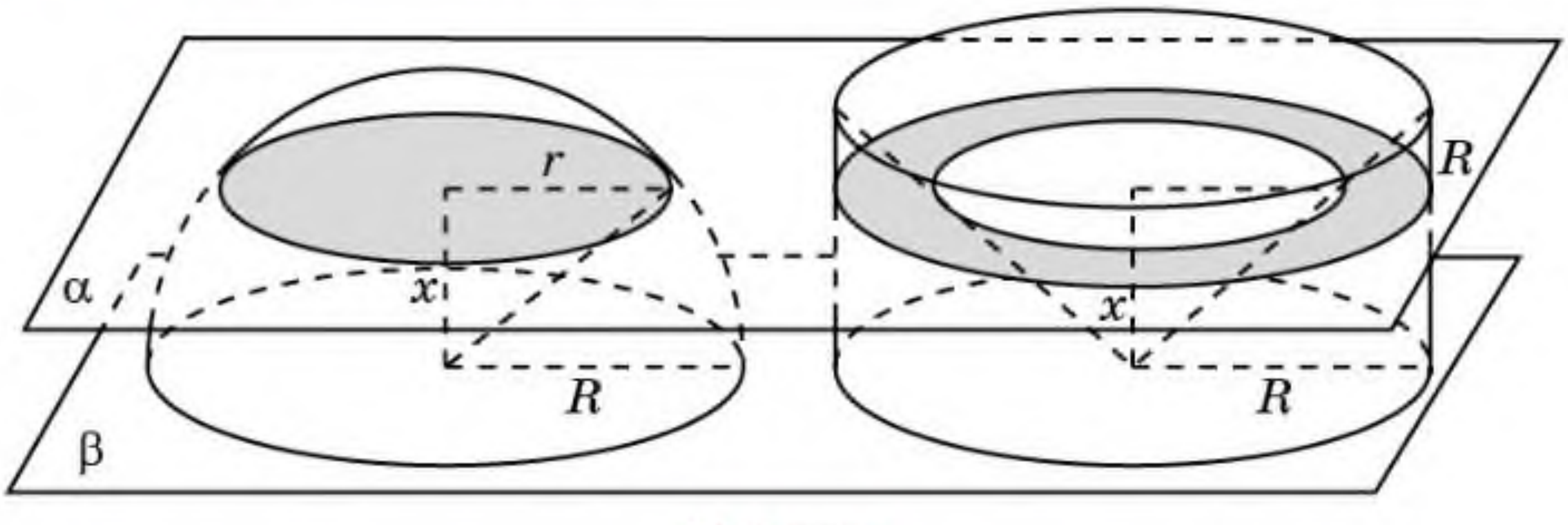
§ 17. Шарниң һәҗими

Кавальери принципини қоллинип, шарниң һәҗимини тепиш формулисини умумлаштуруп чиқирайли.

Теорема. ***Радиуси R-ға тәң шарниң V һәҗими мону формула билән һесаплиниду:***

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Испатлиниши. Радиуси R-ға тәң вә асаси β тәкшилигидә ятидиған йеримшарни қараштурайли. Шуниң билән биллә мошу β тәкшилигидә ятидиған цилиндрни алайли вә униң асасиниң радиуси R-ға, егизлигиму R-ға тәң болсун (17.1-сүрәт).



17.1-сүрәт

Чоққиси цилиндрниң төвәнки асасиниң мәркизидә, асаси болса цилиндрниң җуқарқи асаси болидиғандәк мошу цилиндрға ичидин конус сизимиз.

Конусниң ичидә ятмайдиған цилиндрниң чекитлиридин туридиған Φ фигуриси билән берилгән йерим шарниң һәҗимлири тәң болидиғанлиғини испатлайли.

b тәкшилигигә параллель вә униңдин x ариликта болидиған a тәкшилигини җүргүзимиз (0 mx mR). Шу чағда йерим шарниң мошу тәкшилик билән кийилмисида радиуси $\sqrt{R^2 - x^2}$ вә мәйдани p$(R^2 - x^2)$ болидиған дүгләк елиниду. Φ фигурисиниң a тәкшилиги билән кийилмисида ички дүглүгиниң радиуси x-қа, вә сиртқи дүглүгиниң радиуси R-ға тәң төңгә пәйда болиду. Бу төңгиниң мәйдани pR^2 – px^2 = p$(R^2 - x^2)$ қа тәң. Демәк, бу йеримшарниң кийилмисиниң мәйданиға тәң.

Кавальери принципи бойичә йеримшар билән Φ фигурисиниң һәҗимлири тәң болиду. Мошу һәҗимни һесаплайли. У цилиндр билән конус һәҗимлириниң айримисиға тәң болиду, йәни

$$V = V_ц - V_к = \text{p}R^2R - \frac{1}{3}\text{p}R^2R = \frac{2}{3}\text{p}R^3.$$

Шарниң һәҗими йеримшарниң һәҗимидин икки һәссә көп болиду. Демәк, шарниң һәҗими мону формула билән һесаплиниду:

$$V = \frac{4}{3}\text{p}R^3.$$

Соаллар

1. Шарниң һәҗими қандақ һесаплиниду?

Һесаплар

А

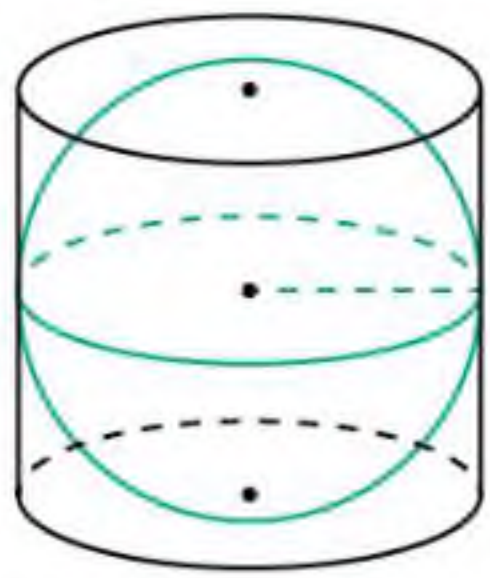
17.1. Шарниң диаметри 6 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

17.2. Әгәр шарниң радиусини: 1) 3 һәссә; 2) 4 һәссә ашурса, униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?

17.3. Үч шарниң радиуслири 3 см, 4 см вә 5 см-ға тәң. Һәҗими мошу шарларниң һәҗимлириниң қошундисиға тәң шарниң радиусини тепиңлар.

17.4. Һәҗимлириниң қошундиси радиуси 6 см болидиған шарниң һәҗимигә тәң болидиған радиуси 2 см-ға тәң қанчә шар елишқа болиду?

17.5. Цилиндрниң егизлиги 2 см-ға тәң. Цилиндрға ичидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (17.2-сүрәт).



17.2-сүрәт

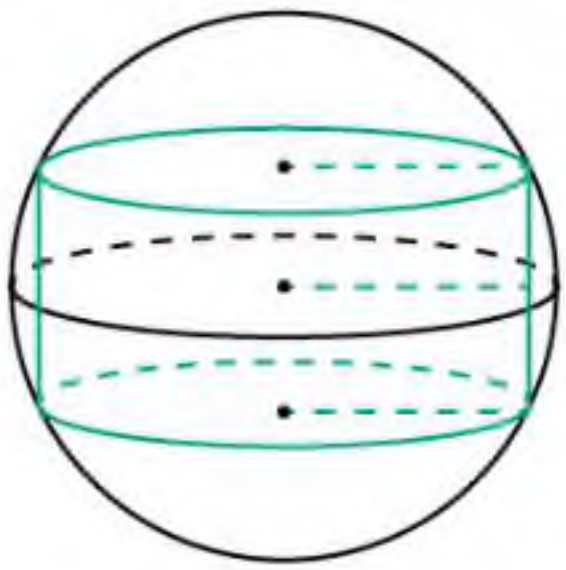
В

17.6. Шарниң мәркизидин 8 см ариликтики тәкшилик билән кийилмисиниң радиуси 6 см-ға тәң. Шарниң һәҗимини тепиңлар.

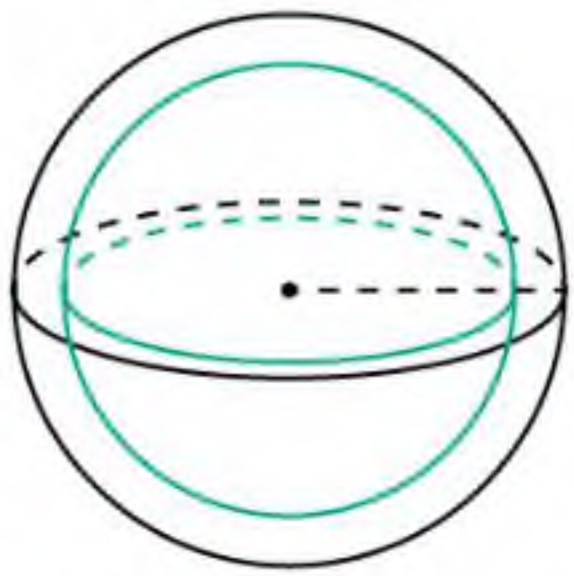
17.7. Цилиндрниң егизлиги билән асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Цилиндрға сиртидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (17.3-сүрәт).

