В.А.Смирнов, Е.А.Туяқов

ГЕОМЕТРИЯ

11

Умумтаълим мактабларининг ижтимоий-гуманитар йўналишдаги 11-синфи учун дарслик

Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлиги тасдиқлаган

Алмати “Мектеп” 2020

УДК 373.167.1
ББК 22.15я72
С53

Таржимон **А. Н. Исраилов**

Шартли белгилар:

— танқидий фикрлашни ривожлантириш бўйича топшириқлар

— назарий материалларни мустақил ўрганиш учун керак бўладиган топшириқлар

— теорема исботланишининг якунланиши

A — барча ўқувчилар учун мажбурий топшириқлар

B — ўртача даражали топшириқлар

C — юқори даражали масалалар

Смирнов В.А., Туяқов Е.А.
С53 **Геометрия.** Умумтаълим мактабларининг ижтимоий-гуманитар йўналишдаги 11-синфи учун дарслик. — Алмати: Мектеп, 2020. — 128 б., расм.

ISBN 978—601—07—1516—5

С $\frac{4306020502—143}{404(05)—20}$ 63(1)—20

УДК 373.167.1
ББК 22.15я72

ISBN 978—601—07—1516—5

КИРИШ

Дарслик 10-синф “Геометрия” дарслигининг давоми бўлиб ҳисобланади ва ижтимоий-гуманитар йўналиш бўйича ўқийдиган 11-синф ўқувчиларига оид.

Дарсликда асосий кўпёқлар билан ва уларнинг хоссалари билан танишиш, айланиш жисмлари билан (цилиндр, конус, шар) ва уларнинг хоссалари билан танишиш, фазовий фигураларнинг сиртлари юзаси билан ҳажмларини топишни ўргатиш назарда тутилган.

Дарсликдаги барча материаллар бўлимлар ва параграфларга бўлинган. Улар назарий материалларни, мустақил бажариш учун берилган топшириқларни, мустаҳкамлашга оид саволларни, мураккаблик даражаси ҳар хил бўлган масалаларни ўз ичига олади.

Теорема исботининг якуни (□) белги орқали белгиланган.

Дарсликда мураккаблик даражаси ҳар хил бўлган топшириқлар:

А — мажбурий даража, В — ўртача мураккаб даража, С — мураккаблиги юқори даражали топшириқлар берилган.

(*) юлдузча орқали белгиланган параграфлар ўқув дастурига киритилмаган илмий — тадқиқот ва тадбиқий йўналишдаги қўшимча материалларни ўз ичига олади.

Ҳар бир бўлим охирида бўлим бўйича ўқув материалларини ўзлаштириш сифатини текширишга доир тест топшириқлари берилган.

Дарслик охирида масалаларнинг жавоблари берилган.

Геометрия фанини ўзлаштиришда муваффақият тилаймиз!

10-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

Стереометрия аксиомалари

1. Фазода ҳар бир учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган ҳар хил: уч; 2) тўрт; 3) беш; 4)* n нуқталарнинг жуфти орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?
2. Фазодаги уч нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?
3. Фазода ҳар бир тўрттаси бир текисликда ётмайдиган ҳар хил: 1) уч; 2) беш; 3)* n нуқталар орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?
4. 1) Икки текислик; 2) уч текислик; 3)* тўрт текислик фазони энг кўп деганда нечта бўлакка бўлади?
5. Агар тўғри чизиқнинг текислик билан умумий икки нуқтаси бўлса, унда у тўғри чизиқ шу текисликда ётишини исботланг.
6. Тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган нуқта орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.
7. Кесишувчи икки тўғри чизиқ орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.
8. Кубнинг нечта: 1) учи; 2) ён қирраси; 3) томони бўлади?
9. Параллелепипеднинг нечта: 1) учи; 2) ён қирраси; 3) томони бўлади?
10. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n-бурчакли призманинг нечта учи бўлади?
11. Призманинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та учи бўлиши мумкинми?
12. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n-бурчакли призманинг нечта ён қирраси бўлади?
13. Призманинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та ён қирраси бўлиши мумкинми?
14. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n-бурчакли призманинг нечта томони бўлади?
15. Призманинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та томони бўлиши мумкинми?
16. 1) 12; 2) 15; 3) 18 та қирраси бор призма асосида қандай кўпбурчак ётади?
17. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n-бурчакли пирамиданинг нечта учи бўлади?
18. Пирамиданинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та учи бўлиши мумкинми?
19. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n-бурчакли пирамиданинг нечта ён қирраси бўлади?
20. Пирамиданинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та ён қирраси бўлиши мумкинми?
21. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n-бурчакли пирамиданинг нечта томони бўлади?

22. Пирамиданинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та томони бўлиши мумкинми?

23. 1) 8; 2) 10; 3) 12 қирраси бор пирамиданинг асосида қандай кўпбурчак ётади?

Фазодаги параллеллик

24. 1) Кубнинг; 2) параллелепипеднинг; 3) учбурчакли призманинг; 4) олтибурчакли призманинг параллел ён қирраларининг нечта жуфти бўлади?

25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедида қуйидаги тўғри чизиқлар параллел бўлишини исботланг: 1) AB ва D_1C_1; 2) AD_1 ва BC_1

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада қуйидаги тўғри чизиқлар параллель бўлишини исботланг: 1) AB ва E_1D_1; 2) AA_1 ва DD_1; 3) AC_1 ва FD_1.

27. 1) Кубнинг; 2) параллелепипеднинг; 3) учбурчакли пирамиданинг; олтибурчакли пирамиданинг айқаш ён қирраларининг нечта жуфти бўлади?

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубининг учлари орқали ўтувчи: 1) AB_1 ва BC_1; AA_1 ва BD_1; 3) AC_1 ва BD_1 тўғри чизиқлари қандай жойлашган?

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг учлари орқали ўтувчи: 1) AB_1 ва CD_1; 2) AA_1 ва BD_1; 3) AC_1 ва BF_1 тўғри чизиқлари қандай жойлашган?

30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедида: 1) AA_1 ва BD; 2) AC_1 ва BB_1 тўғри чизиқлари айқаш бўлишини исботланг.

31. $SABCDEF$ пирамидасида SA тўғри чизиғи билан: 1) BC; 2) CD тўғри чизиғи айқаш бўлишини исботланг.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасида: 1) AA_1 ва BC; 2) AC_1 ва BD; 3) AB ва B_1C_1 тўғри чизиқлари айқаш бўлишини исботланг.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасида: 1) AD; 2) AB_1 тўғри чизиқларига параллель ёқларини кўрсатинг.

34. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамидасида AB қирраси SDE ёғига параллель бўлишини исботланг.

35. 1) Кубнинг; 2) параллелепипеднинг; 3) учбурчакли призманинг; олтибурчакли призманинг параллель ёқларининг нечта жуфти бўлади?

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасида: 1) ABB_1 ва EDD_1; 2) ACC_1 ва FDD_1 текисликлари параллель бўлишини исботланг.

Фазодаги перпендикулярлик

37. 1) Мунтазам тетраэдрнинг; 2) кубнинг перпендикуляр қирраларининг нечта жуфти бўлади?

38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида: 1) AB_1 ва BC_1; 2) AC ва BD_1; 3) AB_1 ва CD_1 тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. Унинг: 1) AA_1 ва CD_1; 2) AA_1 ва BD_1; 3) AC ва BE_1 тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B нуқтасидан: 1) A_1D_1; 2) A_1C_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

41. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. Унинг B нуқтасидан: 1) AC_1; 2) A_1C_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B нуқтасидан: 1) ACC_1; 2) ACB_1 текислигигача бўлган масофани топинг.

43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. Унинг B учидан: 1) ACC_1; 2) CDD_1; 3) DEE_1; 4) DFF_1 текислигигача бўлган масофани топинг.

44. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. Унинг: 1) ABB_1 ва DEE_1; 2) ACC_1 ва FDD_1 текисликларининг орасидаги масофани топинг.

45. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамидасининг барча қирралари 1 га тенг. SB тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакни топинг.

46. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари эса 2 га тенг. SB тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакни топинг.

47. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. 1) ABB_1 ва BCC_1; 2) ABB_1 ва ACC_1; 3) ACC_1 ва CDD_1; 4) ACC_1 ва BEE_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.

48. Мунтазам тетраэдр ёқларининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг косинусини топинг.

49. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг қўшни бўлган ён ёқларининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг косинусини топинг.

Векторлар ва уларнинг хоссалари

50. Параллелепипеднинг қирралари ҳар хил нечта векторларни ташкил этади?

51. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. 1) $\overrightarrow{AC_1}$; 2) $\overrightarrow{AD_1}$ векторининг узунлигини топинг.

52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида: 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; 2) $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1}$ векторининг узунлигини топинг.

53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида $\overrightarrow{AC_1}$ векторини $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{AA_1}$ векторлари орқали ифодаланг.

54. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. $\overrightarrow{AD_1}$ векторини $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{AA_1}$ векторлари орқали ифодаланг.

55. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. $\overrightarrow{SA}$ вектори билан: 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BD}$ векторининг орасидаги бурчакни топинг.

56. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куби берилган. $\overrightarrow{AB_1}$ вектори билан: 1) $\overrightarrow{CC_1}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$; 3) $\overrightarrow{BC_1}$; 4) $\overrightarrow{BD_1}$ векторининг скаляр кўпайтмасини топинг.

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида жисмни C учидан C_1 учига $\vec{F} = \overrightarrow{BD_1}$ кучининг тасири билан ўрин алмаштирганда бажариладиган ишни топинг.

Координаталар

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куби тўғри бурчакли координаталар системасида жойлашган. Унинг D учи координаталар бошида, DC, DA, DD_1 қирралари мос равишда абсцисса, ордината, аппликата ўқларида ётади. Кубнинг барча учларининг координаталарини топинг.

59. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1-га тенг, A учи эса — тўғри бурчакли координата системасининг координаталар бошида, AB, AE, AA_1 кесмалари эса мос равишда абсцисса, ордината, аппликата ўқларида ётади. Призма учларининг координаталарини топинг.

60. $A(1;\ 2;\ 3)$ нуқтасидан: 1) Ox; 2) Oy; 3) Oz координаталар тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

61. Маркази $A(1; 2; 2)$ нуқтасида бўлган ва координаталар боши орқали ўтувчи сфера тенгламасини топинг.

62. $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 4 = 0$ тенгламаси фазодаги сферани аниқлашини исботланг. Унинг радиуси билан марказининг координаталарини топинг.

63. $a_1(1; 2; 3)$ және $a_2(3; -1; 2)$ векторларининг скаляр кўпайтмасини топинг.

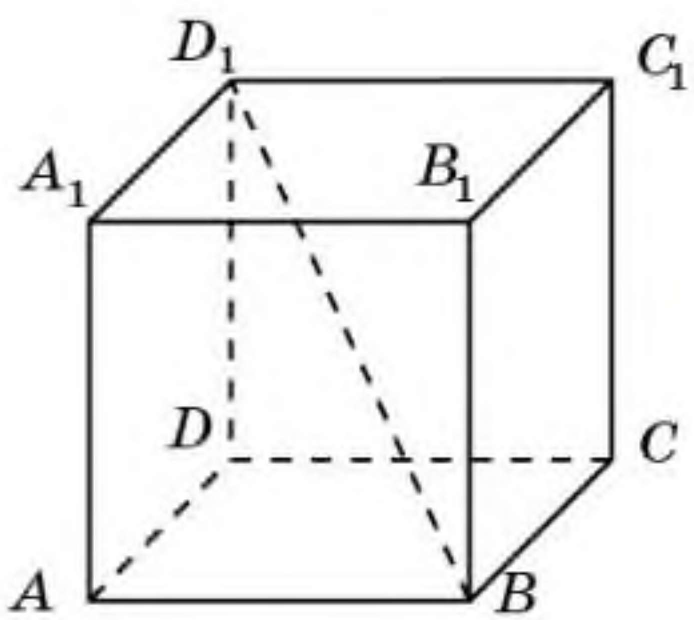
64. $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ нуқталари орқали ўтувчи текисликнинг тенгламасини топинг.

I боб КЎПЁҚЛАР

1-§. Кўпёқ таърифи. Призма ва параллелепипед. Призманинг ёйилмаси, ён ва тўла сиртининг юзалари

Кўпёқ деб унинг сирти чекли сондаги кўпбурчакларнинг бирлашмасидан иборат бўлган жисмга айтилади. Мана шу кўпбурчаклар кўпёқнинг *ёқлари, ёқларининг* умумий *томонлари* қирралари, қирраларининг умумий нуқталари эса кўпёқнинг учлари деб аталишини эсга туширамиз.

10-синф геометрия курсида қавариқ кўпёқлар (куб, параллелепипед, призма, пирамида ва ҳ.к.) кўриб чиқилади.



1.1-расм

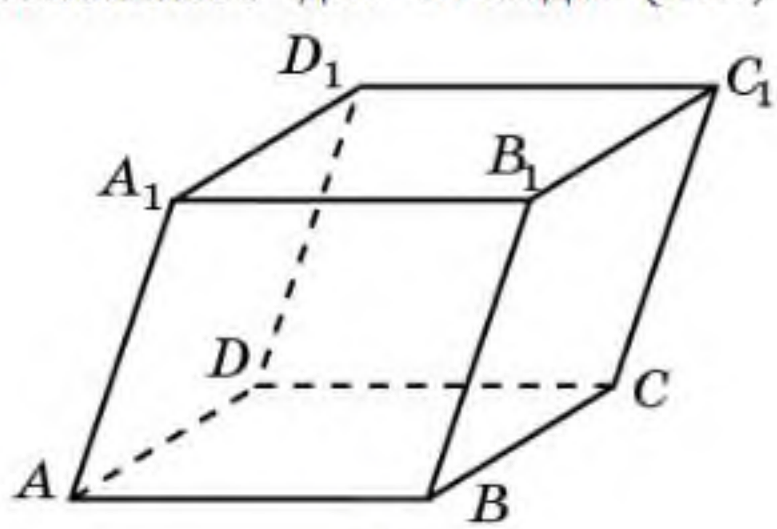
Куб деб олтита ёғи ҳам квадрат бўлган кўпёққа айтилади (1.1-расм). Одатта куб унинг учларига қўйилган ҳарфлар билан белгиланади, масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Қирраси 1 га тенг куб *бирлик куб* деб аталади.

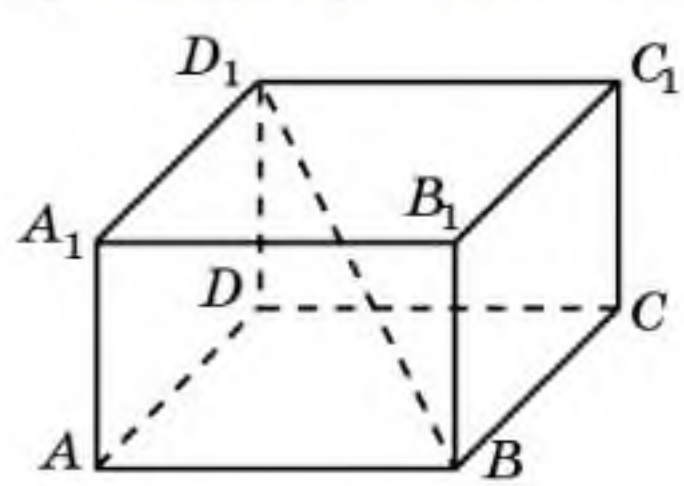
Кубнинг бир ёғида ётмайдиган икки учини туташтирувчи кесма *кубнинг диагонали* деб аталади. 1.1-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BD_1 диагонали тасвирланган.

Параллелепипед деб қарама-қарши ёқлари жуфт-жуфти билан ўзаро параллел бўладиган кўпёқа (олтиёқа) айтилади (1.2, а-расм). Параллелепипеднинг олтита ёғи ҳам параллелограмлар бўлади. Параллелепипед унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади, масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Агар параллелепипеднинг ён қирралари асос текислигига перпендикуляр бўлса, унда у *тўғри параллелепипед* деб аталади. Асослари тўғри тўртбурчак бўладиган тўғри параллелепипедни *тўғри бурчакли параллелепипед* деб атайди (1.2, б-расм). Агар параллелепипеднинг



а)



б)

1.2-расм

ён қирралари асос текислигига перпендикуляр бўлмаса, унда у *оғма параллелепипед* деб аталади (1.2, а-расм).

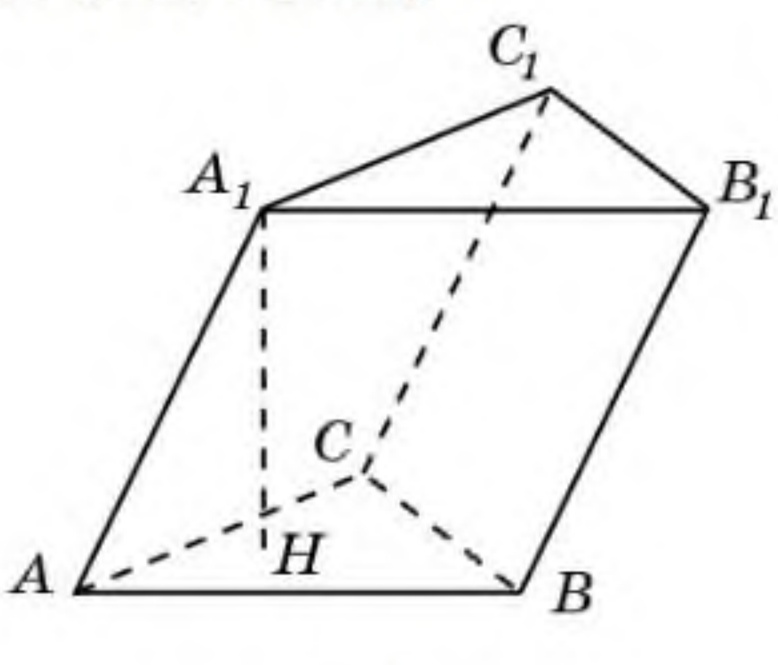
Параллелепипеднинг бир ёғида ётмайдиган икки учини туташтирувчи кесма *параллелепипеднинг диагонали* деб аталади. 1.2, б-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипеднинг BD_1 диагонали тасвирланган.

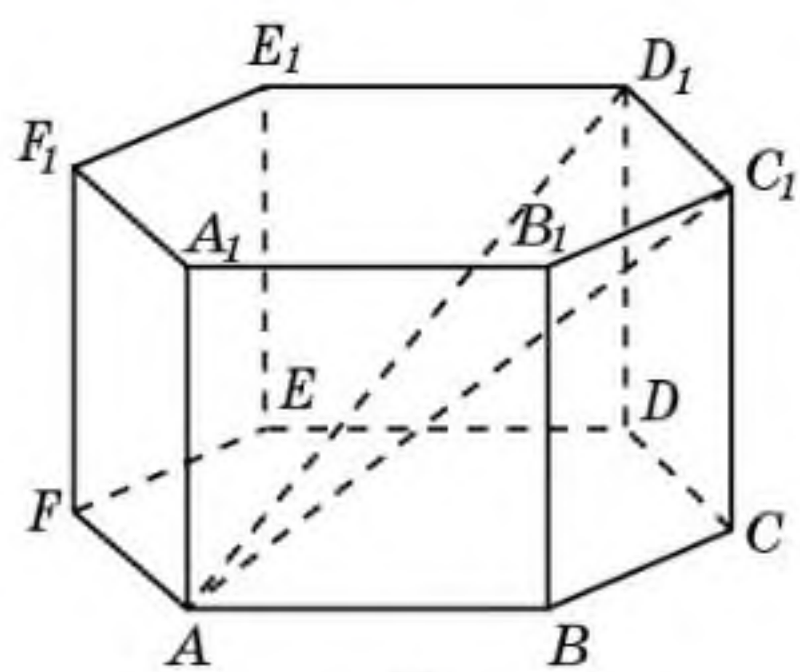
Призма деб икки ёғи параллел текисликларда ётувчи ўзаро тенг кўпбурчаклар, ёқлари эса параллелограммлар бўладиган кўпёқа айтилади. Кўпбурчаклар призманинг *асослари*, параллелограмлар эса призманинг *ён ёқлари* деб аталади. Ён ёқларидан тузилган сирт *призманинг ён сирти* деб аталади. Призманинг ён ёқларининг умумий қирралари унинг *ён қирралари* деб аталади.

Призмалар асосларида ётувчи кўпбурчакларга (учбурчаклар, тўртбурчаклар, бешбурчаклар ва ҳ.к.) боғлиқ мос равишда учбурчакли, тўртбурчакли, бешбурчакли ва ҳ.к. бўлиб бўлинади.

Агар призманинг асослари n бурчаклар бўлса, унда у *n бурчакли призма* деб аталади.

Призма унинг учлари билан белгиланади, масалан: $ABCA_1B_1C_1$ — учбурчакли призма (1.3, а-расм), $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ — олтибурчакли призма (1.3, б-расм).





1.3-расм

Призманинг таърифларидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1) Ён қирралари тенг;

2) Асослари тенг ва параллел бўлади.

Бу хоссаларни мустақил исботланг.

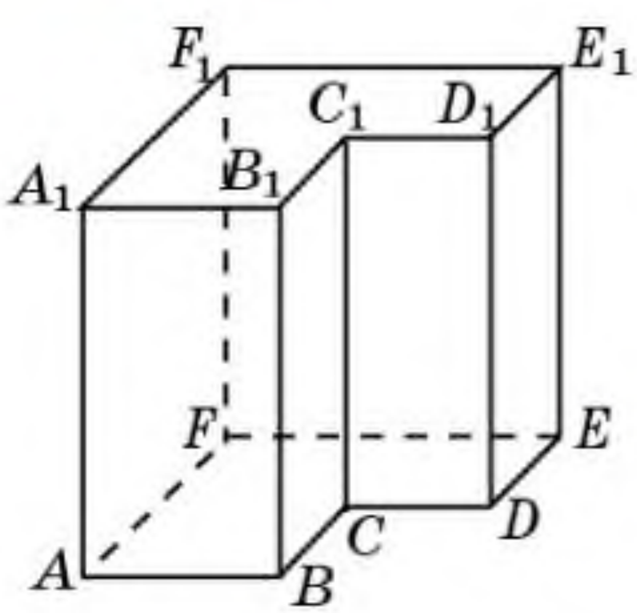
Ён қирралари асосларига перпендикуляр бўладиган призма *тўғри призма* деб аталади. Тўғри бўлмаган призма *оғма призма* деб аталади. 1.3, а-расмда учбурчакли оғма призма тасвирланган. 1.3, б-расмда тўғри олтибурчакли призма тасвирланган.

Қандай ўйлайсизлар, параллелепипед тўртбурчакли призма бўла оладими?

Асослари мунтазам кўпбурчаклар бўладиган тўғри призма *мунтазам* призма деб аталади. 1.3, б-расмда мунтазам олтибурчакли призма тасвирланган.

Призманинг асос текисликларининг орасидаги масофани *призманинг баландлиги* деб аталади, яъни призманинг бир асос нуқтасидан иккинчи асос текислигига ўтказилган перпендикуляр унинг баландлиги бўлиб ҳисобланади. 1.3, а-расмда $ABCA_1B_1C_1$ призмасининг A_1H баландлиги тасвирланган.

Тўғри призманинг баландлиги унинг ён қиррасининг узунлигига тенг бўлишини исботланг.



1.4-расм

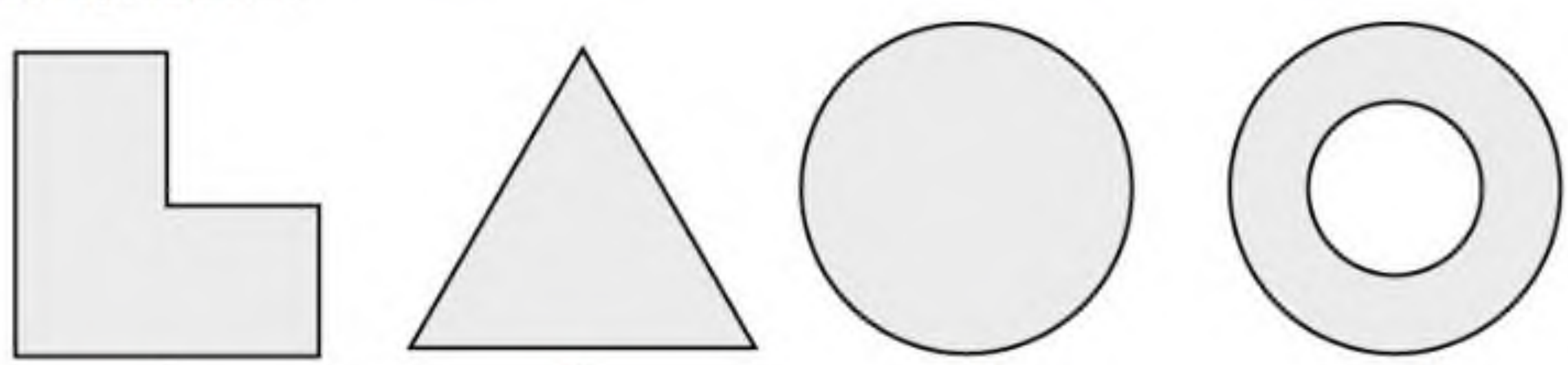
Призманинг битта ёғига тегишли бўлмаган икки учини туташтирувч кесма *призманинг диагонали* деб аталади. 1.3, б-расмда $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмасининг AC_1 ва AD_1 диагоналлари тасвирланган.

Агар кўпёқнинг ўзи унинг сиртидаги ҳар бир кўпбурчак текислигининг бир томонида ётса, бундай кўпёқ *қавариқ кўпёқ* деб аталади.

1.3-расмда қавариқ кўпёқ тасвирланган. 1.4-расмда қавариқ бўлмаган олтибурчакли призма тасвирланган.

“Қавариқлик” тушунча ихтиёрий фигура учун аниқланади. Агар фигурада унинг ихтиёрий икки нуқтаси билан бирга уларни туташтирувчи кесма ётадиган бўлса, унда у *қавариқ фигура* деб аталади.

1.5-расмда қавариқ (б, в) ва қавариқ бўлмаган (а, г) ясси фигуралар тасвирланган.



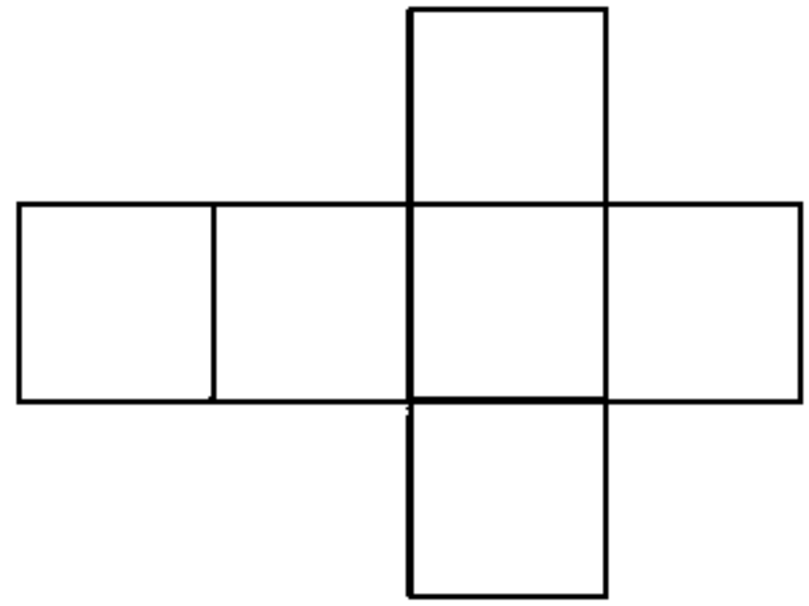
а) б) в) г)

1.5-расм

Икки қавариқ фигуранинг кесишмаси (умумий бўлаги) қавариқ фигура бўлишини исботланг.

Агар кўпёқнинг сиртини қандайдир қирралари бўйлаб кесиб, уни текисликка, яъни сиртни ташкил этувчи барча кўпбурчаклар берилган текисликда ётадигандай қилиб ёйилса, унда *кўпёқнинг ёйилмаси* деб аталадиган фигура пайдо бўлади.

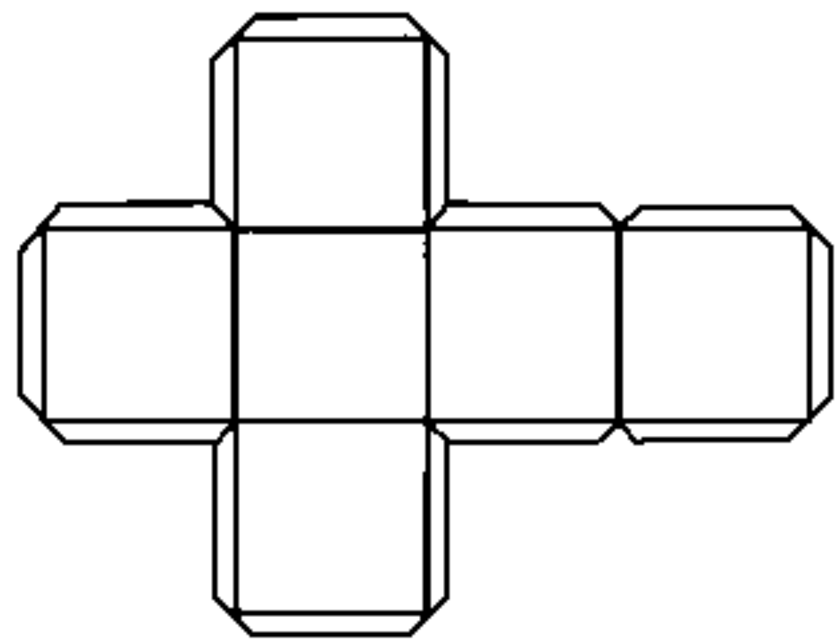
Масалан, 1.6-расмда кубнинг ёйилмаси тасвирланган.



1.6-расм

Кўпёқ моделларини қаттиқ қоғоздан, картон қоғоздан ёки бошқа материалдан ясаш учун аввал унинг ёйилмасини тайёрлаб, мос равишда қирраларини елимлаш керак.

Қулай бўлиши учун кўпёқ ёйилмасини қопқоқчалари билан бирга ясаган яхши ва улар орқали елимлаб ёпиштирилади. 1.7-расмда кубнинг ёйилмаси қопқоқчалари билан кўрсатилган.



1.7-расм

Кўпёқларни унинг ёйилмалари орқали ясаш хақида тўлароқ танишиш учун қуйидаги китобни тавсия қиламиз: Венинджер М. Модели многогранников. — М.: Мир, 2004.

Таъриф бўйича, *кўпёқ сиртининг юзи* мана шу сиртнинг ён ёқлари юзларининг йиғиндиси бўлиб ҳисобланади.

Кўпёқ сиртининг юзи унинг ёйилмасининг юзига тенг бўлиши аниқ.

Призманинг ён сиртининг юзи деб мана шу призманинг барча ён ёқларидан ташкил топган сиртга айтилади. Шу сабабли *призманинг ён сиртининг юзи* унинг барча ён ёқлари юзларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Теорема. ***Тўғри призманинг ён сирти юзи асосининг периметри билан баландлигининг кўпайтмасига тенг бўлади.***

Исботи. Таъриф бўйича $S_{\text{пр.ён с.}} = S_1 + S_2 + ... + S_n$, бу ерда S_1, S_2, ..., S_n — ён ёқларининг юзлари. Тўғри призманинг ён ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат, унинг асослари призма асосининг томонлари, ён қирраси эса призманинг h баландликка тенг ва $S_1 = a_1h$, $S_2 = a_2h$, ..., $S_n = a_nh$, бу ерда a_1, a_2, ..., a_n — асос томонларининг узунликлари. Бундан призманинг ён сиртининг юзи қуйидаги формула билан ҳисобланиши келиб чиқади:

$$S_{\text{пр.ён с.}} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = (a_1 + a_2 + ... + a_n)h = Ph,$$

бу ерда P — призма асосининг периметри. ◪

Призманинг тўла сирти юзи унинг ён сиртининг юзи билан иккиланган асос юзининг йиғиндисига тенг бўлади, яъни қуйидаги формула билан аниқланади:

$$S_{\text{призма т.с.}} = S_{\text{пр.ён.с}} + 2S_{\text{асос}}.$$

Қирраси a га тенг бўладиган кубнинг тўла сиртининг юзини топиш формуласини ёзинг.

Бир учидан чиқувчи қирралари a, b, c бўладиган тўғри бурчакли параллелепипеднинг тўла сиртининг юзини топиш формуласини ёзинг.

Кўпёқларни моделлаш учун http://geogebra.org сайтидан юклаб олишга мумкин бўладиган бепул тарқатмани GeoGebra компьютерлик программасини қўлланишга бўлади.

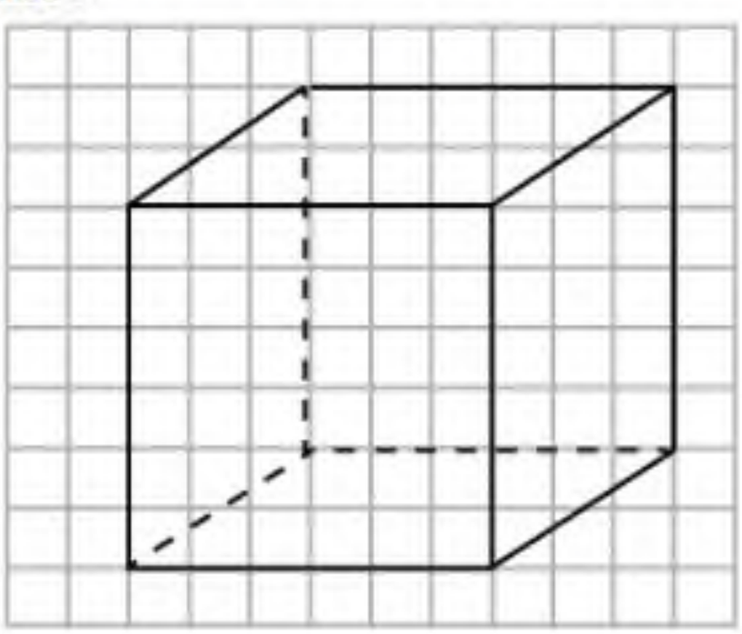
Саволлар

1. Кўпёқ деганимиз нима?
2. Қандай кўпёқ куб деб аталади?
3. Кубнинг диагонали деганимиз нима?
4. Қандай кўпёқ параллелепипед деб аталади?
5. Параллелепипеднинг диагонали деганимиз нима?
6. Қандай кўпёқ призма деб аталади?
7. Қандай призма тўғри призма деб аталади?
8. Призманинг баландлиги деганимиз нима?
9. Призманинг диагонали деганимиз нима?
10. Қандай кўпёқ қавариқ кўпёқ деб аталади?
11. Кўпёқнинг ёйилмаси деганимиз нима?
12. Кўпёқ сиртининг юзаси деганимиз нима?
13. Призманинг ён ва тўла сиртларининг юзалари қандай ҳисобланади?

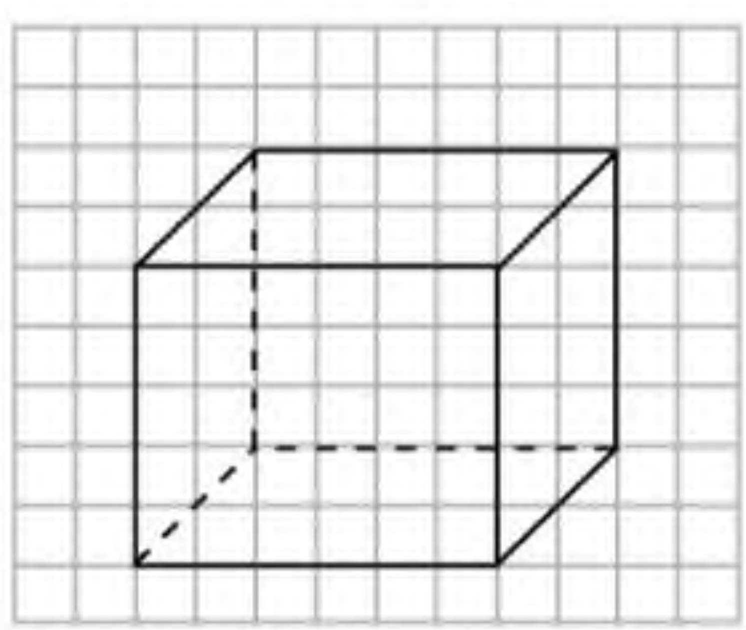
Машқлар

A

1.1. Катак қоғозга 1.8-расмдагига ўхшаш кубни ва параллелепипедни чизинг.



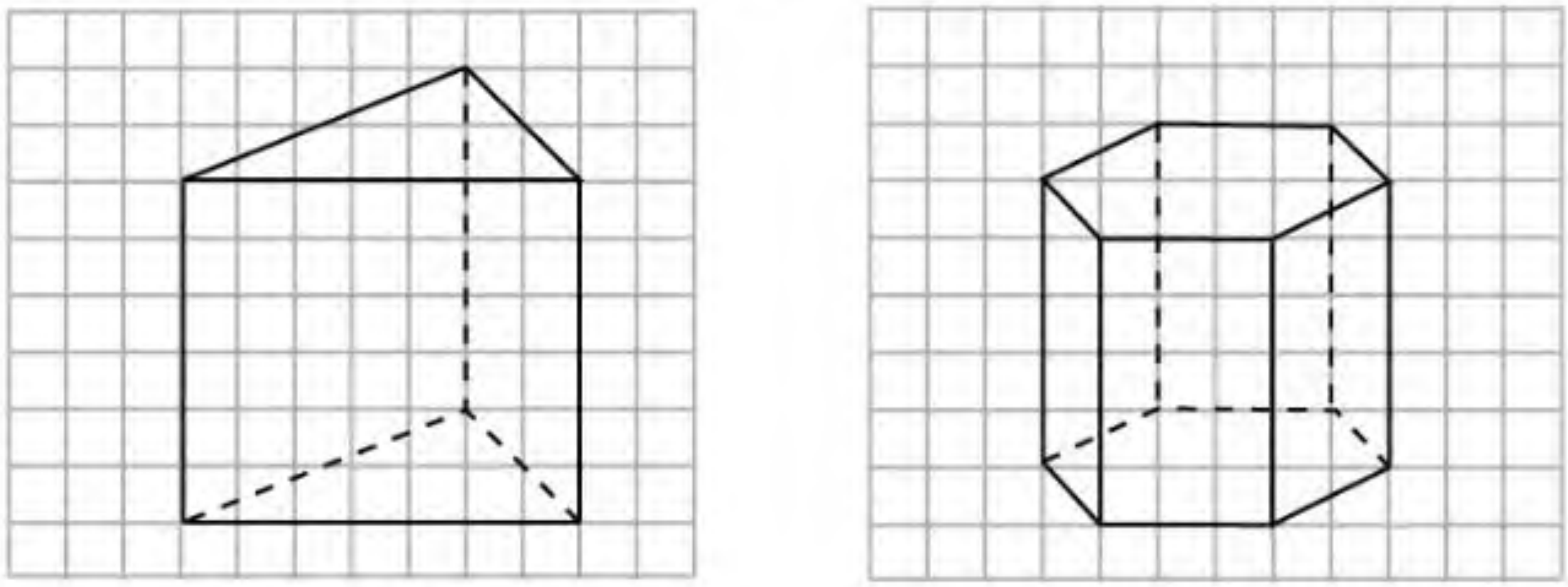
а)



б)

1.8-расм

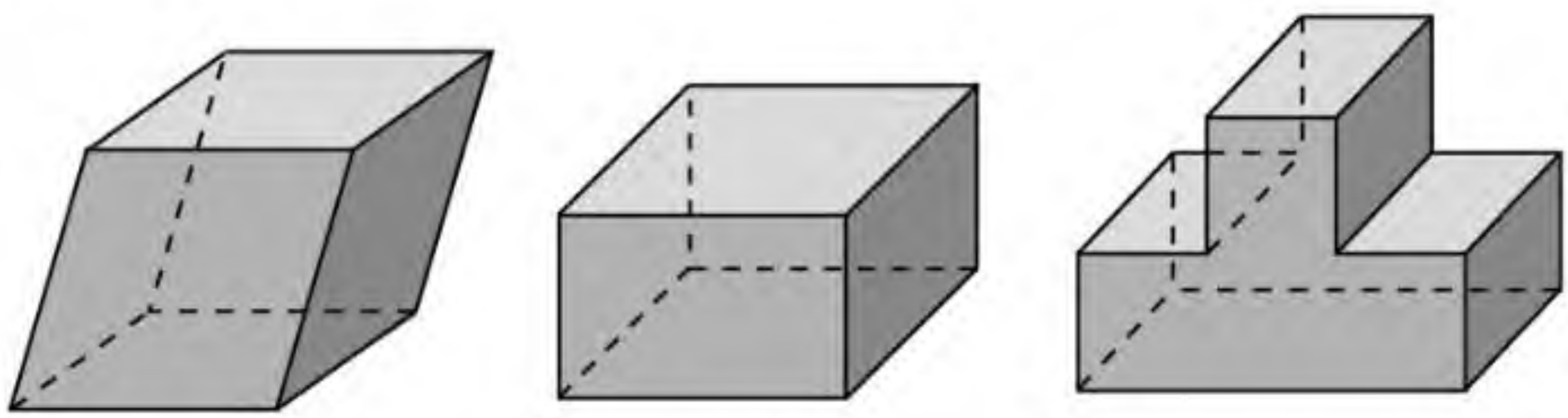
1.2. Катак қоғозга 1.9-расмдагига ўхшаш призмани чизинг.



а) б)

1.9-расм

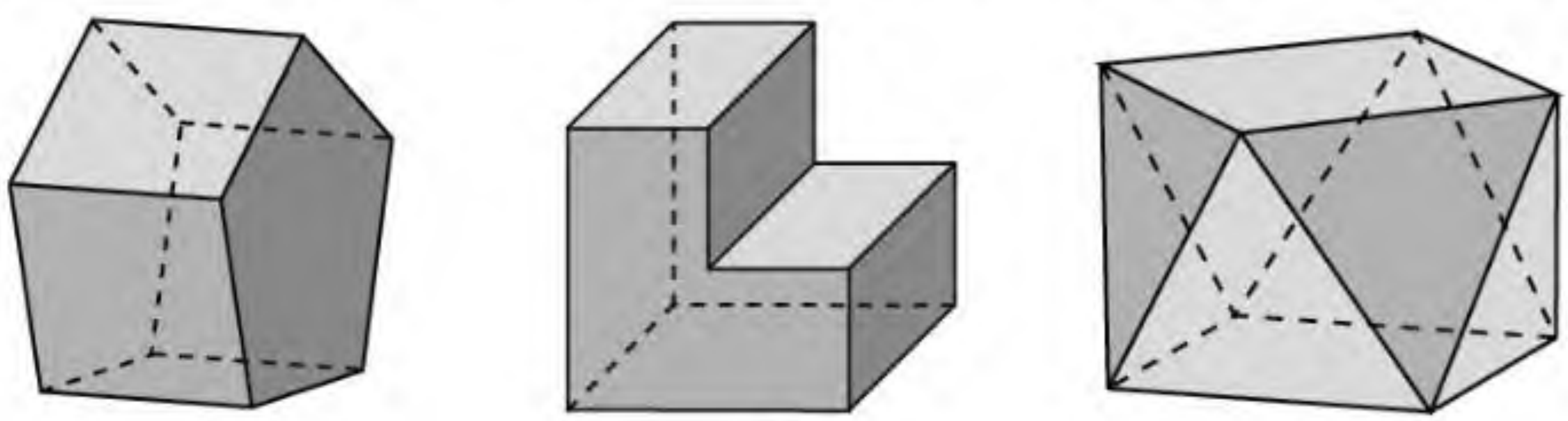
1.3. 1.10-расмда тасвирланган фигураларнинг қайси бири параллелепипед бўлади?



а) б) в)

1.10-расм

1.4. 1.11-расмда тасвирланган фигураларнинг қайси бири призма бўлади?



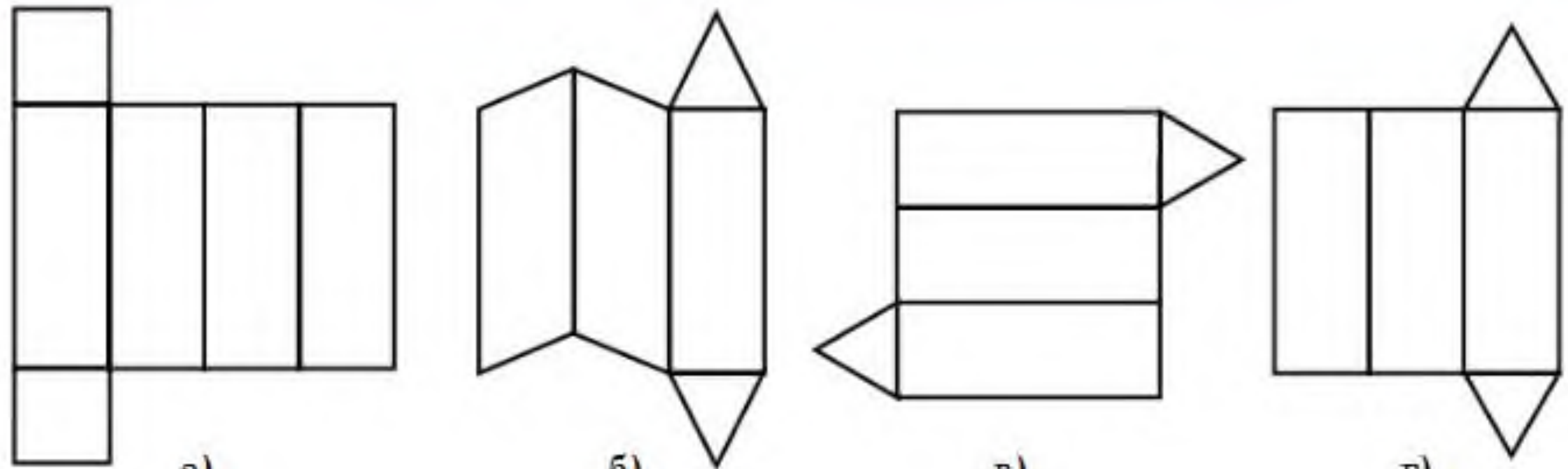
а) б) в)

1.11-расм

1.5. 1.12-расмда тасвирланган фигураларнинг қайси бири призманинг ёйилмаси бўлади? Мана шу призманинг турини аниқланг.

1.6. Қирраси 1 см га тенг бўладиган кубнинг диагоналини топинг.

1.7. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи қирралари 2 см, 3 см ва 4 см га тенг. Параллелепипеднинг диагоналини топинг.



1.12-расм

1.8. Призманинг ён қирраси 2 см га тенг ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясайди. Призманинг баландлигини топинг.

1.9. Агар кубнинг барча қирраларини 3 марта орттирса, унда унинг ён сиртининг юзи неча марта ортади?

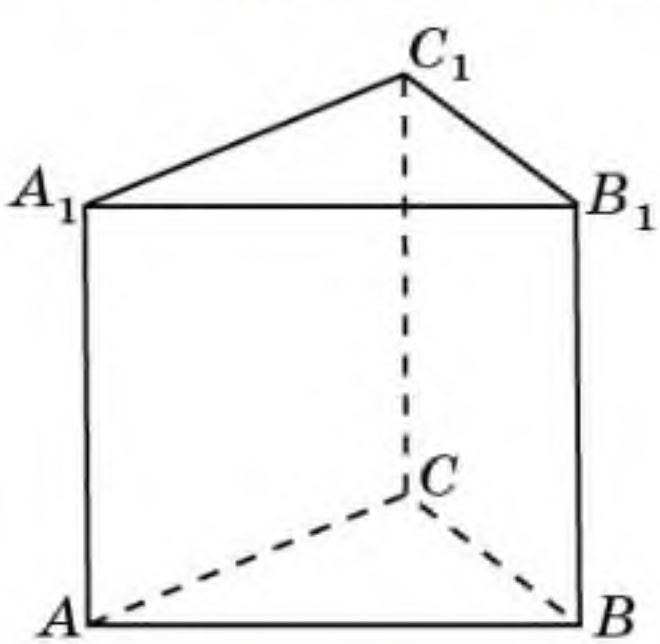
1.10. Агар тўғри бурчакли параллелепипеднинг барча қирраларини 2 марта камайтирса, унда унинг ён сиртининг юзи неча марта камаяди?

1.11. Агар призманинг барча қирраларини 2 марта орттирса, унда унинг ён сиртининг юзи неча марта ортади?

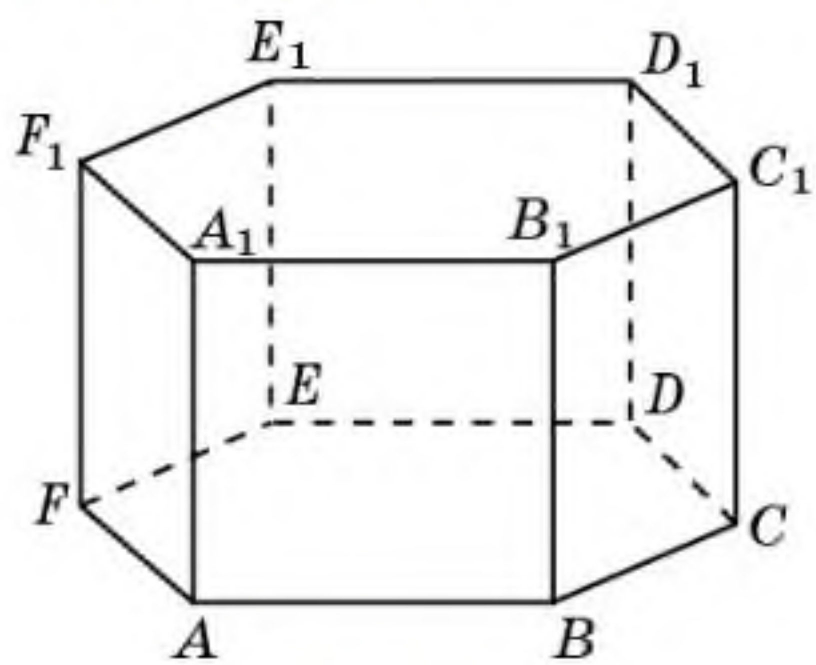
1.12. Бир учидан тарқаган қирралари мос равишда 5 см, 4 см, 3 см бўладиган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ён сиртининг юзини топинг.

1.13. Барча қирралари 1 см га тенг бўладиган мунтазам учбурчакли призманинг ён сиртининг юзини топинг (1.13-расм).

1.14. Барча қирралари 1 см га тенг бўладиган мунтазам олтибурчакли призманинг ён сиртининг юзини топинг (1.14-расм).



1.13-расм



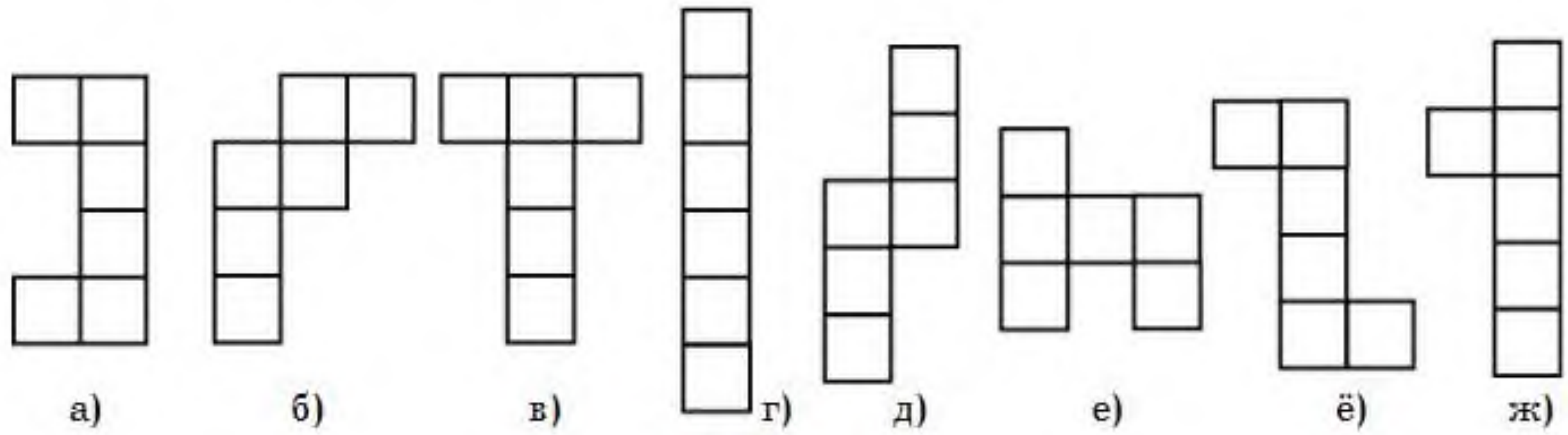
1.14-расм

В

1.15. 1.15-расмда тасвирланган фигураларнинг қайсиси кубнинг ёйилмаси бўлади?

1.16. Кубнинг диагонали 1 см га тенг. Кубнинг қиррасини топинг.

1.17. Мунтазам олтибурчакли призманинг ёйилмасини чизинг.



а) б) в) г) д) е) ё) ж)

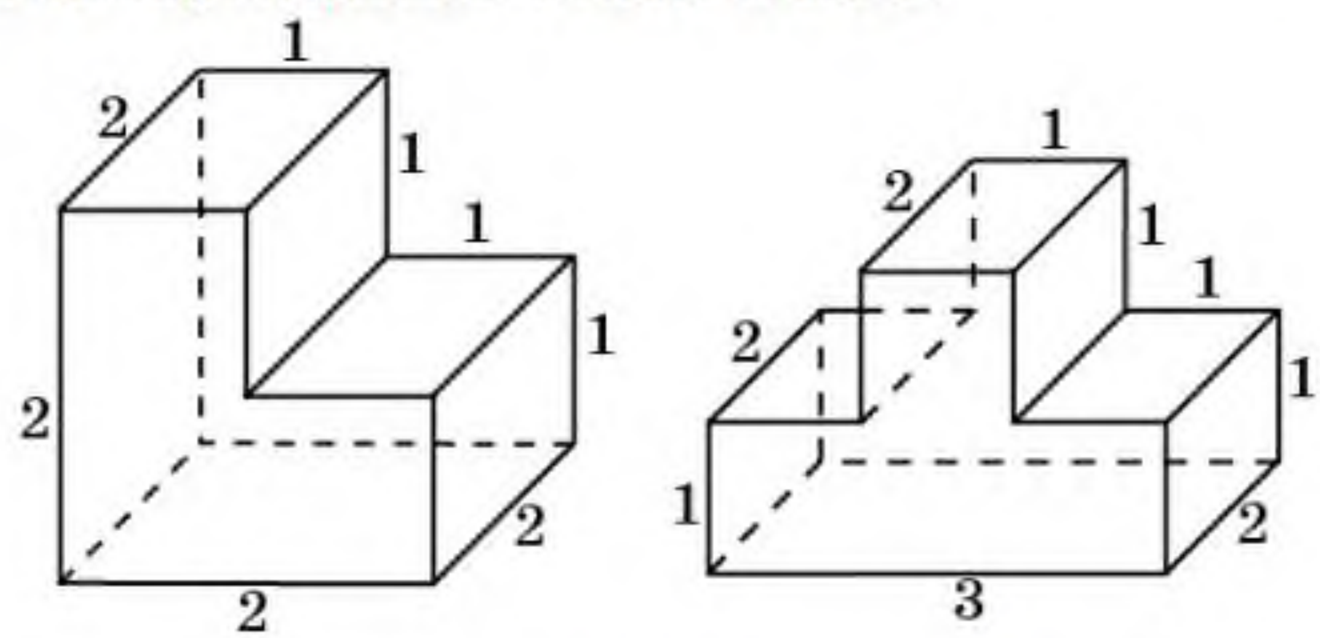
1.15-расм

1.18. Мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 см га тенг. Призманинг диагоналини топинг.

1.19. Мунтазам олтибурчакли призманинг асосининг томони 1 см га, унинг катта диагонали эса 3 см га тенг. Призманинг баландлигини топинг.

1.20. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан тарқаган икки қирраси 2 см га тенг. Параллелепипед ён сиртининг юзи 40 см^2 га тенг бўлиши учун ушбу учидан тарқаган учинчи қирраси қандай бўлиши керак?

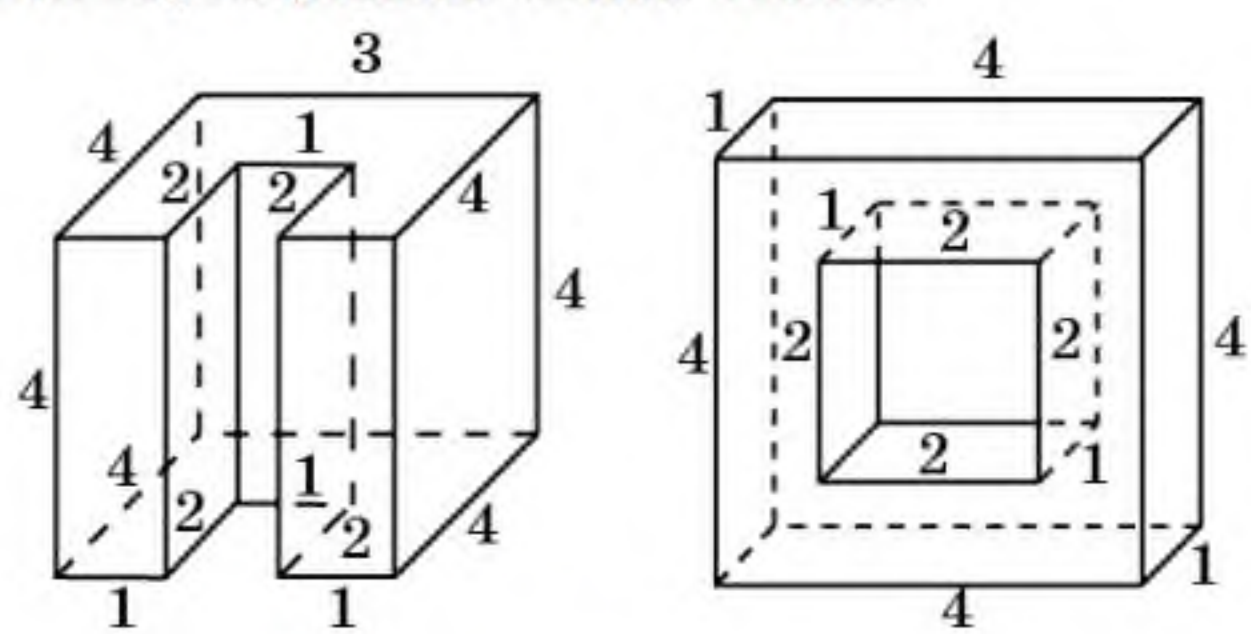
1.21. 1.16-расмдаги тўғри бурчакли параллелепипедлардан тузилган фигура ён сиртларининг юзини топинг.



а) б)

1.16-расм

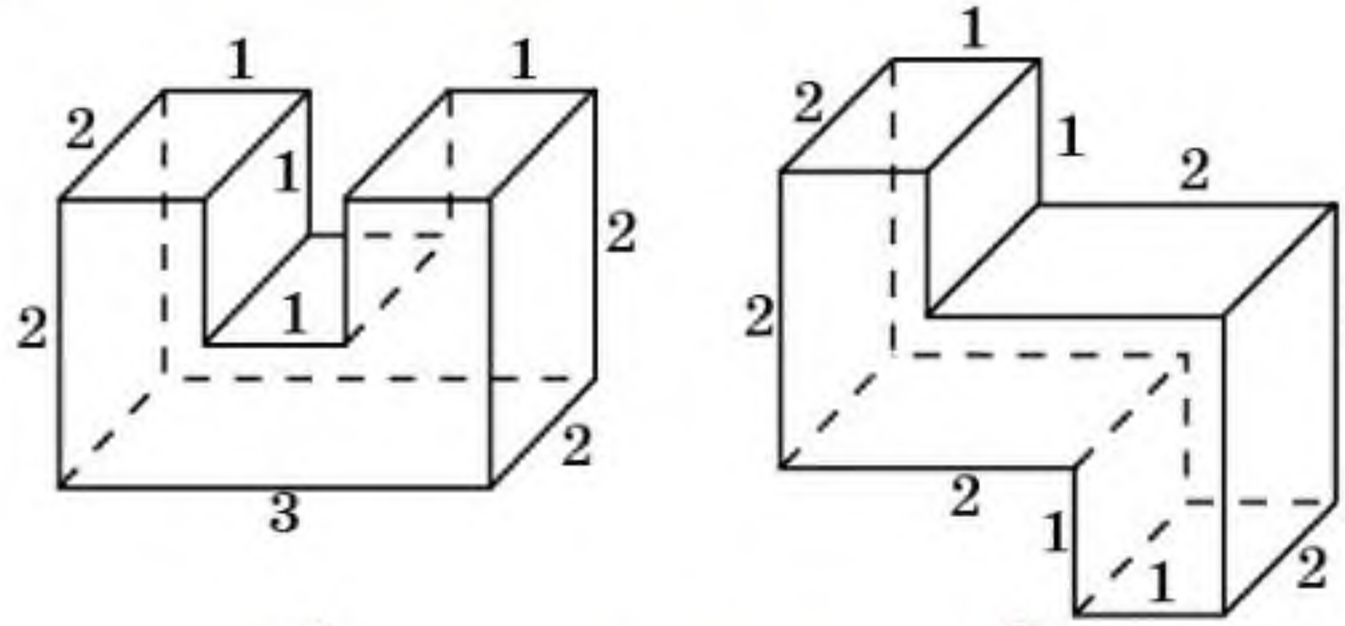
1.22. 1.17-расмдаги тўғри бурчакли параллелепипедлардан тузилган фигура ён сиртларининг юзини топинг.



а) б)

1.17-расм

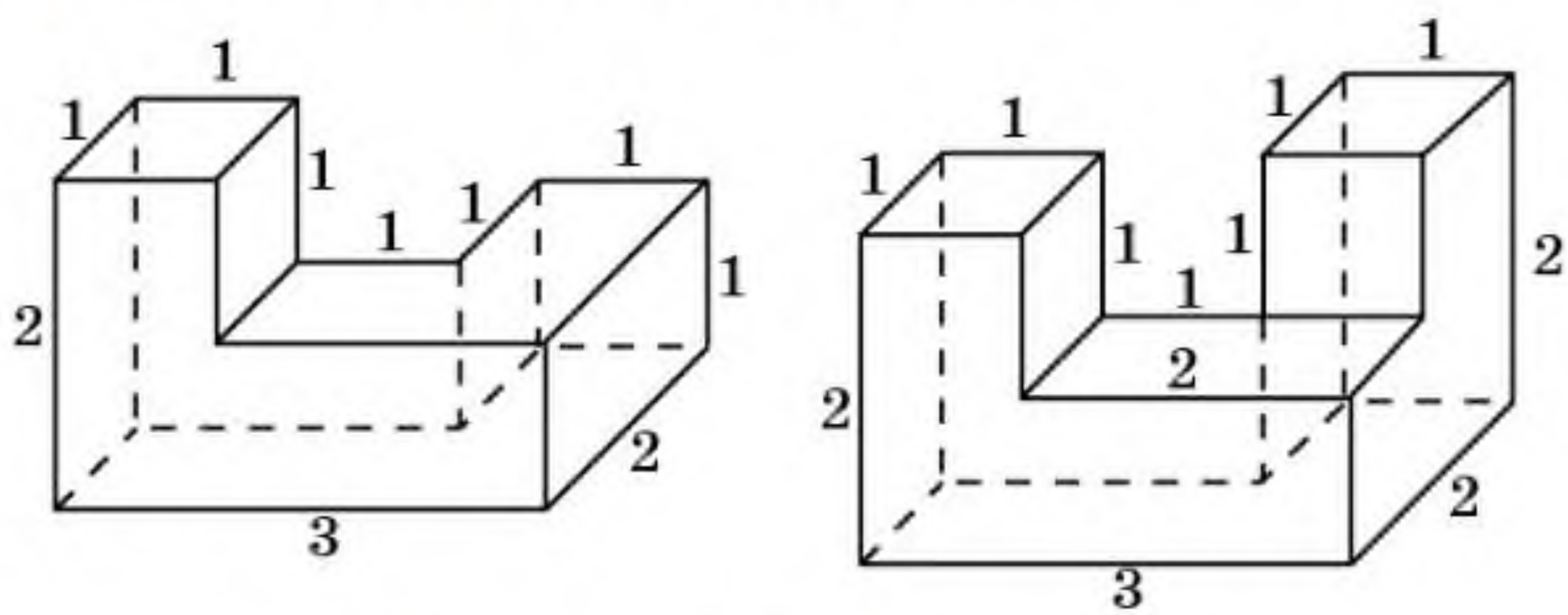
1.23. 1.18-расмдаги тўғри бурчакли параллелепипедлардан тузилган фигура ён сиртларининг юзини топинг.



а) б)

1.18-расм

1.24. 1.19-расмдаги тўғри бурчакли параллелепипедлардан тузилган фигура ён сиртларининг юзини топинг.

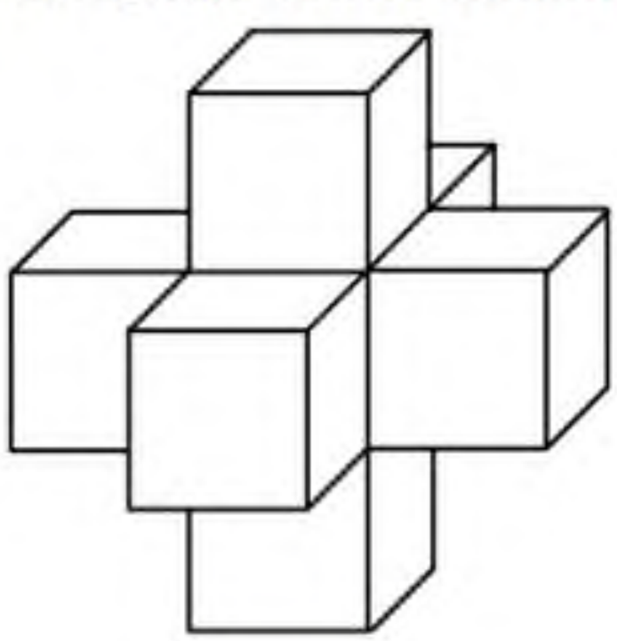


а) б)

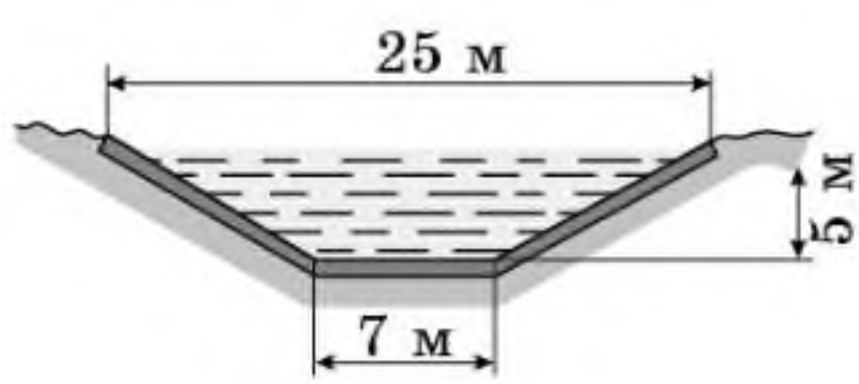
1.19-расм

1.25. 1.20-расмдаги фазовий жисмни ташкил қилувчи кубларнинг қирраларини 1 см га тенг деб олиб, жисм сиртининг юзини топинг.

1.26. 1.21-расмда сув йўли каналининг кўндаланг кесими тасвирланган. Каналнинг пастки ва ён ёқлари бетонланган. Каналнинг ҳар бир километрида бетон билан ёпилган юзани топинг.



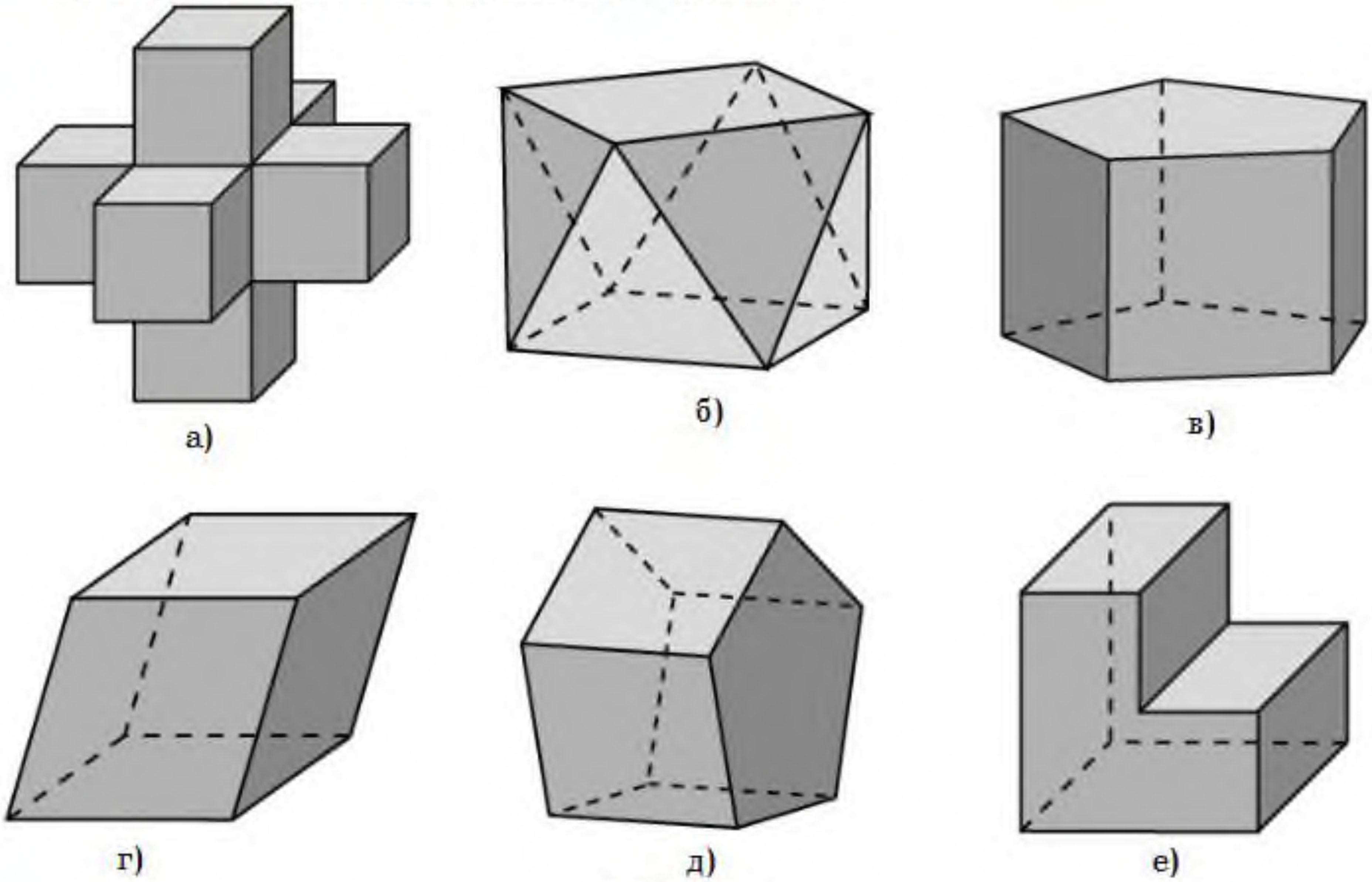
1.20-расм



1.21-расм

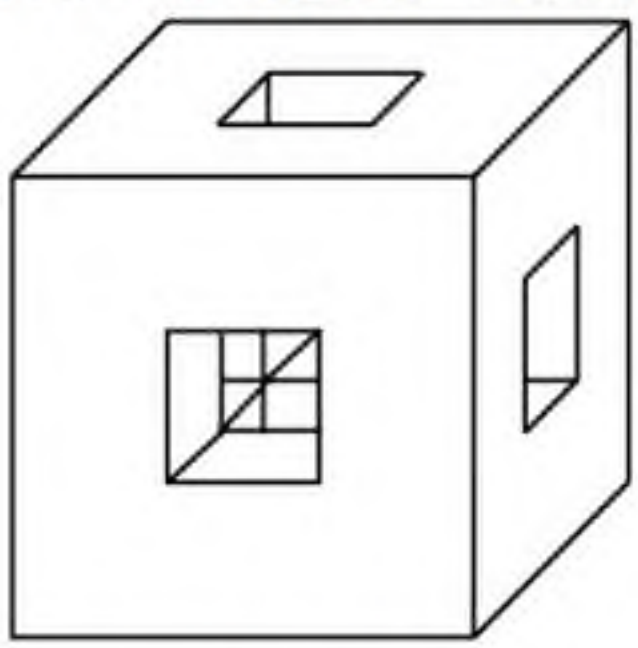
С

1.27. 1.22-расмда тасвирланган фигуралардан қайси бири қаварик ва қаварик бўлмаган кўпёқлар бўлади?

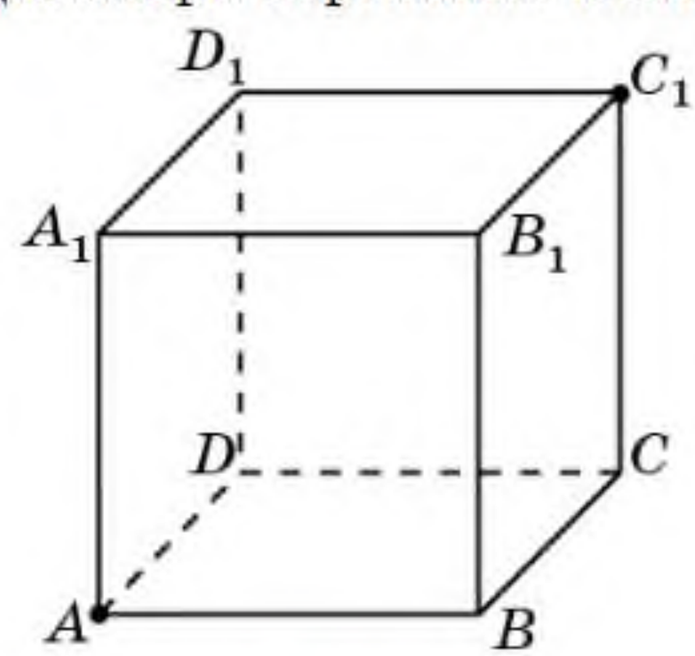


1.22-расм

1.28. Қирраси 6 см га тенг бўладиган кубнинг ҳар икки ёғидан квадрат шаклидаги тешиклар ясалди (1.23-расм). Квадратнинг томони 2 см га тенг. Кубнинг қолган қисмлари сиртининг юзини топинг.



1.23-расм



1.24-расм

1.29. Бирлик кубнинг бир учидан унга қарама-қарши ётган учигача бўлган унинг сиртидаги энг қисқа масофани топинг (1.24-расм).

1.30. Қаварик бўлмаган кўпбурчак қаварик кўпёқнинг бир ёғи бўла оладими?

1.31. Қаварик фигуралар бириктирилса қаварик фигура пайдо бўладими?

1.32. Барча ёқлари қаварик кўпбурчак бўладиган қаварик бўлмаган кўпёққа мисол келтиринг.

1.33. "Пирамида" тушунчасини аниқлаб кўринг. Унинг сирти қандай кўпбурчаклардан ташкил топган?

2-§. Пирамида ва кесик пирамида. Пирамиданинг, кесик пирамиданинг ёйилмаси, ён сирти ва тўла сиртининг юзлари

Пирамида деб шундай кўпёққа айтиладики, унинг бир ёғи ихтиёрий кўпбурчак, қолган n та ёғи эса учлари умумий бўлган учбурчаклардан иборат бўлади.

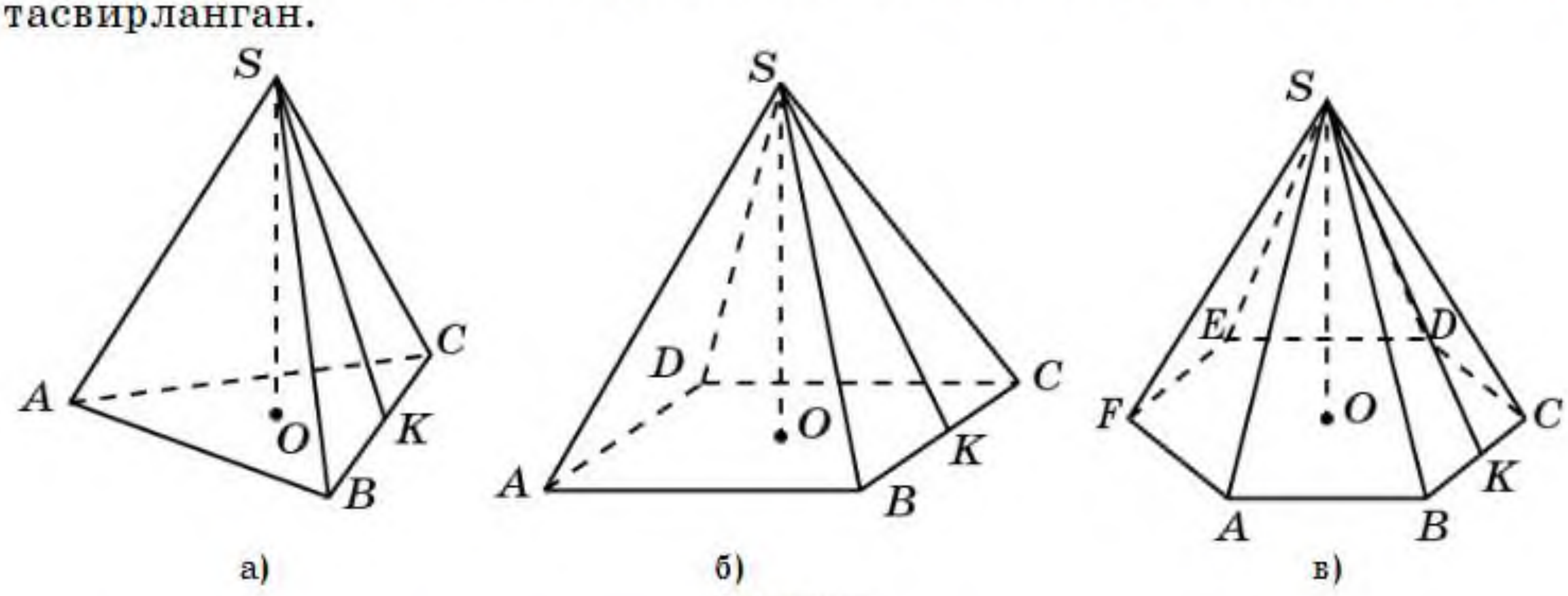
Кўпбурчак пирамиданинг *асоси*, учбурчаклар эса пирамиданинг *ён ёқлари* деб аталади.

Ён ёқларининг умумий учи пирамиданинг *учи*, учидан тарқайдиган қирралари эса пирамиданинг *ён қирралари* деб аталади. Пирамида ён ёғининг учидан ўтказилган баландлиги пирамиданинг *апофемаси* деб аталади.

Пирамидалар асосидаги кўпбурчакларга (учбурчаклар, тўртбурчаклар, бешбурчаклар ва ҳ.к.) боғлиқ ҳолда мос равишда учбурчакли, тўртбурчакли, бешбурчакли ва ҳ.к. бўлиб бўлинади.

Агар пирамиданинг асоси n-бурчакли бўлса, унда у *n-бурчакли пирамида* деб аталади.

2.1-расмда учбурчакли, тўртбурчакли ва олтибурчакли пирамидалар тасвирланган.



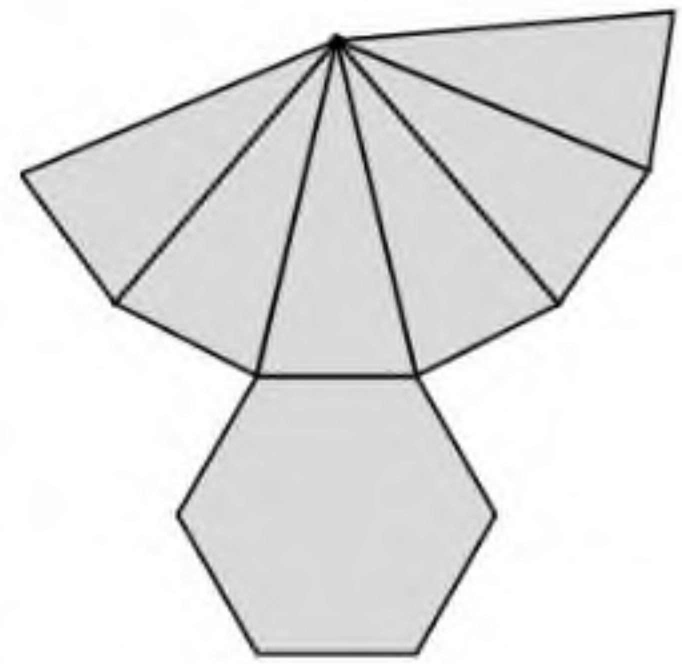
2.1-расм

Пирамида учлари билан белгиланади, масалан: $SABC$ учбурчакли пирамида (2.1, а-расм), $SABCD$ тўртбурчакли пирамида (2.1, б-расм), $SABCDEF$ олтибурчакли пирамида (2.1, в-расм). Пирамидани белгилаганда унинг умумий учи биринчи ёзилади.

Асоси мунтазам кўпбурчак бўлган ва барча ён қирралари ўзаро тенг бўлган пирамида *мунтазам пирамида* деп аталади.

Мунтазам пирамиданинг учидан туширилган ён ёғининг баландлиги пирамиданинг *апофемаси* деб аталади.

Қандай ўйлайсиз, тетраэдр учбурчакли пирамида бўла оладими?



2.2-расм

Пирамиданинг учидан унинг асос текислигига туширилган перпендикуляр *пирамиданинг баландлиги* деб аталади. 2.1-расмда пирамиданинг SO баландлиги ва SK апофемаси тасвирланган.

2.2-расмда мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ёйилмаси тасвирланган.

Пирамиданинг ён сирти деб шу пирамиданинг барча ён ёқларидан ташкил топган сиртни айтади. Шу сабабли *пирамиданинг ён сиртининг юзи* деб, унинг ҳамма ён ёқлари юзларининг йиғиндисига айтилади.

Теорема. ***Мунтазам пирамида ён сиртининг юзи унинг асоси периметрининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига тенг:***

$$S_{ён} = \frac{1}{2}Pl,$$

Бу ерда l — пирамиданинг апофемаси, P — асосининг периметри.

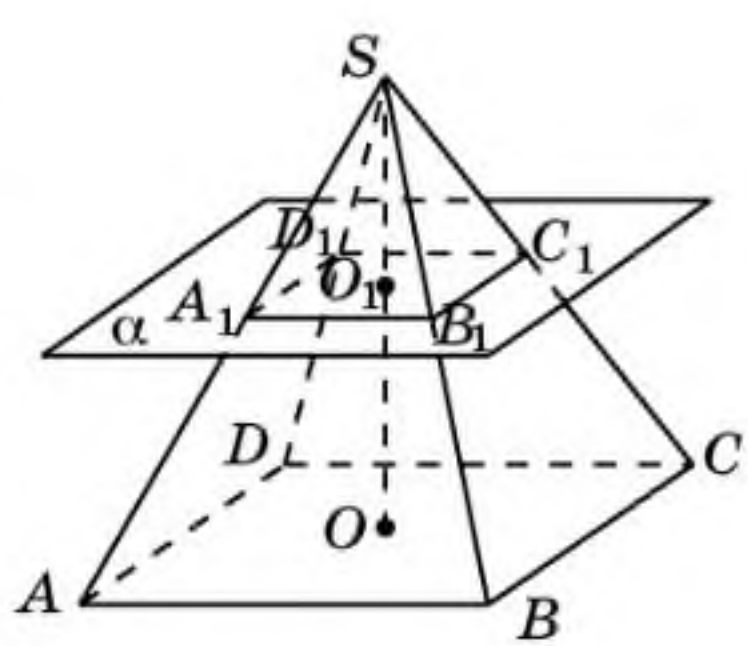
Ушбу теоремани мустақил исботланг.

Пирамиданинг тўла сиртининг юзи унинг ён сирти билан асосининг юзларининг йиғиндисига тенг бўлади, яъни қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S_{пирамида} = S_{ён.с.} + S_{асос}.$$

Пирамиданинг асосига параллел ва ён қирраларини кесиб ўтувчи текисликни кўриб чиқамиз. Шу текислик билан асос текислигининг орасидаги чегараланган пирамиданинг қисми *кесик пирамида* деб аталади (2.3-расм).

Берилган пирамиданинг асоси ва кесимда ҳосил бўлган кўпбурчак *кесик пирамиданинг асослари* дейилади.



2.3-расм

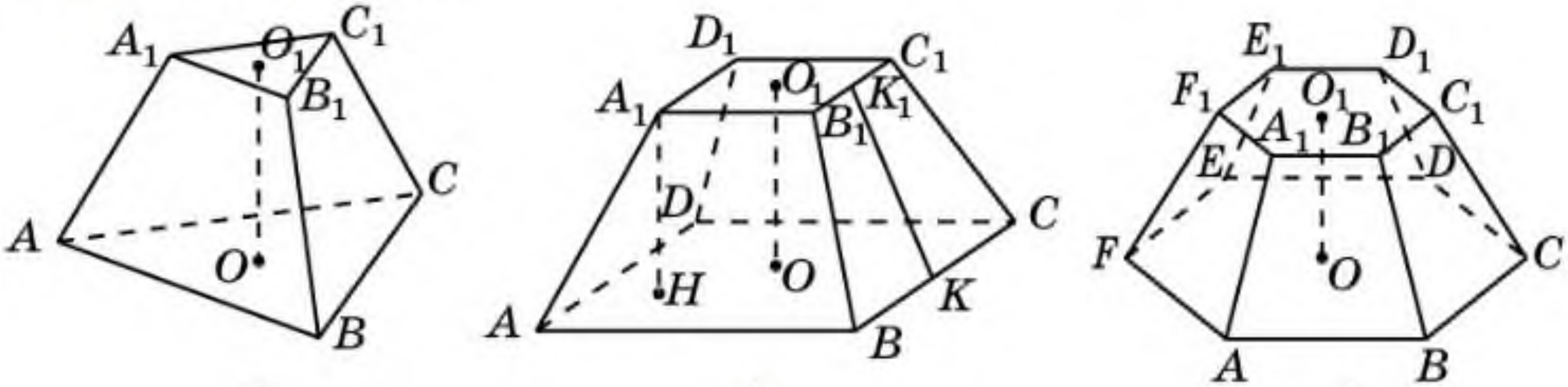
Кесик пирамида унинг асосларининг учлари билан белгиланади, масалан, 2.3-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўртбурчакли пирамида тасвирланган.

Кесик пирамиданинг асосларининг томонлари жуфт-жуфтдан параллел, бинобарин кесик пирамиданинг ён ёқлари трапециялардан иборат. Ён ёқларидан ташкил топган сирт *кесик пирамиданинг ён сирти* деб аталади.

Кесик пирамида ён ёқларининг умумий қирралари унинг *ён қирралари* деб аталади.

Кесик пирамида асосида жойлашган кўпбурчакларга (учбурчаклар, тўртбурчаклар, бешбурчаклар ва ҳ.к.) боғлиқ ҳолда мос равишда учбурчакли, тўртбурчакли, бешбурчакли ва ҳ.к. бўлиб бўлинади.

2.4-расмда учбурчакли кесик пирамида (2.4, а-расм), тўртбурчакли кесик пирамида (2.4, б-расм) ва олтибурчакли кесик пирамида (2.4, в-расм) тасвирланган.



а) б) в)

2.4-расм

Мунтазам пирамидадан олинган кесик пирамида *мунтазам кесик пирамида* деб аталади.

Ён ёғининг баландлиги мунтазам кесик пирамиданинг *апофемаси* деб аталади.

Бир асосининг исталган нуқтасидан иккинчи асос текислигига ўтказилган перпендикуляр кесик пирамиданинг баландлиги деб аталади. 2.4, б-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кесик пирамидасининг A_1H баландлиги ва KK_1 апофемаси тасвирланган.

Кесик пирамиданинг ёйилмаси икки ўхшаш кўпбурчаклар (кесик пирамиданинг асослари) билан трапециялардан (кесик пирамиданинг ён ёқлари) ташкил топган.

Кесик пирамиданинг ён сирти деб шу кесик пирамиданинг барча ён ёқларидан иборат бўлган сиртни айтади. Бинобарин *кесик пирамиданинг ён сиртининг юзи* унинг барча ён ёқлари юзларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Теорема. ***Мунтазам кесик пирамиданинг ён сиртининг юзи унинг асослари периметрлари йиғиндисининг ярмини апофемасига кўпайтирилганига тенг бўлади:***

$$S_{\text{к.пир.ён.с}} = \frac{1}{2}(P + P_1)l,$$

Бу ерда P ва P_1 — кесик пирамиданинг асосларининг периметрлари, l — апофемаси.

Бу теоремани мустақил исботланг.