17.8. Икки шар бәтлириниң мәйданлири $m : n$ нисбитидәк. Уларниң һәҗимлириниң нисбити қандақ болиду?

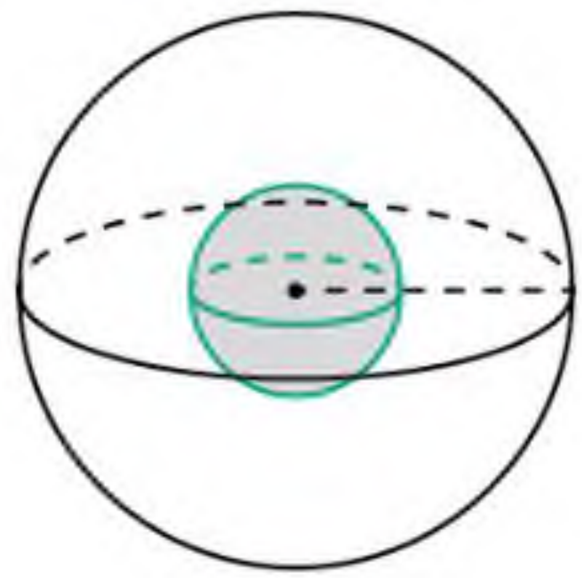
17.9. Мәркәзлири умумий вә радиуслири R_1 вә R_2 ($R_1 > R_2$) болидиған икки шарниң бәтлири билән чәкләнгән фигура — шар қәвитиниң һәҗимини тепиш формулисини тепиңлар. (17.4-сүрәт).



17.3-сүрәт



17.4-сүрәт



17.5-сүрәт

17.10. Аличиниң ширнилик бөлигиниң қелинлиғи униң ичидики уруғиниң диаметриға тәң (17.7-сүрәт). Алича вә униң ичидики уруғи шар охшаш дәп елип, ширнилик бөлиги билән уруғиниң һәҗимлириниң нисбитини тепиңлар .

17.6-сүрәт

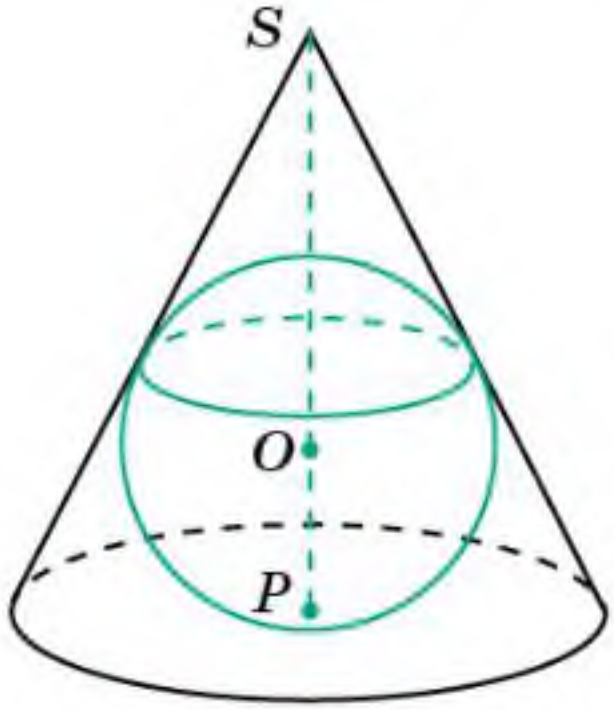
17.11. Апельсин — шар шәклидики мевә. Униң қепиниң қелинлиғи шар радиусиниң бәштин бир бөлигигә тәң болиду (17.4-сүрәт). Апельсинниң қепи униң һәҗиминиң қандақ бөлигини тәшкил қилиду?

17.12. Нур-Султан шәһиридики «Бәйтерек» монументи — металлдин, әйнәктин вә бетондин ясалған архитектурилиқ имарәт, барлиқ дунияви бирләшмиләр үчүн мустәқил Қазақстанниң символи (17.6-сүрәт). Униң чоққисида диаметри 22 м-ға тәң шар бар. Мошу шарниң һәҗимини тепиңлар.

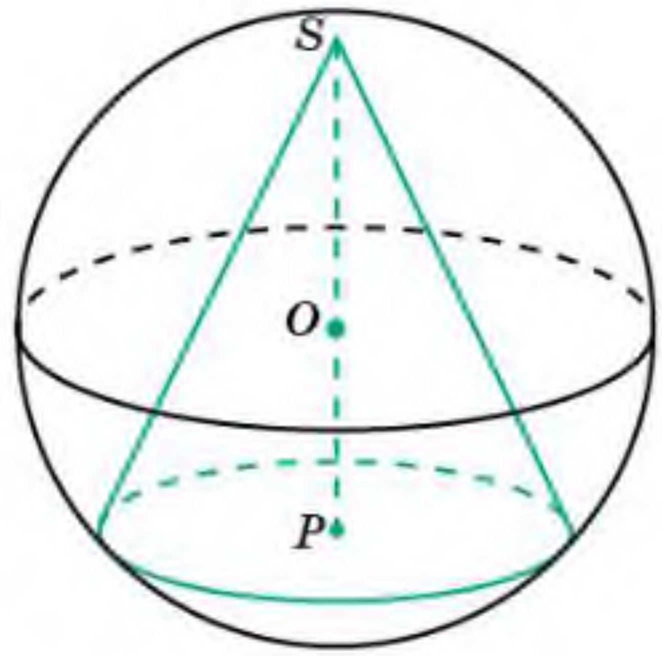
C

17.13. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Конусқа ичидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (17.7-сүрәт).

17.14. Конус асасиниң радиуси 1 см-ға, ясиғучиси 2 см-ға тәң. Конусқа сиртидин сизилған шарниң һәҗимини тепиңлар (17.8-сүрәт).

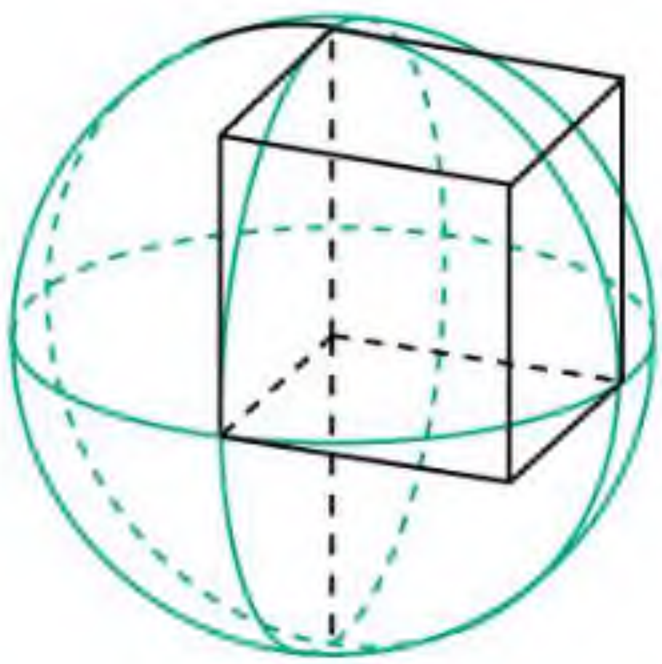


17.7-сүрәт

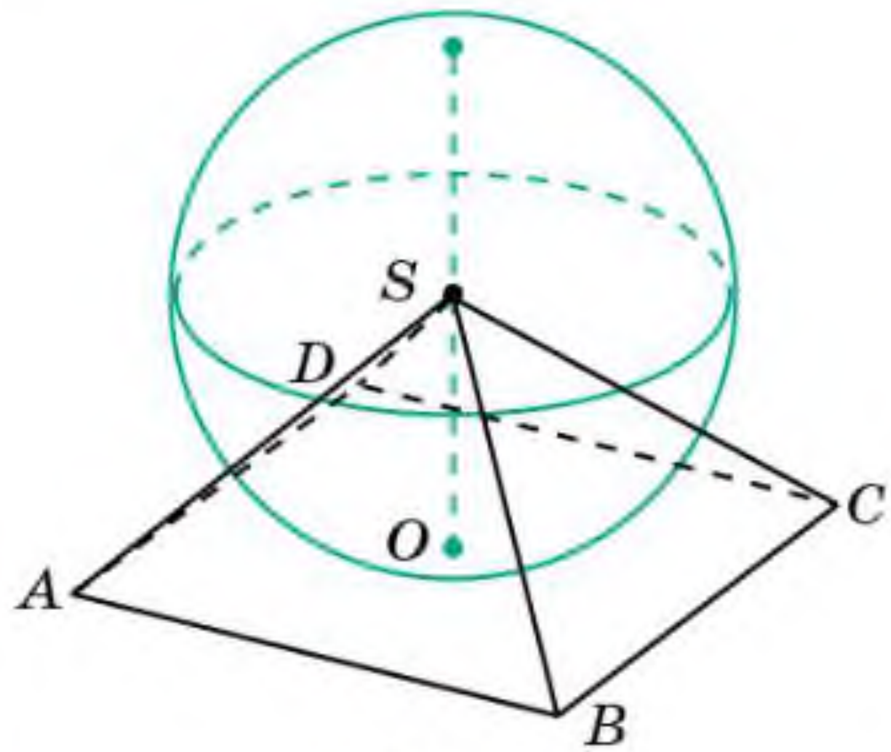


17.8-сүрәт

17.15. Шарниң радиуси 1 см-ға тәң. Униң мәркизидә бирлик кубниң чоққиси орунлашқан (17.9-сүрәт). Куб билән шарниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.



17.9-сүрәт



17.10-сүрәт

17.16. Дурус төртбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға вә егизлиги 1 см-ға тәң. Радиуси 1 см-ға тәң шарниң мәркизидә мошу пирамидиниң чоққиси орунлашқан (17.10-сүрәт). Пирамида билән шарниң умумий бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. Әгәр кубниң барлиқ қирлирини 2 һәссә ашурса, у чағда униң һәҗими қанчә һәссә ашиду:

A) 2 һәссә; B) 4 һәссә; C) 6 һәссә; D) 8 һәссә?

2. Куб бетиниң мәйдани 12 см^2. Униң һәҗимини тепиңлар:

A) $2\sqrt{2}$ см^3; B) 4 см^3; C) $4\sqrt{2}$ см^3; D) 8 см^3.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң һәҗими 6 см^3-ға тәң. ACB_1D_1 тетраэдрниң һәҗимини тепиңлар:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тикбулуңлуқ параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Чоққилири A, B, C, D, C_1 болидиған көпяқлиқниң һәҗимини тепиңлар:

A) 2 см^3; B) 4 см^3; C) 6 см^3; D) 8 см^3.

5. Дурус үчбулуңлуқ призминиң ян қирлири 3 см-ға, асасиниң тәрәплири 2 см-ға тәң. Призминиң һәҗимини тепиңлар:

A) $\sqrt{3}$ см^3; B) $2\sqrt{3}$ см^3; C) $3\sqrt{3}$ см^3; D) $4\sqrt{3}$ см^3.

6. Үчбулуңлуқ призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ униң ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Әгәр дәсләпки призминиң һәҗими 8 см^3-ға тәң болса, у чағда мошу тәкшилик билән қийип елинған үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң һәҗими 12 см^3-ға тәң. $ABDEA_1B_1D_1E_1$ параллелепипединиң һәҗимини тепиңлар:

A) 2 см^3; B) 4 см^3; C) 6 см^3; D) 8 см^3.

8. $ABCA_1B_1C_1$ үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 6 см^3 тәң. $A_1BCC_1B_1$ төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призминиң һәҗими 12 см^3-ға тәң. A_1ABCD пирамидиниң һәҗимини тепиңлар:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

10. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң қирлири 2 см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ см^3; B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см^3; D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см^3.

11. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға тәң вә улар асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ см^3; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^3; D) $\sqrt{3}$ см^3.

12. Цилиндрлиқ қачидики суюқлуқниң сәвийәси 8 см. Әгәр мошу суюқлуқ диаметри биринчи қачиға қариғанда 2 һәссә кичик болидиған иккинчи қачиға қуюлса, у чағда суюқлуқниң сәвийәси қандақ егизликтә болидиғанлиғини тепиңлар:

A) 16 см; B) 32 см; C) 48 см; D) 64 см?

13. Бирлик квадратни униң тәрипи ятқан түздин айландурғанда пәйда болидиған жисимниң һәжимини тепиңлар:

A) p см^3; B) 2p см^3; C) 3p см^3; D) 4p см^3.

14. Цилидрниң ян бетиниң йейилмиси — тәрипи 2 см-ға тәң болған квадрат. Цилиндрниң һәжимини тепиңлар:

A) $\frac{2}{\pi}$ см^3; B) $\frac{4}{\pi}$ см^3; C) 2p см^3; D) 4p см^3.

15. Тәңтәрәплик үчбулуңлуқниң тәрипи 2 см-ға тәң. Үчбулуңлуқни униң егизлиги ятқан түздин айландурғанда һасил болидиған фигуриниң һәжимини тепиңлар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{\pi}{3}$ см^3; D) p$\sqrt{3}$ см^3.

16. Конусниң ясиғучиси 2 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Конусниң һәжимини тепиңлар:

A) p см^3; B) 2p см^3; C) 3p см^3; D) 4p см^3.

17. Конусниң ян бетиниң йейилмиси — радиуси 3 см-ға вә мәркәзлик булуңи 120°-қа тәң дүгләк сектор. Конусниң һәжимини тепиңлар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{2\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3.

18. Қийиқ конусниң оқлуқ қийилмиси — асаслири 4 см вә 2 см, ян тәрипи 2 см болидиған тәңянлиқ трапеция. Қийиқ конусниң һәжимини тепиңлар:

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$p см^3; B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$p см^3; C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$p см^3; D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$p см^3.

19. Шар бетиниң мәйдани 36 см^2-ға тәң. Шарниң һәжимини тепиңлар:

A) $24\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; B) $36\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; C) $48\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; D) $60\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3.

20. Цилиндрниң оқлуқ қийилмиси — бирлик квадрат. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған шарниң һәжимини тепиңлар:

A) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$; B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШҚА БЕҒИШЛАНҒАН КӨНҮКМИЛӘР

ҺӘҖИМ

А

1. Тикбулуңлуқ параллелепипед йеқиниң мәйдани 12 $см^2$-ға вә мошу йеқиға перпендикуляр қири 4 см-ға тәң. Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.
2. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗими 24 $см^3$-ға, бир қири болса 3 см-ға тәң. Параллелепипедниң мошу қириға перпендикуляр йеқиниң мәйданини тепиңлар.
3. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗими 60 $см^3$-ға, бир йеқиниң мәйдани болса 12 $см^2$-ға тәң. Параллелепипедниң мошу йеқиға перпендикуляр қирини тепиңлар.
4. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см вә 6 см-ға тәң. Параллелепипедниң һәҗими 48 $см^3$-ға тәң. Параллелепипедниң мошу чоққисидин чиқидиған үчинчи қирини тепиңлар.
5. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған үч қири 4 см, 6 см, 9 см-ға тәң. Мошу параллелепипедқа тәңмиқдарлиқ кубниң қирини тепиңлар.
6. Әгәр кубниң барлиқ қирлирини үч һәссә ашурса, униң һәҗими нәччә һәссә ашиду?
7. Үчбулуңлуқ тик призминиң асаси — катетлири 6 см вә 8 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ, ян қири 5 см-ға тәң. Призминиң һәҗимини тепиңлар.
8. Үчбулуңлуқ тик призминиң асаси — катетлири 3 см вә 5 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ. Призминиң һәҗими 30 $см^3$-ға тәң. Униң ян қирини тепиңлар.
9. Дурус алтәбулуңлуқ призма асасиниң тәрәплири 1 см-ға, ян қирлири $\sqrt{3}$ см-ға тәң, призминиң һәҗимини тепиңлар
10. Әгәр дурус тетраэдрниң барлиқ қирлирини икки һәссә ашурса, униң һәҗими канчә һәссә ашиду?
11. Пирамидиниң егизлиги 6 см-ға тәң, асаси — тәрәплири 3 см вә 4 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.
12. Пирамидиниң асаси — тәрәплири 3 см вә 4 см болидиған тиктөртбулуңлуқ. Пирамидиниң һәҗими 16 $см^3$-ға тәң. Униң егизлигини тепиңлар
13. Дурус үчбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 1 см-ға, егизлиги $\sqrt{3}$ см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

14. Дурус үчбулуңлук пирамида асасиниң тәрәплири 2 см, һәҗими болса $\sqrt{3}$ $см^3$. Егизлигини тепиңлар.
15. Әгәр пирамидиниң егизлигини төрт һәссә ашурса, униң һәҗими қанчә һәссә ашиду?
16. Ичидә 6л су бар цилиндрлиқ қачиға брусок селинди. Нәтиҗисидә суюқлуқ 1,5 һәссә көтирилди. Брусокниң һәҗими немигә тәң?
17. Цилиндр тәхлит қачидики суюқлуқниң сәвийәси 18 см. Әгәр мошу суюқлуқни биринчи қачидин диаметри 3 һәссә артуқ болған қачиға қуюдиған болсақ, суниң сәвийәси қандақ егизликтә болиду?
18. Конус асасиниң мәйдани 2 $см^2$-ға, ясиғучиси болса 6 см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Конусниң һәҗимини тепиңлар.
19. Әгәр конусниң егизлигини үч һәссә азайтса, униң һәҗими қанчә һәссә кемийду?
20. Әгәр конус асасиниң радиусини 1,5 һәссә ашурса, униң һәҗими нәччә һәссә ашиду?
21. Цилиндр билән конусниң асаси билән егизлиги умумий. Конусниң һәҗими 10 $см^3$-ға тәң. Цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.
22. Цилиндр билән конусниң асаси билән егизлиги умумий. Цилиндрниң һәҗими 150 $см^3$-ға тәң. Конусниң һәҗимини тепиңлар.
23. Әгәр шарниң радиусини үч һәссә ашурса, униң һәҗими нәччә һәссә ашиду?