Кесик пирамиданинг тўла сиртининг юзи унинг ён сирти билан асослари юзларининг йиғиндисига тенг бўлади, яъни қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S_{\text{кесик пирамида}} = S_{\text{ён.сир.}} + S_{\text{асос}_1} + S_{\text{асос}_2}.$$

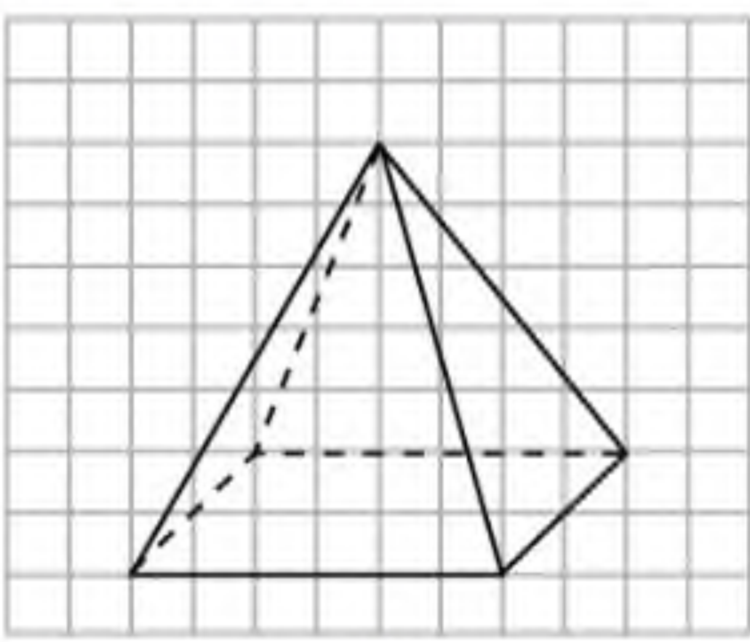
Саволлар

1. Қандай кўпёқ пирамида деб аталади?
2. Қандай пирамида тўғри пирамида деб аталади?
3. Пирамиданинг баландлиги деганимиз нима?
4. Қандай кўпёқ кесик пирамида деб аталади?
5. Қандай кесик пирамида тўғри деб аталади?
6. Кесик пирамиданинг баландлиги деганимиз нима?
7. Пирамида сиртининг юзаси қандай ҳисобланади?
8. Кесик пирамиданинг сиртининг юзаси қандай ҳисобланади?

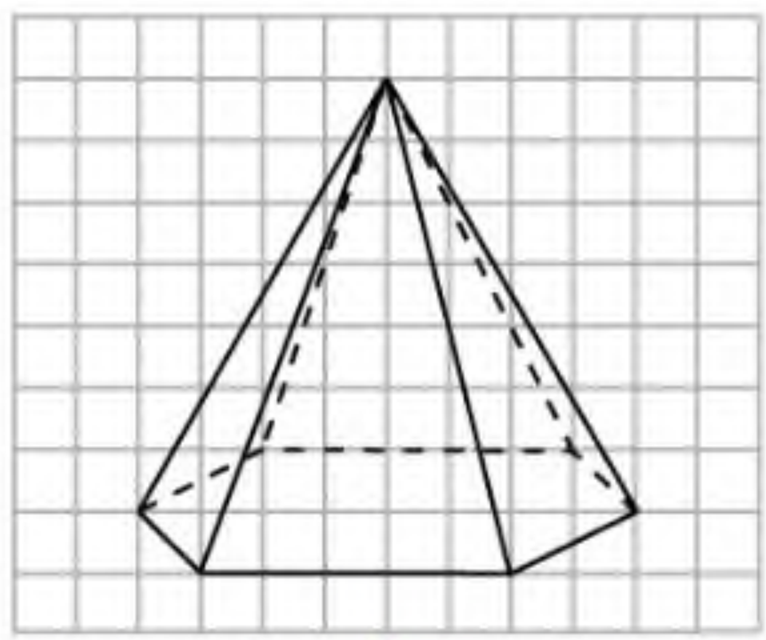
Машқлар

А

2.1. Катак қоғозга 2.5-расмдагига ўхшаш пирамидани чизинг ва унинг баландлигини ясанг.



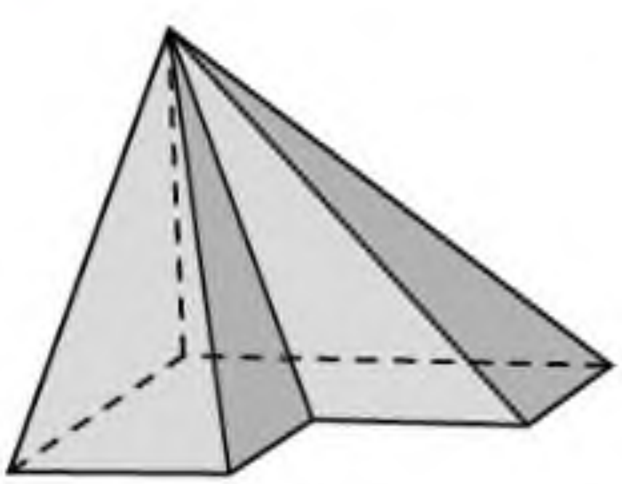
а)



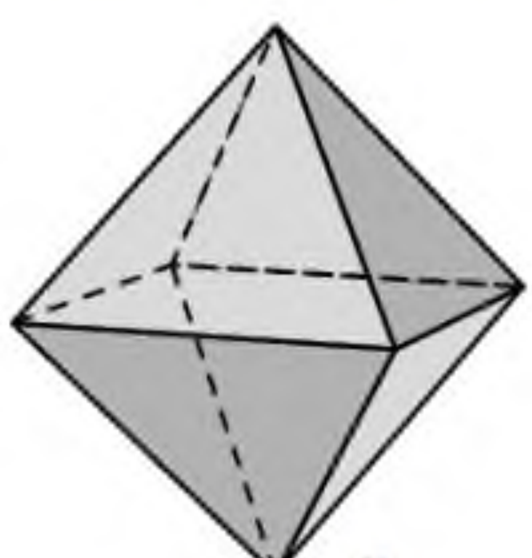
б)

2.5-расм

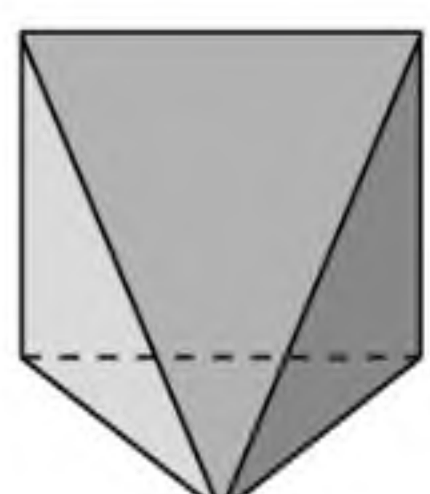
2.2. 2.6-расмда тасвирланган фигураларнинг қайсиси пирамида бўлади?



а)



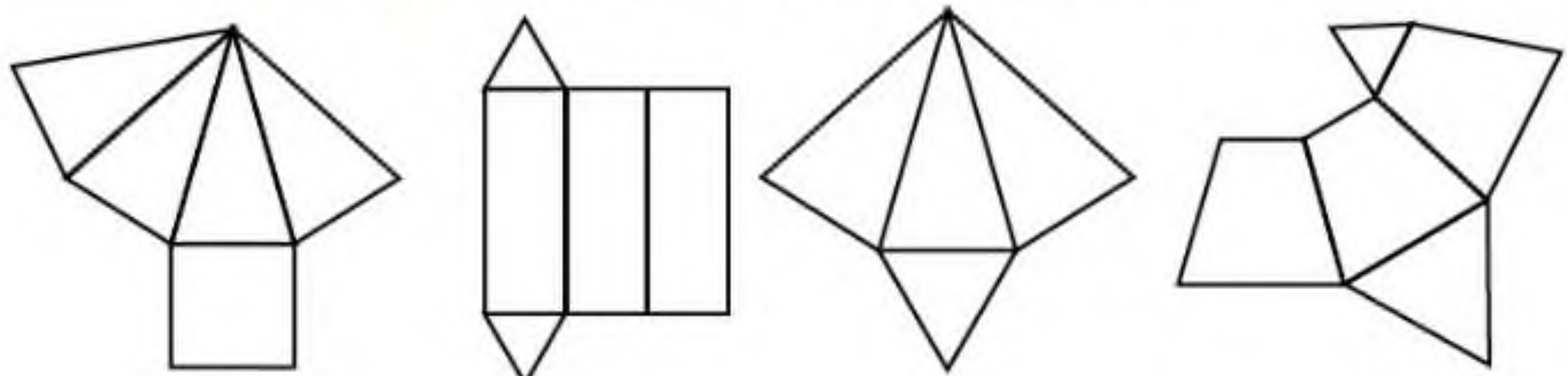
б)



в)

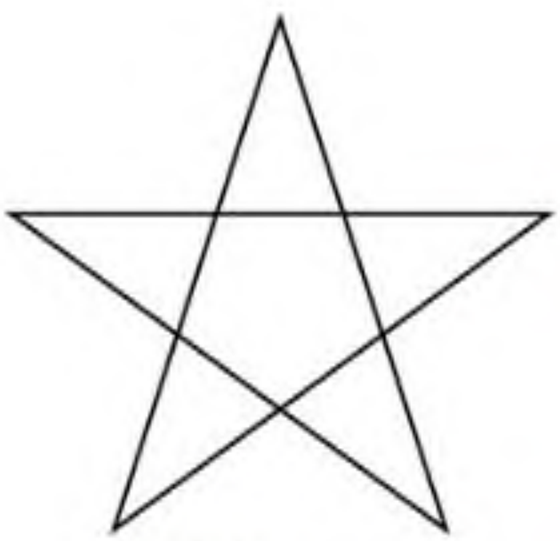
2.6-расм

2.3. 2.7-расмда тасвирланган фигураларнинг қайсиси пирамиданинг ёйилмалари бўлади? Уларнинг турларини аниқланг.



а) б) в) г)

2.7-расм



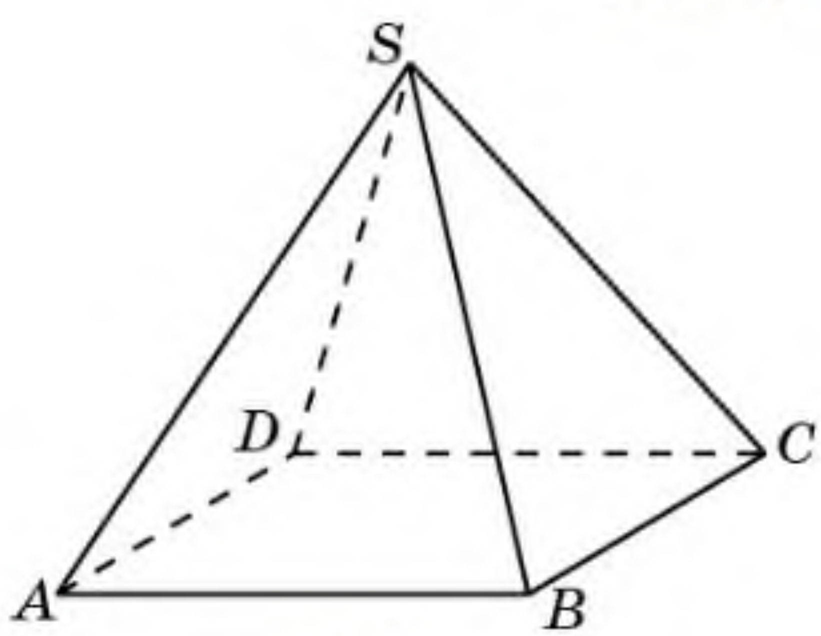
2.8-расм

2.4. 2.8-расмда тасвирланган фигура қандай кўпёқнинг ёйилмаси бўлади?

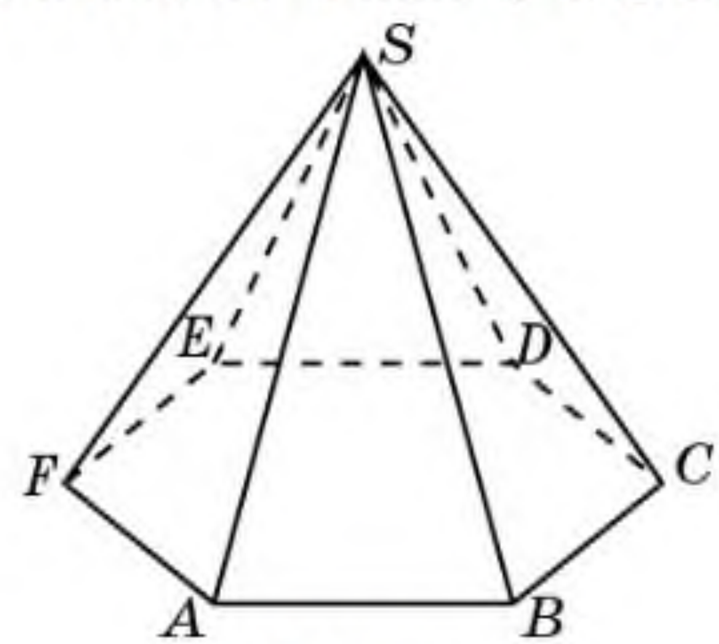
2.5. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ёйилмасини ясанг.

2.6. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 см га тенг. Пирамиданинг баландлигини топинг.

2.7. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 см га тенг. Пирамиданинг тўла сиртининг юзини топинг (2.9-расм).



2.9-расм



2.10-расм

2.8. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томони 1 см га, ён қирралари эса 2 см га тенг. Пирамиданинг тўла сиртининг юзини топинг (2.10-расм).

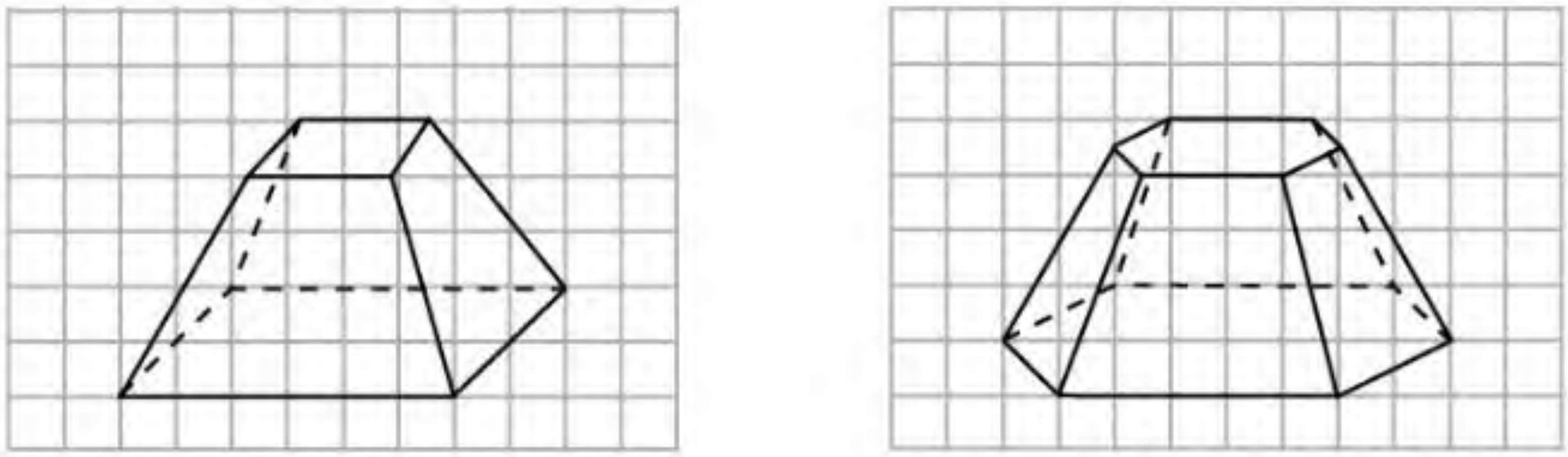
B

2.9. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томони 1 см га, ён қирралари эса 2 см га тенг. Пирамиданинг баландлигини топинг.

2.10. Агар пирамиданинг барча қирраларини 2 марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?

2.11. Агар пирамиданинг барча қирраларини 3 марта камайтирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта камаяди?

2.12. Катак қоғозга 2.11-расмдагига ўхшаш кесик пирамидани тасвирланг.



а) б)

2.11-расм

2.13. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамиданинг ёйилмасини тасвирланг.

C

2.14. Мунтазам олтибурчакли кесик пирамиданинг ёйилмасини тасвирланг.

2.15. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамиданинг асосларининг томонлари 4 см ва 2 см га, ён қирралари эса 3 см га тенг. Пирамиданинг баландлигини топинг.

2.16. Мунтазам олтибурчакли кесик пирамиданинг асосларининг томонлари 2 см ва 1 см га, баландлиги эса 3 см га тенг. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.

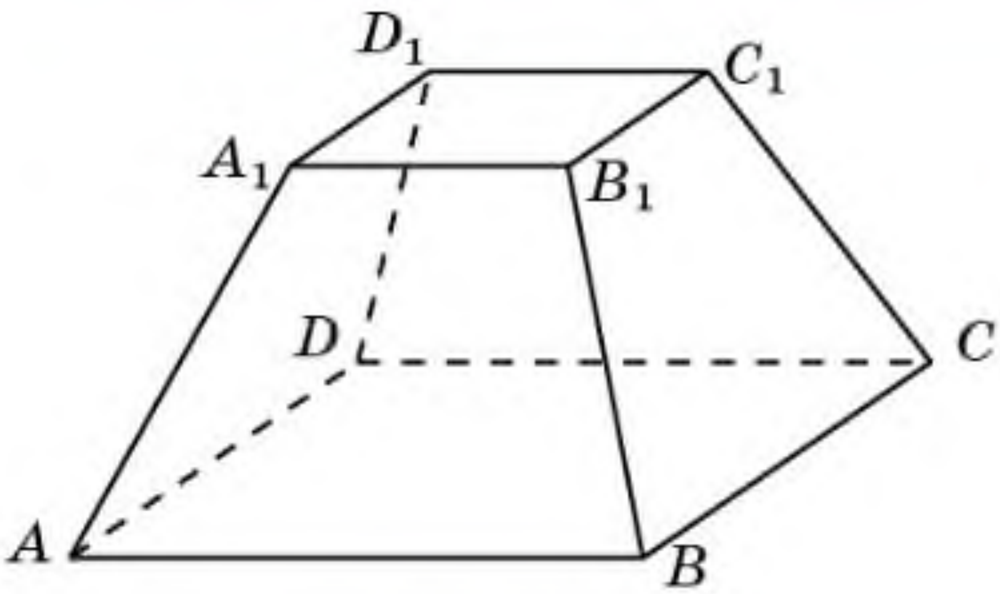
2.17. "Нур-Султан" шаҳридаги Тинчлик ва келишув саройи мунтазам тўртбурчакли пирамида шаклига эга (2.12-расм). Унинг баландлиги билан асосининг томони 62 м га тенг. Пирамиданинг ён сиртининг юзини топинг.

2.12-расм

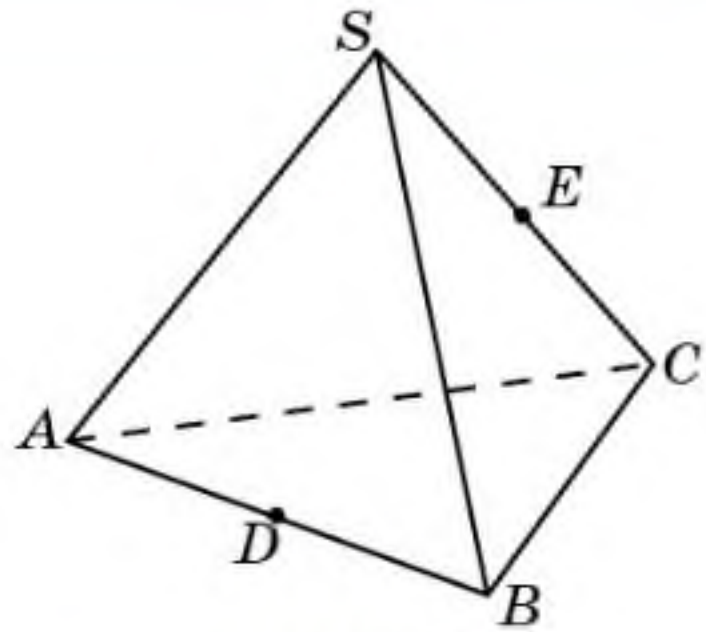
2.13-расм

2.18. Қадимги Мисрдаги энг баланд биноларнинг бири — Хеопс пирамидаси — мунтазам тўртбурчакли пирамида. Унинг баландлиги тахминан 140 м га, асосининг юзи эса 5,3 га га тенг (2.13-расм). Мана шу пирамиданинг ён сиртининг юзини топинг.

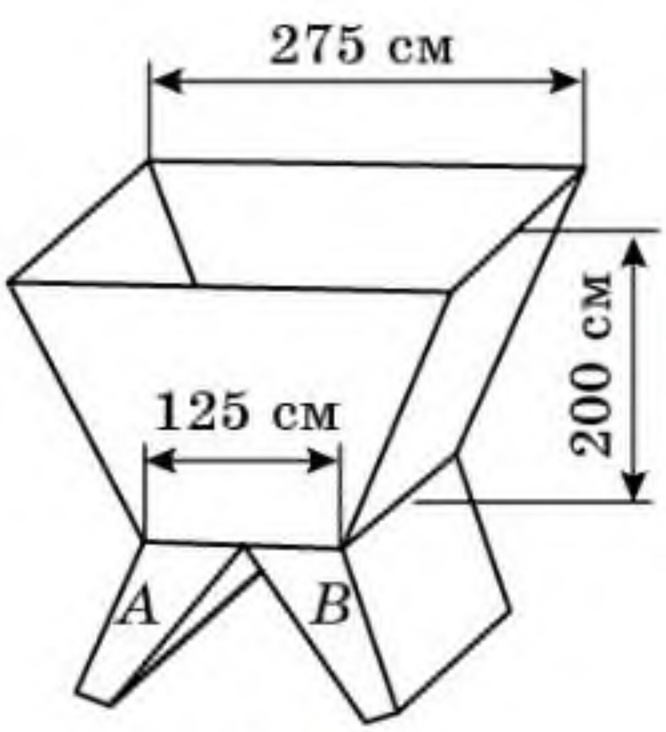
2.19. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамиданинг асосларининг томонлари 1 см ва 2 см га, ён қирралари эса 1 см га тенг. Пирамиданинг тўла сиртининг юзини топинг (2.14-расм).



2.14-расм



2.15-расм



2.16-расм

2.20. $SABC$ мунтазам пирамиданинг AB ва SC қирраларининг ўрталарини туташтирувчи пирамида сиртидаги энг қисқа масофани топинг (2.15-расм).

2.21. 2.16-расмда дон сақланадиган идиш (бункер) тасвирланган. Унинг асосий қисми сиртини мунтазам тўртбурчакли кесик пирамиданинг ён сирти ташкил этади. Расмда кўрсатилган ўлчамлари (см-да) бўйича идишни ясаш учун (A ва B қисмларини ҳисобламаганда) қанча квадрат дециметр тунука кераклигини ҳисобланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

2.22. 1) Параллелепипед; 2) призма; 3) пирамида учларининг (У), қирраларининг (Қ) ва ёқларининг (Ё) сони учун У – Қ + Ё = 2 тенглиги бажарилишини текширинг.

3*-§. Эйлер теоремаси

Бизга маълум бўлган кўпёқларни кўриб чиқиб, уларнинг учларининг (У), қирраларининг (Қ) ва ёқларининг (Ё) сони бўйича жадвални тўлдирамиз.

1-жадвал

Кўпёқнинг номи	У	Қ	Ё
Параллелепипед	8	12	6
Учбурчакли пирамида	4	6	4
Тўртбурчакли пирамида	5	8	5

Тўртбурчакли пирамида	5	8	5
Учбурчакли призма	6	9	5
Тўртбурчакли призма	8	12	6
n-бурчакли пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n-бурчакли призма	$2n$	$3n$	$n+2$

Мана шу жадвалдан кўриб чиқилган барча кўпёқлар учун У − Қ + + Ё = 2 тенглиги бажарилишини кўрамиз. Бу тенглик кўриб чиқилган кўпёқлар учунгина эмас, балки ҳар қандай қавариқ кўпёқ учун ҳам ўринли бўлади.

Қавариқ кўпёқларнинг бу хоссасини биринчи бўлиб 1752 йили Леонард Эйлер исботлаган ва Эйлер теоремаси деб аталган.

Эйлер теоремаси. ***Ҳар қандай қавариқ кўпёқлар учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:***

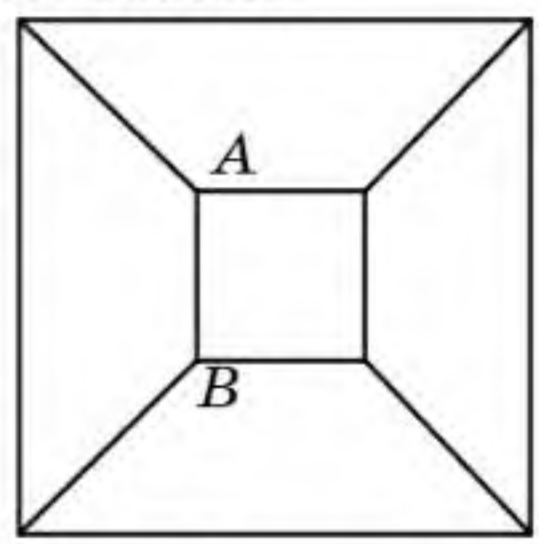
У − Қ + Ё = 2,

бу ерда **У** — берилган кўпёқ учларининг сони, Қ — қирраларининг сони, Ё — ёқларининг сони.

Исботи. Кўпёқ моделининг сиртини кўриб чиқайлик. Унинг бир ёғини кесиб, қолган сиртини текисликда ёйсак. Шундан У учлари, Қ қирраларидан иборат чизмани ва шу чизманинг текисликни ажратадиган Ё бўлакларини оламиз.

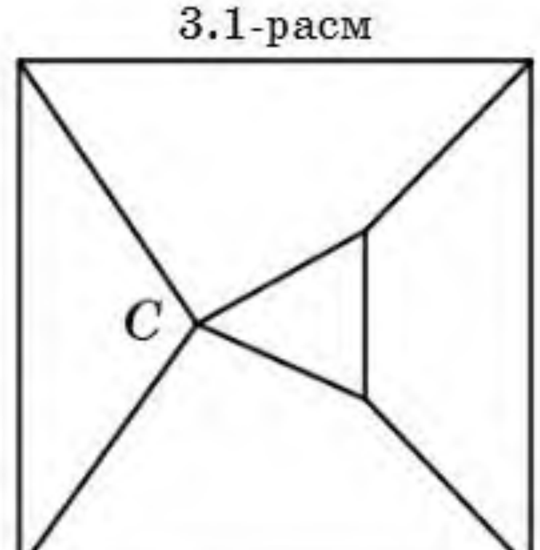
Агар чизмадаги икки учи бор қандай да бир қиррасини унинг учларининг биттасига шу қирраси бўйлаб сиқиб йиғадиган бўлсак, унда чизмадаги У − Қ + Ё қиймати ўзгармаслигини исботлайлик.

Мисол тариқасида кубдан олинган 3.1-расмдаги чизмани кўриб чиқамиз. Бунда У = 8, Қ = 12, Ё = 6 бўлади.



3.1-расм

AB қиррасини C нуқтага сиқиб йиғганда 3.2-расмдагидек чизма ҳосил бўлади. Натижасида У учларининг сони биттага камаяди, Қ қирраларининг сони ҳам биттага камаяди, Ё бўлакларининг сони эса ўзгармайди. Демак, У − Қ + Ё қиймати ҳам ўзгармайдиган бўлади.

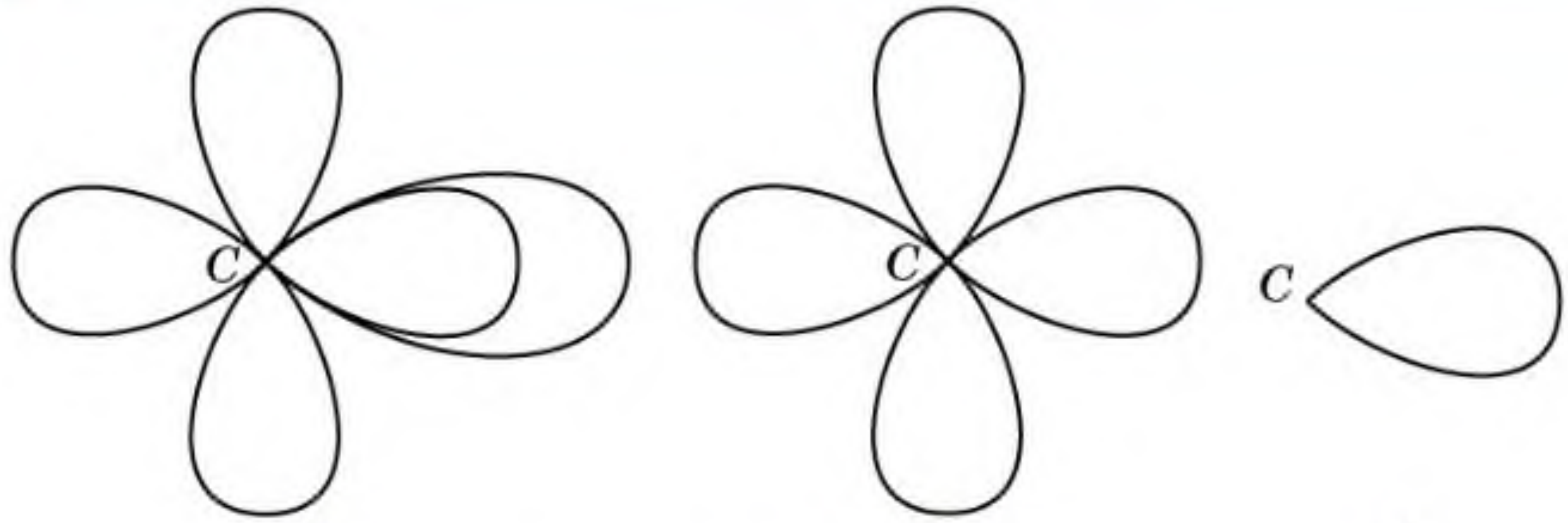


3.2-расм

Мана шу хоссаларни фойдаланиб, икки учи бор барча қирраларини сиқиб йиғамиз. Бундан бир учи бор, қирралари эса шу уч билан бўғинлари бўладиган чизмага эга бўламиз (3.3, а-расм).

Бу катак учун ҳам У − Қ + Ё қиймати ўзгаришсиз бошланғич қиймат бўлиб қолади.

Энди агар ҳосил бўлган чизмадаги қандай да бир бўғинни олиб ташласак, У − Қ + Ё қиймати ўзгармаслигини исботлаймиз.



а) б) в)

3.3-расм

Ҳақиқатан, бу ҳолатда У учларининг сони ўзгармайди, у 1 га тенг. Қ қирраларининг сони ҳам, Ж бўлакларининг сони ҳам 1 га камайди (3.3, б-расм). Унда, У – Қ + Ё қиймати ҳам ўзгармайдиган бўлади.

Мана шу хоссаларни фойдаланиб, биттасидан бошқа барча бўғинларни олиб ташлаймиз. Бундан бир учи ва бир қирраси (учи билан тугуни) бор чизмани оламиз (3.3, в-расм). Бу чизма учун У = 1, Қ = 1, Ё = 2, яъни У – Қ + Ё = 2 бўлади. Демак, бу тенглик бошланғич кўпёқ учун ҳам ўринли бўлади.

Эйлер теоремасини фойдаланиб, қавариқ кўпёқнинг учлари (У), қирралари (Қ) ва ёқларининг (Ё) сонини топишга мисол келтирайлик.

Мисол. Қавариқ кўпёқнинг ҳар бир учида бешта учбурчак бирикади. Мана шу кўпёқ учларининг (У), қирраларининг (Қ) ва ёқларининг (Ё) сонини топинг.

Ечими. Берилган кўпёқнинг ҳар бир учида бешта қирраси бирикади. Ҳар бир қиррасининг эса икки учи бўлганлиги туфайли, 5У = 2Қ тенглиги бажарилади.

Бундан $У = \frac{2Қ}{5}$. Бу кўпёқнинг ёқлари фақатгина учбурчаклар, ҳар бир учбурчакнинг учта қирраси бўлганлиги туфайли, 3Ё = 2Қ тенглиги бажарилади. Демак, $Ё = \frac{2Қ}{3}$. Топилган У ва Ё қийматларини Эйлер тенглигига қўйиб, қуйидагидай тенгламани оламиз:

$$\frac{2Қ}{5} - Қ + \frac{2Қ}{3} = 2.$$

Мана шу тенгламани ечиб, кўпёқ қирраларининг (Қ) сонини топамиз, яъни Қ = 30. Бу қийматни У ва Ё ифодаларига қўйиб, кўпёқнинг учлари билан ёқларининг сонларини топамиз: У = 12, Ё = 20.

Тарихий маълумотлар

Леонард Эйлер (1707—1783) — жаҳонга таниқли швейцариялик математик. Унинг ишлари математиканинг кўплаган замонавий бўлимларининг ривожланишига ҳисса қўшди.

Эйлер оғир ҳасталикка чалиниб, кўриш қобилиятидан маҳрум бўлди, лекин ҳасталигига қарамасдан ишлаб, натижаларга эришган. Статистик ҳисоблашлар бўйича, Эйлер ҳафтасига ўрта ҳисобда бир янгилик яратган.

Эйлер кашфиётларида татқиқ этилмаган математик масалаларни топиш қийин. Кейинги авлоднинг математиклари Эйлердан билим олган. Таниқли француз олими П.С. Лаплас: "Эйлерни ўқинглар, у ҳаммамизнинг устозимиз", — деган.

Математика тарихчилари Эйлер теоремасини *топологиянинг дастлабки теоремаси* деб атаганлар. Топология — узилишсиз деформация пайтида ўзгармайдиган, узлуксиз ёки қўшимча елимлашсиз чўзиладиган ва сиқиладиган фигураларнинг хоссаларини татқиқ этадиган геометриянинг бўлими. Бундай хоссалар *топологиялик* деб аталади.

Қаварик кўпёқлар учун У – Қ + Ё = 2 Эйлер нисбати мана шу топологиялик хоссани таърифлайди. Кўпёқни деформациялашга бўлади, унинг қирралари билан ёқлари эгилиши мумкин, лекин уларнинг сони, яъни Эйлер нисбати ўзгармайди.

Эйлер нисбатини исботлашда биз деформациялашни қўлланганмиз, яъни кўпёқ сиртининг бир ёғини кесиб, текисликка ёйган эдик. Қирралари билан кўпбурчакларнинг ўзлари эгилиши мумкин, аммо бу Эйлер нисбатига тасир этмайди.

Леонард Эйлернинг ҳаёти билан ва ижоди билан танишиш учун биз қуйидаги китобни тавсия этамиз: Тиле Р. Леонард Эйлер. — Киев: Вища школа, 1983.

Саволлар

1. n-бурчакли призманинг; 2) n-бурчакли пирамиданинг учлари, қирралари ва ёқларининг сони нечага тенг?
2. Эйлер теоремасини айтинг.
3. Эйлер теоремаси қачон исботланди?
4. Топология нимани тадқиқ этади?

Машқлар

А

3.1. Қаварик кўпёқнинг 6 та учи ва 12 та қирраси бор. Унинг нечта ёғи бўлади?

3.2. Қаварик кўпёқнинг 8 та учи ва 6 та ёғи бор. Унинг нечта қирраси бўлади?

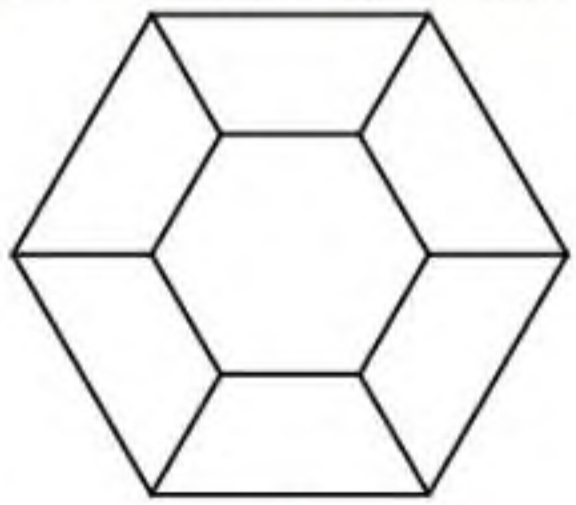
3.3. Қаварик кўпёқнинг 9 та қирраси ва 5 та ёғи бор. Унинг нечта учи бўлади?

B

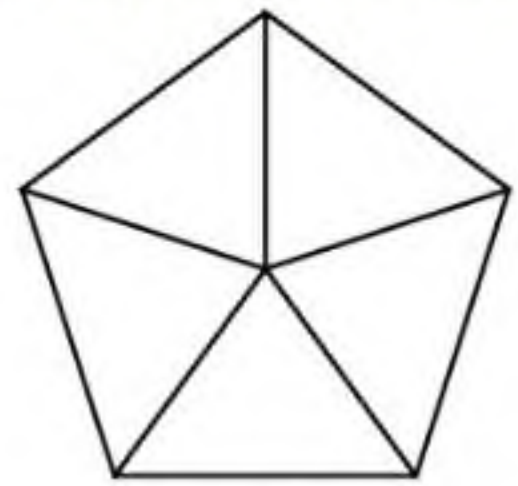
3.4. Эластик материалдан ясалган учбурчакли призманинг бир асоси кесиб олинди ва қолган ёқлари текисликка ёйилди. Ҳосил бўлган чизманинг расмини чизинг.

3.5. Эластик материалдан ясалган тўртбурчакли пирамиданинг асоси кесиб олинди ва қолган ёқлари текисликка ёйилди. Ҳосил бўлган чизманинг расмини чизинг.

3.6. 3.4-расмдаги чизмаларга мос келадиган кўпёқларни атанг.



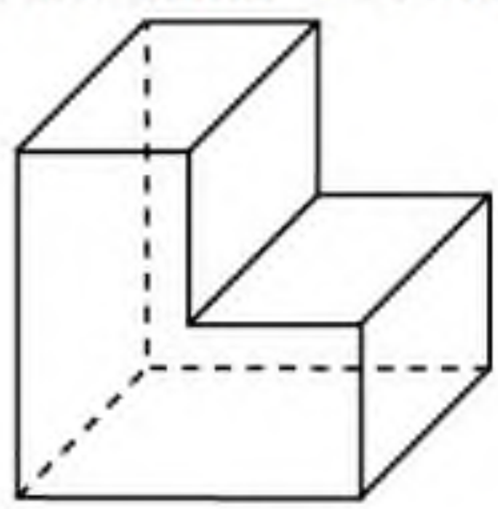
а)



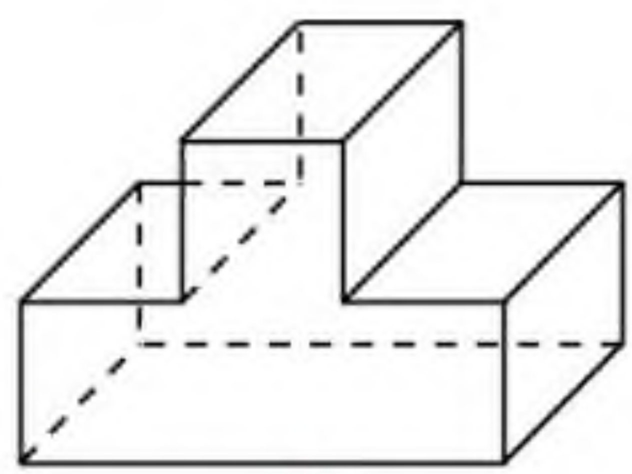
ә)

4.4-расм

3.7. 3.5-расмдаги кўпёқлар учун Эйлер нисбатининг бажарилиш ёки бажарилмаслигини текширинг.



а)



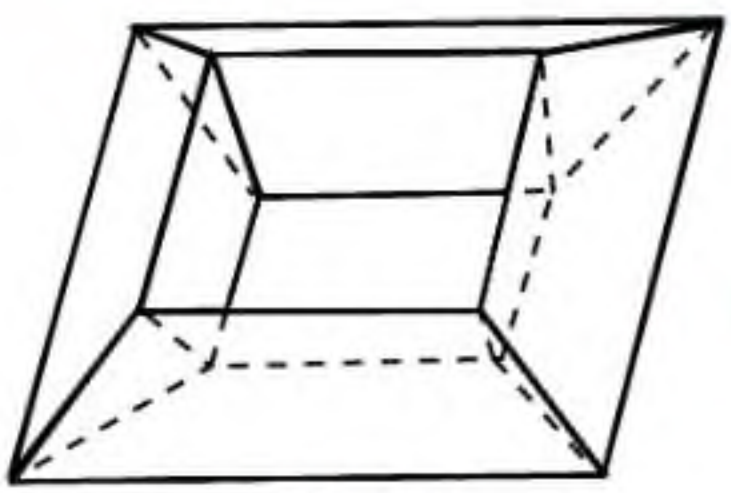
б)

3.5-расм

C

3.8. Қаварик бўлмаган призма учун Эйлер нисбати бажариладими?

3.9. Қаварик бўлмаган пирамида учун Эйлер нисбати бажариладими?



3.6-расм

3.10. 3.6-расмдаги кўпёқ учларининг, қирраларининг ва ёқларининг сонини топинг. Мана шу кўпёқ учун Эйлер нисбати бажариладими?

3.11. Қаварик кўпёқнинг ҳар бир учида тўртта учбурчак бирлашади. Мана шу кўпёқ учларининг (У), қирраларининг (Қ) ва ёқларининг (Ё) сонини топинг.

3.12. Қаварик кўпёқнинг ҳар бир учида учта бешбурчак бирлашади. Мана шу кўпёқ учларининг (У), қирраларининг (Қ) ва ёқларининг (Ё) сонини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

3.13. Мунтазам кўпбурчакнинг қоидасини такрорланг. Мунтазам кўпбурчакнинг қоидасини айтиб кўринг.

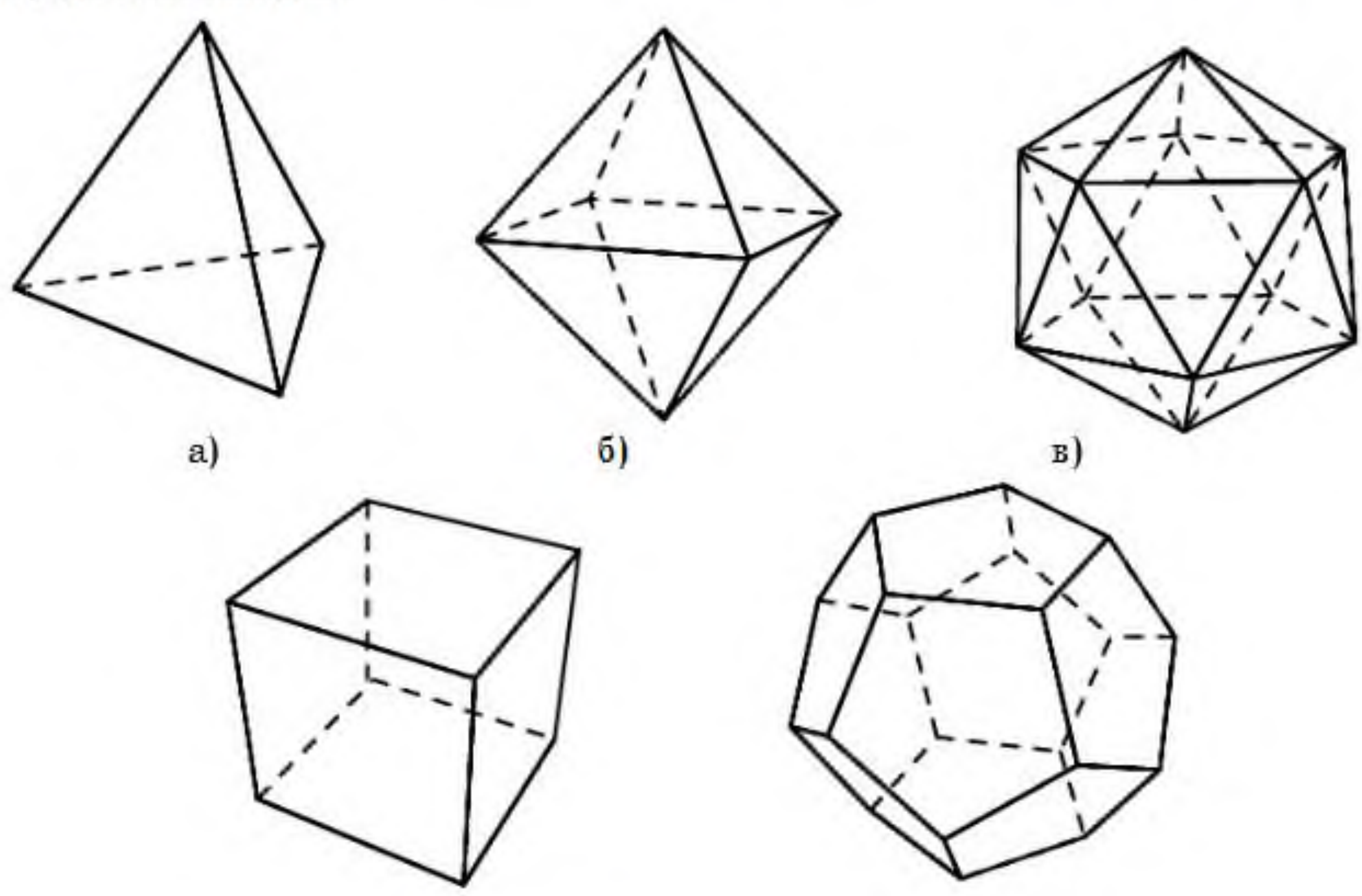
4-§. Мунтазам кўпбурчаклар

Агар мунтазам кўпбурчак ёқларининг томонларининг сони бир хил бўлган мунтазам кўпбурчаклардан иборат бўлса ва шу билан бирга, кўпбурчакнинг ҳар бир учида бир хил миқдордаги қирралар учрашса, бундай кўпбурчак *мунтазам кўпбурчак* деб аталади.