B

24. Кубниң диагонали $\sqrt{12}$ см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.
25. Кубниң һәҗими $24\sqrt{3}$ $см^3$-ға тәң. Униң диагоналини тепиңлар.
26. Тикбулуңлук параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см, 4 см-ға, диагонали болса 6 см-ға тәң. Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.
27. Тикбулуңлук параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см, 3 см-ға, һәҗими болса 36 $см^3$-ға тәң. Параллелепипедниң диагоналини тепиңлар.
28. Әгәр кубниң һәр бир қирини 1 см-ға ашурса, униң һәҗими 19 $см^3$-қа ашиду. Кубниң қирини тепиңлар.
29. Параллелепипедниң йеқи — тәрипи 1 см-ға вә тар булуңи 60°-қа тәң болидиған ромб. Параллелепипедниң бир қири мошу йеқи билән 60° булуң ясайду вә 2 см-ға тәң. Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.
30. Цилиндр асасиниң радиуси билән егизлиги 2 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.

31. Цилиндр асасиниң радиуси 1 см-ға тәң. Мошу цилиндрға сиртидин сизилған тикбулуңлуқ параллелепипедниң һәҗими 8 $см^3$-ға тәң. Цилиндрниң егизлигини тепиңлар.

32. Сфериниң радиуси 2 см-ға тәң. Мошу сфериға сиртидин сизилған кубниң һәҗимини тепиңлар.

33. Сфериға сиртидин сизилған кубниң һәҗими 216 $см^3$-ға тәң. Сфериниң радиусини тепиңлар.

34. Үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 32 $см^3$-ға тәң. Призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ униң ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Кийип елинған үчбулуңлуқ призминиң һәҗимини тепиңлар.

35. Үчбулуңлуқ призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ униң ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Кийип елинған үчбулуңлуқ призминиң һәҗими 5 $см^3$-ға тәң. Дәсләпки призминиң һәҗимини тепиңлар.

36. Призма асаслири — тәрәплири 2 см болидиған дурус алтәбулуңлуқ. Призминиң ян қирлири $2\sqrt{3}$ см-ға тәң вә у асас тәкшилиги билән 30° булуң ясайду. Униң һәҗимини тепиңлар.

37. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 6 см-ға, ян қирлири 10 см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

38. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 12 см-ға, һәҗими 200 $см^3$-ға тәң. Пирамидиниң ян қирини тепиңлар.

39. Пирамидиниң асаси — тиктөртбулуңлуқ. Пирамидиниң бир ян йеқи униң асас тәкшилигигә перпендикуляр, башқа үч ян яқлири асас тәкшилиги билән 60° булуң ясайду. Пирамидиниң егизлиги 6 см-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.

40. Үчбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири өз ара перпендикуляр вә уларниң һәр қайсиси 3 см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

41. Дурус алтәбулуңлуқ пирамида асасиниң тәрәплири 2 см-ға, ян қирлири 4 см-ға тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

42. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 6 $см^3$-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Пирамидиниң ян қирини тепиңлар.

43. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң тәрәплири 4 см-ға, ян йеқи билән асасиниң арисидики булуң 45°-қа тәң. Пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипединиң һәҗими 12 $см^3$-ға тәң. B_1ABC үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң һәҗими 12 $см^3$-ға тәң. E, F, E_1, F_1 чекитлири — BC, CD, B_1C_1, C_1D_1 қирлириниң оттурилири. $CEFC_1E_1F_1$ үчбулуңлуқ призмисиниң һәҗимини тепиңлар.

46. Кубниң һәҗими 12 $см^3$-ға тәң. Асаси кубниң йеқи, чоққиси кубниң мәркизидә ятидиған төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

47. $ABCA_1B_1C_1$ призмисиниң һәҗими 6 $см^3$-ға тәң. Мошу призмидин C_1ABC үчбулуңлуқ пирамидиси қийип елинған. Қалған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

48. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң бөлиги болидиған $SABC$ үчбулуңлуқ пирамидисиниң һәҗими 1 $см^3$-ға тәң. Алтәбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

49. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 12 $см^3$-ға тәң. E чекити — SB қириниң оттуриси. $EABC$ үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

50. Үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 12 $см^3$-ға тәң. Мошу пирамидиниң чоққиси арқилиқ вә асасиниң оттура сизиғи арқилиқ өтүдиған тәкшилик билән үчбулуңлуқ пирамида қийип елинған. Қийип елинған үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗимини тепиңлар.

51. $SABC$ үчбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 15 $см^3$-ға тәң. Мошу пирамида асасиниң AB тәрипи арқилиқ өтүдиған тәкшилик униңға қарши ятқан SC ян қирини S чекитидин башлап саниғанда $1 : 2$ нисбитидә бөлидиған D чекитидә қийип өтиду. $DABC$ пирамидисиниң һәҗимини тепиңлар.

52. Бир цилиндр тәхлит қача иккинчисидин икки һәссә егиз, бирақ иккинчи қачиниң ичи 1,5 һәссә кәң. Иккинчи қача һәҗиминиң биринчи қача һәҗимигә нисбитини тепиңлар.

53. Конусниң һәҗими 12 $см^3$-ға тәң. Конусниң егизлигини қақ бөлидиғандәк униң асасиға параллель қийғучи тәкшилик жүргүзүлгән. Қийип елинған конусниң һәҗимини тепиңлар.

54. Конусниң егизлиги 6 см-ға, ясиғучиси болса 10 см-ға тәң. Униң һәҗиминиң ρ-ға нисбитини тепиңлар.

55. Конус асасиниң диаметри 6 см-ға, оқлуқ қийилмисиниң чоққисидики булуңи 90°-қа тәң. Униң һәҗиминиң ρ-ға нисбитини тепиңлар.

56. Тәңянлиқ тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң катети 6 см-ға тәң. Мошу үчбулуңлуқни бир катети ятқан түздин айландурғанда пәйда болидиған конус һәҗиминиң ρ-ға нисбитини тепиңлар.

57. Үч шарниң радиуслири 6 см, 8 см вә 10 см. Һәҗими мошу шарлар һәҗимлириниң қошундисиға тәң болидиған йеңи шарниң радиусини тепиңлар.

C

58. Тик призминиң асаси — мәйдани 3 $см^2$ болған ромб. Диагональлиқ қийилмилириниң мәйданлири 8 $см^2$ вә 12 $см^2$. Призминиң һәҗимини тепиңлар.

59. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң үч йеқиниң мәйданлири 2 см^2, 3 см^2, 6 см^2. Параллелепипедниң һәҗимини тепиңлар.

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубиниң қири 3 см-ға тәң. Кубниң $ABCD$ йеқиниң хошна тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған вә AA_1 қириға параллель қийғучи тәкшиликләр билән төрт үчбулуңлуқ призмилар елинди. Призминиң қалған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

61. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң һәҗими 12 см^3. Чоққилири берилгән призма асаслириниң тәрәплириниң оттуриси болидиған йеңи призминиң һәҗимини тепиңлар.

62. Кубниң қири 6 см-ға тәң. Чоққилири кубниң төрт чоққиси билән мувапиқ келидиғандәк кубқа дурус тетраэдр ичидин сизилған. Тетраэдрниң һәҗимини тепиңлар.

63. Төртбулуңлуқ пирамидиниң һәҗими 12 см^3. Пирамида чоққиси вә асасиниң хошна тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған қийғучи тәкшиликләр билән төрт үчбулуңлуқ пирамидилар қийилип елинди. Пирамидиниң қалған бөлигиниң һәҗимини тепиңлар.

64. Кубниң қири 6 см-ға тәң. Чоққилири мошу куб яқлириниң мәркәзлиридә ятидиған октаэдрниң һәҗимини тепиңлар.

65. Шарниң һәҗими 1 см^3-ға тәң. Мошу шарға сиртидин сизилған цилиндрниң һәҗимини тепиңлар.

66. Шарниң һәҗими 12 см^3-ға тәң. Асаси — шарниң чоң дүглиги, егизлиги болса мошу дүгләк тәкшилигигә перпендикуляр болидиған конусниң һәҗимини тепиңлар

БӘТНИҢ МӘЙДАНИ

А

1. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған қирлири 1 см, 2 см, 3 см-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.

2. Тикбулуңлуқ параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 3 см вә 4 см. Параллелепипед бетиниң мәйдани 52 см^2. Униң шу чоққидин чиқидиған үчинчи қирини тепиңлар.

3. Әгәр кубниң барлиқ қирлирини үч һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

4. Әгәр тетраэдрниң барлиқ қирлирини икки һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

5. Дурус алтәбулуңлуқ призминиң егизлиги 6 см-ға, асасиниң тәрәплири болса 3 см-ға тәң. Призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.

6. Үчбулуңлуқ тик призминиң егизлиги 10 см-ға тәң, асаси — катетлири 6 см вә 8 см болидиған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқ. Призма бетиниң мәйданини тепиңлар.

7. Цилиндрниң егизлиги 2 см-ға, асасидики чәмбәрниң узунлиғи 3 см-ға тәң.Цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
8. Конусниң ясиғучиси 2 см-ға, асасидики чәмбәрниң узунлиғи болса 3 см-ға тәң. Конусниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
9. Әгәр конусниң ясиғучисини 3 һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?
10. Әгәр конус асасиниң радиусини 1,5 һәссә кемитсә, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә кемийду?
11. Шарниң чоң дүглүгиниң мәйдани 1 $см^2$-ға тәң. Шар бетиниң мәйданини тепиңлар.
12. Әгәр шарниң радиусини икки һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?

В

13. Кубниң диагонали 1 см-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.
14. Куб бетиниң мәйдан 8 $см^2$-ға тәң. Униң диагоналини тепиңлар.
15. Куб бетиниң мәйдани 24 $см^2$-ға тәң. Униң һәҗимини тепиңлар.
16. Кубниң һәҗими 27 $см^3$-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.
17. Тикбулуңлук параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 2 см вә 4 см. Параллелепипедниң диагонали 6 см-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.
18. Тикбулуңлук параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 1 см вә 2 см. Параллелепипед бетиниң мәйдани 16 $см^2$-ға тәң. Униң диагоналини тепиңлар.
19. Әгәр кубниң һәрбир қирини 1 см-ға ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани 30 $см^2$-ға тәң болиду. Кубниң қирини тепиңлар.
20. Тикбулуңлук параллелепипедниң бир чоққисидин чиқидиған икки қири 1 см вә 2 см. Параллелепипедниң һәҗими 6 $см^3$-ға тәң. Униң бетиниң мәйданини тепиңлар.
21. Тик призминиң ян қири 5 см-ға тәң, асаси — диагональлири 3 см вә 4 см болидиған ромб. Призма бетиниң мәйданини тепиңлар.
22. Тик призминиң асаси — диагональлири 6 см вә 8 см болидиған ромб. Призма бетиниң мәйдани 248 $см^2$-ға тәң. Униң ян қирини тепиңлар.
23. Дурус төртбулуңлук призма асасиниң тәрәплири 3 см-ға, бетиниң мәйдани 66 $см^2$-ға тәң. Униң ян қирини тепиңлар.
24. Үчбулуңлук призминиң икки ян яқлири өз ара перпендикуляр. Уларниң умумий қири 10 см-ға тәң вә башқа ян қирлиридин 6 см вә 8 см арилиқта ятиду. Призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
25. Үчбулуңлук тик призминиң асаси — катетлири 6 см вә 8 см болидиған тикбулуңлук үчбулуңлук. Призма бетиниң мәйдани 288 $см^2$-ға тәң. Униң егизлигини тепиңлар.

26. Үчбулуңлук призминиң ян бетиниң мәйдани 12 см^2-ға тәң. Призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Қийип елинған үчбулуңлук призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
27. Үчбулуңлуқ призма асасиниң оттура сизиғи арқилиқ ян қириға параллель тәкшилик жүргүзүлгән. Қийип елинған үчбулуңлуқ призминиң ян бетиниң мәйдани 8 см^2-ға тәң. Дәсләпки призминиң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
28. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 5 см-ға, асасиниң тәрәплири 6 см-ға тәң. Пирамида бетиниң мәйданини тепиңлар.
29. Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң егизлиги 4 см-ға, асасиниң тәрәплири 6 см-ға тәң. Пирамида бетиниң мәйданини тепиңлар.
30. Дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 5 см-ға, асасиниң тәрәплири 6 см-ға тәң. Пирамидиниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
31. Әгәр октаэдрниң барлиқ қирлирини 3 һәссә ашурса, у чағда униң бетиниң мәйдани нәччә һәссә ашиду?
32. Конусниң егизлиги 6 см-ға, ясиғучиси 10 см-ға тәң. Конус бети мәйданиниң π-ға нисбитини тепиңлар.
33. Конусниң ян бетиниң мәйдани униң асасиниң мәйданидин икки һәссә чоң. Конусниң ясиғучиси билән асас тәкшилигиниң арисидики булуңни тепиңлар.
34. Конус бетиниң мәйдани 12 см^2-ға тәң. Униң егизлигиниң оттуриси арқилиқ өтүдиған асасиға параллель қийилма жүргүзүлгән. Қийип елинған конус бетиниң мәйданини тепиңлар.
35. Шарниң һәжими 36π. Униң бетиниң мәйданиниң π-ға нисбитини тепиңлар.
36. Бир шарниң һәжими иккинчи шарниң һәжимидин 27 һәссә чоң. Биринчи шар бетиниң мәйдани иккинчи шар бетиниң мәйданидин нәччә һәссә чоң болиду?
37. Икки шарниң радиуслири 6 см вә 8 см. Мошу шарлар бәтлириниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болидиған үчинчи шарниң радиусини тепиңлар.

C

38. Цилиндрниң оқлуқ қийилмисиниң мәйдани 1 см^2-ға тәң. Цилиндрниң ян бетиниң мәйданини тепиңлар.
39. Шарға сиртидин сизилған цилиндр бетиниң мәйдани 9 см^2-ға тәң. Шар бетиниң мәйданини тепиңлар.

АЙЛИНИШ ЖИСИМЛИРИ

Көпбулуңлуқларниң айлиниши

А

1. ABC тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири $AC = BC = 1$ см. Мошу үчбулуңлуқни AC катети ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
2. ABC тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири $AC = BC = 1$ см. Мошу үчбулуңлуқни CH егизлиги ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
3. ABC тәңтәрәплик үчбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу үчбулуңлуқ CH егизлиги ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
4. ABC тәңянлиқ үчбулуңлиғида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$, CH — егизлиги. Мошу үчбулуңлуқни CH егизлиги ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
5. $ABCD$ тәңянлиқ трапецияниң AD вә BC ян тәрәплири 1 см-ға, AB вә CD асаслири болса мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни AB вә CD асаслириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған c түзидин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
6. $ABCD$ тикбулуңлуқ трапецияниң AB вә CD асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң, кичик ян тәрипи болса 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни AD тәрипи ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

В

7. ABC тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири $AC = BC = 1$ см. Мошу үчбулуңлуқниң AB тәрәплири ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
8. ABC тәңтәрәплик үчбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу үчбулуңлуқниң AB тәрәплири ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
9. ABC тәңянлиқ үчбулуңлуғида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Мошу үчбулуңлуқни AB тәрәплири ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
10. ABC тикбулуңлуқ үчбулуңлуғида $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. Мошу үчбулуңлуқни AB тәрәплири ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
11. $ABCD$ ромбисиниң тәрәплири 1 см-ға, тар булуңи болса 60°-қа тәң. Мошу ромбни AC түзидин айландурғанда һасил болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

12. *ABCD* ромбниң тәрәплири 1 см-ға, тар булуңи 60°-қа тәң. Мошу ромбини *BD* түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

13. *ABCD* тәңянлиқ трапецияниң *AD* вә *BC* ян тәрәплири 1 см-ға, *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *AB* түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

14. *ABCD* тикбулуңлуқ трапецияниң *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң, кичик ян тәрипи 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *AB* түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

C

15. *ABC* тәңянлиқ үчбулуңлуғида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Мошу үчбулуңлуқни *AC* тәрипи ятқан түздин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

16. *ABC* тикбулуңлуқ үчбулуңлуғида $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$, *CH* — егизлиги. Мошу үчбулуңлуқни *CH* егизлиги ятқан түздин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

17. *ABCD* ромбисиниң тәрәплири 1 см-ға, тар булуңи болса 60°-қа тәң. Мошу ромбини *AB* түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

18. *ABCD* тәңянлиқ трапецияниң *AD* вә *BC* ян тәрәплири 1 см-ға, *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *CD* түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

19. *ABCD* тәңянлиқ трапецияниң *AD* вә *BC* ян тәрәплири 1 см-ға, *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни оттура сизиғи ятқан *c* түздин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

20. *ABCD* тикбулуңлуқ трапецияниң *AB* вә *CD* асаслири мувапиқ 2 см вә 1 см-ға тәң, кичик ян тәрипи болса 1 см-ға тәң. Мошу трапецияни *CD* түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