Мунтазам кўпёқнинг учларида қандай ва нечта мунтазам кўпбурчаклар бирикишини аниқлайлик.

Мунтазам кўпёқларнинг орасидаги энг соддаси ёқлари тўртта мунтазам учбурчаклардан иборат (4.1, а-расм) ва ҳар бир учида учта ёғи бирикадиган кўпёқ ҳисобланади. Бу кўпёқ *мунтазам тетраэдр* деб аталади. Юнончадан таржима қилинганда “тетраэдр” сўзи “тўртёқ” (“тетра” — тўрт, “эдра” — ёқ) деган маънони билдиради.

4.1, б-расмда ёқлари мунтазам учбурчаклардан иборат ва ҳар бир учида тўртта ёғи бирикадиган кўпёқ тасвирланган. Унинг сирти саккизта мунтазам учбурчаклардан иборат, шу сабабли у *октаэдр* (“окта” — саккиз) деб аталади.



4.1-расм

4.1, в-расмда ҳар бир учида бешта мунтазам учбурчакдан бирикадиган кўпёқ тасвирланган. Унинг сирти йигирмата мунтазам учбурчакдан иборат, шу сабабли у *икосаэдр* (“икоси” — йигирма) деб аталади.

Мунтазам кўпёқнинг бир учида бештадан кўп бўлмаган мунтазам учбурчакларнинг бирикишини кузатамиз, сабаби акс ҳолда бу учидаги ёйиқ бурчакларнинг йиғиндиси 360°-дан ортиқ ёки тенг бўлади. Шу сабабли ёқлари мунтазам учбурчаклар бўладиган бошқача мунтазам кўпёқлар бўлмайди.

Шунга ўхшаш, қаварик кўпёқнинг учларида фақатгина учта квадрат бирикканлиги сабабли, кубдан (4.1, г-расм) бошқа ёқлари квадрат бўладиган бошқача мунтазам кўпёқлар бўлмайди. Кубнинг олтита ёғи бор, шу сабабли у *гексаэдр* (“гекса” — олти) деб ҳам аталади.

4.1, д-расмда ёқлари мунтазам бешбурчаклар бўладиган ва ҳар бир учида учта ёғи бирикадиган кўпёқ тасвирланган. Унинг сирти ўн иккита мунтазам бешбурчакдан иборат, шу сабабли у *додекаэдр* (“додека” — ўн икки) деб аталади.

Қаварик кўпёқ учларида томонининг сони бештадан ортиқ мунтазам кўпбурчаклар бирикмаслиги сабабли, бошқача мунтазам кўпёқлар бўлмайди. Шу сабабли, қаварик мунтазам кўпёқнинг бешта тури бўлади: *мунтазам тетраэдр, гексаэдр* (*куб*), *октаэдр, додекаэдр* ва *икосаэдр*.

? Қандай ўйлайсизлар, нима сабабли ён ёқлари квадратлар бўладиган мунтазам учбурчакли призма мунтазам кўпёқ бўлмайди?

Тарихий маълумотлар

Қадимдан мунтазам кўпёқлар олимларнинг, қурувчиларнинг, меъморларнинг ва яна бошқаларнинг назарини жалб этган. Уларни мана шу кўпёқларнинг гўзаллиги (чиройи), ҳусусиятлиги ва мувофиқлиги (уйғунлиги) хайратда қолдирган. Пифагорликлар бу кўпёқларни худо берган ажойиб (хайрат) деб ҳисоблаб, уларни олам ҳақидаги философик ёзувларда қўлланган. Қадимги юнон олими Платон (эр.ав. 429—348) мунтазам кўпёқларнинг хоссаларини батафсил таърифлаган. Шу сабабли мунтазам кўпёқлар *Платон жисмлари* деб ҳам аталади. Евклиднинг машҳур “Негизлар” номли охирги XIII китоби мунтазам кўпёқларга бағишланган.

Қайта уйғониш даврида (XV—XVI асрлар фан ва санъатнинг қайта уйғониш даври) мунтазам кўпёқларга ҳайкалтарошлар, архитекторлар ва рассомлар катта қизиқиш билдирди. Леонардо да Винчи (1452—1519 йй.), масалан, кўпёқлар теорияси билан шуғулланган ва уларни ўзининг расмларида тасвирлаган. У ўзининг дўсти монах Лука Пачолининг (1445—1517 йй.) “Ажабланарли пропорциялар тўғрисида” китобини мунтазам ва ярим мунтазам кўпёқларнинг расмлари билан таърифлаган. Қайта уйғониш даврида геометрия билан шуғулланган яна бир атоқли рассом Альбрехт Дюрер (1471—1528 йй.) бўлди. Унинг элга таниқли “Меланхолия” асарида олдинги қаторда додекаэдр чизилган. 1525 йили Дюрер трактат ёзди, унда у сиртлари келажакнинг яхши моделини кўрсатадиган бешта мунтазам кўпёқни тақдим этди.

Иоганн Кеплер (1571—1630 йй.) ўзининг 1596 йили босилимга чиққан “Дунё сирлари” номли ишида сферага (шу пайтдаги маълум планеталарнинг орбитаси) ташқи чизилган мунтазам кўпёқларни фойдаланиб, Куёш тизимининг моделини яратган. У марказга Ернинг орбитасини жойлаштирди. Кеплернинг фикри бўйича, Куёш тизимининг геометрияси қуйидагича бўлади: “Ер (Ер орбитаси) — барча орбиталарнинг ўлчови. Унга ташқи додекаэдрни чизамиз. Додекаэдрга ташқи чизилган сфера — Марс сфераси. Марс сферасига ташқи тетраэдрни чизамиз. Тетраэдрга ташқи чизилган сфера Юпитернинг сфераси ҳисобланади. Юпитер сферасига ташқи кубни чизамиз. Кубга ташқи чизилган сфера Сатурн сфераси ҳисобланади. Ернинг сферасига ички икосаэдрни чизамиз. Унга ички чизилган сфера Венера сфераси бўлади. Венера сферасига ички октаэдрни чизамиз. Унга ички чизилган сфера Меркурий сфераси бўлади. У даврда бошқа планеталар ҳали очилмаган эди.

Куёш тизимининг бундай моделини Кеплер “Космик куб” деб атади.

Саволлар

1. Қандай қавариқ кўпёқ мунтазам кўпёқ деб аталади?
2. Қандай кўпёқ: а) мунтазам тетраэдр; ә) октаэдр; б) икосаэдр; в) гексаэдр; г) додекаэдр деб аталади?
3. Мунтазам кўпёқларни татбиқ этиш билан кимлар шуғулланади?

Машқлар

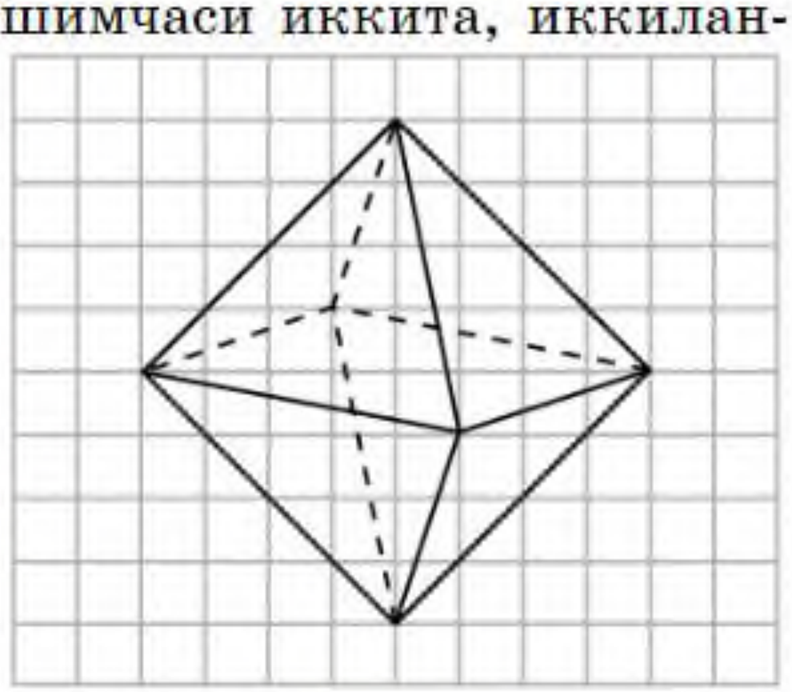
А

4.1. 1) Мунтазам тетраэдрнинг; 2) кубнинг; 3) октаэдрнинг; 4) икосаэдрнинг; 5) додекаэдрнинг нечта учи, қирраси ва ёғи бўлади?

4.2. Учбурчакли бипирамида икки мунтазам тетраэдрнинг сиртларини юзма-юз қилиб йиғилди (“би” қўшимчаси иккита, иккиланган маъносини билдиради). Ҳосил бўлган кўпёқ мунтазам кўпёқ бўла оладими? Нима сабабдан?

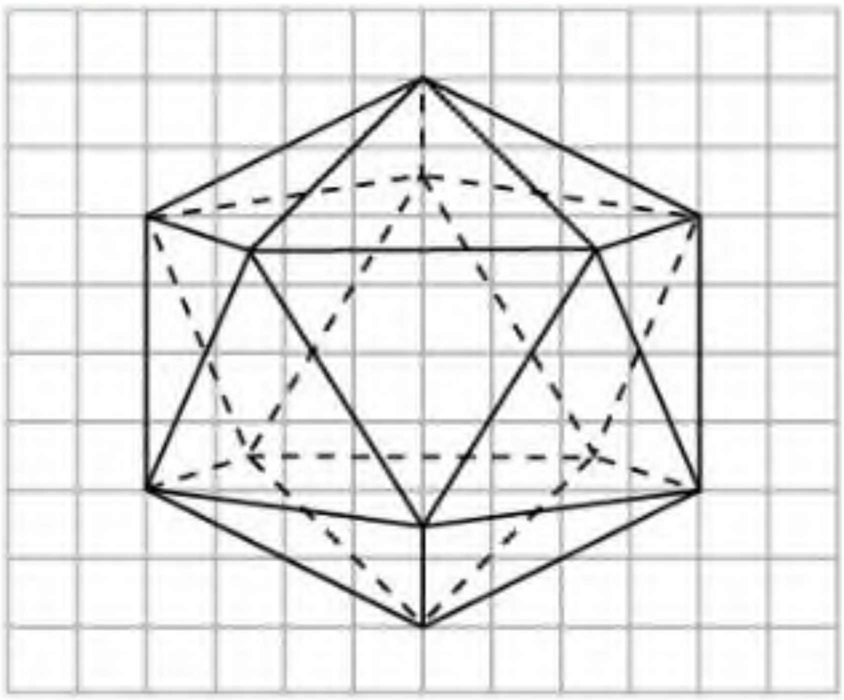
4.3. Тўртбурчакли бипирамида ён ёқлари мунтазам учбурчаклар бўладиган икки тўртбурчакли пирамиданинг асосларини юзма-юз қилиб йиғилди. Ҳосил бўлган кўпёқ мунтазам кўпёқ бўла оладими?

4.4. Катак қоғозга 4.2-расмдагига ўхшаш октаэдрни тасвирланг.

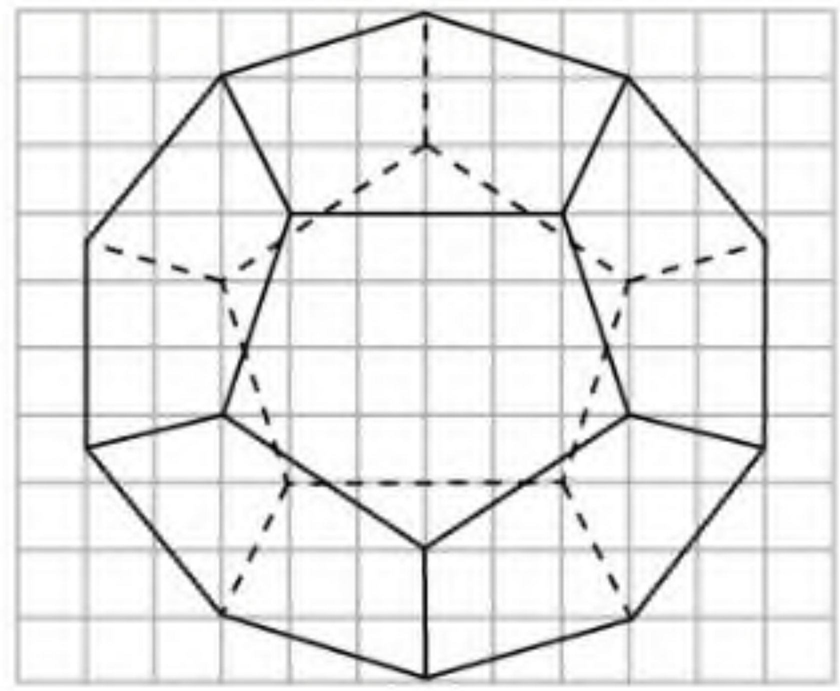


4.2-расм

4.5. Катак қоғозга 4.3-расмдагига ўхшаш икосаэдрни тасвирланг.



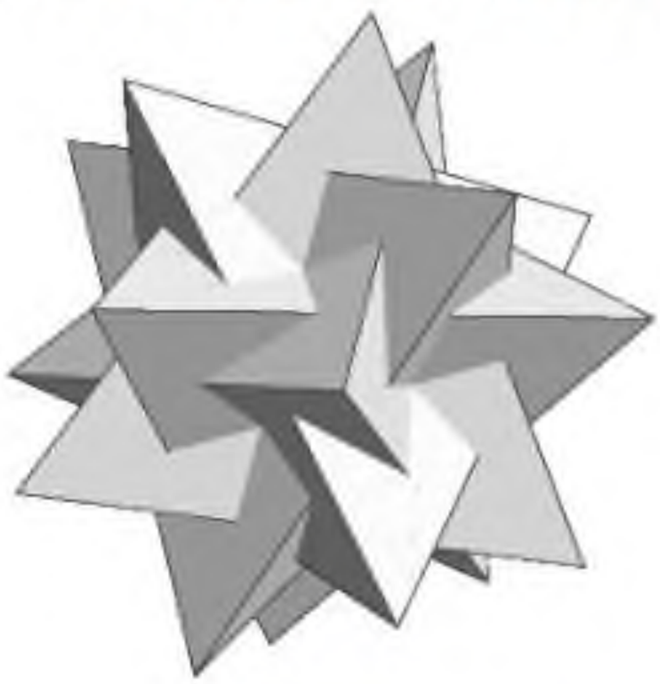
4.3-расм



4.4-расм

4.6. Катак қоғозга 4.4-расмдагига ўхшаш додекаэдрни тасвирланг.

4.7. 4.5-расмда нечта тетраэдр тасвирланган?

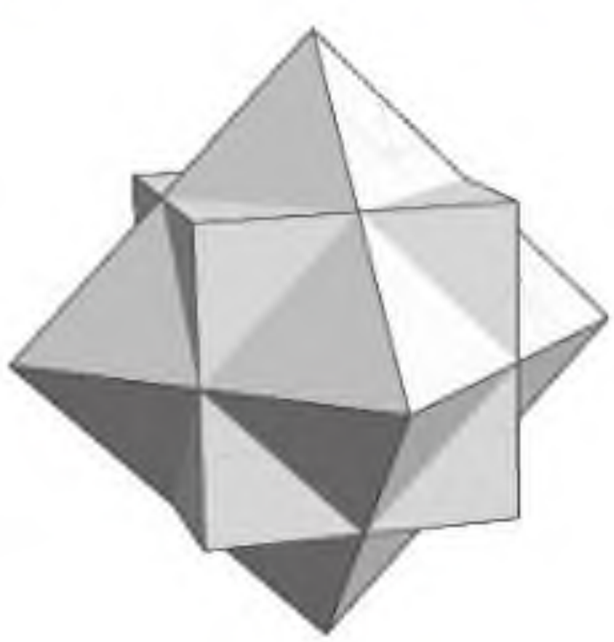


4.5-расм

4.6-расм

4.8. 4.6-расмда нечта октаэдр тасвирланган?

4.9. 4.7-расмдаги кўпёқ қандай икки кўпёқни бириктириш орқали ясалган?



4.7-расм

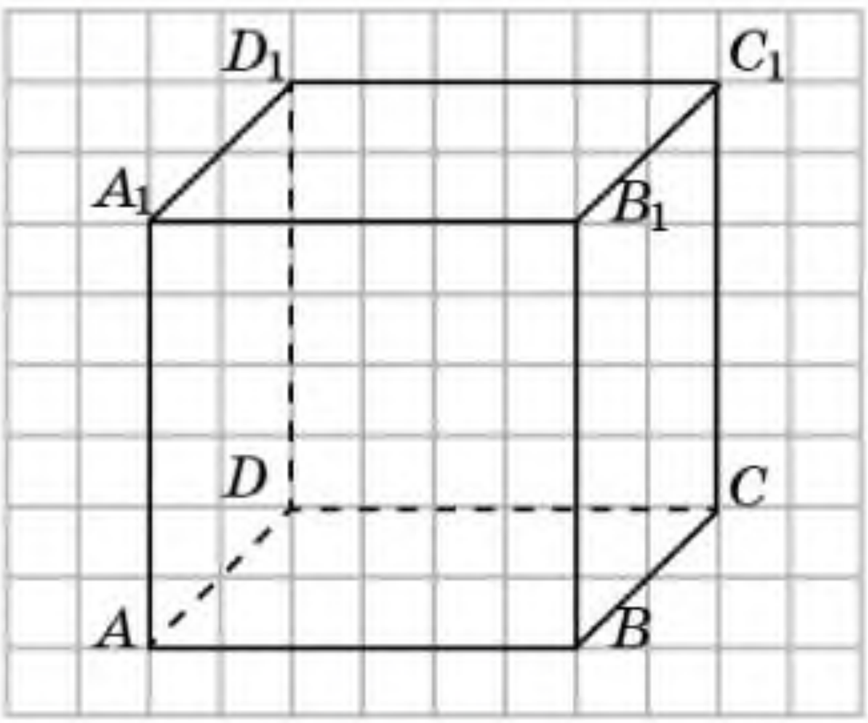
4.8-расм

4.10. 4.8-расмдаги кўпёқ қандай икки кўпёқни бириктириш орқали ясалган?

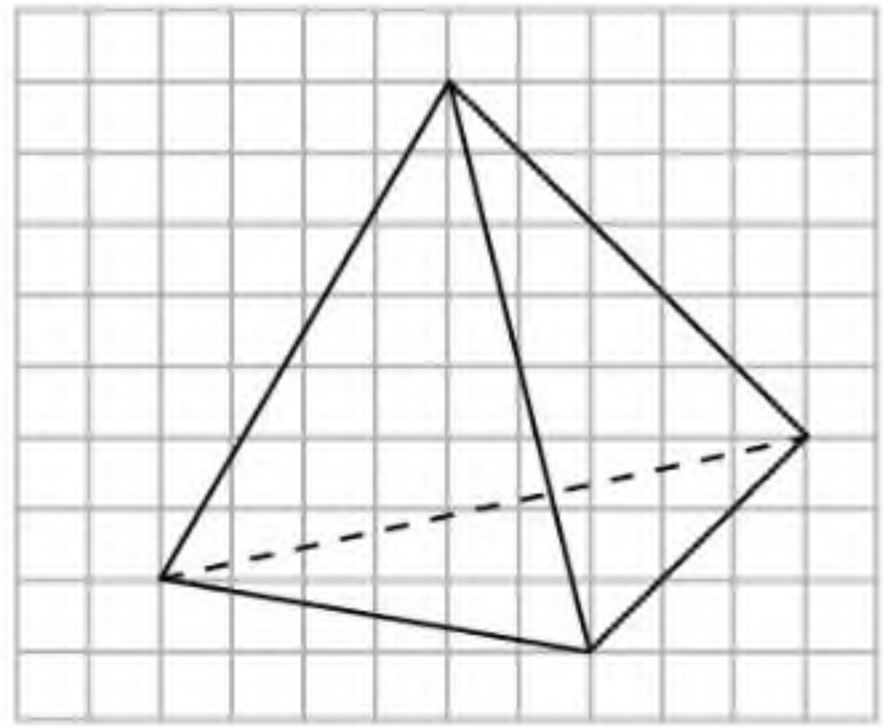
B

4.11. 4.9-расмдагига ўхшаш кубни катак қоғозда тасвирланг. Кубнинг A, C, B_1, D_1 учлари қандай кўпёқнинг учлари бўлади? Мана шу кўпёқни тасвирланг. Берилган кубнинг қиррасини 1 га тенг деб олиб, ҳосил бўлган кўпёқ қиррасининг узунлигини топинг.

4.12. 4.9-расмдагига ўхшаш кубни катак қоғозда тасвирланг. Куб ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай кўпёқнинг учлари бўлади? Мана шу кўпёқни тасвирланг. Берилган кубнинг қиррасини 1 га тенг деб олиб, ҳосил бўлган кўпёқ қиррасининг узунлигини топинг.



4.9-расм



4.10-расм

4.13. 4.10-расмдагига ўхшаш тетраэдрни катак қоғозда тасвирланг. Тетраэдр қирраларининг ўрталарини белгиланг. Улар қандай кўпёқнинг учлари бўлади? Мана шу кўпёқни тасвирланг. Берилган тетраэдрнинг қирраси 1 га тенг деб олиб, ҳосил бўлган кўпёқ қиррасини топинг.

4.14. Қирраси 2 см га тенг тетраэдрнинг ҳар бир учидан қирраси 1 см га тенг тетраэдр қирқиб олинса, қолган қисми қандай кўпёқ бўлади? Унинг қиррасини топинг.

4.15. Октаэдрнинг қирраси 1 га тенг. Унинг қарама-қарши жойлашган учлари орасидаги масофани топинг.

4.16. Бирлик октаэдрнинг қирралари орқали унинг бир учидан унга қарши жойлашган учигача узунлиги 2 га тенг бўлган нечта йўл бўлади?

4.17. Бирлик октаэдрнинг қирралари орқали унинг бир учидан унга қарши жойлашган учигача узунлиги 3 га тенг бўлган нечта йўл бўлади?

C

4.18. 4.10-расмдагига ўхшаш тетраэдрни катак қоғозда тасвирланг. Тетраэдр ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай кўпёқнинг учлари бўлади? Мана шу кўпёқни тасвирланг. Берилган тетраэдрнинг қиррасини 1 га тенг деб олиб, ҳосил бўлган кўпёқ қиррасини топинг.

4.19. 4.2-расмдагига ўхшаш октаэдрни катак қоғозда тасвирланг. Октаэдр ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай кўпёқнинг учлари бўлади? Мана шу кўпёқни тасвирланг. Берилган октаэдрнинг қиррасини 1 га тенг деб олиб, ҳосил бўлган кўпёқ қиррасини топинг.

4.20. 4.3-расмдагига ўхшаш икосаэдрни катак қоғозда тасвирланг. Икосаэдр ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай кўпёқ нинг учлари бўлади?

4.21. 4.4-расмдагига ўхшаш додекаэдрни катак қоғозда тасвирланг. Додекаэдр ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай кўпёқ нинг учлари бўлади?

4.22. Бирлик икосаэдрнинг қирралари орқали унинг бир учидан унга қарши жойлашган учигача узунлиги 3 га тенг бўлган нечта йўл бўлади?

4.23. Бирлик додекаэдрнинг қирралари орқали унинг бир учидан унга қарши жойлашган учигача узунлиги 5 га тенг бўлган нечта йўл бўлади?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

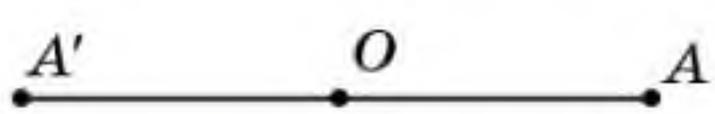
4.24. Текисликдаги марказий симметрия билан ўқ симметриянинг қоидаларини такрорланг.

5*-§. Кўпёқларнинг симметрияси

Текисликдаги фигураларнинг симметрияси тушунчаси планиметрия курсида ўрганилади. Марказий ва ўқ симметрия тушунчалари аниқланди. Фазовий фигуралар учун симметрия тушунчаси шунга ўхшаш аниқланадиган бўлади.

Немис математиги Г.Вейльнинг (1885—1955 йй.) айтишича: “Симметрия — одамларнинг асрлар давомида тартибли, гўзаллик билан камолотни тушунишга ва яратишга ҳаракат қилган ғоялари бўлиб ҳисобланади”.

Симметриянинг чиройли расмлари санъат асарларини — архитектура, ҳайкалларни ва ҳ.к. тасвирлайди.



5.1-расм

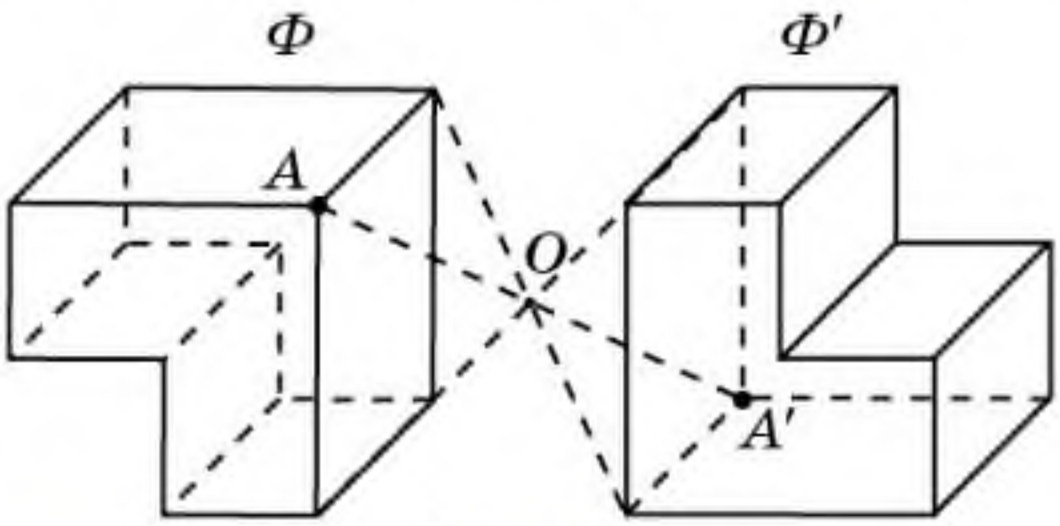
Агар фазодаги O нуқтаси AA' кесмасининг ўртаси бўлса, унда A ва A' нуқталари *O нуқтасига нисбатан симметрик* деб аталади (5.1-расм). O нуқтаси ўз-ўзига симметрик бўлади.

Фазонинг ҳар бир A нуқтасини берилган O нуқтасига нисбатан симметрик A' нуқтасига кўчирадиган фазодаги шакл алмаштириш *марказий симметрия* деб аталади. O нуқтаси *симметрия маркази* деб аталади.

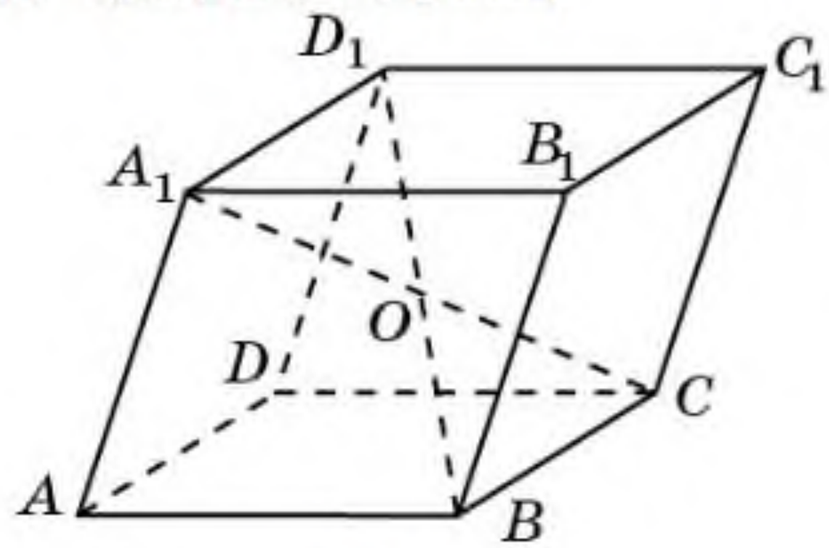
Агар фазодаги O нуқтасига нисбатан Φ фигурасининг ҳар бир A нуқтаси иккинчи Φ' фигурасининг қандай да бир A' нуқтасига симметрик бўлса, унда Φ ва Φ' фигуралари O марказига нисбатан *марказий симметрик* деб аталади (5.2-расм).

Агар фазодаги O нуқтасига нисбатан Φ фигураси ўз-ўзига марказий симметрик бўлса, унда Φ фигураси O марказига нисбатан *марказий симметрик* деб аталади.

Масалан, параллелепипед ўзининг диагоналларининг кесишмаси O нуқтасига нисбатан *марказий симметрик* бўлади (5.3-расм).



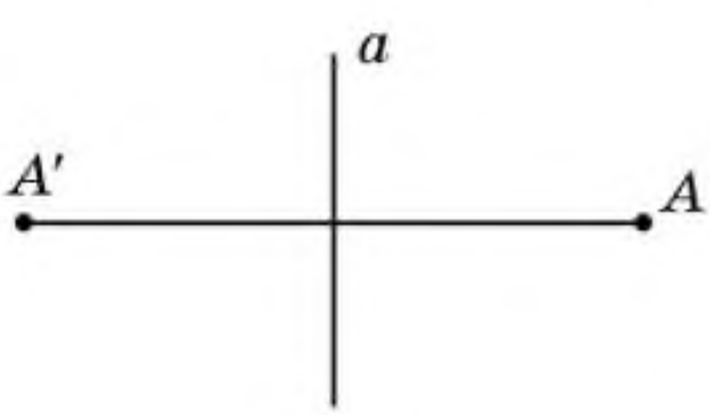
5.2-расм



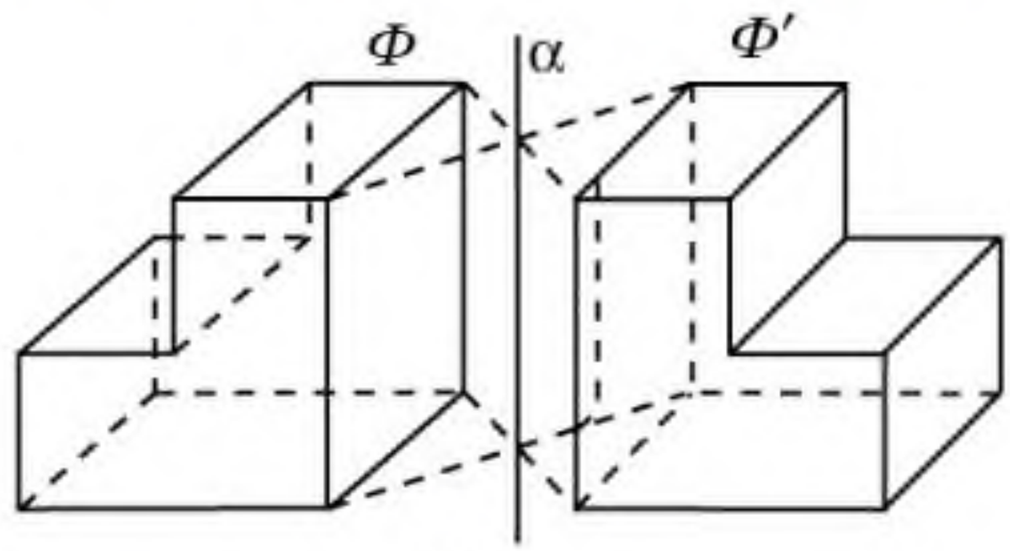
5.3-расм

Қандай ўйлайсизлар, фигурада бир нечта симметрия марказлари бўлиши мумкинми?

Агар фазодаги a тўғри чизиғи AA' кесмасига перпендикуляр ва унинг ўртаси орқали ўтса, унда A ва A' нуқталари *a тўғри чизиғига нисбатан симметрик* деб аталади (5.4-расм). a тўғри чизиғининг ҳар бир нуқтаси ўз-ўзига симметрик бўлади.



5.4-расм

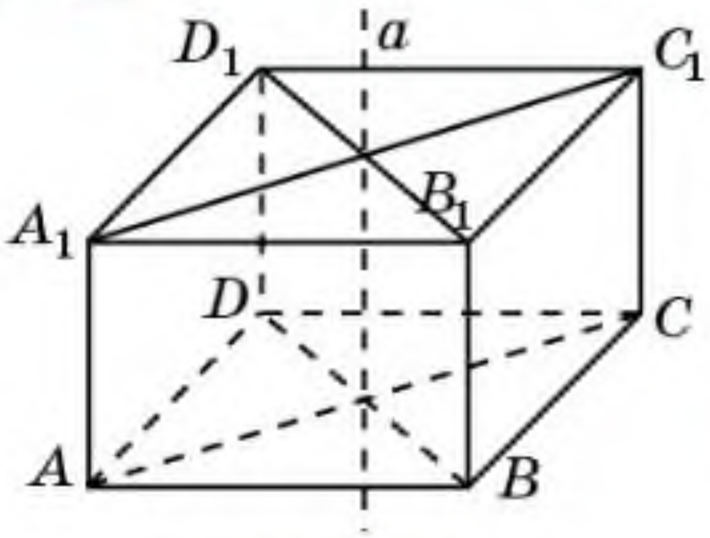


5.5-расм

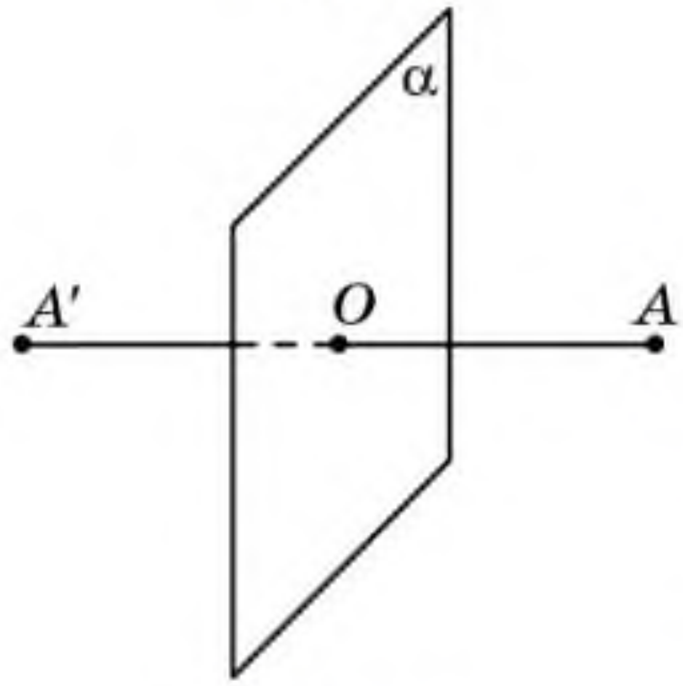
Фазонинг ҳар бир A нуқтасини берилган a тўғри чизиғига нисбатан A' нуқтасига кўчирадиган фазодаги шакл алмаштириш *ўқ симметрик* деб аталади. a тўғри чизиғи *симметрия ўқи* деб аталади.

Агар фазодаги a тўғри чизиғига нисбатан Φ фигурасининг ҳар бир A нуқтаси иккинчи Φ' фигурасининг қандайда бир A' нуқтасига симметрик бўлса, унда Φ ва Φ' фигуралари a ўқига нисбатан *симметрик фигуралар* деб аталади (5.5-расм).

Агар фазодаги a тўғри чизиғига нисбатан Φ фигураси ўз-ўзига симметрик бўлса, унда Φ фигураси *a ўқига нисбатан симметрик* деб аталади.



5.6-расм



5.7-расм

Масалан, тўғри бурчакли параллелепипед ўзининг қарама-қарши жойлашган ёқлари диагоналларининг кесишиш нуқталари орқали ўтувчи ўқига нисбатан *марказий симметрик бўлади* (5.6-расм).

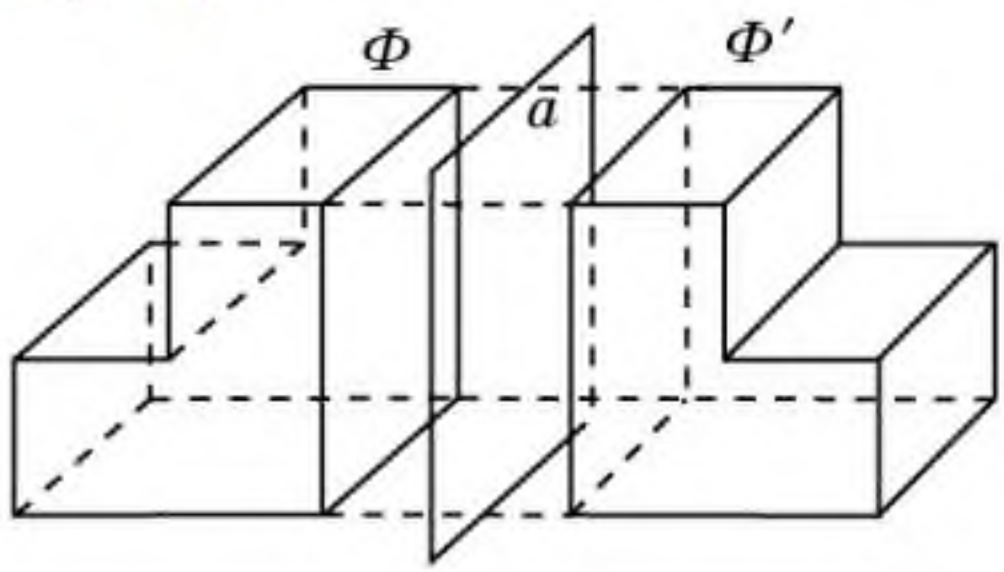
Қандай ўйлайсизлар, фигурада бир нечта симметрия ўқлари бўла оладими?

Агар фазодаги α текислиги AA' кесмасига перпендикуляр ва унинг ўртаси орқали ўтса, унда A ва A' нуқталари α *текислигига нисбатан симметрик* деб аталади (5.7-расм). α текислигининг ҳар бир нуқтаси ўз-ўзига симметрик бўлади.

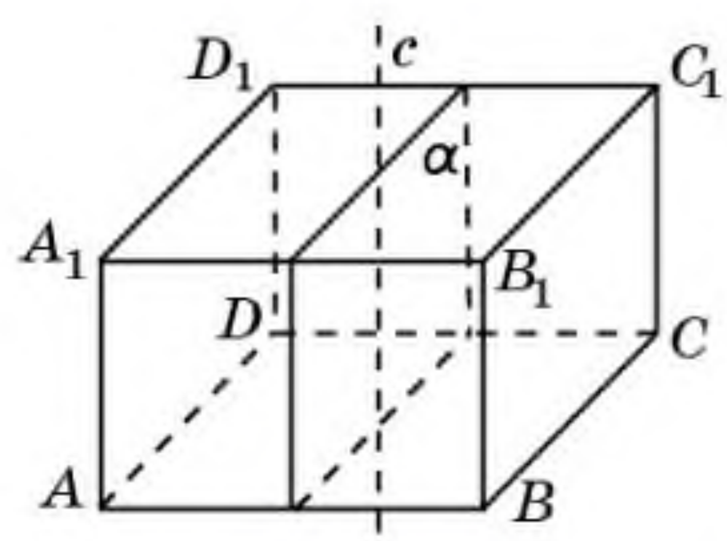
Фазонинг ҳар бир A нуқтасини берилган текислигига нисбатан A' нуқтасига кўчирадиган фазодаги шакл алмаштириш α *текислигига нисбатан симметрия* деб аталади. α текислиги *симметрия* текислиги деб аталади.

Текисликка нисбатан симметрия *кўзгуда акслангандай симметрия* деб ҳам аталади.

Агар фазодаги α текислигига нисбатан Φ фигурасининг ҳар бир A нуқтаси иккинчи Φ' фигурасининг қандай да бир A' нуқтасига кўзгуда акслангандай симметрик бўлса, унда Φ ва Φ' фигуралари α текислигига нисбатан *кўзгуда акслангандай симметрик фигуралар* деб аталади (5.8-расм).



5.8-расм



5.9-расм

Агар фазодаги α текислигига нисбатан Φ фигураси ўз-ўзига кўзгуда акслангандай симметрик бўлса, унда Φ фигураси α текислигига нисбатан *кўзгуда акслангандай симметрик* деб аталади.

Масалан, тўғри бурчакли параллелепипед ўзининг симметрия ўқи орқали ўтувчи ва қарама-қарши жойлашган ёқларининг биттасига параллель бўладиган текисликка нисбатан кўзгуда акслангандай симметрик бўлади (5.9-расм).

Қандай ўйлайсизлар, фигурада бир нечта симметрия текисликлари бўла оладими?

Кристаллар — табиий кўпёқлар

Кўпёқларнинг кўплаган шаклларини одамларнинг ўзлари ўйлаб топгани йўқ, улар табиий кристаллар шаклида тузилган. Ош тузининг кристаллари куб шаклига мос (5.10-расм), музнинг ва кварцнинг кристаллари икки ёқли қаламнинг учларига ўхшаш бўлади, яъни асосларида олтибурчакли пирамидалар жойлашган олтибурчакли призма шаклида бўлади (5.11-расм).

7.10-расм

7.11-расм

Олмос кўпинча октаэдр шаклида учрайди (5.12-расм). Икки пичоқли исландия шпати (найзаси) оғма параллелепипед шаклида бўлади (5.13-расм).

Кристалларнинг ташқи шакли — уларнинг физик ва химик ҳоссаларининг кўринишигина. Уларнинг барчаси кристалларнинг геометрик тузилишининг ўзига ҳос хусусиятлари билан, масалан, кристаллик тўрда атомларнинг симметрик жойлашиши орқали тушунтирилади.

7.12-расм

7.13-расм

Кристалларга бошқа мисоллар ҳам келтиринг ва уларнинг шаклларини кўрсатинг.

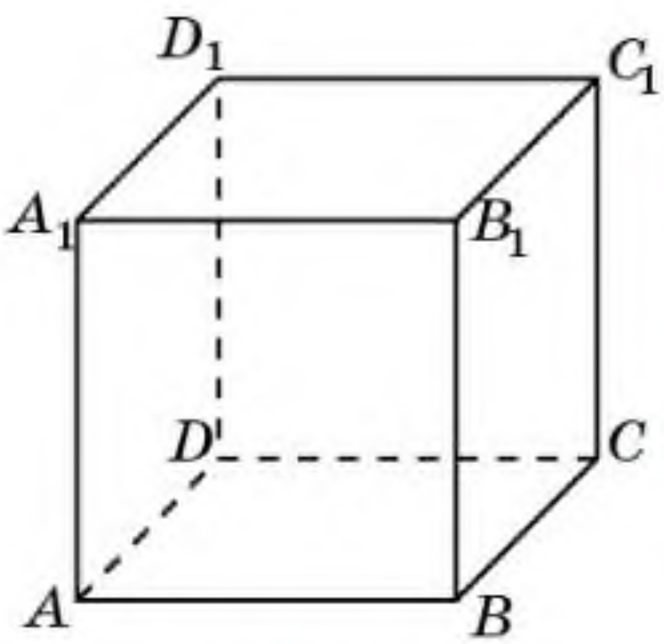
Кристаллар билан батафсил танишиш учун Қозоғистон Республикасининг Геология музейи ва А.Е.Ферсман номидаги Минералогия музейи сайтларига киришни тавсия қиламиз.

Саволлар

1. Фазонинг қандай нуқталари марказий симметрик деб аталади?
2. Фазодаги қандай шакл алмаштириш марказий симметрия деб аталади?
3. Фазодаги қандай икки фигура марказий симметрик фигуралар деб аталади?
4. Фазодаги қандай фигура марказий симметрик фигура деб аталади?
5. Қандай нуқталар тўғри чизиққа нисбатан симметрик деб аталади?
6. Фазодаги қандай шакл алмаштириш ўқ симметрияси деб аталади?
7. Фазодаги қандай икки фигура тўғри чизиққа нисбатан симметрик деб аталади?
8. Фазодаги қандай фигура тўғри чизиққа нисбатан симметрик деб аталади?
9. Фазодаги қандай нуқталар текисликка нисбатан симметрик деб аталади?
10. Фазодаги қандай шакл алмаштириш кўзгуда акслангандай симметрик деб аталади?
11. Фазодаги қандай икки фигура кўзгуда акслангандай симметрик деб аталади?
12. Фазодаги қандай фигура кўзгуда акслангандай симметрик деб аталади?