21. *ABCDEF* дурус алтәбулуңлуғиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу алтәбулуңлуқни *AB* түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

22. *ABCDEF* дурус алтәбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу алтәбулуңлуқни *AC* түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

15. $ABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу алтәбулуңлуқни AD түзидин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
16. $ABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу алтәбулуңлуқни AB вә DE тәрәплириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған c түзидин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

Көпяқлиқларниң айлиниши

А

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини AA_1 түзидин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини $ABCD$ вә $A_1B_1C_1D_1$ яқлириниң мәркәзлири арқилиқ өтүдиған c түзидин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призмисиниң барлиқ тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу призмини AA_1 түзидин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлуқ призмисиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини ABC вә $A_1B_1C_1$ яқлириниң мәркәзлири арқилиқ өтүдиған c түзидин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлуқ призмисиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини асаслириниң мәркәзлири арқилиқ өтүдиған c түзидин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

В

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини BC вә B_1C_1 қирлириниң оттурилири арқилиқ өтүдиған c түзидин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
7. $ABCD$ бирлик тетраэдрини униң DH егизлиги ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
8. $SABCD$ дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидини SH егизлиги ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
9. $SABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқ пирамидиниң ян қирлири 2 см-ға, асасиниң тәрәплири 1 см-ға тәң. Мошу пирамидини SH егизлиги ятқан түздин айландурғанда пәйда болған жисимниң һәжими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлук призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини AA_1 түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

C

11. $ABCD$ бирлик тетраэдрини AB түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
12. $S'ABCDS''$ бирлик октаэдрини $S'S''$ түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
13. $ABCA_1B_1C_1$ дурус үчбулуңлук призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини BC вә B_1C_1 қирлириниң оттуриси арқилиқ өтүдиған c түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дурус алтәбулуңлук призминиң барлиқ қирлири 1 см-ға тәң. Мошу призмини BC вә B_1C_1 қирлириниң оттуриси арқилиқ өтүдиған c түзидин айландурғанда пәйда болған җисимниң һәҗими билән бетиниң мәйданини тепиңлар.

ПӘН БОЙИЧӘ АТАЛҒУ КӨРСӘТКҮЧЛИРИ

ҖАВАПЛИРИ

10-СИНИПНИҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

1. 1) 3; 2) 6; 3) 10; 4)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.** Бир яки чәксиз көп. **3.** 1) 4; 2) 10; 3)* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **4.** 1) 4; 2) 8; 3)* 15. **8.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **9.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **10.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) $2n$. **11.** 1), 4) Яқ; 2), 3) һәә. **12.** 1) 9; 2) 12; 3) 15; 4) 18; 5) $3n$. **13.** 1), 3), 4) Һәә; 2) яқ. **14.** 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) $n+2$. **15.** 1), 2), 3), 4) Һәә. **16.** 1) Төртбулуң; 2) бәшбулуң; 3) алтәбулуң. **17.** 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) $n+1$. **18.** 1), 2), 3), 4) Һәә. **19.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) $2n$. **20.** 1), 4) Яқ; 2), 3) һәә. **21.** 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) $n+1$. **22.** 1), 2), 3), 4) Һәә. **23.** 1) Төртбулуң; 2) бәшбулуң; 3) алтәбулуң. **24.** 1) 18; 2) 18; 3) 6; 4) 27. **27.** 1) 24; 2) 24; 3) 3; 4) 24. **28.** 1), 2) Айқаш түзләр; 3) қийилишиду. **29.** 1), 2) Айқаш түзләр; 3) қийилишиду. **33.** 1) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, BCC_1B_1, EFF_1E_1; 2) DEE_1D_1. **35.** 1) 3; 2) 3; 3) 1; 4) 4. **37.** 1) 3; 2) 48. **38.** 1) 60°; 2) 90°; 3) 90°. **39.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°. **40.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **41.** 1) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **42.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **43.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $1\frac{1}{2}$. **44.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **45.** 45°. **46.** 60°. **47.** 1) 60°; 2) 30°; 3) 90°; 4) 90°. **48.** $\frac{1}{3}$. **49.** $-\frac{1}{3}$. **50.** 6. **51.** 1) 2; 2) $\sqrt{5}$. **52.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6}$. **53.** $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. **54.** $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$. **55.** 1) 120°; 2) 90°. **56.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; ғ) 0. **57.** 1. **58.** $A(0; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 1)$, $B_1(1; 1; 1)$, $C_1(1; 0; 1)$, $D_1(0; 0; 1)$. **59.** $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $D(1; \sqrt{3}; 0)$, $E(0; \sqrt{3}; 0)$, $F(-0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$, $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$, $D_1(1; \sqrt{3}; 1)$, $E_1(0; \sqrt{3}; 1)$, $F_1(-0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$. **60.** 1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{5}$. **61.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$. **62.** $R = 3$, $O(2; -1; 0)$. **63.** 7. **64.** $6x + 3y + 2z = 6$.

I бап. КӨПЯҚЛИҚЛАР

§ 1

3. а), ә). **4.** а), ә). **5.** а), ә), б), г). **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\sqrt{29}$. **8.** 1. **9.** 9 һәссә. **10.** 4 һәссә. **11.** 4 һәссә. **12.** 94. **13.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$. **14.** $6+3\sqrt{3}$. **15.** б), г), д). **16.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **18.** 2 вә $\sqrt{5}$. **19.** $\sqrt{5}$. **20.** 4. **21.** а) 22; ә) 28. **22.** а) 92; ә) 48. **23.** а), ә) 34. **24.** а) 22; ә) 26. **25.** 30. **26.** d 27600 м². **27.** ә), б), в), г) —томпақ; а), ғ) — томпақ әмәс. **28.** 288 см². **29.** $\sqrt{5}$. **30.** Яқ. **31.** Яқ.

§ 2

2. а), б). **3.** а), б). **4.** Бәшбулуңлуқ пирамида. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $1+\sqrt{3}$. **8.** $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{2}$. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** 4 һәссә. **11.** 9 һәссә. **15.** $\sqrt{7}$. **16.** $\sqrt{10}$. **17.** d 8595 м². **18.** d 8,3 га. **19.** $5+3\sqrt{3}$. **20.** 1. **21.** d 1710 дм².

§ 3*

1. 8. **2.** 12. **3.** 6. **6.** а) Алтәбулуңлуқ призма; ә) бәшбулуңлуқ пирамида. **7.** Орунлиниду. **8.** Һәә. **9.** Һәә. **10.** Ч = 12, Қ = 24, Я = 12; Ч − Қ + Я = 0. **11.** Ч = 6, Қ = 12, Я = 8. **12.** Ч = 20, Қ = 30, Я = 12.

§ 4

1. 1) Ч = 4, Қ = 6, Я = 4; 2) Ч = 8, Қ = 12, Я= 6; 3) Ч = 6, Қ = 12, Я = 8; 4) Ч = 12, Қ = 30, Я= 20; 5) Ч = 20, Қ = 30, Я= 12. **2.** Яқ. Яқлириниң һәртүрлүк сани қийилишидиған чоққилири бар болиду. **3.** Һәә, бу октаэдр. **7.** 5. **8.** 3.**9.** Куб вә октаэдр. **10** Икосаэдр вә додекаэдр. **11.** Тетраэдр, $\sqrt{2}$. **12.** Октаэдр, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.** Октаэдр, $\frac{1}{2}$. **14.** Октаэдр, 1 см. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 4. **17.** 8. **18.** Тетраэдр, $\frac{1}{3}$. **19.** Куб, $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **20.** Додекаэдр. **21.** Икосаэдр. **22.** 10. **23.** 6.

§ 5*

2. 1), 2), 3) Һәә. **3.** 1) Яқ; 2), 3) һәә. **4.** 1) Яқ; 2), 3) һәә. **5.** 1), 2), 3) Һәә. **6.** 1) Яқ; 2), 3) һәә. **7.** 1) Яқ; 2), 3) һәә. **9.** Берилгән түзләрниң тәкшилигидә ятидиған, уларға параллель болидиған вә улардин бирдәк арилиқта ятидиған түзниң чекитлири. **10.** 1) Берилгән тәкшиликләрниң қийилишиш түзлириниң чекитлири; 2) берилгән тәкшиликләргә параллель вә улардин бирдәк арилиқта ятидиған тәкшиликниң чекитлири. **11.** Һәә. **12.** 1), 2), 3) Һәә. **13.** 1) 3; 2) 7. **14.** 1) 4; 2) 7. **15.** 1), 2) 1. **16.** 1) 4; 2) 6. **17.** 1) n, әгәр n — тағ сан, $n + 1$, әгәр n — жүп сан; 2) 0, әгәр n — тағ сан, 1,әгәр n — жүп сан. **18.** 1) $n + 1$; 2) n. **19.** 1) 9; 2), 3) 15. **20.** 1) 9; 2), 3) 15. **221.** һәә, мәсилән, сфериниң симметрия мәркизи униң бойида ятмайду. **22.** 1) Яқлири параллелограммлар болидиған параллелепипедниң симметрия мәркизи бар, бирақ симметрия оқи йоқ; 2) дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң симметрия оқи бар, бирақ симметрия мәркизи йоқ. **23.** 1) Яқлири параллелограммлар болидиған параллелепипедниң симметрия мәркизи бар, бирақ симметрия тәкшилиги йоқ; 2) асаси параллелограмм болидиған төртбулуңлуқ пирамидиниң симметрия оқи бар, бирақ симметрия тәкшилиги йоқ. **24.** 1) Дурус төртбулуңлуқ пирамидиниң симметрия тәкшилиги бар, бирақ симметрия мәркизи йоқ; 2) дурус үчбулуңлуқ пирамидиниң симметрия тәкшилиги бар, бирақ симметрия оқи йоқ.

Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	A)	B)	B)	C)	A)	D)	D)	A)	C)	B)	D)	C)	D)	D)	A)	B)	C)	A)	D)

II бап. АЙЛИНИШ ЖИСИМЛИРИ ВӘ УЛАРНИҢ ЭЛЕМЕНТЛИРИ

§ 6

2. Чәксиз көп. **3.** Дүгләк. **4.** Цилиндр. **5.** Тәңгә. **6.** 5 см. **7.** $\frac{1}{2\pi}$ см. **8.** 1) 4ρ см^2; 2) 6ρ см^2. **10.** Тиктөртбулуң. **11.** 1), 2), 3)Һәә. **12.** 1), 2) Цилиндр. **13.** 1) $2\sqrt{2}\rho$; 2) $\sqrt{2}\rho$. **14.** 1), 2) Цилиндр. **15.** 1) 2ρ; 2) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$. **16.** 1), 2) Цилиндр. **17.** 1) 12ρ; 2) 4ρ. **18.** $10\rho \approx 31,4$ (м^2). **19.** $30\sqrt{2 - 2\cos 10^\circ}$ см^2. **20.** 26 см^2. **21.** Асаслириниң радиуслири 2 см вә 1 см, егизлиги 1 см болидиған икки цилиндрдин туридиған фигура. Бу фигура бетиниң мәйдани 14 ρ-ға тәң. **22.** Асаслириниң радиуслири 2 см, 1 см, 1 см, егизлиги 1 см болидиған үч цилиндрдин туридиған фигура. Бу фигура бетиниң мәйдани 16 ρ-ға тәң. **23.** 350ρ см^2. **24.** $\frac{2R\left(1 - \cos\frac{\alpha}{R}\right)}{\operatorname{tg}\beta}$ см^2.

§ 7

2. Чәксиз көп. **3.** Дүгләк. **4.** Конус. **5.** Конусниң ян бети. **6.** 5. **7.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. **8.** 1 см. **9.** 1 см. **10.** 3ρ см^2. **11.** Һәә. **12.** $\frac{\pi}{4}$ см^2. **13.** $\sqrt{5}\rho$ см^2. **14.** 1) Яқ; 2), 3) һәә. **15.** Асаслири умумий болидиған икки конустин туридиған фигура. **16.** Асаслири умумий болидиған икки конустин туридиған фигура. Униң бетиниң мәйдани $\sqrt{2}\rho$-ға тәң. **17.** Конус. **18.** $\frac{(\sqrt{2} + 1)\pi}{2}$. **19.** Конус. **20.** 3ρ см^2. **21.** 15 см^2. **22.** $2h^2$. **23.** Асаслири умумий болидиған икки тәң конуслардин туридиған фигура. Униң бетиниң мәйдани $\sqrt{2}$см^2-ға тәң. **24.** 0,5 см. **25.** 120°. **26.** 37. **27.** 42,12 м^2. **28.** 1440 см^2.

§ 8

2. Чәксиз көп. **3.** Дүгләк. **4.** Қийиқ конус. **5.** Қийиқ конусниң ян бети. **6.** 5 см. **7.** 80р см². **8.** Һәә. **10.** 9р см². **11.** 1) Яқ; 2), 3) һәә. **12.** 1 см. **13.** 2 см. **14.** $\frac{17\pi}{4}$ см². **15.** Қийиқ конус. **16.** $(10 + 9\sqrt{2})$р см². **17.** Қийиқ конус. **18.** 14р см². **19.** $6\sqrt{2}$р ≈ 26,6 (м²). **20.** Асаслири умумий болидиған тәң икки қийиқ конуслардин туридиған фигура. Униң бетиниң мәйдани 3,5р см²-ға тәң. **21.** 1 см вә 0,5 см. **22.** d 161 г. **23.** d 1,1 дм². **24.** d 88 см, d 63 см, d 24,3 см, d 21 дм².

§ 9

2. 1) $OA < R$; 2) $OA > R$. **3.** 1) Сфериниң ичидә ятиду; 2) сфериниң бойида ятиду; 3) сфериниң сиртида ятиду. **4.** Чәксиз көп. **5.** 110 мм. **6.** 1 см. **7.** 1) Қийилишиду; 2) яндишиду; 3) умумий чекитлири болмайду. **8.** 1) Бир тал; 2) бир тал әмәс; 3) чәксиз көп. **9.** 4 см. **10.** 4 см. **11.** 1) Қийилишиду; 2) яндишиду; 3) умумий чекитлири болмайду. **12.** 5 см. **13.** 8 см. **14.** 5 см. **15.** 1) Қийилишиду; 2) яндишиду; 3) умумий чекитлири болмайду. **16.** ≈ 6369 км. **17.** 2 см вә 10 см. **18.** 1 см. **19.** 1) Қийилишиду; 2) яндишиду; 3) умумий чекитлири болмайду.

§ 10*

1. R вә $2R$. **2.** $\frac{h}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **4.** $2\sqrt{3}$ см. **5.** $\sqrt{3}$ см. **6.** 2,5 см. **7.** 6р см². **8.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **9.** $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$. **10.** $3\frac{1}{8}$ см. **11.** $R = \frac{r(\sqrt{r^2 + h^2} - r)}{h}$. **12.** $1\frac{1}{2}$ см. **13.** $\sqrt{3}$ см. **14.** 1) 1 см; 2) $\sqrt{2} - 1$ см. **15.** 1) 1 см; 2) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$ см.

§ 11

1. 4р см². **2.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$ см. **3.** 12 см². **4.** 1) 4; 2) 9; 3) n^2 һәссә ашиду. **5.** 2 : 3. **6.** 10 см. **7.** 1. **8.** р. **9.** 2р. **10.** 160000 һәссә. **11.** 3 һәссә. **12.** 4 һәссә. **13.** 400р см². **14.** ≈ 509 554 140 км². **15.** ≈ 1520 м². **16.** 19200 м². **18.** $\frac{\pi}{2}$ см². **19.** $\frac{2\pi}{3}$ см².

Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B)	C)	C)	D)	B)	C)	A)	C)	D)	C)	D)	D)	C)	D)	A)	D)	C)	B)	C)	D)

III бап. ЖИСИМЛАРНИҢ ҺӘЖИМЛИРИ

§ 12

1. 54 см². **2.** 8 см³. **3.** 8 см³. **4.** 7 см³. **5.** 27 һәссә. **6.** 8 һәссә. **7.** 1) 2 һәссә ашиду; 2) 9 һәссә кемийду. **8.** 62,5 г. **9.** 60 м². **10.** а) 6; ә) 8. **11.** а) 40; ә) 12. **12.** а), ә) 10. **13.** а) 5; ә) 6. **14.** 30 см³. **15.** 15 см³. **16.** 20 см. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** $1\frac{3}{4}$. **19.** ≈ 21 м³. **20.** 9 см. **21.** 3 см. **22.** 160 см³. **23.** $\frac{1}{6}$. **24.** $\frac{1}{3}$. **25.** 6 м². **26.** 162 л.

§ 13

1. 60 см³. **2.** $20\sqrt{3}$ см³. **3.** $18\sqrt{3}$ см³. **4.** $\sqrt{3}$ см³. **5.** 0,75 см³. **6.** $16\sqrt{3}$ см. **7.** 1 : 3. **8.** 3 см³. **9.** 5 см³. **10.** 9 см³. **12.** 3 м³. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см³.

§ 14

1. 12р см³. **2.** $\frac{\pi a^3}{4}$ см³. **3.** Иккинчи. **4.** рa^3. **5.** $\frac{3\pi}{32}$ см³. **6.** $\frac{\pi}{4}$. **7.** р см³. **8.** $\frac{a}{b}$ яки $\frac{b}{a}$. **9.** Икки һәссә. **10.** 3р см³. **11.** 243р см³. **12.** 4 см. **13.** Цилиндр асасини таллап елишимизға бағлиқ болиду. $\frac{1}{\pi}$ см^3 яки $\frac{1}{2\pi}$ см^3. **14.** 2р. **16.** 5р см^3. **17.** 6р см^3. **18.** 960 м^3. **19.** 162 кг. **20.** 2250 см^3.