Машқлар

А



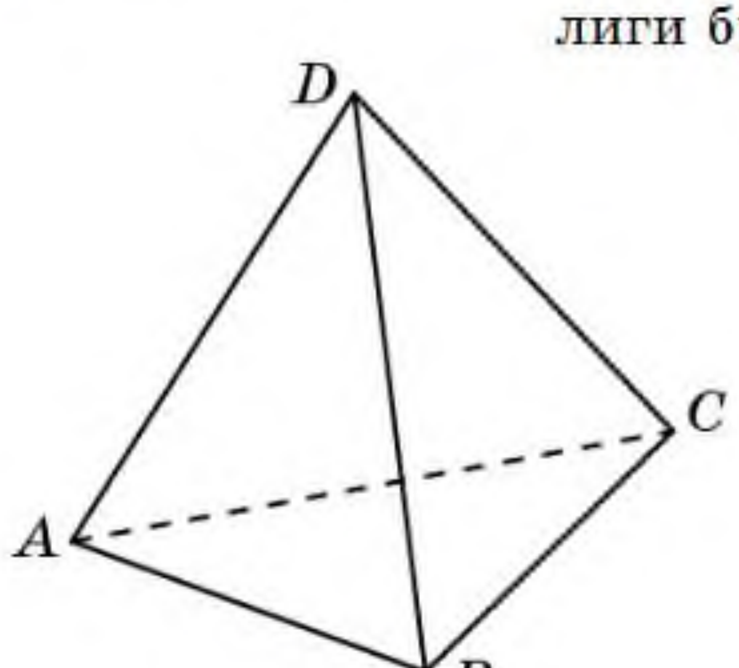
5.14-расм

5.1. Фазодаги марказий симметрик ва марказий симметрик эмас фигураларга мисоллар келтиринг.

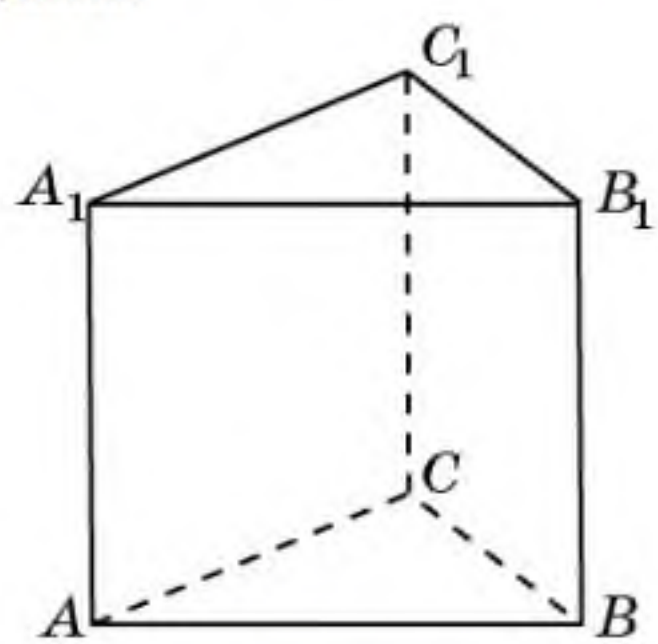
5.2. 5.14-расмдаги кубнинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?

5.3. 5.15-расмдаги мунтазам тетраэдрнинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?

5.4. 5.16-расмдаги мунтазам учбурчакли призманинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?

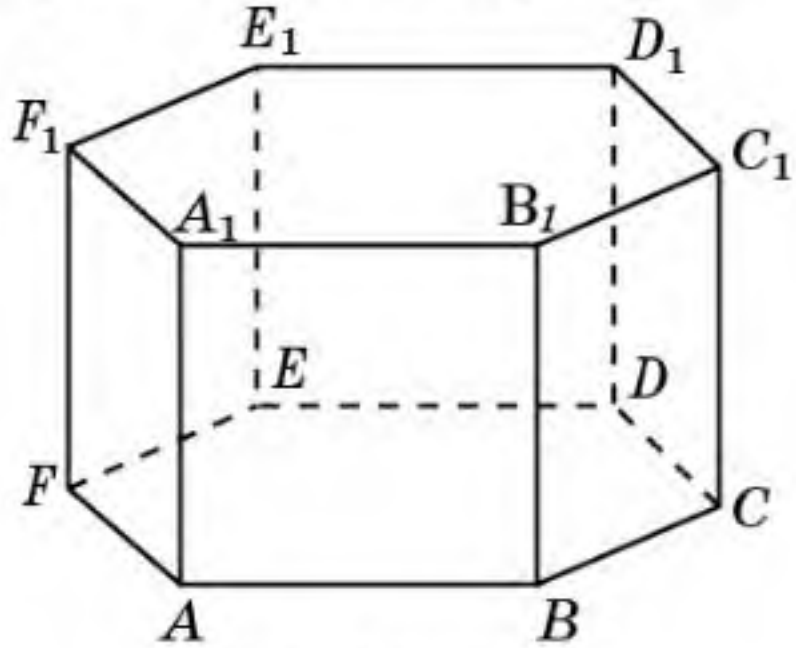


5.15-расм

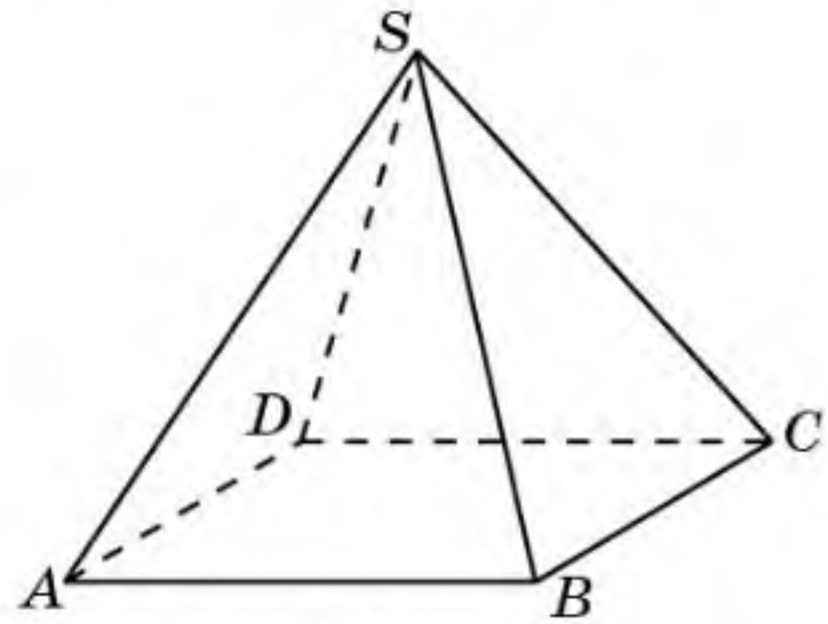


5.16-расм

5.5. 5.17-расмдаги мунтазам олтибурчакли призманинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?



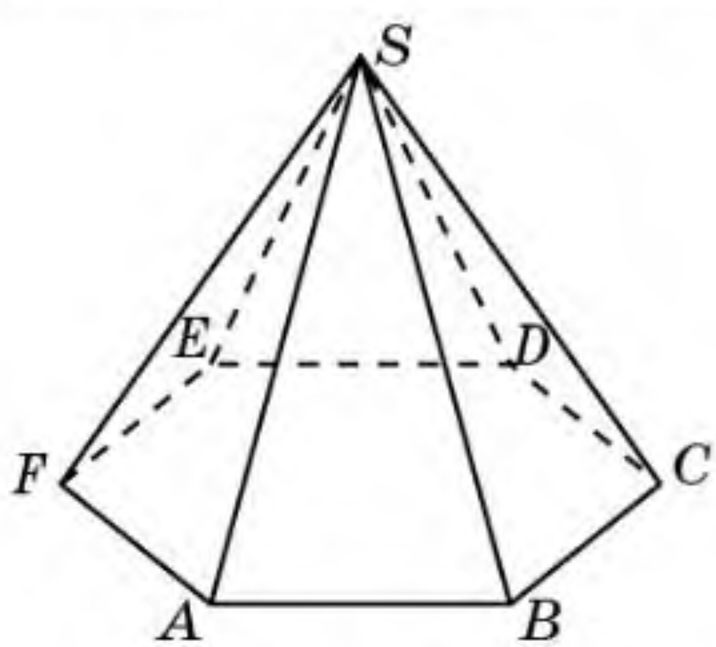
5.17-расм



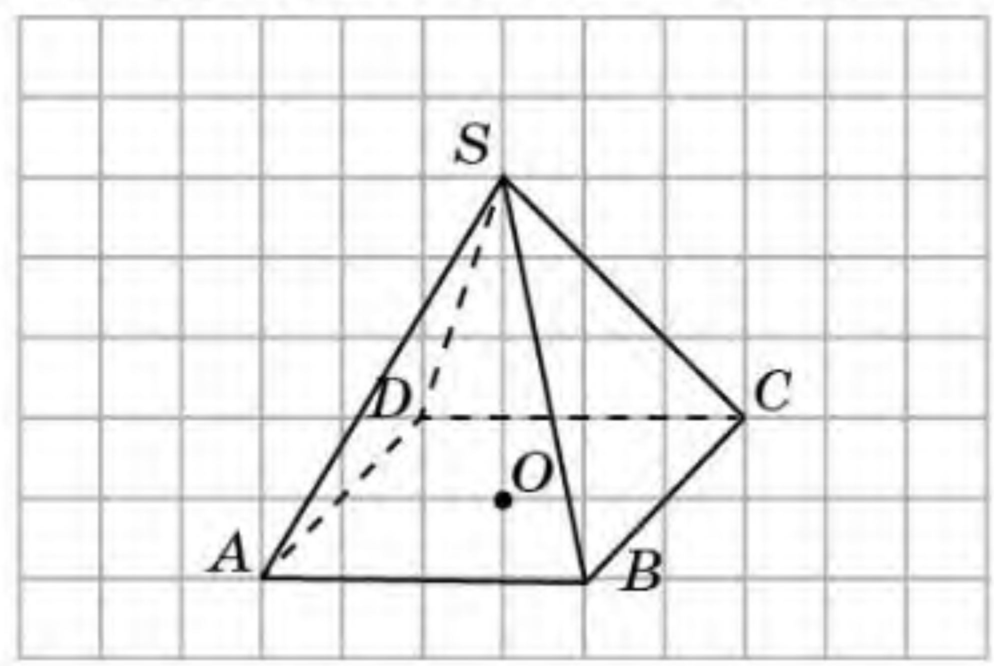
5.18-расм

5.6. 5.18-расмдаги мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?

5.7. 5.19-расмдаги мунтазам олтибурчакли пирамиданинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?



5.19-расм



5.20-расм

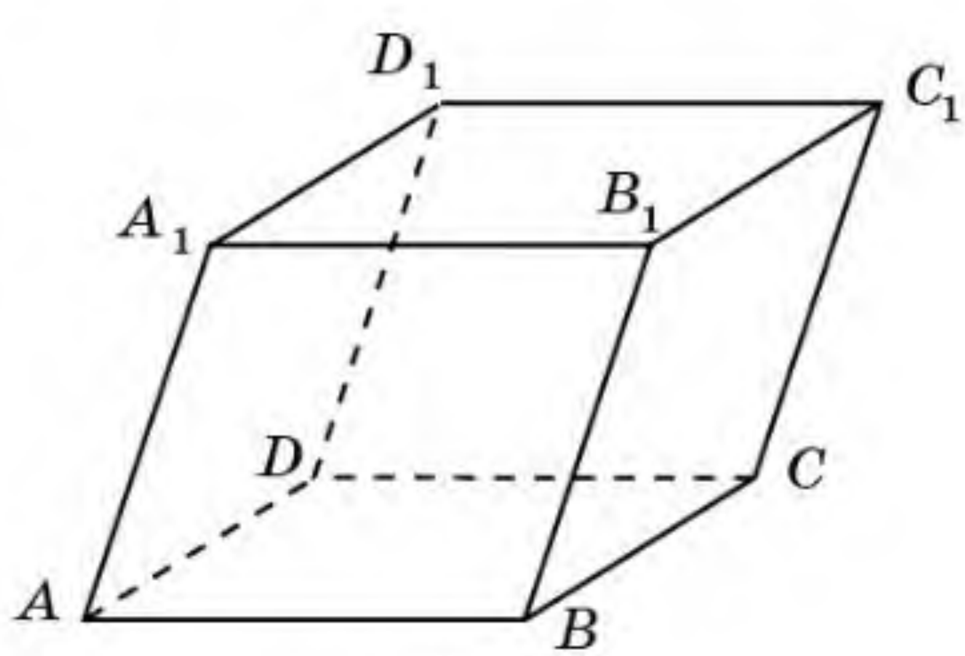
5.8. Катак қоғозда 5.20-расмдаги O нуқтасига нисбатан $SABCD$ пирамидасига симметрик пирамидани тасвирланг.

B

5.9. Параллель икки тўғри чизиқдан иборат фигураларнинг симметрия марказини кўрсатинг.

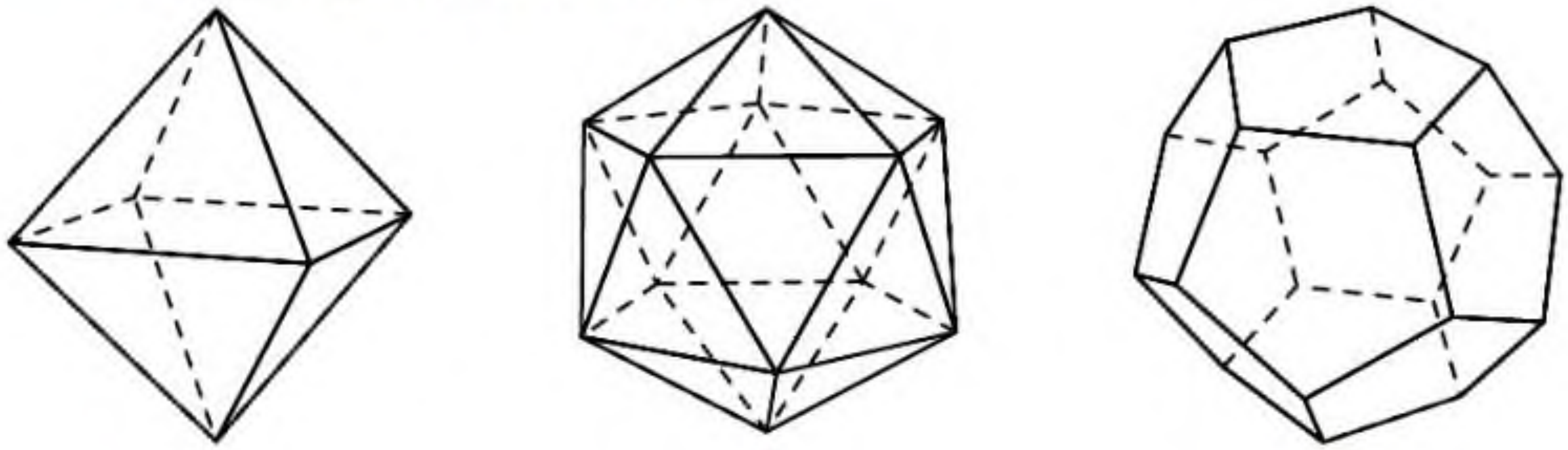
5.10. 1) Кесишувчи икки текисликдан; 2) параллел икки текисликдан иборат фигураларнинг симметрия марказини кўрсатинг.

5.11. Оғма параллелепипеднинг симметрия маркази бўладими (5.21-расм)?



5.21-расм

5.12. 1) Октаэдрнинг; 2) икосаэдрнинг; 3) додекаэдрнинг симметрия маркази бўладими (5.22-расм)?



а) б) в)

5.22-расм

5.13. Мунтазам: 1) учбурчакли призманинг (5.16-расм); 2) олтибурчакли призманинг нечта симметрия ўқи бўлади (5.17-расм)?

5.14. Мунтазам: 1) учбурчакли призманинг (5.16-расм); 2) олтибурчакли призманинг нечта симметрия текислиги бўлади (5.17-расм)?

5.15. Мунтазам: 1) тўртбурчакли пирамиданинг (5.18-расм); 2) олтибурчакли пирамиданинг нечта симметрия ўқи бўлади (5.19-расм)?

5.16. Мунтазам: 1) тўртбурчакли пирамиданинг (5.18-расм); 2) олтибурчакли пирамиданинг нечта симметрия текислиги бўлади (5.19-расм)?

C

5.17. Мунтазам: 1) n-бурчакли призманинг; 2) n-бурчакли пирамиданинг нечта симметрия ўқи бўлади?

5.18. Мунтазам: 1) n-бурчакли призманинг; 2) n-бурчакли пирамиданинг нечта симметрия текислиги бўлади?

5.19. 1) Октаэдрнинг; 2) икосаэдрнинг; 3) додекаэдрнинг нечта симметрия ўқи бўлади (5.22-расм)?

5.20. 1) Октаэдрнинг; 2) икосаэдрнинг; 3) додекаэдрнинг нечта симметрия текислиги бўлади (5.22-расм)?

5.21. Фазовий фигуранинг симметрия маркази унга тегишли бўлмаслиги мумкинми? Мисол келтиринг.

5.22. 1) Симметрия маркази бор, аммо симметрия ўқи йўқ; 2) симметрия ўқи бор, аммо симметрия маркази йўқ фазодаги фигураларга мисол келтиринг.

5.23. 1) Симметрия маркази бор, аммо симметрия текислиги йўқ; 2) симметрия ўқи бор, аммо симметрия текислиги йўқ фазодаги фигураларга мисол келтиринг.

5.24. 1) Симметрия текислиги бор, аммо симметрия маркази йўқ; 2) симметрия текислиги бор, аммо симметрия ўқи йўқ фазодаги фигураларга мисол келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

5.25. Текисликдаги буришнинг қоидасини такрорланг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Қаварик кўпёқнинг ҳар бир учидан учта қирраси тарқайди. Агар унинг 12 учи бор бўлса, унда унинг нечта қирраси бўлади:

A) 12; B) 16; C) 18; D) 24?

2. Қаварик кўпёқнинг ҳар бир учида учта учбурчакли ёқлари бирикади. Агар унинг 4 та ёғи бор бўлса, унда унинг нечта учи бўлади:

A) 4; B) 6; C) 9; D) 12?

3. Қаварик кўпёқнинг ёқлари — учбурчаклар. Агар унинг 12 та қирраси бор бўлса, унда унинг нечта ёғи бўлади:

A) 6; B) 8; C) 9; D) 12?

4. Қаварик кўпёқнинг 10 та учи билан 15 та қирраси бор. Унинг нечта ёғи бўлади:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

5. Қаварик кўпёқнинг 6 та учи билан 5 та ёғи бор. Унинг нечта қирраси бўлади:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

6. Қаварик кўпёқнинг 12 та қирраси билан 8 та ёғи бор. Унинг нечта учи бўлади:

A) 6; B) 7; C) 8; D) 9?

7. Икосаэдрнинг нечта ёғи бўлади:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

8. Додекаэдрнинг нечта учи бўлади:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

9. Мунтазам тетраэдр ёқларининг ўрталари қандай кўпёқнинг учлари бўлади:

A) тетраэдр; B) куб; C) октаэдр; D) икосаэдр?

10. Куб ёқларининг ўрталари қандай кўпёқнинг учлари бўлади:

A) тетраэдр; B) куб; C) октаэдр; D) икосаэдр?

11. Додекаэдр ёйилмасида нечта бешбурчак бўлади:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

12. Мунтазам тетраэдрнинг қирралари 2 см га тенг. Унинг сиртининг юзини топинг:

A) $\sqrt{3}$ см²; B) $2\sqrt{3}$ см²; C) $3\sqrt{3}$ см²; D) $4\sqrt{3}$ см².

13. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи қирралари 1 см, 2 см ва 3 см. Параллелепипед сиртининг юзини топинг:

A) 11 см²; B) 18 см²; C) 22 см²; D) 28 см².

14. Мунтазам учбурчакли призманинг ён қирралари 1 см га, асосининг томонлари эса 2 см га тенг. Призма сиртининг юзини топинг:

A) $3 + \sqrt{3}$ см²; B) $3 + 2\sqrt{3}$ см²;
C) $6 + \sqrt{3}$ см²; D) $6 + 2\sqrt{3}$ см².

15. Кубнинг нечта симметрия ўқи бўлади:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

16. Мунтазам бешбурчакли призманинг нечта симметрия ўқи бўлади:

A) 5; B) 6; C) 8; D) 9?

17. Мунтазам тетраэдрнинг нечта симметрия текислиги бўлади:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

18. Мунтазам олтибурчакли призманинг нечта симметрия текислиги бўлади:

A) 3; B) 5; C) 7; D) 9?

19. Қайнатилган тузнинг кристаллари қандай кўпёқнинг шаклини беради:

A) куб; B) тетраэдр;
C) призма; D) октаэдр?

20. Олмос кристаллари кўпинча қандай кўпёқнинг шаклини беради:

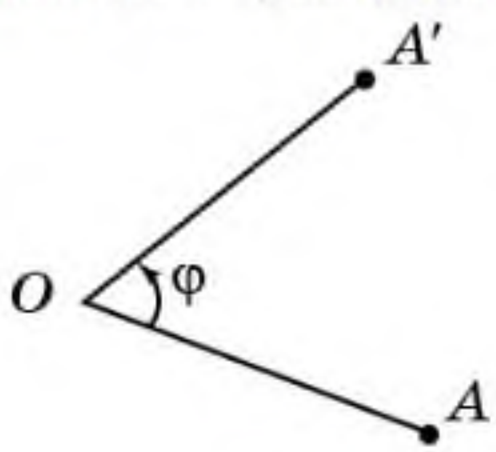
A) куб; B) тетраэдр;
C) призма; D) октаэдр?

II боб АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

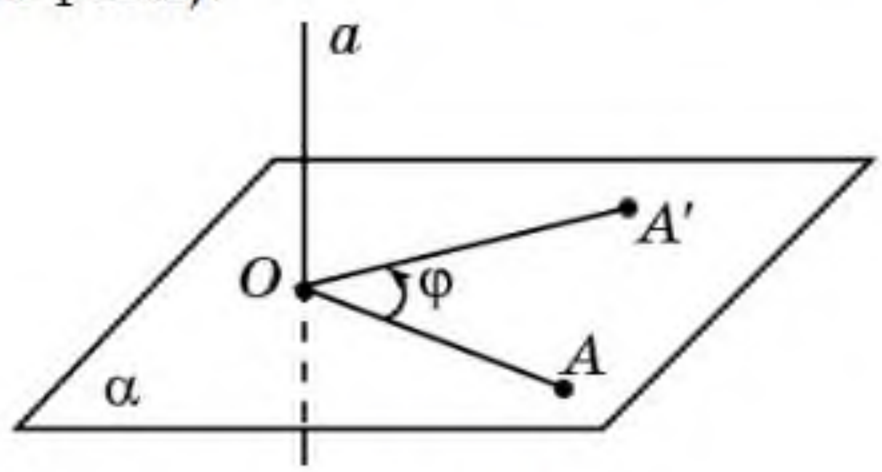
6-§. Цилиндр ва унинг элементлари. Цилиндрнинг ёйилмаси, ён ва тўла сиртларининг юзлари

Фазодаги фигураларнинг орасида кўпёқлардан бошқа айланиш жисмлари деб аталадиган фигуралар алоҳида ўрин олади.

Агар $OA' = OA$ ва $\angle A'OA =$ ј бўлса, унда текисликдаги A' нуқта A нуқтани O нуқтадан ј бурчакка айлантира буриш натижасида ҳосил бўлишини эсга туширайлик (6.1-расм).



6.1-расм



6.2-расм

Фазода a тўғри чизиғи ва шу тўғри чизиғида ётмайдиган A нуқтаси берилсин (6.2-расм). A нуқтаси орқали a тўғри чизиғига перпендикуляр а текислигини ўтказамиз ва a тўғри чизиғи билан а текислигининг кесишиш нуқтасини O деб белгилайлик. Агар а текислигида A' нуқтаси A нуқтасини O нуқтасидан айлантира ј бурчакка буриш натижасида ҳосил бўлса, унда фазодаги A' нуқтаси A нуқтасини O нуқтасидан айлантира ј бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинди деб айтилади.

a тўғри чизиғининг нуқталари ўрнида қолиб, қолган барча нуқталар эса шу тўғри чизиқ атрофида бир хил йўналишда маълум ј бурчакка буриладиган фазодаги шакл алмаштириш a тўғри чизиғи атрофида *буриш* ёки *айланиш* деб аталади. a тўғри чизиғи эса *айланиш ўқи* деб аталади.

Агар фазодаги Φ фигурасининг барча нуқталари F фигурасининг нуқталарини a ўқи атрофида бир хил йўналишда буриш натижасида ҳосил бўлса, унда Φ фигураси F фигурасининг a ўқи атрофида айлантириш натижасида олинди деб айтилади. Φ фигураси *айланиш жисми* деб аталади.

Масалан, a тўғри чизиғида ётмайдиган A нуқтасининг мана шу тўғри чизиқни айлантириш натижасида маркази O нуқтаси бўладиган айлана ҳосил бўлади. O нуқтаси A нуқтаси

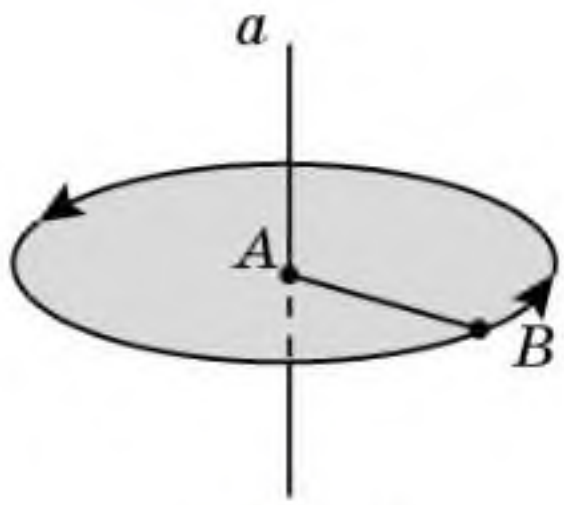
6.3-расм

орқали А ўтувчи ва a тўғри чизиғига перпендикуляр текисликнинг шу a тўғри чизиғи билан кесишиш нуқтаси бўлади (6.3-расм).

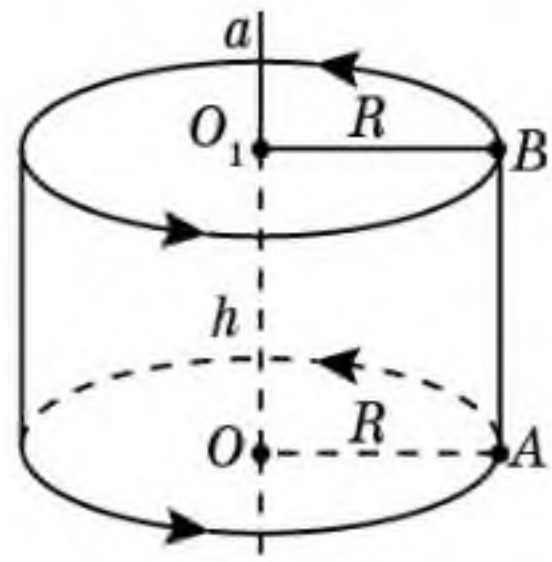
Кесманинг унга перпендикуляр ва унинг бир учи орқали ўтувчи тўғри чизиқни айлантириш натижасида радиуси шу кесмага тенг доира ҳосил бўлади (6.4-расм).

Цилиндр деб тўғри тўртбурчакни унинг томонларидан бири атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган фигурага (жисмга) айтилади.

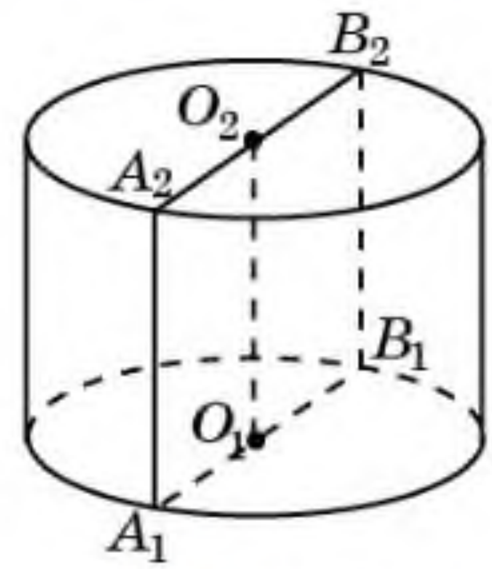
6.5-расмда AOO_1B тўғри тўртбурчакни OO_1 томонини ўз ичига олган a тўғри чизиғи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган цилиндр тасвирланган.



6.4-расм



6.5-расм



6.6-расм

Тўғри тўртбурчакнинг OO_1 томонига перпендикуляр бўлган OA ва O_1B томонларининг айланишидан олинган доиралар *цилиндрнинг асослари*, уларнинг радиуси эса *цилиндрнинг радиуси* деб аталади.

6.5-расмда цилиндрнинг OA радиуси тасвирланган. Тўғри тўртбурчакнинг OO_1 томонига параллел бўлган AB томонининг айланиши натижасида ҳосил бўлган сирт *цилиндрнинг ён сирти* деб аталади. *Цилиндрнинг тўла сирти* асослари билан ён сиртидан иборат. Тўғри тўртбурчакнинг OO_1 томонига параллел бўлган AB томонининг айланиши натижасида ҳосил бўлган кесмалар *цилиндрнинг ясовчиси* деб айтилади. 6.5-расмда цилиндрнинг AB ясовчиси тасвирланган.

Цилиндрнинг асос текисликлари орасидаги масофа *цилиндрнинг баландлиги* деб аталади. 6.5-расмда цилиндрнинг OO_1 баландлиги тасвирланган.

Цилиндрнинг баландлиги унинг ясовчисининг узунлигига тенг бўлишини исботланг.

Цилиндрнинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесими *цилиндрнинг ўқ кесими* деб аталади (6.6-расм).

Ўқ кесимнинг томонлари цилиндр асосларининг диаметрлари ва иккита ясовчиси ҳисобланади. 6.6-расмда $A_1A_2B_2B_1$ ўқ кесим тасвирланган.

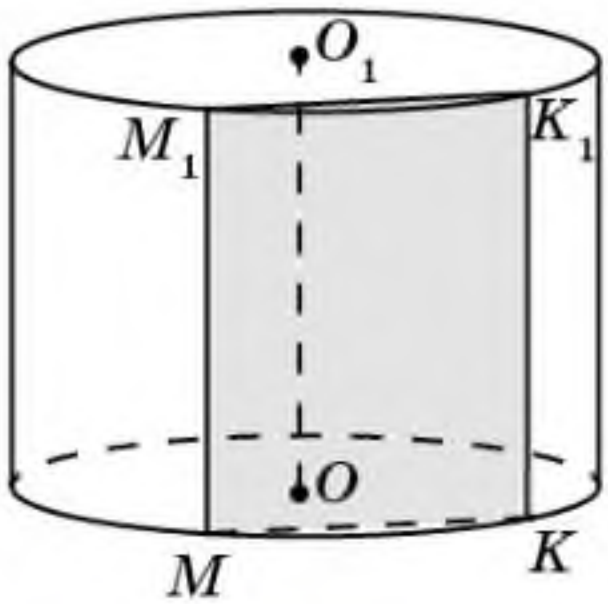
Цилиндрнинг ўқ кесими тўғри тўртбурчак бўлишини исботланг.

Цилиндрни мана шу тўғри тўртбурчакни унинг қарама-қарши жойлашган икки томони ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантириш орқали ҳосил қилиш мумкин.

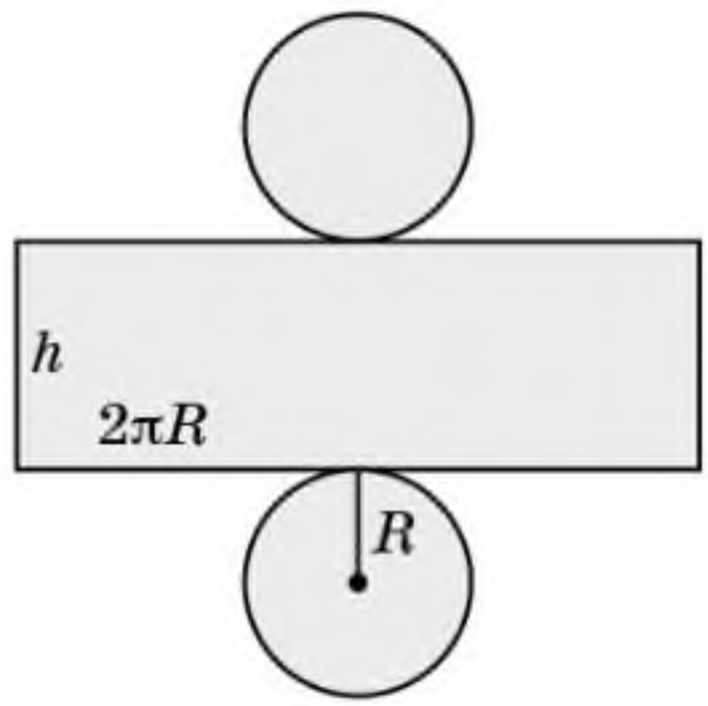
Цилиндрни тўғри тўртбурчакдан бошқа ёйиқ фигураларни айлантириш орқали олиш мумкинми?

Шу билан бир қаторда кесимни цилиндрнинг ўқига параллел ўтказиш мумкин (6.7-расм). Расмда MM_1K_1K кесим OO_1 ўққа параллел ўтказилган. Бу кесим цилиндр билан унинг иккита ясовчиси орқали ўтувчи текисликнинг кесишишидан пайдо бўлади.

Ушбу кесимнинг ҳам тўғри тўртбурчак бўлишини исботланг.



6.7-расм



6.8-расм

Агар цилиндрнинг ён сиртини ясовчиси бўйича кесиб текисликка ёйсак ва унга асосларини қўшсак, унда *цилиндрнинг ёйилмаси* деб аталувчи фигура ҳосил бўлади (6.8-расм).

R цилиндрнинг тўла сиртининг юзи деб унинг ёйилмаси юзига айтилади.

Цилиндрнинг ён сиртининг юзи деб унинг ён сирти ёйилмасининг юзига айтилади. *Цилиндрнинг ён сиртининг юзи* асос айланасининг узунлигини унинг баландлигига кўпайтмасига тенг, яъни қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S_{\text{ц.ён.с}} = 2\text{р}Rh,$$

бунда R — цилиндр асосининг радиуси, h — баландлиги.

Цилиндрнинг тўла сиртининг юзи унинг ён сирти билан икки асоси юзларининг йиғиндисига тенг бўлади, яъни қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S_{\text{ц.т.с}} = 2\text{р}Rh + 2\text{р}R^2 = 2\text{р}R(h + R),$$

бунда R — цилиндр асосининг радиуси, h — баландлиги.

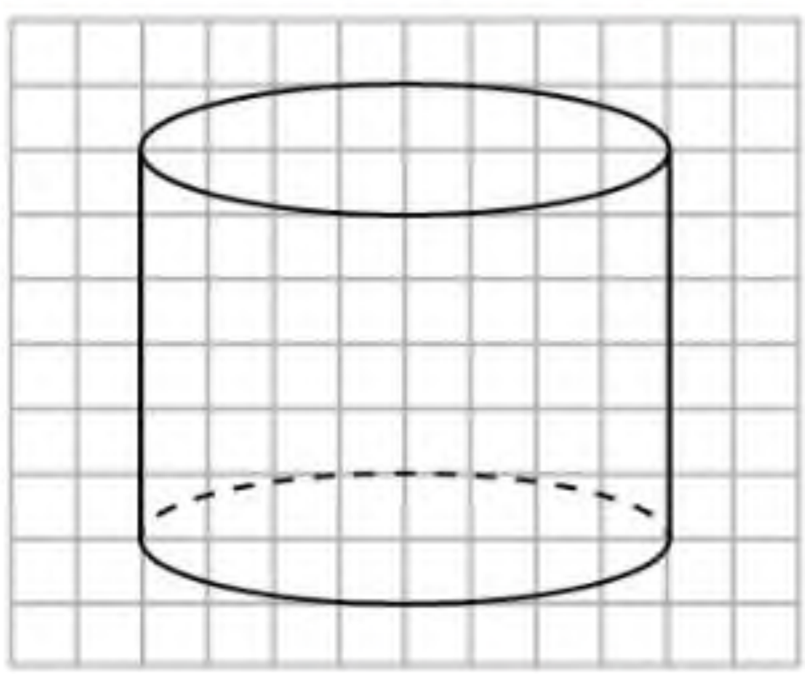
Саволлар

1. Фазодаги қандай шакл алмаштириш тўғри чизиқ атрофида буриш деб аталади?
2. Қандай фигура айланиш фигураси деб аталади?
3. Қандай фигура цилиндр деб аталади?
4. Цилиндрнинг ўқи деганимиз нима?
5. Цилиндрнинг асослари деганимиз нима?
6. Қандай фигура цилиндрнинг ён сирти деб аталади?
7. Қандай кесмалар цилиндрнинг ясовчилари деб аталади?
8. Цилиндрнинг баландлиги деганимиз нима?
9. Цилиндрнинг ўқ кесими деганимиз нима?
10. Цилиндрнинг ёйилмаси деганимиз нима?
11. Цилиндр сиртининг юзи деганимиз нима?
12. Цилиндрнинг ён сиртининг юзи деганимиз нима?
13. Цилиндрнинг ён сиртининг юзини топиш формуласини ёзинг.
14. Цилиндрнинг тўла сиртининг юзини топиш формуласини ёзинг.

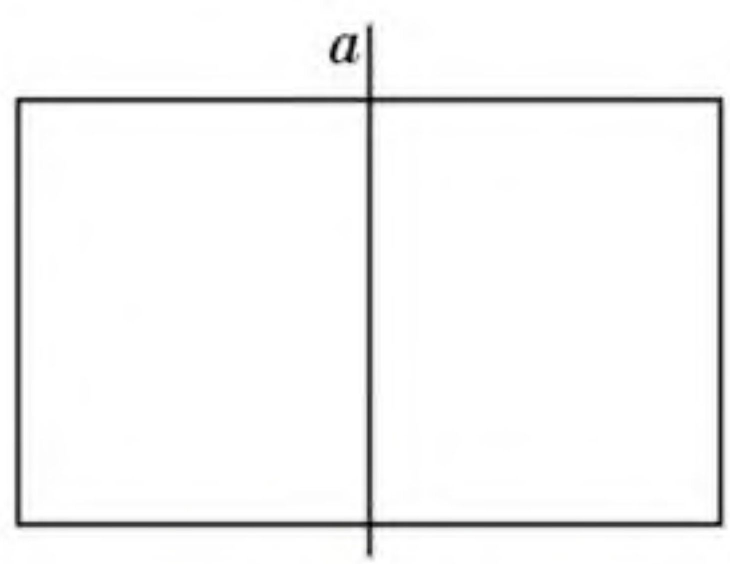
Машқлар

A

6.1. Катак қоғозда 6.9-расмдагига ўхшаш цилиндр чизинг. Цилиндрнинг ўқ кесимини тасвирланг.



6.9-расм



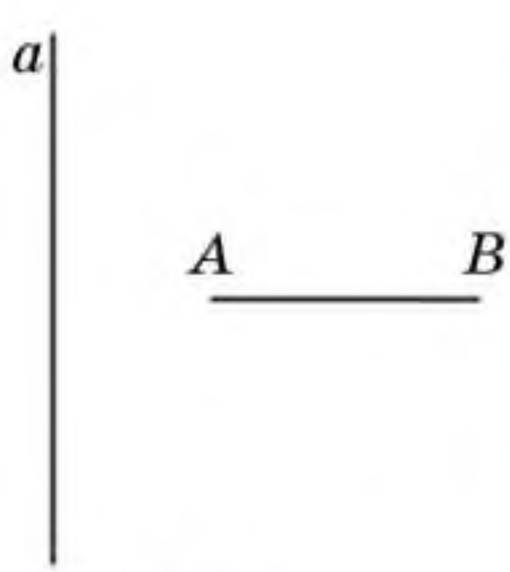
6.10-расм

6.2. Цилиндрнинг қанча ясовчиси бўлади?

6.3. Цилиндрнинг асосларига параллел текислик билан кесими қандай фигура бўлади?

6.4. Тўғри тўртбурчакни унинг қарама-қарши ётган икки томонининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (6.10-расм)?

6.5. AB кесмасини шу кесма билан бир текисликда ётган, умумий нуқталари бўлмайдиган ва унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ атрофида айлантирганида қандай фигура ҳосил бўлади (6.11-расм)?



6.11-расм

6.6. Цилиндрнинг баландлиги 3 см га, асосининг радиуси эса 2 см га тенг. Унинг ўқ кесимининг диагоналини топинг.

6.7. Цилиндрнинг ён сиртининг ёйилмаси — томони 1 см га тенг квадрат. Цилиндр асосининг радиусини топинг.

6.8. Цилиндр асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тенг. Унинг: 1) ён сиртининг; 2) тўла сиртининг юзини топинг.

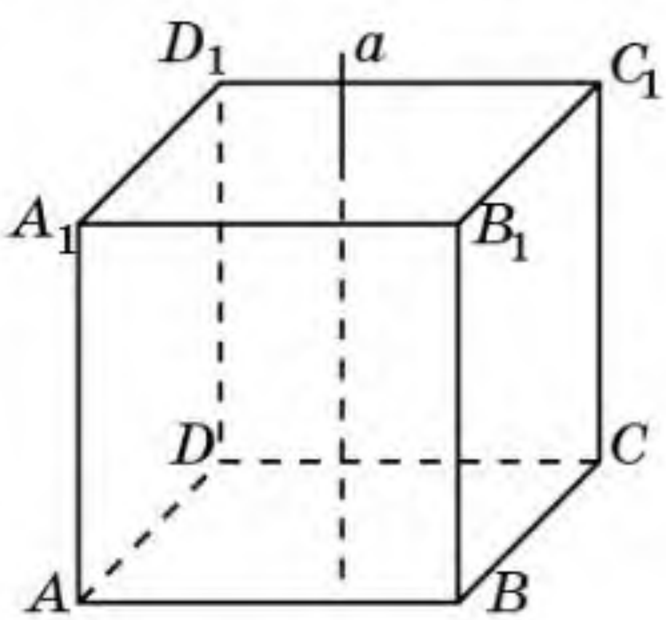
B

6.9. Катак қоғозга 6.9-расмдагига ўхшаш цилиндрни чизинг. Шу цилиндрнинг асосларига параллел текислик билан кесимини тасвирланг.

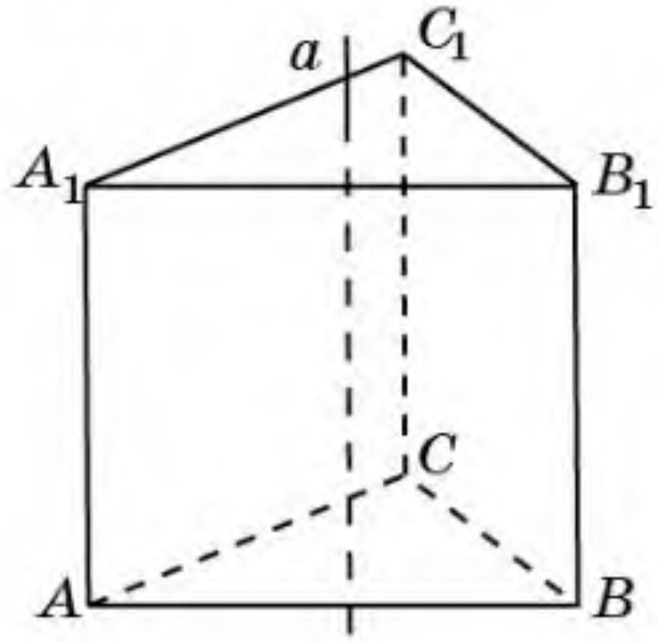
6.10. Катак қоғозга 6.9-расмдагига ўхшаш цилиндрни чизинг. Шу цилиндрнинг ўқига параллел текислик билан кесимини тасвирланг. У қандай фигура бўлади?

6.11. Цилиндрнинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?

6.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубини: 1) AA_1 тўғри чизиғидан; 2) қарама-қарши ёқларининг марказларини қўшувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (6.12-расм)?



6.12-расм



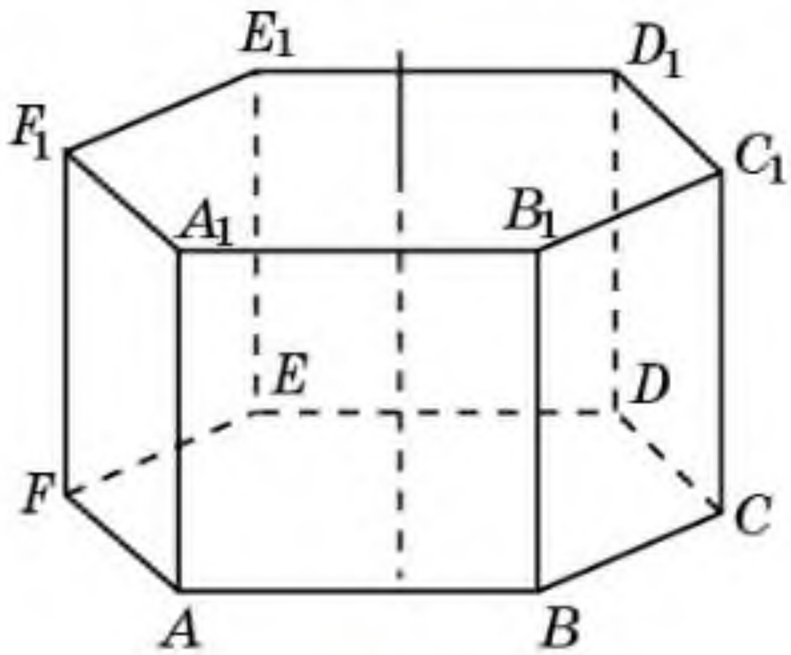
6.13-расм

6.13. $ABCDA,B,C,D,$ бирлик кубни: 1) AA_1 тўғри чизиғидан; 2) қарама-қарши ёқларининг марказларини қўшувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг.

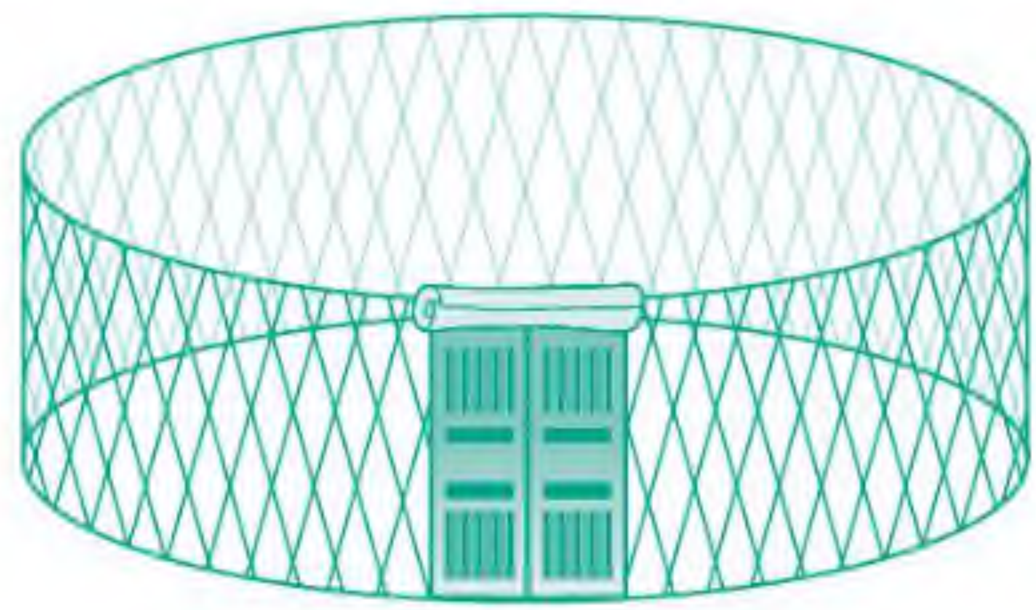
6.14. Мунтазам учбурчакли призмани унинг: 1) ён қирраси орқали ўтувчи тўғри чизиқдан; 2) асосларининг марказлари орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўйича айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (6.13-расм)?

6.15. Мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 см га тенг. Шу призмани унинг: 1) ён қирраси орқали ўтувчи тўғри чизиқдан; 2) асосларининг марказлари орқали ўтувчи тўғри чизиқдан айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг (6.13-расм).

6.16. Мунтазам олтибурчакли призмани унинг: 1) ён қирраси ётган тўғри чизиқдан; 2) асосларининг марказлари орқали ўтувчи тўғри чизиқдан айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (6.14-расм)?



6.14-расм



6.15-расм

6.17. Мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 см га тенг. Шу призмани унинг: 1) ён қирраси тўғри чизиқдан; 2) асосларининг марказлари орқали ўтувчи тўғри чизиқдан айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг (6.14-расм).

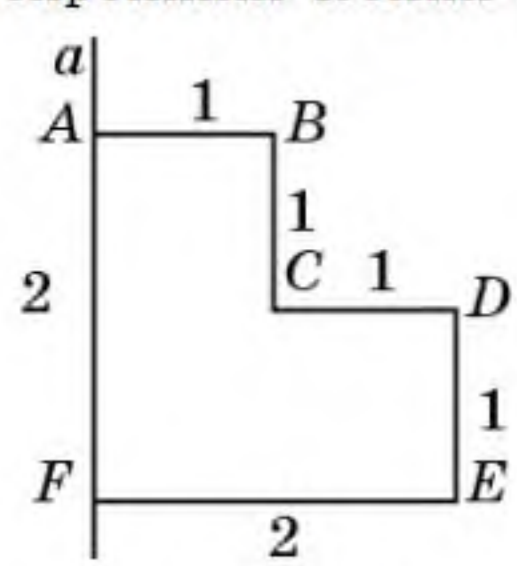
6.18. Кигиз уй — кўчманчиларнинг қадимдан келаётган уйи (6.15-расм). Баландлиги 2 м, диаметри эса 5 м бўладиган кигиз уй "керегеси" сиртининг юзини топинг.

6.19. Цилиндрнинг радиуси 6 см, баландлиги 5 см. Цилиндр ўқига параллел ва асос айланасидан 600 ли ёй ажратувчи текислик билан кесганда ҳосил бўлган кесимнинг юзини топинг.

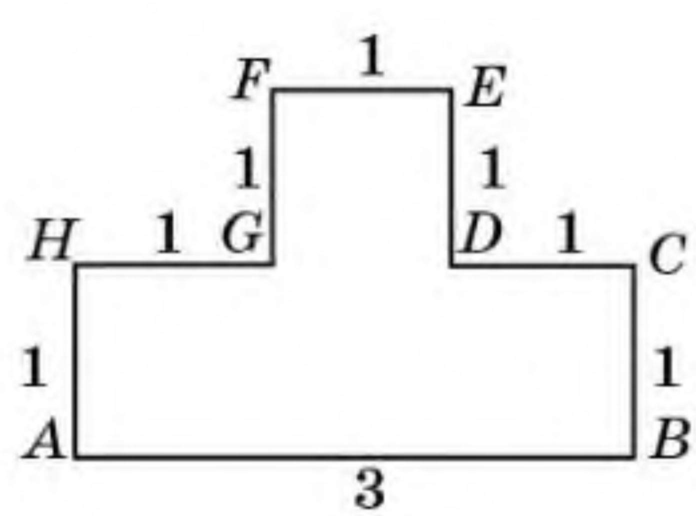
6.20. Цилиндрнинг битта ясовчиси орқали ўзаро перпендикуляр иккита кесим ўтказилган ва уларнинг юзалари 10 см^2 ва 24 см^2. Цилиндр ўқ кесимининг юзини топинг.

C

6.21. 6.16-расмдаги қўшни томонлари тўғри бурчак ясовчи $ABCDEF$ кўпбурчагини AF тўғри чизиғидан айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг.



6.16-расм

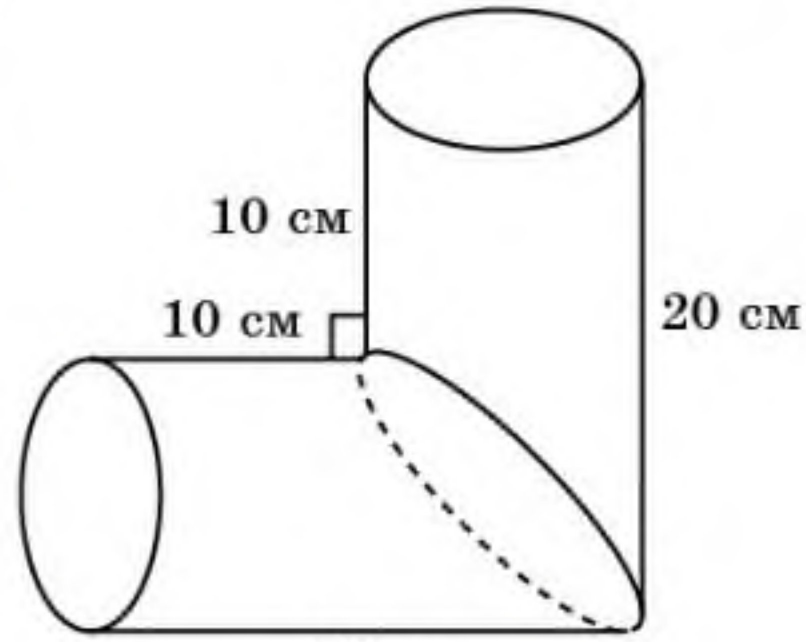


6.17-расм

6.22. 6.17-расмдаги қўшни томонлари тўғри бурчак ясовчи *ABCDEFGH* кўпбурчагининг *AB* тўғри чизиғидан айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг.

6.23. 6.17-расмдаги 90° бурчак ясовчи цилиндрларнинг иккита тенг қисмидан иборат фигура сиртининг юзини топинг.

6.24. Цилиндрнинг ўқига параллел ва асос айланасидан α ёй кесиб туширувчи текислик ўтказилган. Хосил бўлган кесимнинг диагонали билан цилиндрнинг ясовчиси орасидаги бурчак b га тенг. Цилиндрнинг радиуси R га тенг. Кесим юзасини топинг.



6.18-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

6.25. Тенг ёнли учбурчакнинг ва доиравий секторнинг қоидаларини такроланг.

7-§. Конус ва унинг элементлари. Конуснинг ёйилмаси, ён ва тўла сиртларининг юзалари

Конус деб тўғри бурчакли учбурчак катетларидан бирининг атрофида айлантирилганида ҳосил бўладиган фигурани (жисмни) айтади.

Бизга *ABO* тўғри бурчакли учбурчак берилсин (7.1-расм). Агар шу тўғри бурчакли учбурчакни унинг *AO* катети орқали ўтувчи *a* тўғри чизиғи бўйлаб айлантирсак, натижасида айланиш жисми – конусни ҳосил қиламиз.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг *AO* катети *конуснинг ўқи* деб аталади.

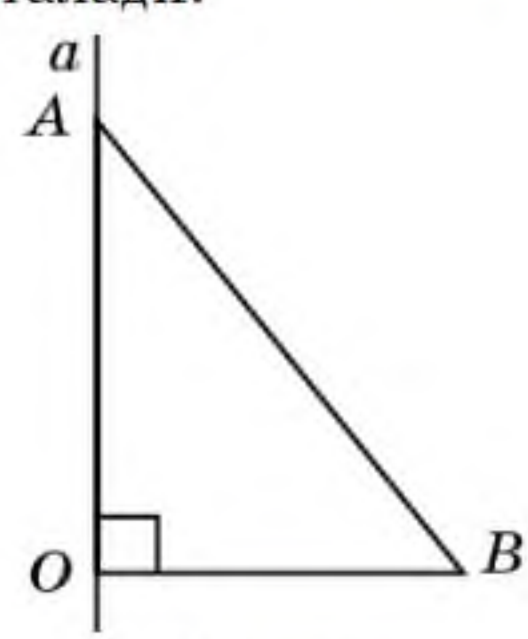
AO катетига перпендикуляр бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг *BO* томонининг айланиши натижасида ҳосил бўлган доиравий *конуснинг асоси*, унинг радиуси эса *конуснинг радиуси* деб аталади.

7.2-расмда конуснинг *OB* радиуси тасвирланган.

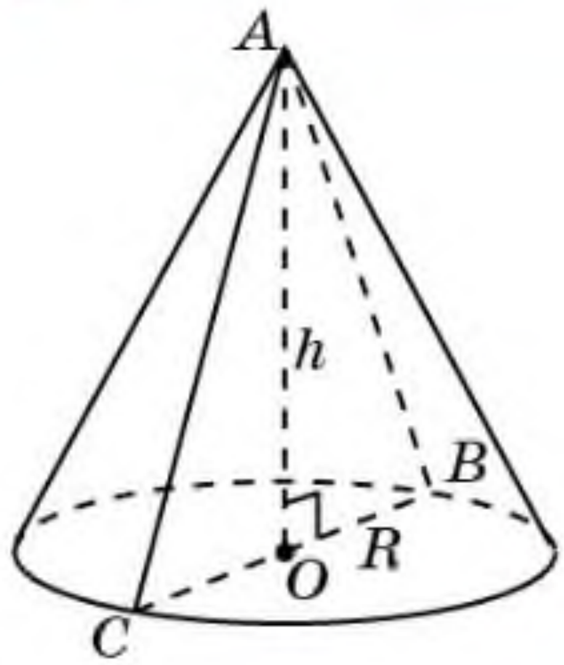
Тўғри бурчакли учбурчакнинг *AB* гипотенузасининг айланишидан ҳосил бўлган сирт *конуснинг ён сирти* деб аталади.

Конуснинг тўла сирти асоси билан ён сиртидан иборат.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг *AB* гипотенузасининг *AO* катетидан айланиши натижасида ҳосил бўлган кесмалар *конуснинг ясовчиси* деб аталади.



7.1-расм



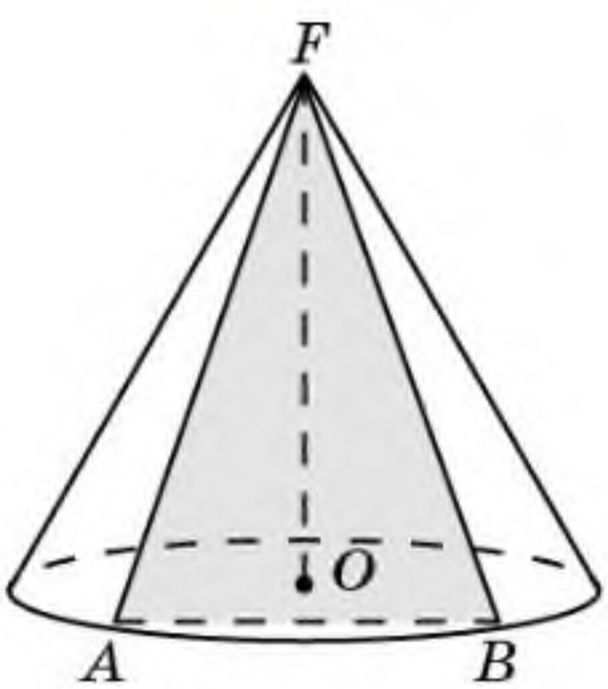
7.2-расм

7.2-расмда конуснинг AB ва AC ясовчилари тасвирланган.

Конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесмаси *конуснинг ўқ кесими* деб аталади (7.2-расм).

Ўқ кесимнинг томонлари конус асосининг диаметри ва иккита ясовчиси ҳисобланади. 7.2-расмда CAB ўқ кесим тасвирланган.

Конуснинг ўқ кесими — тенг ёнли учбурчак, унинг асоси конус асосининг диаметри бўлишини исботланг.



7.3-сурет

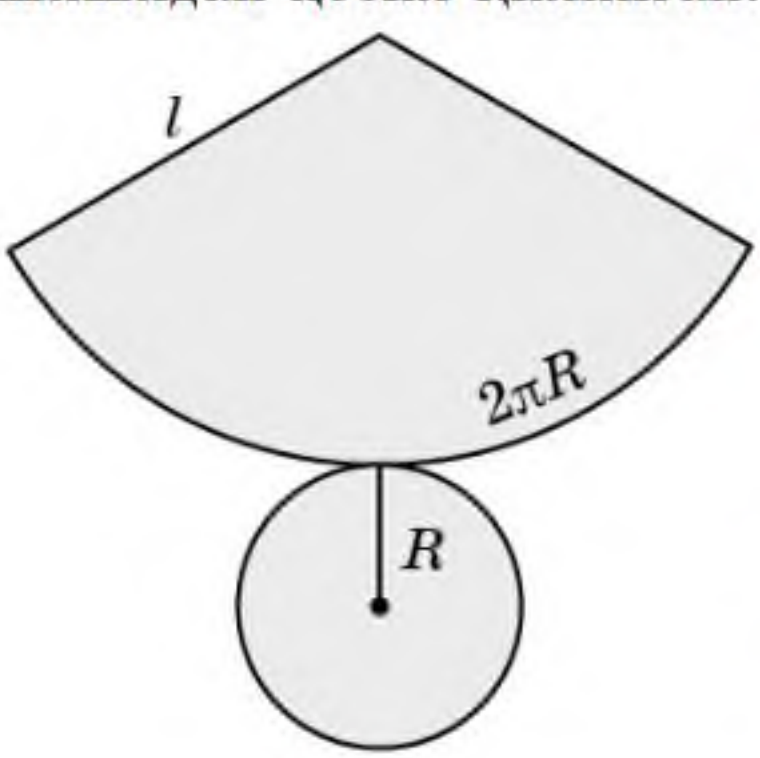
Конусни шу тенг ёнли учбурчакнинг асосига туширилган баландлиги ётувчи тўғри чизиқдан айлантириш натижасида ҳосил қилиш мумкин. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига қарши жойлашган учи *конуснинг учи* деб аталади.

Конуснинг учидан унинг асос текислигига туширилган перпендикулярнинг узунлиги *конуснинг баландлиги* деб аталади.

7.2-расмда конуснинг AO баландлиги тасвирланган.

Қандай ўйлайсизлар, конусни тўғри бурчакли эмас ва тенг ёнли эмас учбурчакни айлантириш орқали ясашга бўладими?

Шу билан бир қаторда кесимни конуснинг учи ва асосининг ватари орқали ҳам ўтказиш мумкин (7.3-расм). Расмда AFB кесим конуснинг F учи ва асосининг AB ватари орқали ўтувчи текислик билан кесишишидан ҳосил қилинган. Яъни, текислик конуснинг асосини ватар бўйича, ён сиртини эса иккита ясовчиси бўйича кесиб ўтади.



7.4-расм

Ушбу кесимнинг ҳам тенг ёнли учбурчак бўлишини исботланг.

Агар конуснинг ён сиртини ясовчиси бўйлаб кесиб текисликка ёйилса ва унга асосини қўшса, унда *конуснинг ёйилмаси* деб аталадиган фигура ҳосил бўлади (7.4-расм).

Конуснинг тўла сиртининг юзи деб унинг ёйилмасининг юзига айтилади.

Конуснинг ён сиртининг юзи деб унинг ён сиртининг ёйилмаси юзига айтилади.

Конуснинг ён сиртининг юзи унинг асоси айланаси узунлиги билан ясовчиси кўпайтмасининг ярмига тенг бўлади, яъни қуйидаги формула билан аниқланади:

$$S_{\text{кон.ён.с}} = \text{p}Rl,$$

Бу ерда R — конус асосининг радиуси l — ясовчиси.

Конуснинг тўла сиртининг юзи унинг ён сирти билан асосининг юзлари йиғиндисига тенг бўлади, яъни қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S_{\text{тўла}} = \text{p}Rl + \text{p}R^2 = \text{p}R(l + R),$$

бунда R — конус асосининг радиуси, l — ясовчиси.

Саволлар

1. Қандай фигура конус деб аталади?
2. Конуснинг ўқи деганимиз нима?
3. Конуснинг асоси деганимиз нима?
4. Қандай фигура конуснинг ён сирти деб аталади?
5. Қандай кесмалар конуснинг ясовчилари деб аталади?
6. Конуснинг ўқ кесими деганимиз нима?
7. Конуснинг учи деганимиз нима?
8. Конуснинг баландлиги деганимиз нима?
9. Қандай фигура конуснинг ёйилмаси деб аталади?
10. Конус сиртининг юзаси деганимиз нима?
11. Конуснинг ён сиртининг юзаси деганимиз нима?
12. Конуснинг ён сиртининг юзасини топиш формуласини ёзинг.
13. Конуснинг тўла сиртининг юзасини топиш формуласини ёзинг.

Машқлар

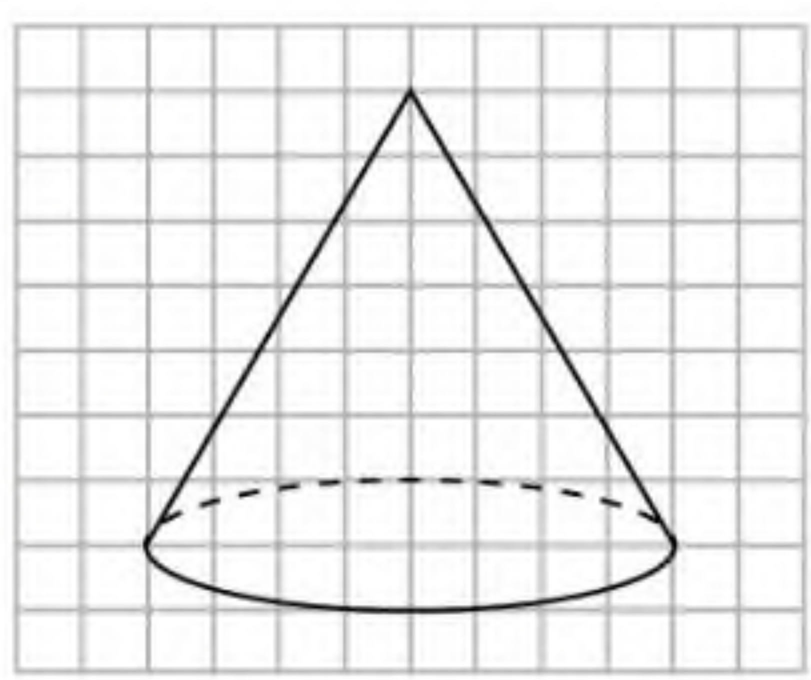
А

7.1. Катак қоғозга 7.5-расмдагига ўхшаш конусни чизинг. Конуснинг ўқ кесимини тасвирланг.

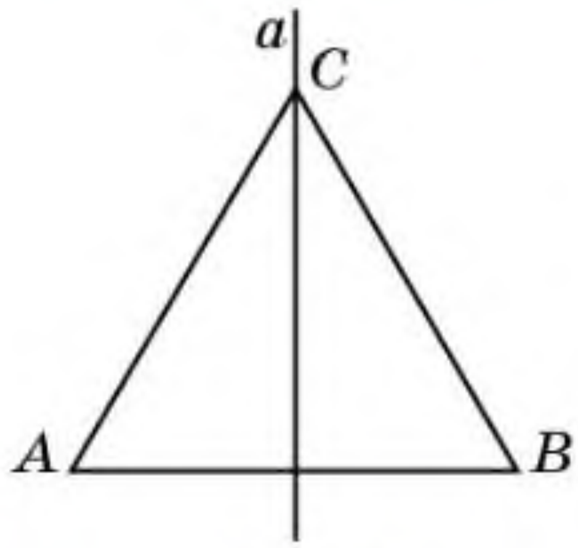
7.2. Конуснинг қанча ясовчиси бўлади?

7.3. Конуснинг асосига параллел текислик билан кесими қандай фигура бўлади?

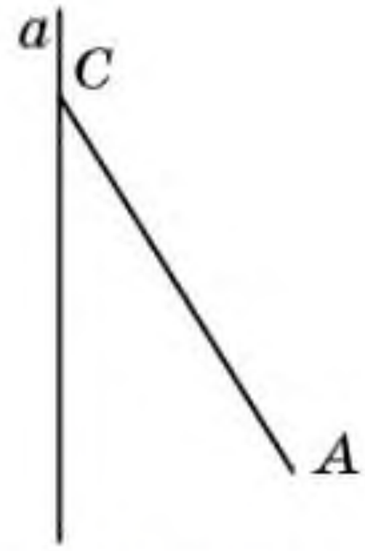
7.4. Тенг ёнли учбурчакни унинг асосига туширилган баландлиги ётадиган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.6-расм)?



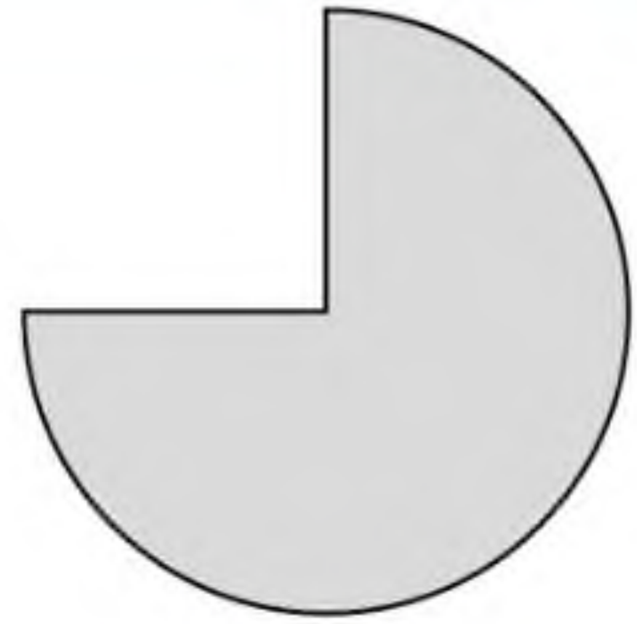
7.5-расм



7.6-расм



7.7-расм



7.8-расм

7.5. AC кесмасини C нуқтаси орқали ўтувчи ва унга перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.7-расм)?

7.6. Конус асосининг радиуси 3 см га, баландлиги эса 4 см га тенг. Конуснинг ясовчисини топинг.

7.7. Конуснинг ўқ кесими — томони 10 см бўлган тенг томонли учбурчак. Конуснинг: 1) асосининг радиусини; 2) баландлигини топинг.

7.8. Конуснинг ясовчиси 2 см га тенг ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясайди. Конуснинг баландлигини топинг.

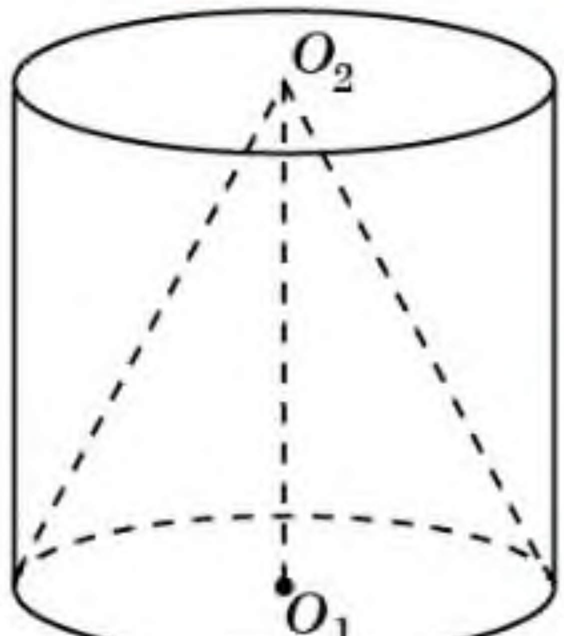
7.9. Конуснинг ясовчиси 2 см га тенг ва у асос текислиги билан 60° бурчак ясайди. Конус асосининг радиусини топинг.

7.10. Конус асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тенг. Конус сиртининг юзини топинг.

7.11. 7.8-расмдаги доиранинг қисми конуснинг ён сиртининг ёйилмаси бўлиши мумкинми?

B

7.12. Конус асосининг радиуси 1 см га тенг. Конус баландлигининг ўртаси орқали ўтувчи ва асос текислигига параллел текислик билан кесимининг юзини топинг.



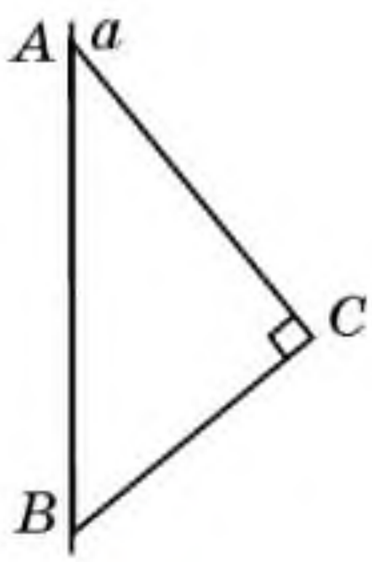
7.9-расм

7.13. Цилиндр асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тенг. Асоси цилиндрнинг бир асоси, учи эса цилиндрнинг иккинчи асосининг маркази бўладиган конуснинг ён сиртининг юзини топинг (7.9-расм).

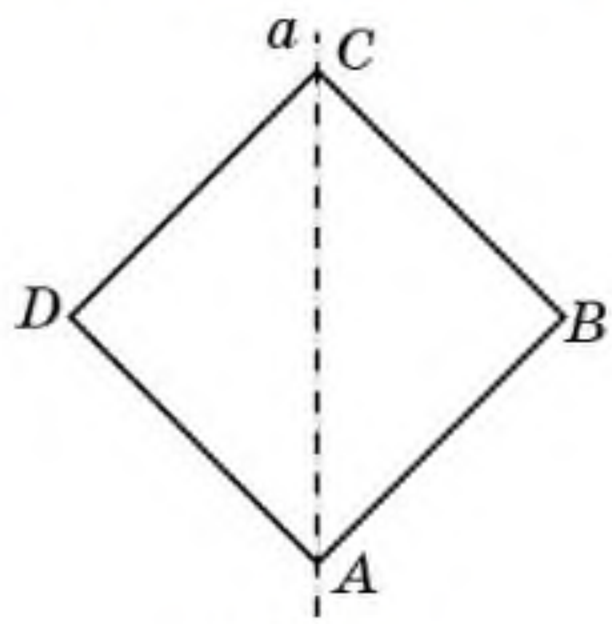
7.14. Конуснинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?

7.15. Тўғри бурчакли учбурчакни унинг гипотенузаси ётадиган тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.10-расм)?

7.16. Бирлик квадратни унинг диагонали ётадиган тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.11-расм)?



7.10-расм

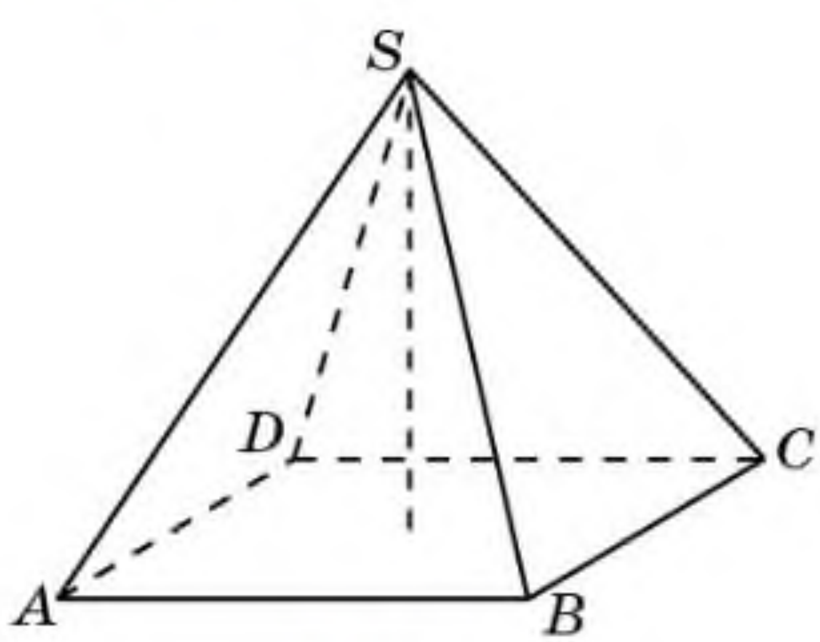


7.11-расм

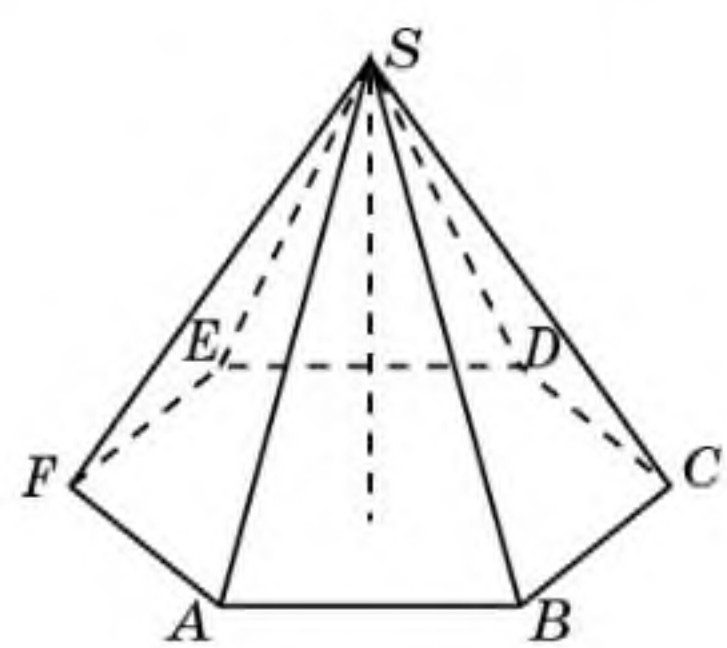
7.17. Мунтазам тўртбурчакли пирамидани унинг баландлиги ётадиган тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.12-расм)?

7.18. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 см га тенг. Шу пирамидани унинг баландлиги ётадиган тўғри чизиқ атрофида айлантирганда ҳосил бўладиган конус сиртининг юзини топинг (7.12-расм).

7.19. Мунтазам олтибурчакли пирамидани унинг баландлиги ётадиган тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.13-расм)?



7.12-расм



7.13-расм

7.20. Асосининг томонлари 1 см га, ён қирралари эса 2 см га тенг мунтазам олтибурчакли пирамидани унинг баландлиги ётадиган тўғри чизиқ атрофида айлантирганда ҳосил бўладиган конус сиртининг юзини топинг (7.13-расм).

7.21. Конуснинг баландлиги 4 см, асос айланасининг ватари эса 6 см га тенг ва у 90° ли ёйга тиралган. Конуснинг учи ва шу ватар орқали ўтувчи текислик билан кесимини топинг.

7.22. Конуснинг баландлиги h га тенг, унинг баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак 60° . Конуснинг ўзаро перпендикуляр иккита ясовчиси орқали ўтувчи текислик билан кесимининг юзини топинг.

C

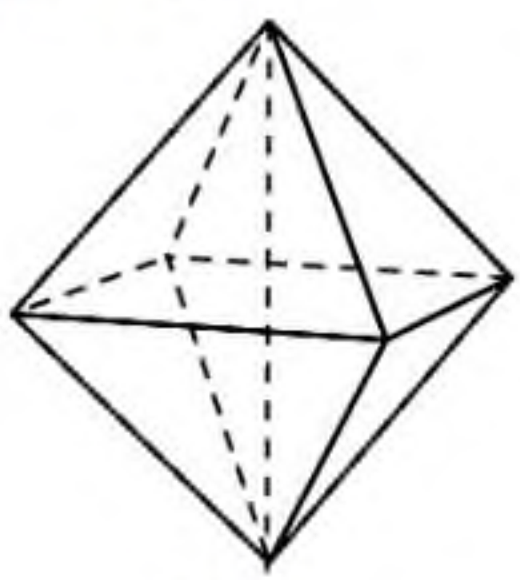
7.23. Октаэдрни унинг қарама-қарши жойлашган учларини қўшувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.14-расм). Октаэдрнинг қирраси 1 см га тенг деб олиб, ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг.

7.24. Конуснинг ён сиртининг ёйилмаси — радиуси 1 см га тенг ярим доира. Конус асосининг радиусини топинг.

7.25. Конус асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси 3 см га тенг. Конуснинг ён сиртининг ёйилмасининг марказий бурчагини топинг.

7.26. Конус шаклида йиғилган пичан тўпламини темир тунука билан ёпиш керак. Унинг баландлиги 2 м га, асосининг диаметри эса 6 м га тенг. Агар барча тунука сиртининг 10%и уларни улашга кетадиган бўлса, унда пичанни ёпиш учун 0,7 × 1,4 ўлчамдаги қанча тунука керак бўлади (p d 3)?

7.27. Қурилиш майдонидаги конус шаклидаги йиғилган қумнинг асоси айланасининг узунлигини метрлик лента билан ўлчаганда 21,6 м бўлди (7.15-расм). Метрли лентани йиғилган қумнинг учи орқали ошириб отиб ўлчаганда унинг икки ясовчисининг узунлиги 7,8 м экани аниқланди. Йиғилган қум сиртининг юзини топинг (p d 3).



7.14-расм

7.15-расм

7.28. Малика туғилган кунига атаб қоғоздан баландлиги 8 см, асосининг радиуси эса 6 см бўлган конуснинг ён сиртига ўхшаш 8 дона бош кийим ясамоқчи бўлди. Унга бош кийимларни ясаш учун қанча қоғоз ($см^2$) керак эканлигини топинг (p d 3).

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

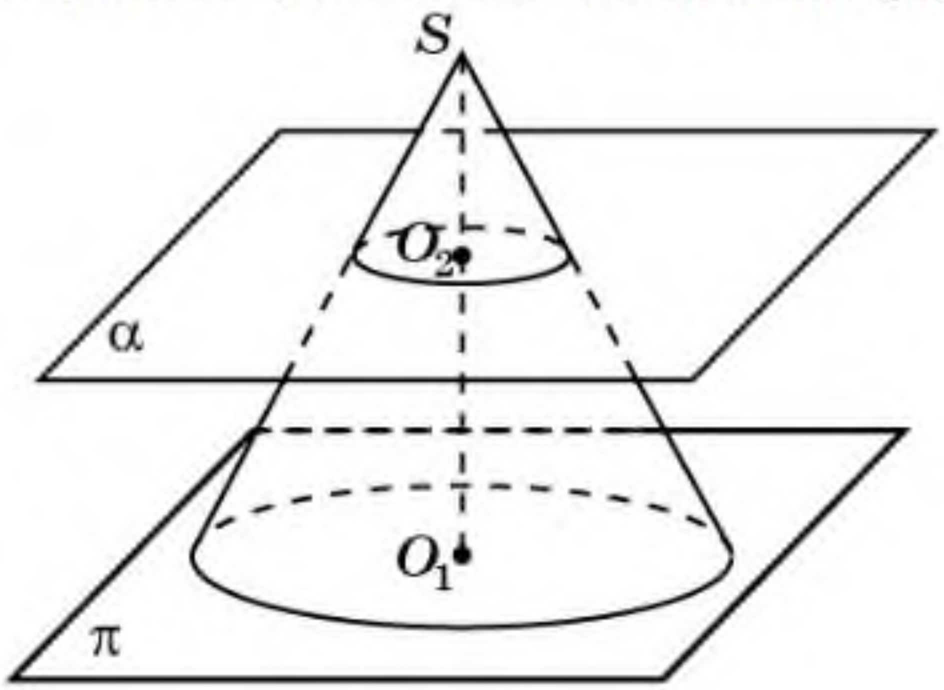
7.29. Доира ҳалқанинг қоидасини ва унинг юзини топиш формуласини такрорланг.

8-§. Кесик конус ва унинг элементлари. Кесик конус сиртининг юзаси

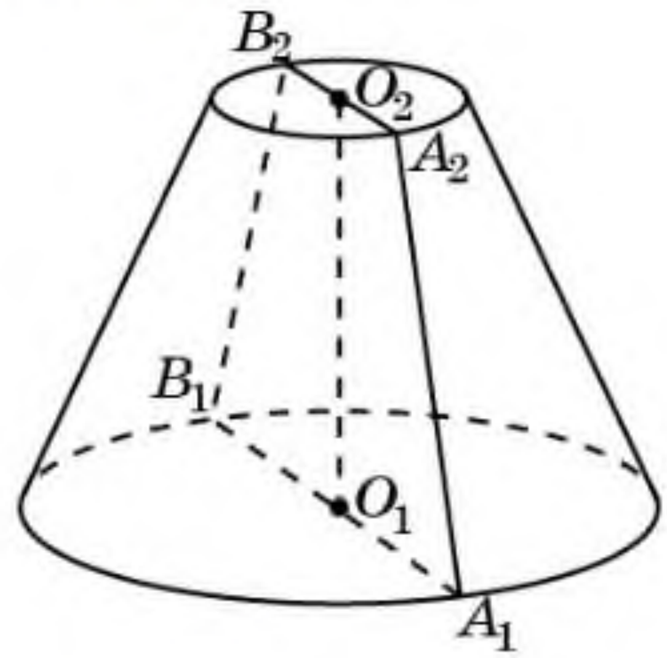
Агар конусни асос текислигига параллел текислик билан кесса, унда конуснинг шу текислик билан асос текислигининг орасидаги чегараланган қисми *кесик конус деб аталади* (8.1-расм).

Конуснинг асос текислигига параллел текислик билан кесими ҳам *кесик конуснинг асоси* деб аталади. Бинобарин, кесик конусни чегараловчи доираларни унинг *асослари* деб аталади.

Конуснинг ўқи *кесик конуснинг ўқи* деб аталади.



8.1-расм



8.2-расм

Кесик конус асосларининг орасида чегараланган конуснинг ён сиртининг қисми *кесик конуснинг ён сирти* деб аталади.

Кесик конус асосларининг орасида чегараланган конус ясовчиларининг кесмалари *кесик конуснинг ясовчилари* деб аталади.

Кесик конуснинг асос текисликлари орасидаги масофа *кесик конуснинг баландлиги* деб аталади.

Кесик конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесими *кесик конуснинг ўқ кесими* деб аталади (8.2-расм).

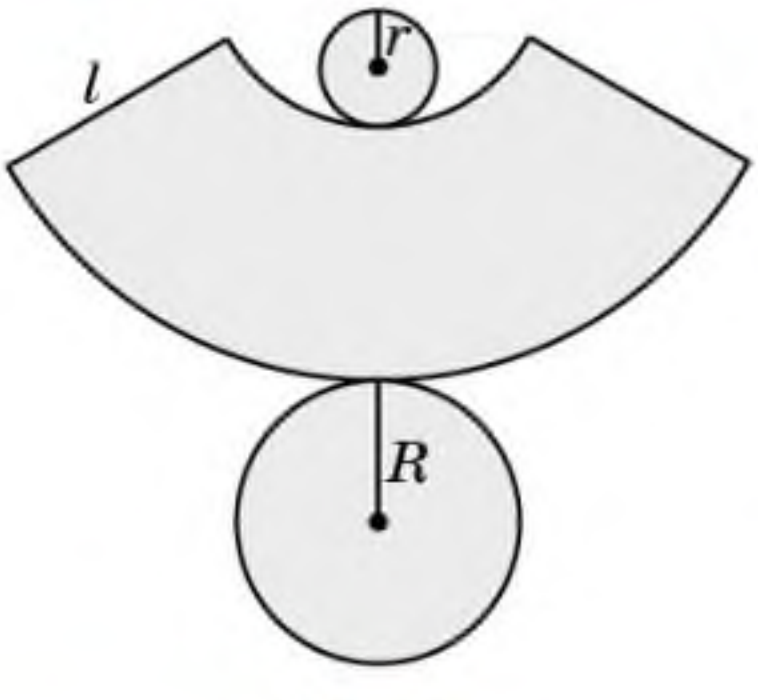
Кесик конуснинг ўқ кесими тенг ёнли трапеция бўлишини исботланг.

Кесик конусни шу тенг ёнли трапецияни унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилиш мумкин.

Кесик конусни тенг ёнли бўлмаган трапецияни айлантириш орқали ясаш мумкинми?

Агар кесик конуснинг ён сиртини ясовчиси бўйича кесиб текисликка ёйилса ва унга асослари қўшилса, унда кесик конуснинг ёйилмаси деб аталадиган фигура ҳосил бўлади (8.3-расм).

Кесик конус сиртининг юзи деб унинг ёйилмасининг юзига айтилади.



8.3-расм

Агар кесик конус асосларининг радиуслари R ва r, ясовчиси эса l га тенг бўлса, у ҳолда кесик конус ён сиртининг юзи ушбу формула билан аниқланади:

$$S_{\text{кес.кон.ён.с.}} = \pi(R + r)l.$$

Кесик конуснинг тўла сиртининг юзини олиш учун ён сиртининг юзига асосларининг юзларини қўшиш керак:

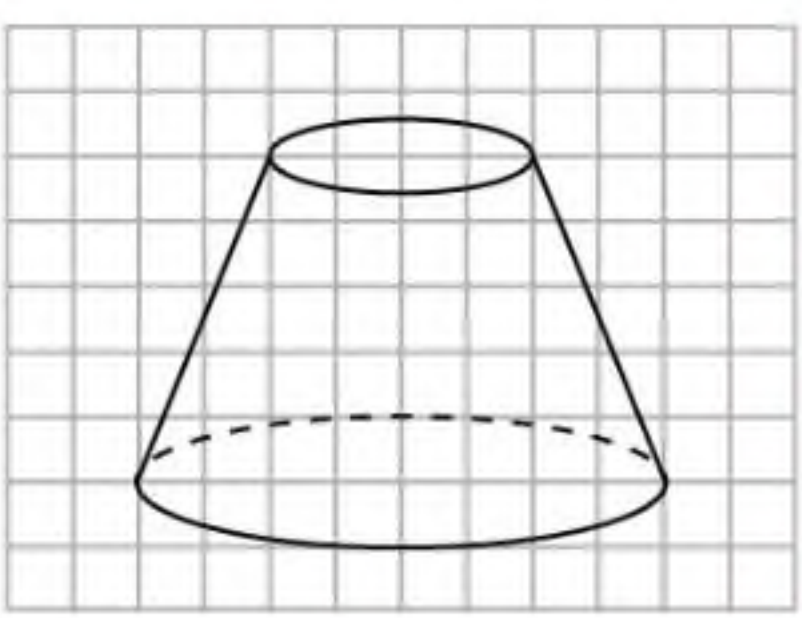
$$S_{\text{тўла}} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Саволлар

1. Қандай фигура кесик конус деб аталади?
2. Кесик конуснинг асослари деб нимага айтамиз?
3. Кесик конуснинг баландлиги деб нимага айтамиз?
4. Кесик конуснинг ўқи деганимиз нима?
5. Кесик конуснинг ўқ кесими деганимиз нима?
6. Қандай фигура кесик конуснинг ёйилмаси деб аталади?
7. Кесик конус сиртининг юзаси деганимиз нима?
8. Кесик конуснинг ён сиртининг юзаси деганимиз нима?
9. Кесик конуснинг ён сиртининг юзасини топиш формуласини ёзинг.
10. Кесик конуснинг тўла сиртининг юзасини топиш формуласини ёзинг..

Машқлар

A



8.4-расм

8.1. Катак қоғозга 8.4-расмдагига ўхшаш кесик конусни ясанг. Кесик конуснинг ўқ кесимини тасвирланг.

8.2. Кесик конуснинг қанча ясовчиси бўлади?

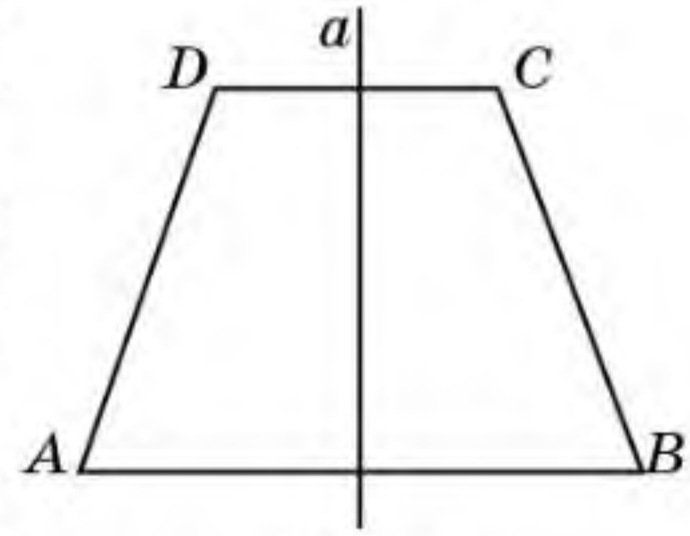
8.3. Кесик конуснинг асосига параллел текислик билан кесими қандай фигура бўлади?

8.4. Тенг ёнли трапецияни унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.5-расм)?

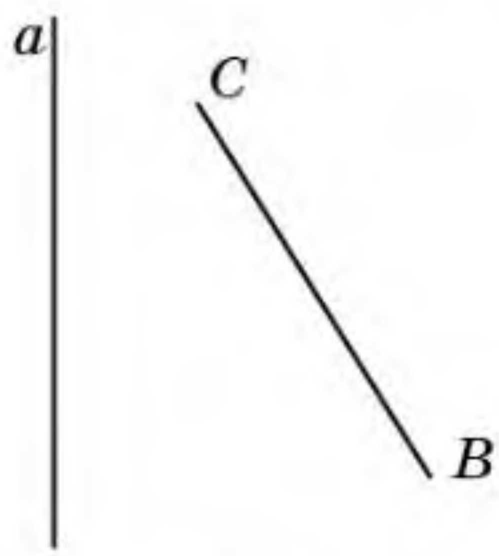
8.5. BC кесмасини шу кесма билан бир текисликда ётувчи, умумий нуқтаси бўлмаган ва унга параллел ҳам, перпендикуляр ҳам бўлмаган тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.6-расм)?

8.6. Кесик конус асосларининг радиуслари 6 см ва 2 см, баландлиги эса 3 см га тенг. Кесик конуснинг ясовчисини топинг.

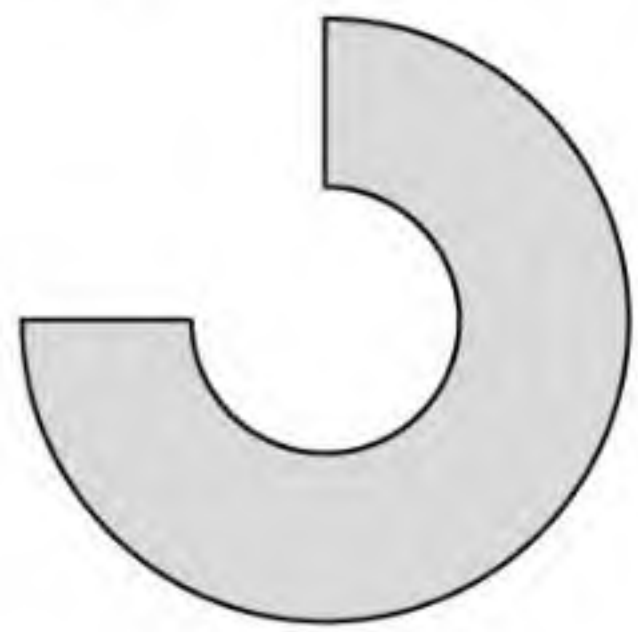
8.7. Кесик конус асосларининг радиуслари 6 см ва 2 см, ясовчиси эса 5 см га тенг. Кесик конус сиртининг юзини топинг.



8.5-расм



8.6-расм


8.7-расм

8.8. 8.7-расмдаги доиранинг қисми кесик конуснинг ён сиртининг ёйилмаси бўладими?

B

8.9. Катак қоғозга 8.4-расмдагига ўхшаш кесик конусни ясанг. Шу конуснинг ўқига параллел бўладиган ва асослари билан кесишувчи текислик билан кесимини тасвирланг.

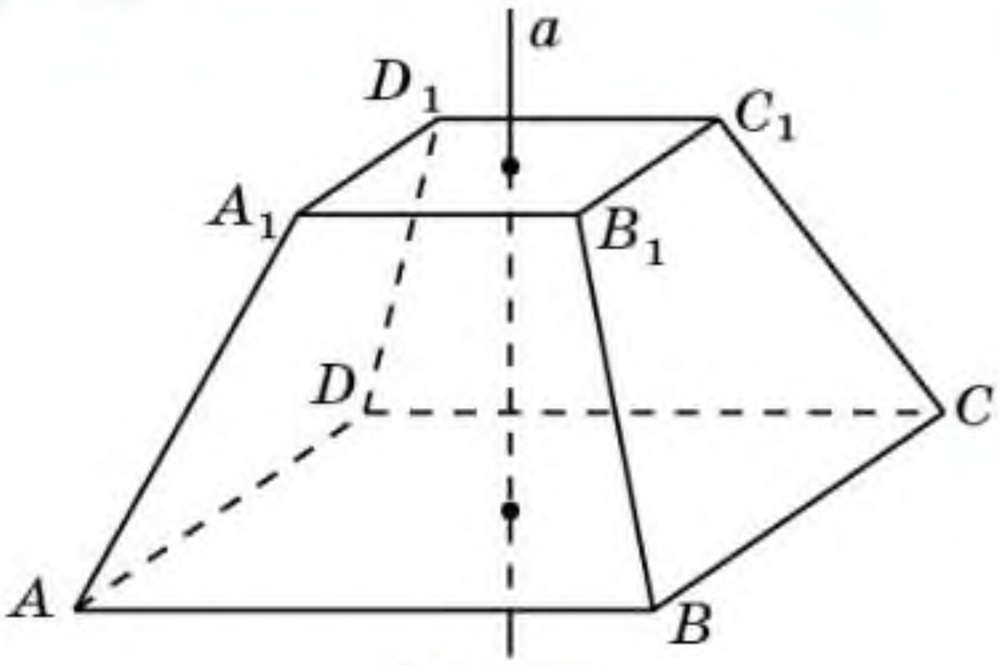
8.10. Кесик конус асосларининг радиуслари 2 см ва 4 см. Кесик конус баландлигининг ўртаси орқали асос текислигига параллел бўлган текислик билан кесимининг юзини топинг.

8.11. Кесик конуснинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; симметрия текислиги бўладими?

8.12. Кесик конуснинг ясовчиси 2 см га тенг ва у асос текислигига 30° бурчак остида оғади. Кесик конуснинг баландлигини топинг.

8.13. Кесик конуснинг ясовчиси 2 см га тенг ва у асос текислигига 60° бурчак остида оғади. Кесик конуснинг кичик асосининг радиуси 1 см га тенг бўлса, катта асосининг радиусини топинг.

8.14. Тенг ёнли трапециянинг асослари 1 см ва 2 см, ён томонлари эса 2 см. Шу трапецияни унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг.



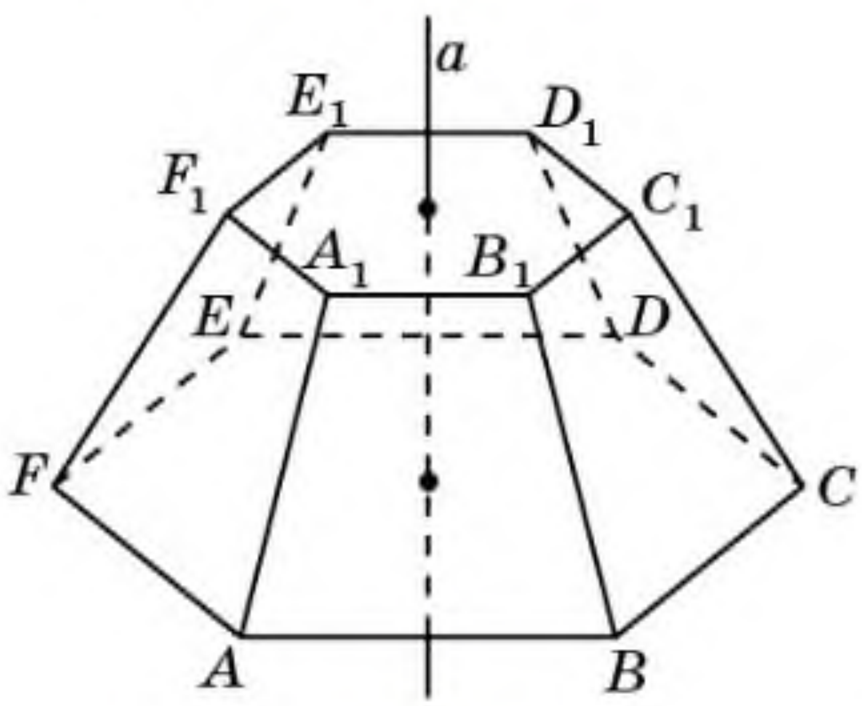
8.8-сурет

8.15. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамидани унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.8-расм)?

8.16. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамида асосларининг томонлари 4 см ва 2 см, ён қирралари эса 3 см га тенг. Шу пирамидани унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг (8.8-расм)?

8.17. Мунтазам олтибурчакли кесик пирамидани унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.9-расм)?

8.18. Мунтазам олтибурчакли кесик пирамида асосларининг томонлари 2 см ва 1 см, ён қирралари эса 3 см га тенг. Шу пирамидани унинг асосларининг маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг тўла сиртининг юзини топинг (8.9-расм).



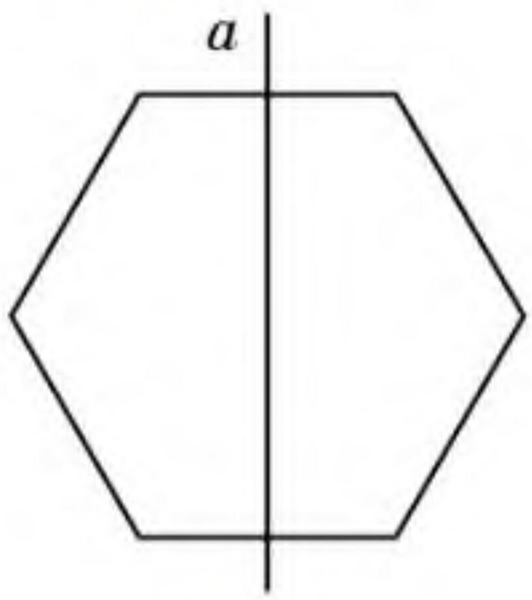
8.9-расм

8.10-расм

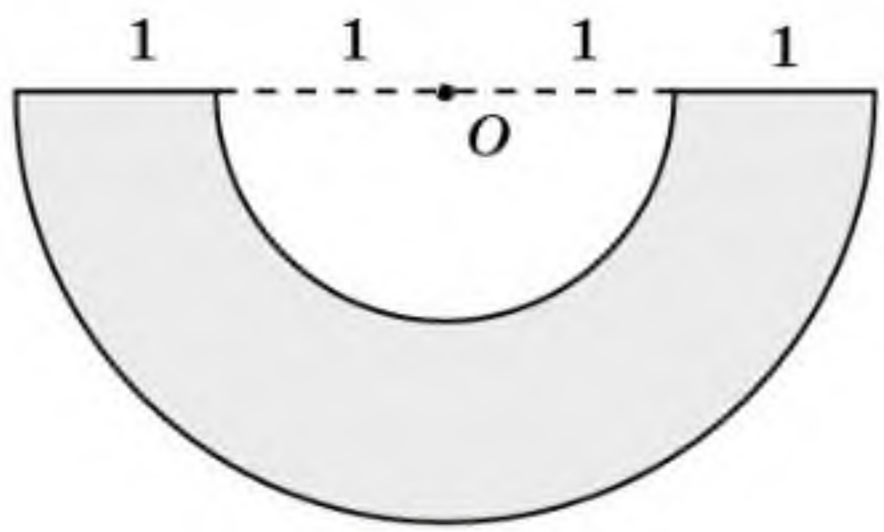
8.19. Кесик конус шаклидаги кигиз уй тундиги асосларининг диаметрлари 5 м ва 1 м, баландлиги эса 2 м га тенг (8.10-расм). Кигиз уй гумбазининг ён сиртининг юзини топинг.

C

8.20. Мунтазам олтибурчакни унинг қарама-қарши ётган томонларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.11-расм)? Мунтазам олтибурчак-нинг томонлари 1 см га тенг бўлса, ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг.



8.11-расм

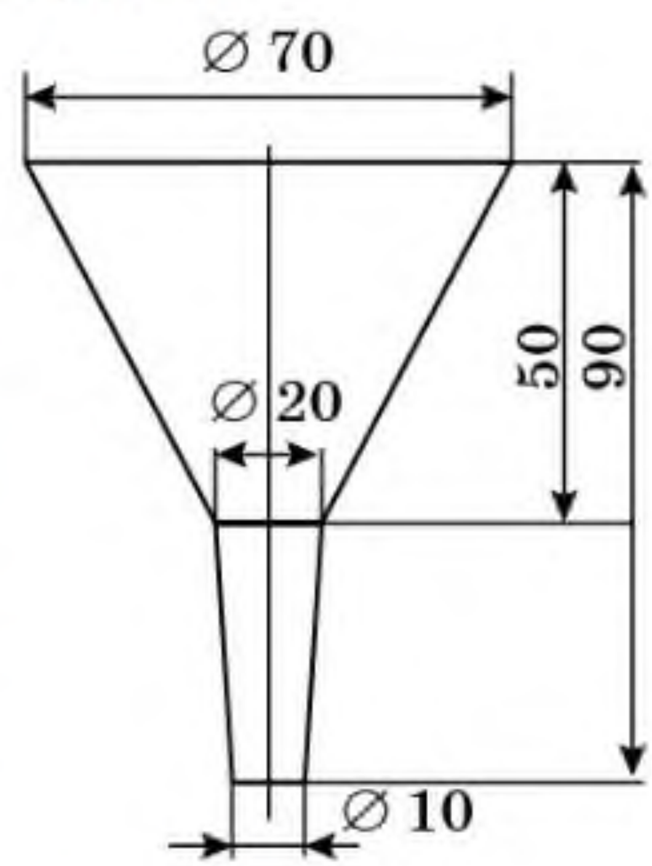


8.12-расм

8.21. 8.12-расмда айланаларининг радиуслари 1 см ва 2 см бўлган доиравий ҳалқанинг ярими — кесик конуснинг ён сиртининг ёйилмаси тасвирланган. Кесик конус асосларининг радиусларини топинг.

8.22. Кесик конус шаклидаги челакнинг ич-сиртини бўяш керак. Унинг асосларининг диаметрлари 30 см ва 20 см, ясовчиси эса 30 см га тенг. Агар бўёқнинг ўртача сарфланиши 1 м^2 га 300 г бўлса, унда бу ишни бажариш учун қанча бўёқ керак бўлади?

8.23. 8.13-расмда темир тунукадан ясалган суюқлик қуйиладиган асбобнинг ўлчамлари миллиметрда кўрсатилган. Агар барча тунука сиртининг 10% и уларни бириктиришга кетадиган бўлса, унда суюқлик қуйиладиган асбобни тайёрлаш учун қанча квадрат дециметр тунука керак бўлади?



8.13-расм

8.24. Кесик конус шаклидаги челакни темир-тунукадан ясаш керак. Унинг асослари нинг диаметрлари 28 см ва 20 см, баландлиги эса 24 см га тенг. Бириктиришга кетадиган тунукани ҳисобга олмаганда челакнинг ён сирти ёйилмасининг ўлчамлари қандай бўлади?

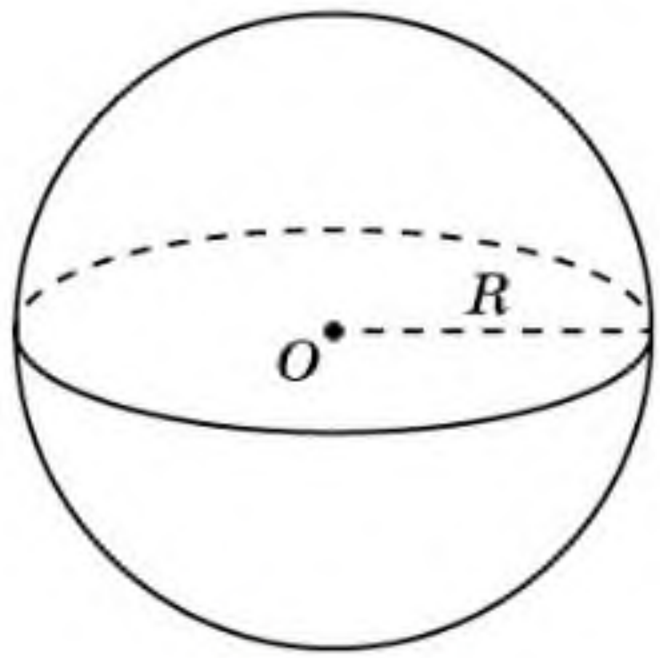
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

8.25. Айлананинг, доиранинг ва уларнинг элементларининг таърифларини, айланага ўтказилган уринманинг таърифини ва айлана билан тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашиши ҳолларини такрорланг.

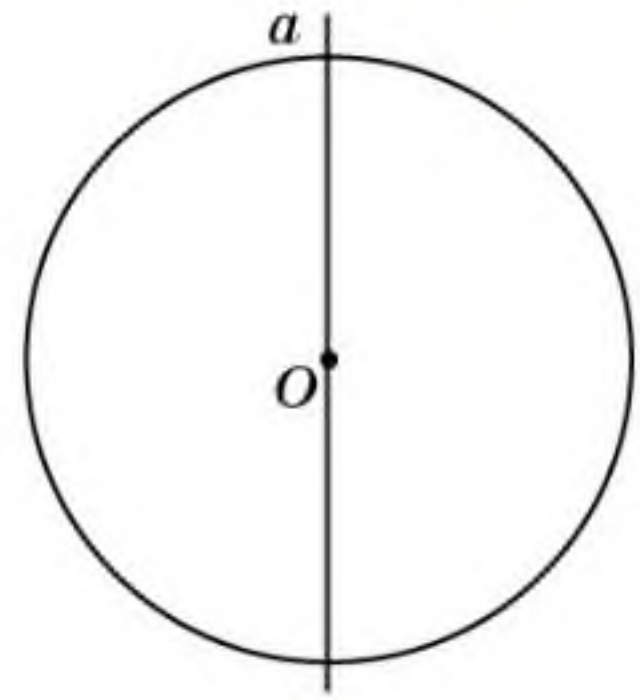
9-§. Сфера ва шар

Сфера ва шар — текисликдаги мос равишда айлана билан доиранинг фазовий аналоглари бўлиб ҳисобланади.

Берилган нуқтадан маълум узоқликда жойлашган фазонинг барча нуқталаридан иборат фигура сфера деб аталади (9.1-расм).



9.1-расм



9.2-расм

Берилган нуқта *сферанинг маркази*, берилган масофа *сферанинг радиуси* деб аталади.

Сферанинг марказини унинг қандайдир бир нуқтаси билан туташтирувчи кесма *сферанинг радиуси* деб атайди.

Бинобарин, маркази O нуқтаси ва радиуси R бўлган сфера шу нуқтасидан узоқлиги R га тенг бўлган фазонинг барча нуқталаридан иборат геометрик фигурани ташкил этади.

Сферада жойлашган ихтиёрий икки нуқтани туташтирувчи кесма *сферанинг ватари* деб аталади. Сферанинг марказидан ўтувчи ватар шу *сферанинг диаметри* бўлади.

Сферанинг марказидан ўтувчи текислик билан кесими *катта доираси* бўлади.

Сферани мана шу доирани унинг диаметри ётган тўғри чизиқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилиш мумкин (9.2-расм).

Берилган нуқтадан маълум узоқликдан ошмайдиган фазонинг барча нуқталаридан иборат фигура *шар* деб аталади.

Берилган нуқта *шарнинг маркази*, берилган масофа эса *шарнинг радиуси* деб аталади.

Шарнинг марказини унинг сиртида ётадиган қандайдир бир нуқтаси билан туташтирувчи кесмани ҳам *шарнинг радиуси* деб аталади.

Бинобарин, маркази O нуқтаси ва радиуси R бўлган шар шу нуқтадан узоқлиги R дан ошмайдиган фазонинг барча нуқталаридан иборат геометрик фигурани ташкил этади.

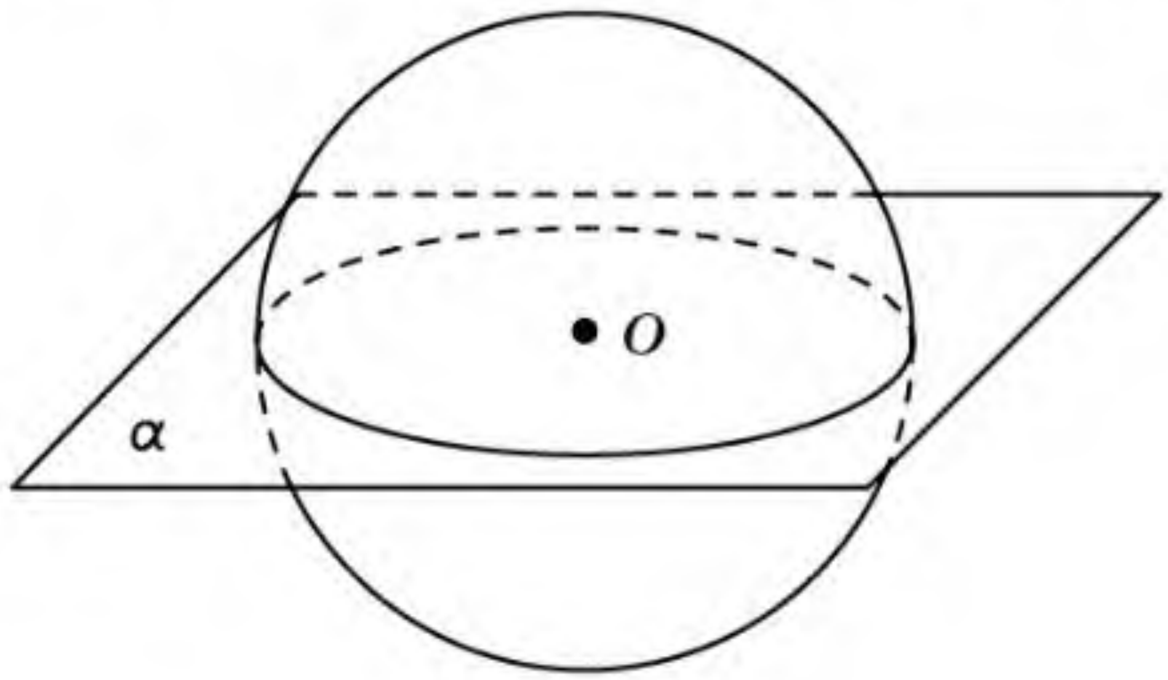
Шарнинг сиртида жойлашган ихтиёрий икки нуқтани туташтирувчи кесма шу *шарнинг ватари* деб аталади. Шарнинг маркази орқали ўтувчи ватар шу *шарнинг диаметри*, шарнинг маркази орқали ўтувчи текислик билан кесими *катта доира* бўлади.

Шарни шу доирани унинг диаметри ётган тўғри чизиқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилиш мумкин.

Берилган шарнинг маркази билан ва радиуси билан бир хил бўладиган сфера шу *шарнинг сирти* деб аталади.

Сфера билан текисликнинг ўзаро жойлашиш ҳолларини кўриб чиқайлик.

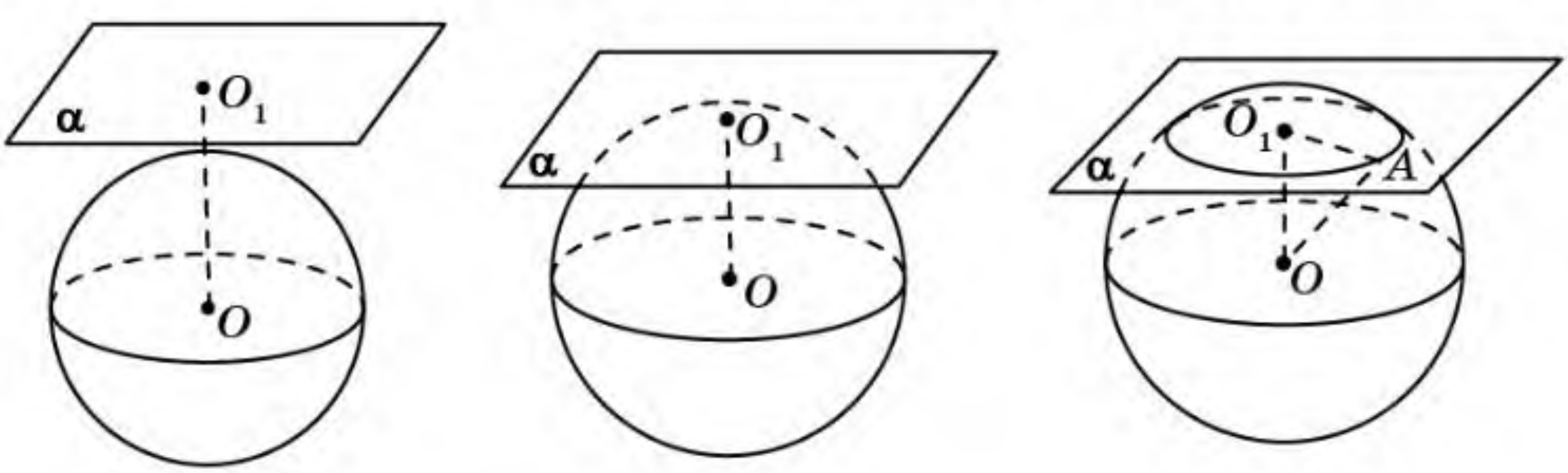
Агар α текислиги сферанинг маркази орқали ўтса, унда сферанинг шу текислик билан кесимида айлана ҳосил бўлади (9.3-расм).



9.3-расм

Агар α текислиги сферанинг маркази орқали ўтмаса, унда шу марказдан α текислигига OO_1 перпендикуляр туширамиз. Бу келаси ҳолларда бажарилиши мумкин.

1-ҳол. Агар OO_1 перпендикулярининг узунлиги сферанинг R радиусидан катта бўлса, унда O нуқтасидан α текислигининг ҳар қандай нуқтасигача бўлган масофа R-дан катта бўлади. Демак, бу ҳолда сфера билан текисликнинг умумий нуқталари бўлмайди (9.4, а-расм).



а) б) в)

9.4-расм

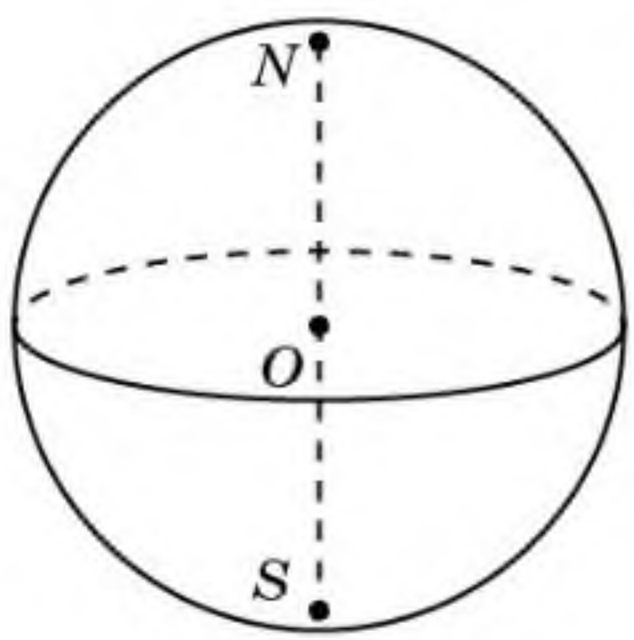
2-ҳол. Агар OO_1 перпендикулярнинг узунлиги сферанинг R радиусига тенг бўлса, унда сфера билан текисликнинг фақат битта умумий нуқтаси — O_1 нуқтаси бор бўлади (9.4, б-расм).

Сфера билан фақат битта умумий нуқтаси бор текислик *сферага уринма текислик* деб аталади. Бундаги сфера билан текисликнинг умумий нуқтаси *уриниш нуқтаси* деб аталади. Бинобарин, бирга шу нуқтада сфера текисликка *уринади* ёки текислик сфера билан *уринади* деб ҳам айтилади.

Уринма текисликнинг уриниш нуқтасига ўтказилган сферанинг радиусига перпендикуляр бўлишини исботланг.

3-ҳол. Агар OO_1 перпендикулярининг узунлиги, яъни O нуқтасидан α текислигигача бўлган d масофаси сферанинг R радиусидан кичик бўлса, унда сфера билан текислик кесишади ва уларнинг кесишиш – маркази O_1 нуқтаси ва радиуси $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ бўлган айлана бўлади (9.4, в-расм).

Ҳақиқатан, сфера билан α текислигининг кесишмасида жойлашган қандайдир бир A нуқтаси учун $OO_1 = d$, $OA = R$ бўлишини OO_1A тўғри бурчакли учбурчагидан $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$ тенглиги келиб чиқади. Аксинча, агар α текислигида жойлашган A нуқтаси учун бу тенглик бажарилса, унда $OA = R$ бўлади, яъни A нуқтаси сферада жойлашади.



9.5-расм

Одатда, сфера 9.5-расмдагидек тасвирланади. Бу расмда айланадан бошқа:

а) сферанинг маркази орқали ўтувчи текислик билан кесими — *сферанинг катта айланаси* ёки *экватор*;

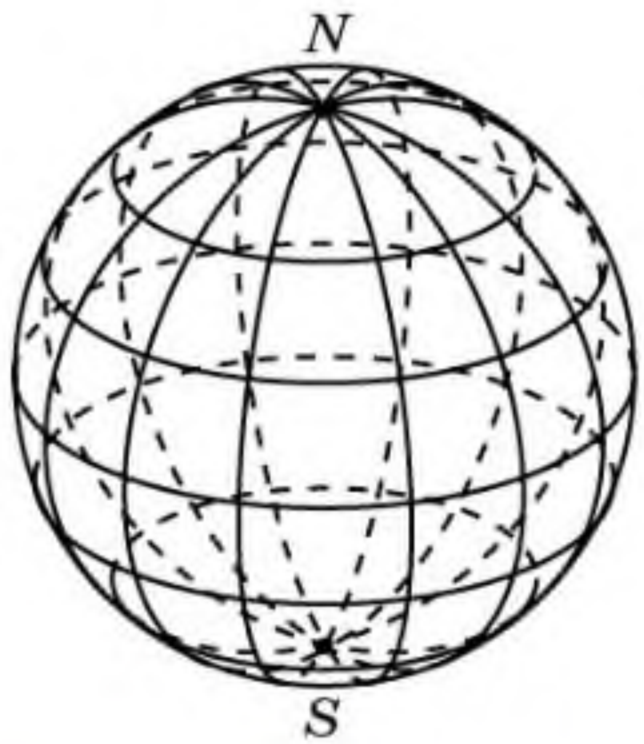
б) сферанинг маркази орқали ўтувчи ва экватор текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ — *сферанинг ўқи*;

в) ўқнинг сфера билан кесишиш нуқталари — *сферанинг қутблари* тасвирланган. Одатда, уларни N (шимолий қутб) ва S (жанубий қутб) ҳарфлари билан белгиланади.

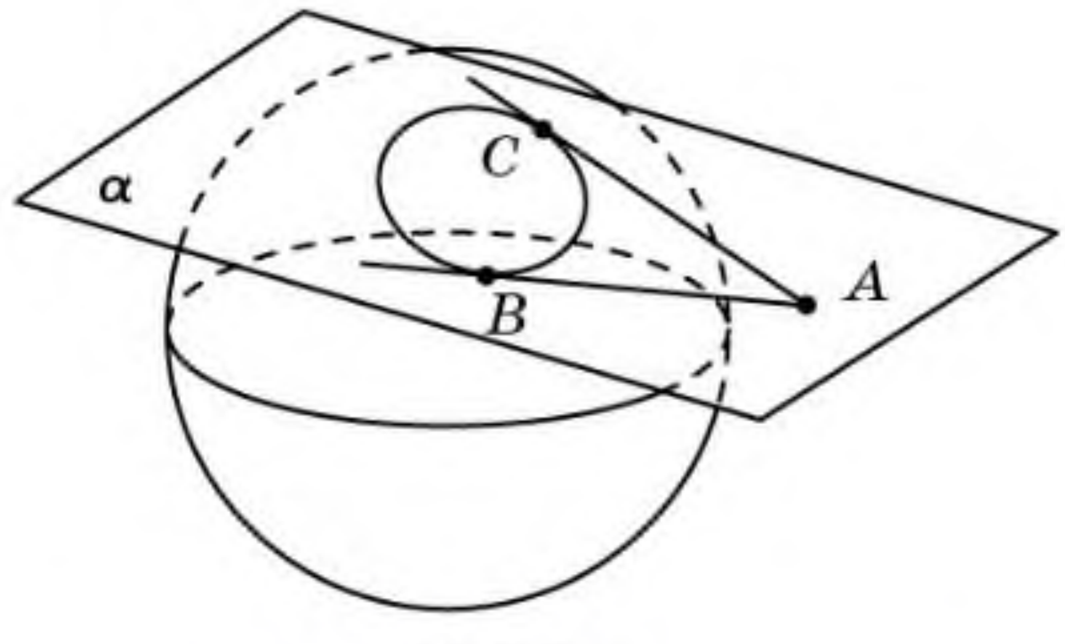
Баъзида сферанинг расмида қутб билан экватор танлаб олингандан кейин параллеллар билан меридианларнинг контурини ясаш мумкин.

Параллеллар — сферанинг экватор текислигига параллел текисликлар билан кесимлари. *Меридианлар* — сферанинг ўқи орқали ўтувчи текисликлар билан кесимлари (9.6-расм). Одатда, худди шундай Ер шарининг эскизи (тасвири) — глобус тасвирланади.

Шарнинг текислик билан кесими қандай фигура бўлади?



9.6-расм



9.7-расм

Сфера билан текисликнинг ўзаро жойлашиши ҳолларига ўхшаш сфера билан тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашишини мустақил кўриб чиқинг.

Сфера билан биттагина умумий нуқтаси бўладиган тўғри чизиқ сферага *уринма тўғри чизиқ* деб аталади.

Теорема. ***Сфера ташқарисида жойлашган бир нуқтадан шу сферага ўтказилган уринма тўғри чизиқларнинг кесмалари ўзаро тенг бўлади.***

Исботи. AB ва AC қандайдир бир A нуқтасидан сферага ўтказилган уринма кесмалари бўлсин, бу ерда B ва C — уриниш нуқталари (9.7-расм).

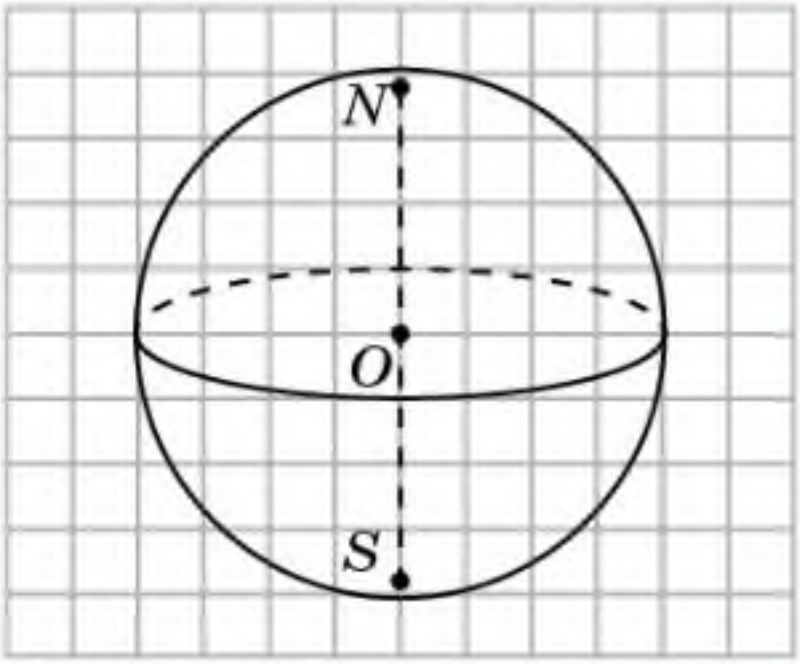
A, B ва C нуқталари орқали ўтувчи текисликни кўриб чиқайлик. Бу текислик сфера билан мос равишда B ва C нуқталарида AB ва AC тўғри чизиқлари билан уринадиган айлана бўйлаб кесишади. Айланадан ташқарида жойлашган нуқтадан шу айланага ўтказилган уринма кесмаларининг хоссалари бўйича $AB = AC$ бўлади. ☐

Саволлар

1. Қандай фигура сфера деб аталади?
2. Сферанинг радиуси деганимиз нима?
3. Сферанинг ватари деганимиз нима?
4. Сферанинг диаметри деганимиз нима?
5. Қандай фигурани айлантириш орқали сфера ясаш мумкин?
6. Қандай фигура шар деб аталади?
7. Шарнинг радиуси деганимиз нима?
8. Шарнинг ватари деганимиз нима?
9. Шарнинг диаметри деганимиз нима?
10. Қандай фигурани айлантириш орқали шар ясаш мумкин?
11. Шарнинг сирти деганимиз нима?
12. Қандай холларда сфера билан текисликнинг умумий нуқтаси бўлмайди?
13. Қандай холларда сфера билан текисликнинг биттагина умумий нуқтаси бўлади?
14. Қандай холларда сфера билан текислик айлана бўйлаб кесишади?
15. Қандай текислик сферага ўтказилган уринма текислик деб аталади?
16. Қандай тўғри чизиқ сферага ўтказилган уринма тўғри чизиқ деб аталади?

Машқлар

A



9.8-расм

9.1. Катак қоғозга 9.8-расмдагига ўхшаш сферани тасвирланг. Қандайдир бир параллеллар билан меридианларни тасвирланг.

9.2. Маркази O нуқтаси ва радиуси R бўлган: 1) шар ичида жойлашган; 2) шар сиртида жойлашган A нуқтаси қандай тенгсизликни қаноатлантиради?

9.3. Сферанинг радиуси 4 см га тенг. Агар берилган нуқтадан сферанинг марказигача бўлган масофа: 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см бўлса, унда шу нуқта сферага тегишли қандай жойлашади?

9.4. Сферанинг маркази орқали нечта диаметр ўтказиш мумкин?

9.5. Сферанинг диаметри унинг радиусидан 55 мм катта. Шу диаметрни топинг.

9.6. A ва B нуқталари орасидаги масофа 2 см га тенг. Мана шу нуқталар орқали ўтувчи сферанинг энг кичик радиусини топинг.

9.7. Сферанинг радиуси 7 см га тенг ва қандайдир бир текислик унинг марказидан: 1) 6 см; 2) 7 см; 3) 8 см узоқликда жойлашган. Мана шу сфера билан текисликнинг бир-бирига нисбатан қандай жойлашганини аниқланг.

B

9.8. 1) Сфера контурида жойлашган нуқта орқали; 2) сфера ичида жойлашган нуқта орқали; 3) сферадан ташқарида жойлашган нуқта орқали шу сферага нечта уринма текислик ўтказиш мумкин?

9.9. Шарнинг радиуси 5 см га тенг. Шарнинг марказидан 3 см узоқликда бўлган текислик билан кесими бўлган доиранинг радиусини топинг.

9.10. Сферанинг радиуси 3 см га, берилган нуқтадан шу сферанинг марказигача бўлган масофа 5 см га тенг. Шу нуқтадан сферага ўтказилган уринма кесмасининг узунлигини топинг.

9.11. Сферанинг радиуси 6 см га тенг ва унинг марказидан қандайдир бир тўғри чизиқ: 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 7 см узоқликда жойлашган. Шу сфера билан тўғри чизиқнинг бир-бирига нисбатан қандай жойлашганлигини аниқланг.

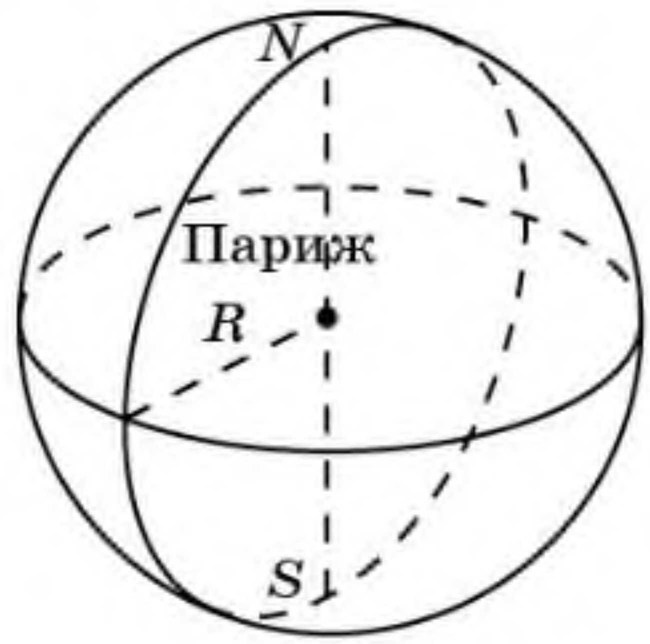
9.12. Сферанинг радиуси 3 см га тенг. Берилган нуқтадан шу сферага ўтказилган уринма кесмасининг узунлиги 4 см га тенг. Шу нуқтадан сферанинг марказигача бўлган масофани топинг.

9.13. Сферанинг радиуси 6 см га, берилган нуқтадан шу сферанинг марказигача бўлган масофа 10 см га тенг. Шу нуқтадан сферага ўтказилган уринма кесмасининг узунлигини топинг.

9.14. Берилган нуқтадан сферанинг марказигача бўлган масофа 13 см га тенг. Шу нуқтадан сферага ўтказилган уринма кесмасининг узунлиги 12 см. Сферанинг радиусини топинг.

9.15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ тенгламаси билан берилган сфера ва 1) $z = 1$; 2) $z = 2$; 3) $z = 3$ тенгламаси билан берилган текисликнинг ўзаро жойлашишини аниқланг.

9.16. Париж меридиани узунлиги 40000 км га тенг. Ер шарининг радиусини топинг (9.9-расм).



9.9-расм

9.17. Сферанинг радиуси 4 см га, берилган нуқтадан шу сферанинг марказигача бўлган масофа 6 см га тенг. Шу нуқтадан сферанинг контурида жойлашган нуқталаригача бўлган энг катта ва энг кичик масофаларни топинг.

9.18. Сферадан ташқарида жойлашган нуқтадан шу сферанинг контурида жойлашган нуқталаригача бўлган энг катта ва энг кичик масофалар 4 см ва 6 см. Сферанинг радиусини топинг.

C

9.19. 1) $x + y + z = \sqrt{2}$; 2) $x + y + z = \sqrt{3}$; 3) $x + y + z = 2$ тенглама билан берилган текислик ва $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тенглама билан берилган сферанинг ўзаро жойлашишини аниқланг.

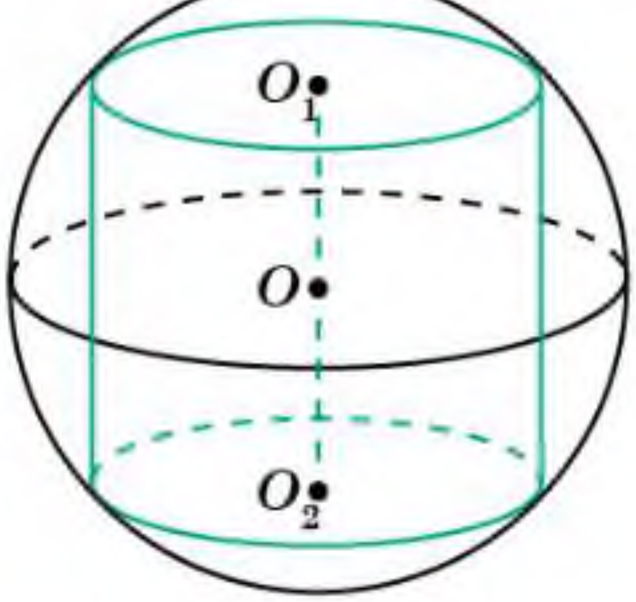
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

9.20. Тўғри тўртбурчакка, учбурчакка, трапецияга ички ва ташқи чизилган айланаларнинг таърифларини ва уларнинг радиусларини топиш формулаларини такрорланг.

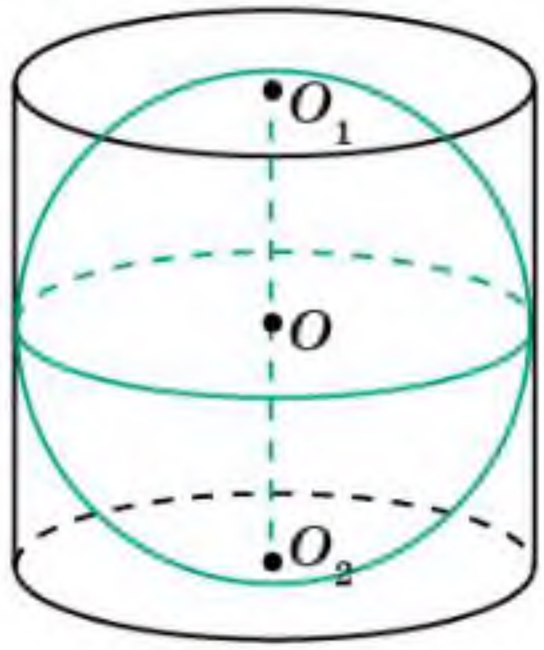
10*-§. Айланиш жисмларининг комбинациялари

“Тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айлана” ва “квадратга ички чизилган айлана” тушунчаларига ўхшаш “цилиндрга ташқи чизилган сфера” ва “цилиндрга ички чизилган сфера” тушунчаларини аниқлайлик.

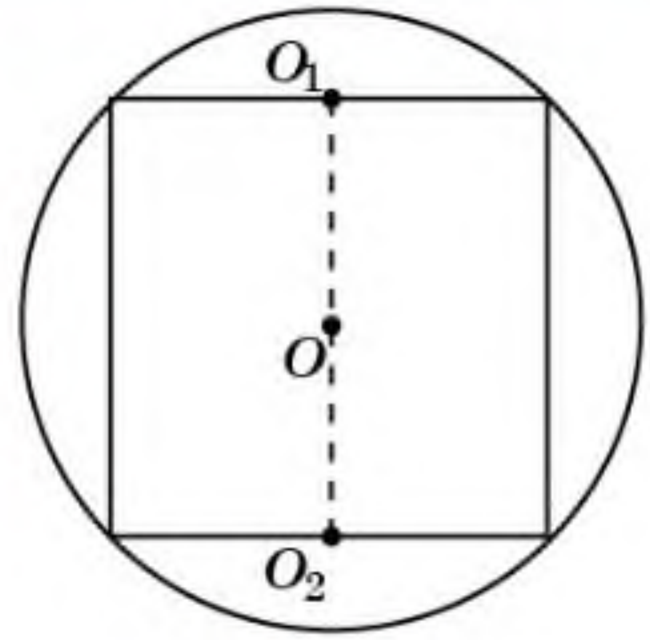
Агар цилиндр асосларининг айланалари сферанинг контурида ётса, унда сфера *цилиндрга ташқи чизилган* ёки *цилиндр сферага ички чизилган* деб аталади (10.1-расм).



10.1-расм



10.2-расм



10.3-расм

Агар сфера цилиндрнинг асосларига ва ён сирти билан (ҳар бир ясовчиси билан) уринадиган бўлса, унда *сфера цилиндрга ички чизилган* ёки *цилиндр сферага ташқи чизилган* деб аталади (10.2-расм).

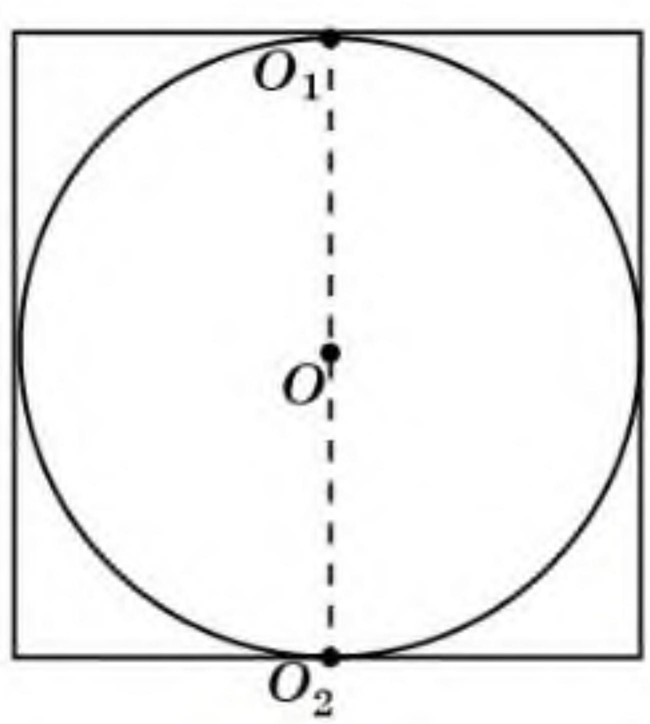
Фазовий фигураларнинг комбинациясини ясаш қоидасига кўра, агар берилган фигурага ички чизилган фигура бошқа ранг билан тасвирланган бўлса, у ҳолда у яхлит (кўринадиган) чизиқлар билан алоҳида фигура сифатида тасвирланганлигига эътибор қаратамиз. Биз бунда ва кейинчалик ушбу қоидага суянамиз.

Теорема. ***Цилиндрга ташқи сфера чизиш мумкин. Унинг радиуси шу цилиндрнинг ўқ кесими — тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади.***

Исботи. Цилиндрнинг ўқ кесими — тўғри тўртбурчакни ва унга ташқи чизилган айланани кўриб чиқамиз (10.3-расм). Цилиндр мана шу тўғри тўртбурчакни унинг қарама-қарши икки томонининг O_1, O_2 ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда олинади. Айланани шу тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда берилган цилиндрга ташқи чизилган сфера ҳосил бўлади. Бу сферанинг радиуси тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади. ◻

Агар цилиндр асосининг радиуси r га ва баландлиги h га тенг бўлса, унда шу цилиндрга ташқи чизилган сферанинг R радиуси қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$



10.4-расм

Теорема. ***Агар цилиндрнинг ўқ кесими квадрат бўлса, унда унга ички сфера чизишга бўлади. Ички чизилган сферанинг радиуси цилиндрнинг ўқ кесимига ички чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади.***

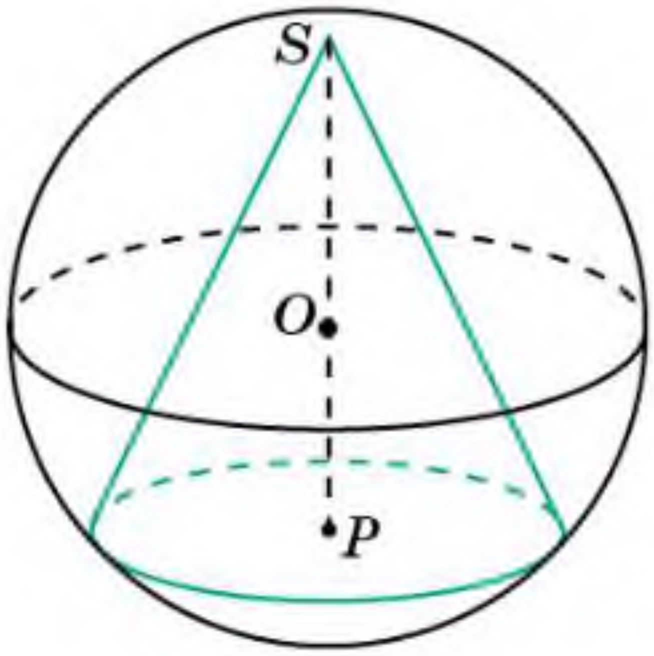
Исботи. Цилиндрнинг ўқ кесимини кўриб чиқамиз (10.4-расм).

Агар цилиндрнинг ўқ кесими — тўғри тўртбурчакка ички айлана чизилган бўлса, унда шу цилиндрга ички сфера чизилади. Бу тўғри тўртбурчак квадрат бўлган ҳолдагина бажарилади. Демак, ички чизилган радиусига тенг бўлади.

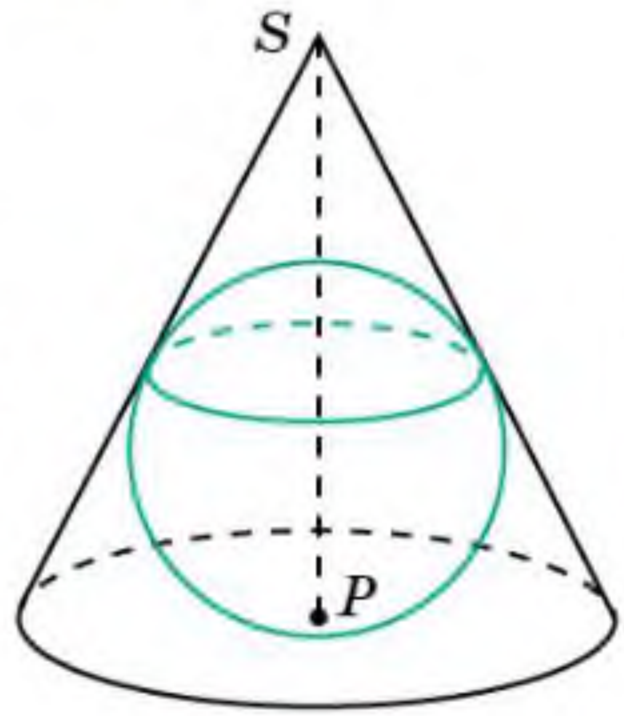
Агар цилиндр асосининг радиуси R га тенг бўлса, унда сферанинг радиуси ҳам R га тенг бўлади.

"Учбурчакка ташқи чизилган айлана" ва учбурчакка ички чизилган айлана тушунчаларига ўхшаш "*конусга ташқи чизилган сфера*" ва "*конусга ички чизилган сфера*" тушунчаларини аниқлаймиз.

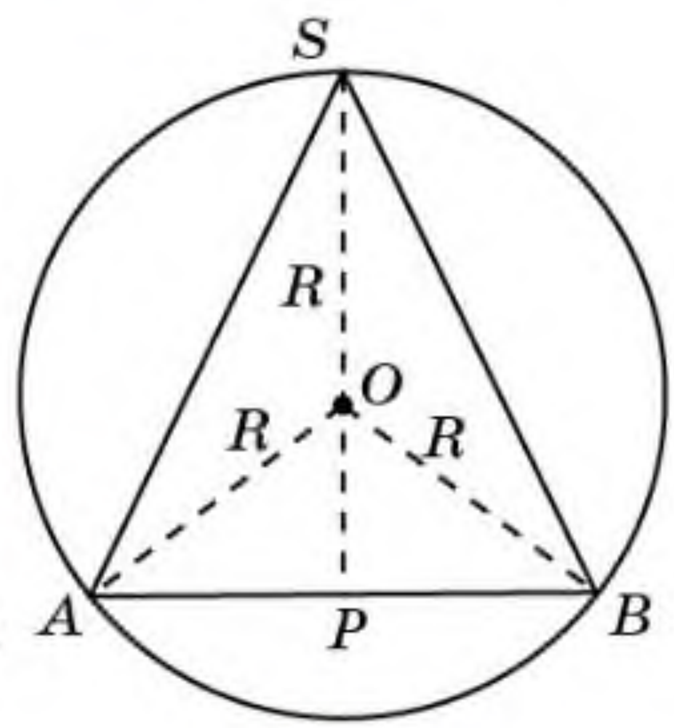
Агар конуснинг учи билан асосининг айланаси сферанинг бўйида ётса, унда *сфера конусга ташқи чизилган ёки конус сферага ички чизилган* деб аталади (10.5-расм).



10.5-расм



10.6-расм



10.7-расм

Агар сфера конуснинг асосига ва ён сиртига (ҳар бир ясовчисига) уринадиган бўлса, унда *сфера конусга ички чизилган ёки конус сферага ташқи чизилган* деб аталади (10.6-расм).

Теорема. ***Конусга ташқи сфера чизишга бўлади. Унинг радиуси шу конуснинг ўқ кесими — учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади.***

Исботи. Конуснинг ўқ кесими — тенг ёнли учбурчакни ва унга ташқи чизилган — айланани кўриб чиқамиз (10.7-расм). Конус шу учбурчакни асосига туширилган баландлиги ётадиган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил қилинади. Айланани шу тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда берилган конусга ташқи чизилган сфера ҳосил бўлади. Бу сферанинг радиуси тенг ёнли учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади.

Томонлари a, b, c ва юзи S бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг R радиуси учун қуйидаги формула ўринли бўлишини эсга туширайлик:

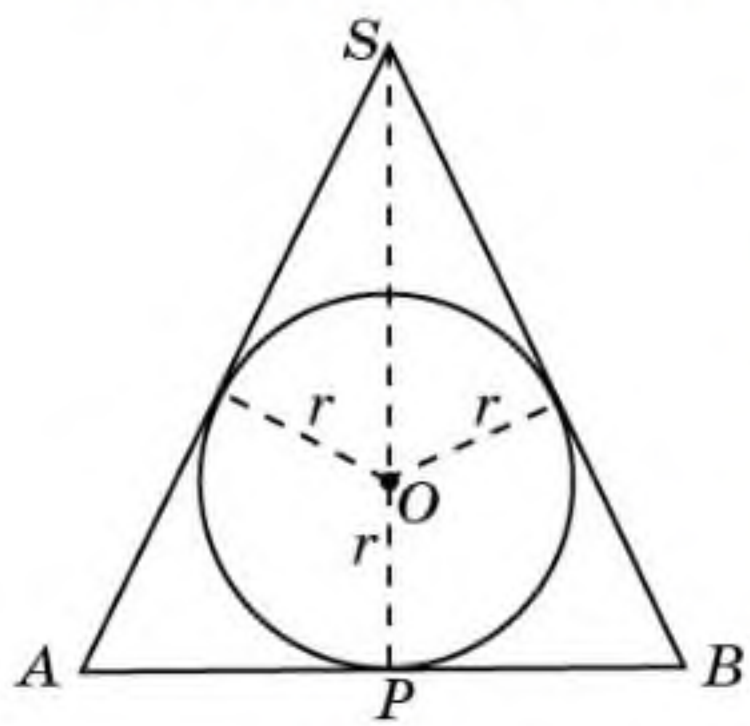
$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Шу формула билан ўқ кесими учбурчак бўладиган конусга ташқи чизилган сферанинг R радиуси ҳам аниқланади. Бу ерда, a, b, c — учбурчакнинг томонлари, S — учбурчакнинг юзи.

1-мисол. Конус асосининг радиуси 6 см га, ясовчиси 10 см га тенг. Конусга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг.

Ечими. Конуснинг ўқ кесими — томонлари 12 см, 10 см, 10 см бўлган тенг ёнли учбурчак бўлади. Мана шу учбурчакнинг асосига туширилган баландлиги 8 см га, юзи эса 48 см^2 га тенг. Демак, конусга ташқи чизилган сферанинг радиуси $6\frac{1}{4}$ см га тенг бўлади.

Теорема. ***Конусга ички сфера ясаш мумкин. Ички чизилган*** сферанинг радиуси конуснинг ўқ кесими — учбурчакка ***ички чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади.***



10.8-расм

Исботи. Конуснинг ўқ кесими — тенг ёнли учбурчакни ва унга ички чизилган айланани кўриб чиқайлик (10.8-расм).

Конус шу учбурчакни унинг асосига туширилган баландлиги ётадиган тўғри чизиқни айлантириш орқали ясалади. Айланани шу тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда берилган конусга ички чизилган сфера ҳосил бўлади. Бу сферанинг радиуси тенг ёнли учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади.

Томонлари a, b, c ва юзи S бўлган учбурчакка ички чизилган айлананинг r радиуси учун қуйидаги формула ўринли бўлишини эсга туширайлик:

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

Мана шу формула билан ўқ кесими учбурчак бўлган конусга ички чизилган сферанинг r радиуси ҳам аниқланади. Бу ерда, a, b, c — учбурчакнинг томонлари, S — учбурчакнинг юзи.

2-мисол. Конус асосининг радиуси 6 см га, ясовчиси 10 см га тенг. Конусга ички чизилган сферанинг радиусини топинг.

Ечими. Конуснинг ўқ кесими — томонлари 12 см, 10 см, 10 см бўлган тенг ёнли учбурчак бўлади. Шу учбурчакнинг асосига туширилган баландлиги 8 см га, юзи эса 48 см^2 га тенг. Демак, конусга ички чизилган сферанинг радиуси 3 см га тенг бўлади.

Саволлар

1. Қандай сфера цилиндрга ташқи чизилган деб аталади?
2. Қандай сферага ички цилиндр чизилади?
3. Цилиндрга ташқи сферани ҳар доим ҳам чизиш мумкинми?

4. Қандай цилиндрга ички сфера чизилади?
5. Қандай цилиндр сферага ташқи чизилган деб аталади?
6. Қандай конусга ташқи сфера чизилади?
7. Қандай сферага ички конус чизилади?
8. Конусга ташқи сферани ҳар доим ҳам чизиш мумкинми?
9. Қандай конусга ички сфера чизилади?
10. Қандай сферага ташқи конус чизилади?
11. Конусга ички сферани ҳар доим ҳам чизиш мумкинми

Машқлар

A

10.1. Сферанинг радиуси R га тенг. Сферага ички чизилган цилиндр асосининг радиуси ва баландлигини топинг.

10.2. Цилиндрнинг баландлиги h га тенг. Цилиндрга ички чизилган сферанинг радиусини топинг.

10.3. Цилиндрнинг баландлиги билан асосининг радиуси 1 см га тенг. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг.

10.4. Цилиндр асосининг радиуси 1 см га тенг. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиуси 2 см га тенг деб олиб, цилиндрнинг баландлигини топинг.

10.5. Цилиндрнинг баландлиги 2 см га тенг. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиуси 2 см га тенг деб олиб, цилиндр асосининг радиусини топинг.

10.6. Цилиндрнинг ўқ кесими — томонлари 3 см ва 4 см бўлган тўғри тўртбурчак. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг.

10.7. Сферанинг радиуси 1 см га тенг. Сферага ташқи чизилган цилиндр сиртининг юзини топинг.

B

10.8. Конуснинг ўқ кесими — томони 1 см га тенг тенг томонли учбурчак. Конусга: 1) ташқи чизилган; 2) ички чизилган сферанинг радиусини топинг.

10.9. Конусга ташқи чизилган сферанинг R радиусини конуснинг h баландлиги билан асосининг r радиуси орқали ифодаланг.

10.10. Конус асосининг радиуси 3 см га, баландлиги эса 4 см га тенг. Конусга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг.

10.11. Конусга ички чизилган сферанинг r радиусини конуснинг h баландлиги билан асосининг r_0 радиуси орқали ифодаланг.

10.12. Конус асосининг радиуси 3 см га, баландлиги эса 4 см га тенг. Конусга ички чизилган сферанинг радиусини топинг.

10.13. Конуснинг ясовчиси билан унга ташқи чизилган сферанинг радиуси 2 см га тенг. Конус асосининг радиусини топинг.

10.14. Конус асосининг радиуси 1 см га тенг. Унинг ясовчиси асос текислиги билан 45° бурчак ясайди. Конусга: 1) ташқи чизилган; 2) ички чизилган сферанинг радиусини топинг.

10.15. Конуснинг ясовчиси 1 см га тенг ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясайди. Конусга: 1) ташқи чизилган; 2) ички чизилган сферанинг радиусини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

10.16. Айлана узунлиги таърифини ва айлана узунлигини топиш формуласини такрорланг.

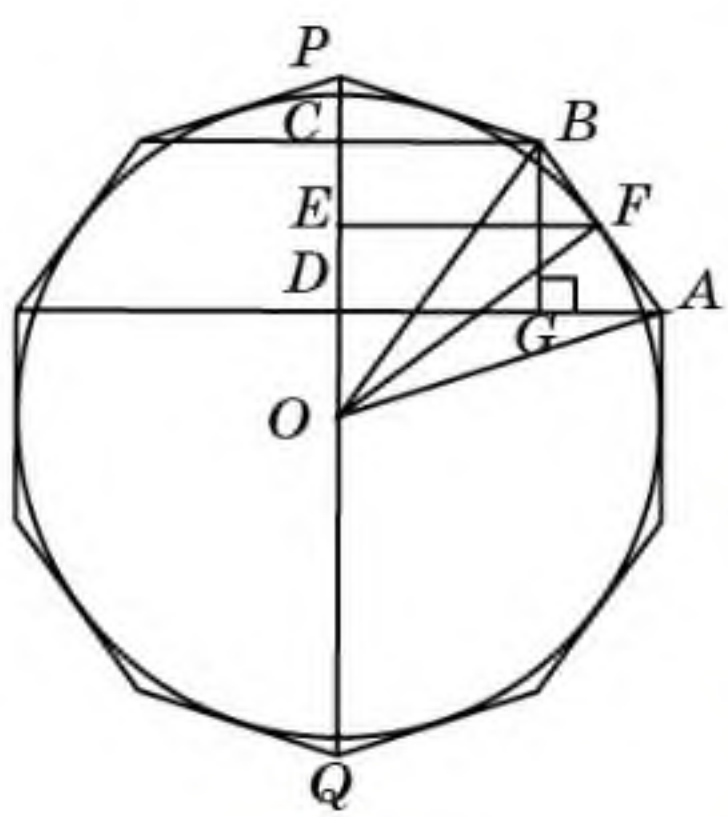
11-§. Сфера сиртининг юзи

Сфера юзининг таърифи айлана узунлиги таърифига ўхшаш бўлади.

Айланага ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонлари сонини чексиз орттиргандаги кўпбурчак периметри интиладиган сон айлана узунлигининг аниқ қийматини беришини ёдимизга туширамиз.

Айланага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакни ва шу кўпбурчакни айлананинг PQ диаметри ётадиган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигурани кўриб чиқайлик (11.1-расм). Бу фигуранинг сирти конуснинг, кесик конуснинг ва цилиндрнинг ён сиртларидан иборат, фигуранинг ўзи эса айланани айлантирганда ҳосил бўлган сферага ташқи чизилади. Фигура сиртининг юзи унга тегишли конуснинг, кесик конуснинг ва цилиндр ён сиртлари юзларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Айланани унинг диаметри ётадиган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда олинган сферанинг юзи шу айланага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчак томонлари сонини чексиз орттириб, айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзига интиладиган сон *сферанинг юзи* бўлиб ҳисобланади.



11.1-расм

Энди радиуси R бўлган сферанинг юзини топиш формуласини аниқлаймиз.

Сферанинг юзи деб шу сфера билан чекланган шар сиртининг юзига ҳам айтилади.

Айланага ташқи чизилган M мунтазам кўпбурчагининг AB томонини айлантирганда ҳосил бўлган сиртни қараб чиқамиз.

У $ABCD$ тўғри бурчакли трапециясини CD тўғри чизиғи атрофида айлантирганда кесик конуснинг ён сирти ҳосил бўлади (11.1-расм).

Шу сиртнинг $S(AB)$ юзи радиуси трапециянинг EF ўрта чизиғи бўладиган айлананинг узунлиги билан AB ён томонининг кўпайтмасига тенг бўлади, яъни

$$S(AB) = 2p \cdot EF \cdot AB.$$

$ABCD$ тўғри бурчакли трапециядан топамиз: $CD = BG = AB \cdot \sin\angle BAD$. Демак,

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD}.$$

$\angle BAD = \angle EOF$ (мос равишда перпендикуляр томонларидаги бурчаклари ҳисобида тенг) эканлигини эътиборга олиб, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD} = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle EOF} = 2p \cdot OF \cdot CD = 2pR \cdot CD.$$

Шунга ўхшаш M кўпбурчагининг бошқа томонларини айлантирганда ҳосил бўлган сиртларнинг юзларининг формулалари олинади. Шу юзларни қўшиб, M кўпбурчагини айлантирганда ҳосил бўлган сиртнинг $S(M)$ юзини топамиз:

$$S(M) = 2p \cdot OF \cdot PQ = 2pR \cdot 2R = 4pR^2.$$

Айланага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакларнинг томонларининг сонини чексиз орттириб айлантириш натижасида ҳосил бўлган фигура сиртининг юзи интилган сон *сферанинг юзи* бўлиб ҳисобланади. Шунингдек, сферанинг S юзини қуйидаги формула билан топиш мумкин:

$$S = 4pR^2.$$

Сферанинг юзи шу сферага ташқи чизилган цилиндрнинг ён сиртининг юзига тенг бўлишини исботланг.

Саволлар

1. Сферанинг юзи қандай аниқланади?
2. Шар сиртининг юзи деганимиз нима?
3. Радиуси R бўлган сферанинг юзи қандай формула билан ҳисобланади?

Машқлар

A

11.1. Радиуси 1 см га тенг сферанинг юзини топинг.

11.2. Юзи 1 см^2 га тенг сферанинг радиусини топинг.

11.3. Шарнинг катта доирасининг юзи 3 см^2 га тенг. Шар сиртининг юзини топинг.

11.4. Агар шарнинг радиуси: 1) 2 марта; 2) 3 марта; 3) n марта ортса, унда унинг сиртининг юзи қандай ўзгаради?

11.5. Икки шар сиртларининг юзлари 4 : 9 нисбатида бўлса, унда уларнинг радиусларининг нисбатларини топинг.

11.6. Икки шарнинг радиуслари 6 см ва 8 см. Сиртининг юзи берилган шарларнинг сиртларининг юзларининг йиғиндисига тенг бўлган шарнинг радиусини топинг.

11.7. Шарга цилиндр ташқи чизилган. Шар сирти юзининг цилиндрнинг ён сиртининг юзига нисбатини топинг

B

11.8. Ўқ кесими бирлик квадрат бўлган цилиндрга ички чизилган сфера сиртининг юзини топинг.

11.9. Ўқ кесими бирлик квадрат бўлган цилиндрга ташқи чизилган сфера сиртининг юзини топинг.

11.10. Қуёшнинг диаметри Ой диаметридан 400 марта катта. Қуёш сиртининг юзи Ой сиртининг юзидан неча марта катта бўлади?

11.11. Кубга ички чизилган сфера сиртининг юзи шу кубга ташқи чизилган сфера сиртининг юзидан неча марта кичик бўлади?

11.12. Конуснинг ўқ кесими — тенг томонли учбурчак. Конусга ташқи чизилган сфера сиртининг юзи шу конусга ички чизилган сфера сиртининг юзидан неча марта катта бўлади?

11.13. Шарнинг марказидан 8 см узоқликда ётувчи текислик билан кесими — доиранинг радиуси 6 см. Шар сиртининг юзини топинг.

11.14. Париж меридианининг узунлиги тахминан 40 000 км га тенг. Ер шари сиртининг юзини топинг.

11.15. “Нур-Султан” шаҳридаги “Бәйтерек” монументи шарининг диаметри 22 м га тенг (11.2-расм). Шу шар сиртининг юзини топинг.

11.2-расм

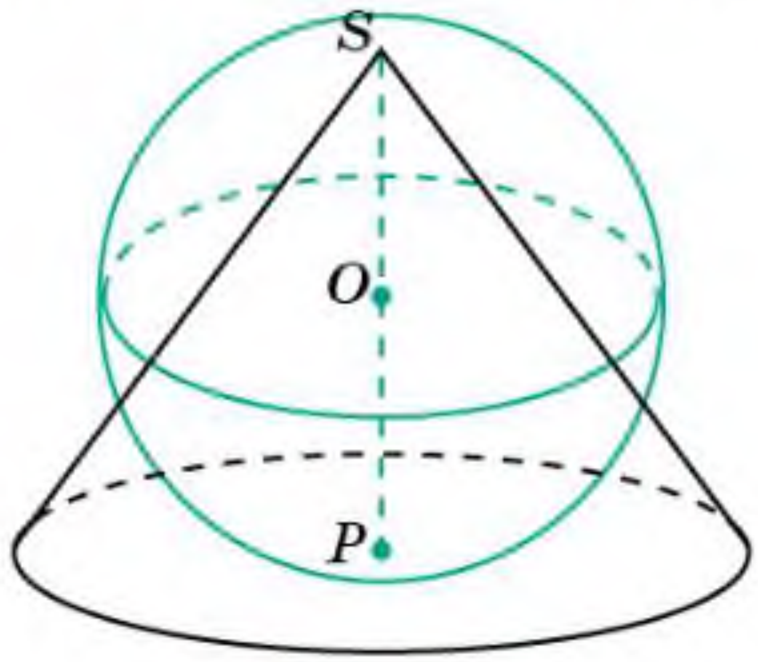
11.3-расм

11.16. ЭКСПО-2017 — Қозоғистон пойтахтида 2017 йили Халқаро кўргазмалар уюшмаси ташкил этган халқаро кўргазма (11.3-

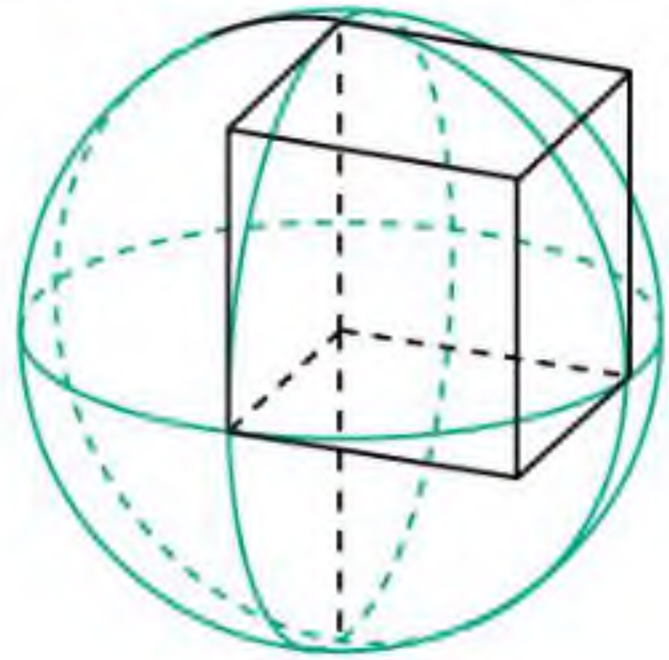
расм). Кўргазманинг марказий элементи дунёдаги энг катта сферик бино бўлган “Нұр Әлем” мажмуаси бўлди. Унинг диаметри 80 м. Шу сфера сиртининг юзини топинг (p d 3).

C

11.17. Конуснинг ўқ кесими — тенг томонли учбурчак (11.4-расм). Конус сиртининг юзи, диаметри шу конуснинг баландлиги билан бирдай шар сиртининг юзига тенг бўлишини исботланг.



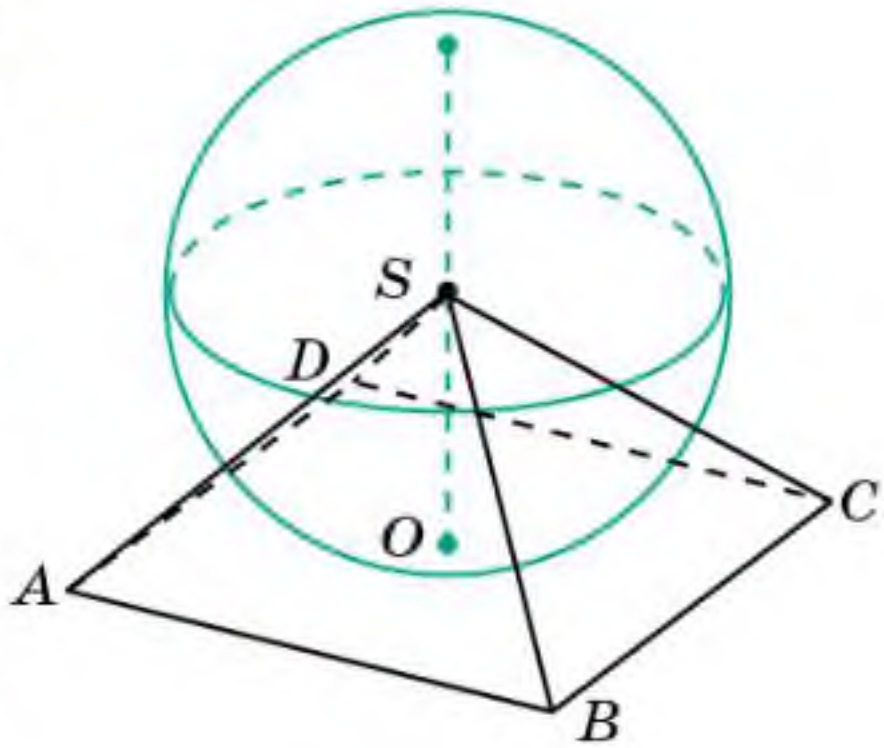
11.4-расм



11.5-расм

11.18. Радиуси 1 см га тенг шарнинг маркази — бирлик кубнинг учи (11.5-расм). Шу кубнинг ичида жойлашган шар сирти қисмининг юзини топинг.

11.19. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг томонлари 2 см га, баландлиги эса 1 см га тенг. Радиуси 1 см га тенг шарнинг маркази — шу пирамиданинг учи (11.6-расм). Пирамиданинг ичида жойлашган шар сирти қисмининг юзини топинг.



11.6-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

11.20. Ички ва ташқи чизилган кўпбурчакларнинг таърифларини такрорланг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Цилиндр асосининг радиуси 3 см, ясовчиси эса 8 см. Цилиндрнинг ўқ кесимининг диагоналини топинг:

A) 6 см; B) 10 см; C) 12 см; D) 16 см.

2. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 1 см ва 2 см. Шу тўғри тўртбурчакни унинг катта томони ётган тўғри чизиқдан айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг:

A) 2p см^2; B) 3p см^2; C) 4p см^2; D) 6p см^2.

3. Мунтазам учбурчакли призма асосининг томонлари 1 см га ва ён қирралари 2 см га тенг. Шу призмани унинг ён қирраси ётган тўғри чизиқдан айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг:

A) 2p см^2; B) 3p см^2; C) 4p см^2; D) 6p см^2.

4. Конус асосининг радиуси 6 см га, ясовчиси эса 10 см га тенг. Конуснинг баландлигини топинг:

A) 6 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $6\sqrt{2}$ см; D) 8 см.

5. Конуснинг ясовчиси 6 см га тенг ва у асос текислигига 45° бурчак остида оғган. Мана шу конус асосининг радиусини топинг:

A) 3 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $3\sqrt{3}$ см; D) 6 см.

6. Конус асосининг радиуси 2 см га, ясовчиси эса 3 см га тенг. Конус сиртининг юзини топинг:

A) 6p см^2; B) 8p см^2; C) 10p см^2; D) 12p см^2.

7. Конус асосининг радиуси 2 см га тенг. Конус баландлигининг ўртаси орқали асос текислигига параллел бўлган текислик билан кесимининг юзини топинг:

A) p см^2; B) 2p см^2; C) 3p см^2; D) 4p см^2.

8. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 2 см га ва ён томонлари 4 см га тенг. Мана шу учбурчакни унинг асосига туширилган баландлиги ётадиган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган конус сиртининг юзини топинг:

A) 3p см^2; B) 4p см^2; C) 5p см^2; D) 6p см^2.

9. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 2 см га ва ён қирралари 3 см га тенг. Мана шу пирамидани унинг баландлиги ётадиган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган конуснинг ён сиртининг юзини топинг:

A) 3p см^2; B) 4p см^2; C) 5p см^2; D) 6p см^2.

10. Кесик конус асосларининг радиуслари 4 см ва 1 см, баландлиги эса 4 см га тенг. Кесик конуснинг ясовчисини топинг:

A) 3 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 6 см.

11. Кесик конуснинг ясовчиси 2 см га тенг ва у асос текислигига 45° бурчак остида оғган. Конуснинг катта асосининг радиуси 2 см га тенг бўлса, кичик асосининг радиусини топинг:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ см; D) $2-\sqrt{2}$ см.

12. Тенг ёнли трапециянинг асослари 2 см ва 4 см, ён томонлари эса 3 см га тенг. Мана шу трапецияни унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг:

A) 8π см^2; B) 10π см^2; C) 12π см^2; D) 14π см^2.

13. Шарнинг радиуси 2 см га тенг. Шарнинг марказидан 1 см узоқликда жойлашган текислик билан кесими — доиранинг юзини топинг:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

14. Сферанинг ичида ётган нуқтадан сферанинг контурида ётган нуқталаргача бўлган энг кичик ва энг катта масофалар мос равишда 4 см га ва 6 см га тенг. Сферанинг радиусини топинг:

A) 2 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 10 см.

15. Цилиндрнинг ўқ кесими — томонлари 6 см ва 8 см бўлган тўғри тўртбурчак. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг:

A) 5 см; B) 6 см; C) 8 см; D) 10 см.

16. Конуснинг ўқ кесими — томонлари 2 см бўлган тенг томонли учбурчак. Мана шу конусга ички чизилган сферанинг радиусини топинг:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.

17. Радиуси 2 см га тенг сферанинг юзини топинг:

A) 12π см^2; B) 14π см^2; C) 16π см^2; D) 18π см^2.

18. Бирлик кубга ички чизилган сферанинг юзини топинг:

A) $\frac{\pi}{2}$ см^2; B) π см^2; C) 2π см^2; D) 3π см^2.

19. Бирлик кубга ташқи чизилган сферанинг юзини топинг:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

20. Икки шарнинг радиуслари 2 : 3 нисбатда. Уларнинг сиртлари юзларининг нисбатини топинг:

A) 2 : 3; B) 4 : 6; C) 6 : 9; D) 4 : 9.

III боб ЖИСМЛАРНИНГ ҲАЖМЛАРИ

12-§. Жисмлар ҳажмларининг умумий хоссалари

Ҳажм — геометрик фигураларнинг фазодаги қисмини таърифловчи катталик Ҳажм геометрик жисмларга боғлиқ ҳолда асосий катталикларнинг бири бўлиб ҳисобланади.

Ҳажмнинг ўлчов бирлиги сифатида қиррасининг узунлиги 1 га тенг кубнинг ҳажми олинади. У *бирлик куб* деб аталади.

Масалан, агар узунликнинг ўлчов бирлиги 1 мм, 1 см ёки 1 м бўлса, унда ҳажмнинг ўлчов бирлиги сифатида қиррасининг узунлиги мос равишда 1 мм, 1 см ёки 1 м га тенг куб олинади. Бундай куб мос равишда *миллиметр куб*, *сантиметр куб ёки метр куб* деб аталади.

Оддий ҳолда фигуранинг ҳажми шу фигура ичига сиғадиган бирлик кубларнинг ва унинг бўлакларининг сони билан ўлчанади. Бу сон натурал, рационал ёки иррационал бўлиши мумкин. Фигуранинг ҳажми ўлчов бирлигига боғлиқ бўлганлигидан, тушунарли бўлиши учун иш юзасида шу сондан кейин ҳажмнинг ўлчов бирлиги ёзилади. Масалан, V мм^3, V см^3, V м^3.

Фазодаги фигуранинг ҳажми учун қуйидаги хоссалар ўринли бўлади:

1) фазодаги фигуранинг ҳажми номанфий сон;

2) тенг фигураларнинг ҳажмлари тенг;

3) агар Φ фигураси Φ_1 ва Φ_2 фигураларидан иборат бўлса, унда Φ фигурасининг ҳажми Φ_1 ва Φ_2 фигуралари ҳажмларининг йиғиндисига тенг бўлади, яъни

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

4) Бир учидан чиққан қирралари a, b, c бўлган *тўғри бурчакли параллелепипеднинг V ҳажми* қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$V(\Phi) = a \cdot b \cdot c.$$

Баъзида *тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми* унинг чизиқли ўлчовларининг кўпайтмасига тенг ёки унинг асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг дейилади. Охирги мулоҳаза ҳар қандай параллелепипед учун ҳам тўғри.

Хусусий ҳолда қирраси a-га тенг кубнинг V ҳажми қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$V = a^3.$$

? Қандай ўйлайсизлар, фигуранинг ҳажми нолга тенг бўладими?

Ҳажмлари тенг икки фигура *тенгдош фигуралар* деб аталади. Нуқталари орасидаги масофа бир хил мусбат сонга кўпайтириладиган текисликни шакл алмаштириш *ўхшашлик* деб аталишини эслатамиз. Демак, ўхшашлик шакл алмаштиришда ҳар қандай A, B нуқталари мос ҳолда A', B'нуқталарига кўчса, $A'B' = k \cdot AB$ бўлади, бунда k — *ўхшашлик коэффициенти* деб аталадиган мусбат сон.

Агар фазодаги икки фигуранинг бирини иккинчисига кўчирадиган ўхшашлик шакл алмаштириш бор бўлса, унда шу икки фигура *ўхшаш* деб аталади.

Ўхшаш фигураларга мисоллар:

1) икки кубнинг ўхшашлик коэффициенти шу кубларнинг қирралари узунликларининг нисбатига тенг бўлади;

2) икки тўғри бурчакли параллелепипедларнинг a', b', c' билан a, b, c қирралари учун қуйидаги тенгликлар бажарилади:

$$a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc,$$

бунда k — қандайдир ўзгармас сон;

3) икки шарнинг ўхшашлик коэффициенти шу шарларнинг радиусла рининг нисбатига тенг бўлади.

Икки ўхшаш кўпёқ сиртларининг юзларининг нисбати ўхшашлик коэффициентининг квадратига тенг бўлишини исботланг.

Икки ўхшаш шар сиртларининг юзларининг нисбати ўхшашлик коэффициентининг квадратига тенг бўлишини исботланг.

Икки тўғри бурчакли параллелепипед ҳажмларининг нисбати ўхшашлик коэффициентининг кубига тенг бўлишини текширинг.

Икки ўхшаш фигура ҳажмларининг нисбати ўхшашлик коэффициентининг кубига тенг бўлишини исботсиз берамиз, яъни агар k ўхшашлик коэффициенти бўйича Φ_2 фигураси Φ_1 фигурасига ўхшаш бўлса, унда шу фигураларнинг ҳажмлари учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

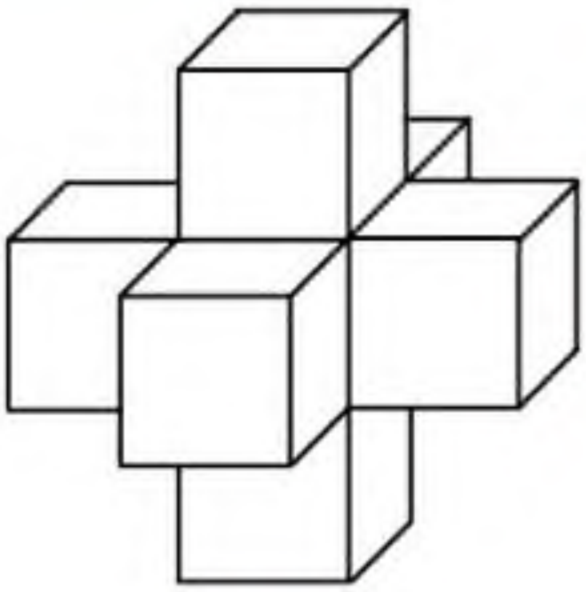
$$V(\Phi_2) = k^3 V(\Phi_1).$$

Саволлар

1. Ҳажм қандай катталикни таърифлайди?
2. Ҳажмнинг ўлчов бирлиги сифатида нима олинади?
3. Ҳажмнинг хоссаларини айтинг.
4. Фазодаги қандай фигуралар тенгдош деб аталади?
5. Фазодаги қандай шакл алмаштириш ўхшашлик деб аталади?
6. Фазодаги қандай фигуралар ўхшаш деб аталади?
7. Ўхшаш фигураларнинг ҳажмлари ўзаро қандай боғланган?
8. Фазодаги ўхшаш фигураларга мисоллар келтиринг.

Машқлар

A



12.1-расм

12.1. Кубнинг ҳажми 27 $см^3$ га тенг. Унинг сиртининг юзини топинг.

12.2. Куб сиртининг юзи 24 $см^2$ га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

12.3. Кубнинг диагонали $\sqrt{12}$ см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

12.4. 12.1-расмдаги фазовий фигурани ташкил этувчи кубларнинг қирралари 1 см га тенг. Шу фигуранинг ҳажмини топинг.

12.5. Агар кубнинг барча қирраларини 3 марта орттирсак, унда унинг ҳажми неча марта ортади?

12.6. Агар тўғри бурчакли параллелепипеднинг барча қирраларини 2 марта қисқартирсак, унда унинг ҳажми неча марта камаяди?