§ 15

1. $\frac{1}{3}a^2h$. **2.** 32 м^3. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см^3. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^3. **5.** $1\frac{1}{2}$ см^3. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ см^3. **7.** 8 һəссə. **8.** 3 һəссə кемийду. **9.** 1) $\frac{1}{3}$ см^3; 2) $\frac{1}{6}$ см^3. **10.** 1 : 7. **11.** 7 см^3. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см^3. **13.** $\frac{1}{6}$ см^3. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см^3. **15.** $4\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{1}{3}$ см^3. **17.** 1 : 1. **18.** 3 см^3. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ см^3. **20.** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ см^3. **21.** ≈ 79443 м^3. **23.** $\frac{3}{4}$ см^3. **24.** $\frac{1}{2}$ см^3. **25.** $\frac{1}{2}$ см^3. **26.** 3074176 м^3. **27.** ≈ 407 м^3. **28.** 473 дм^3, 319 кг.

§ 16

1. 1) Үч; 2) төрт һəссə ашиду. **2.** 2 һəссə ашиду. **3.** 5 см^3. **4.** 1 : 7. **5.** 16р см^3. **6.** 3р см^3. **7.** 3р см^3. **8.** 7р см^3. **9.** 72р см^3. **10.** 9р см^3. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см^3. **12.** Яқ. **13.** $\frac{7}{27}$ см^3. **14.** 4 см. **15.** 52р см^3. **16.** 19р см^3. **18.** ≈ 55,5 м^3. **19.** 9р см^3. **20.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см^3. **22.** $V = 19{,}44$ м^3.

§ 17

1. 36р см^3. **2.** 1) 27; 2) 64 һəссə ашиду. **3.** 6 см. **4.** 27. **5.** $\frac{4\pi}{3}$ см^3. **6.** $\frac{4000\pi}{3}$ см^3. **7.** $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ см^3. **8.** $m^{\frac{3}{2}} : n^{\frac{3}{2}}$. **9.** $\frac{4\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3)$. **10.** 26 : 1. **11.** ≈ 0,5. **12.** $\frac{5324\pi}{3} \approx 5572$ (м^3). **13.** $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ см^3. **14.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$ см^3. **15.** $\frac{\pi}{6}$ см^3. **16.** $\frac{2\pi}{9}$ см^3.

Өзəңни тəкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	B)	D)	C)	B)	D)	D)	B)	B)	C)	B)	A)	A)	A)	A)	D)	C)	B)	A)

10-11-СИНИПЛАРДИКИ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТƏКРАРЛАШ

ҺƏЖИМ

1. 48 см^3. **2.** 8 см^3. **3.** 5 см. **4.** 4 см. **5.** 6 см. **6.** 27. **7.** 120 см^3. **8.** 4 см. **9.** 4,5 см^3. **10.** 8. **11.** 24 см^3. **12.** 4 см. **13.** 0,25 см^3. **14.** 3 см. **15.** 4. **16.** 3. **17.** 2 см. **18.** 2 см^3. **19.** 3. **20.** 2,25. **21.** 30 см^3. **22.** 50 см^3. **23.** 27. **24.** 8 см^3. **25.** 6 см. **26.** 32 см^3. **27.** 7 см. **28.** 2 см. **29.** 1,5 см^3. **30.** 32 см^3. **31.** 2 см. **32.** 64 см^3. **33.** 3 см. **34.** 8 см^3. **35.** 20 см^3. **36.** 18 см^3. **37.** 256 см^3. **38.** 13 см. **39.** 48 см^3. **40.** 4,5 см^3. **41.** 12 см^3. **42.** 7 см. **43.** 48 см^3. **44.** 2 см^3. **45.** 1,5 см^3. **46.** 2 см^3. **47.** 4 см^3. **48.** 6 см^3. **49.** 3 см^3. **50.** 3 см^3. **51.** 10 см^3. **52.** 1,125. **53.** 1,5 см^3. **54.** 128 см^3. **55.** 9 см^3. **56.** 72 см^3. **57.** 12 см^3. **58.** 12 см^3. **59.** 6 см^3. **60.** 13,5 см^3. **61.** 9 см^3. **62.** 72 см^3. **63.** 6 см^3. **64.** 36 см^3. **65.** 1,5 см^3. **66.** 3 см^3.

БƏТНИҢ МƏЙДАНИ

1. 22 см^2. **2.** 2 см. **3.** 9. **4.** 4. **5.** 108 см^2. **6.** 288 см^2. **7.** 6 см^2. **8.** 3 см^2. **9.** 3. **10.** 1,5. **11.** 4 см^2. **12.** 4. **13.** 2 см^2. **14.** 2 см. **15.** 8 см^3. **16.** 54 см^2. **17.** 64 см^2. **18.** 3 см. **19.** 2 см. **20.** 22 см^2. **21.** 62 см^2. **22.** 10 см. **23.** 4 см. **24.** 240 см^2. **25.** 10 см. **26.** 6 см^2. **27.** 16 см^2. **28.** 84 см^2. **29.** 96 см^2. **30.** 72 см^2. **31.** 9. **32.** 144. **33.** 60. **34.** 3 см^2. **35.** 36. **36.** 9. **37.** 10 см. **38.** р см^2. **39.** 6 см^2.

АЙЛИНИШ ҖИСИМЛИРИ

Көпбулуңлукларниң айлиниши

1. $\frac{\pi}{3}$ см³ вә $(\sqrt{2}+1)$р см². **2.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см³ вә $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см². **3.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см³ вә 0,75р см². **4.** $\frac{\pi}{8}$ вә $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{4}$. **5.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{24}$ см³ вә 2,75р см². **6.** $\frac{7\pi}{3}$ см³ вә $(3\sqrt{2}+5)$р см². **7.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ см³ вә $\sqrt{2}$р см². **8.** $\frac{\pi}{4}$ см³ вә $\sqrt{3}$р см². **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ вә р. **10.** 9,6р вә 16,8р. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ см³ вә р см². **12.** 0,25р см³ вә $\sqrt{3}$р см². **13.** р см³ вә $2\sqrt{3}$р см². **14.** $\frac{4\pi}{3}$ см³ вә $(\sqrt{2}+3)$р см². **15.** $\frac{\pi}{4}$ вә $\frac{(\sqrt{3}+3)\pi}{2}$. **16.** 8,192 р вә 23,04 р. **17.** 0,75р см³ вә $2\sqrt{3}$р см². **18.** 1,25р см³ вә $3\sqrt{3}$р см². **19.** $\frac{11\pi}{32}$ см³ вә $\frac{5\sqrt{3}\pi}{14}$ см². **20.** $\frac{5\pi}{3}$ см³ вә $(\sqrt{2}+5)$р см². **21.** 4,5р см³ вә $6\sqrt{3}$р см². **22.** $\frac{19\sqrt{3}\pi}{12}$ см³ вә 7р см². **23.** р см³ вә $2\sqrt{3}$р см². **24.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{12}$ см³ вә 3,5р см².

Көпяқлиқларниң айлиниши

1. 2р вә $(2\sqrt{2}+4)$р. **2.** 0,5р вә $(\sqrt{2}+1)$р. **3.** р см³ вә 4р см². **4.** $\frac{\pi}{3}$ см³ вә $\frac{(2\sqrt{3}+2)\pi}{2}$ см². **5.** р см³ вә 4р см². **6.** 1,25р вә $(\sqrt{5}+2{,}5)$р. **7.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ вә $\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см³ вә $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см². **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см³ вә 3р см². **10.** 4р см³ вә 12р см². **11.** 0,25р вә $\sqrt{3}$р. **12.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ вә $\sqrt{2}$р. **13.** 0,75р см³ вә $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{2}$ см². **14.** 3,25р см³ вә $\frac{(2\sqrt{13}+13)\pi}{2}$ см².

МУНДӘРИҖӘ

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 11 классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательных школ

(*на уйгурском языке*)

Редактор *Ш. Азнакулиева*
Бәдиий редактор *А. Сланова*
Техникилиқ редактор *Л. Садиқова*
Компьютерда сәһипилигән *Б. Нокер*

Нәшриятқа Қазақстан Җумһурийити Билим вә пән министрлигиниң № 0000001 дөләтлик лицензияси 2003 жили 7-июльда берилгән

ИБ № 6228

Нәширгә 19.08.20 қол қоюлди. Формати 70×100 $^1/_{16}$. Офсет қәғизи. Һәрип түри "SchoolBook Kza". Офсетлиқ нәшир. Шәртлик басма тавиғи 10,32 + 0,32 форзац. Шәртлик бояқ һәжими 21,96. Һесапқа елинидиған басма тавиғи 6,47 + 0,54 форзац. Тиражи 1500 данә. Буйрутма №

"Мектеп" нәшрияти, 050009, Алмута шәһири, Абай проспекти, 143
Факс: 8(727) 394-42-30, 394-37-58
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz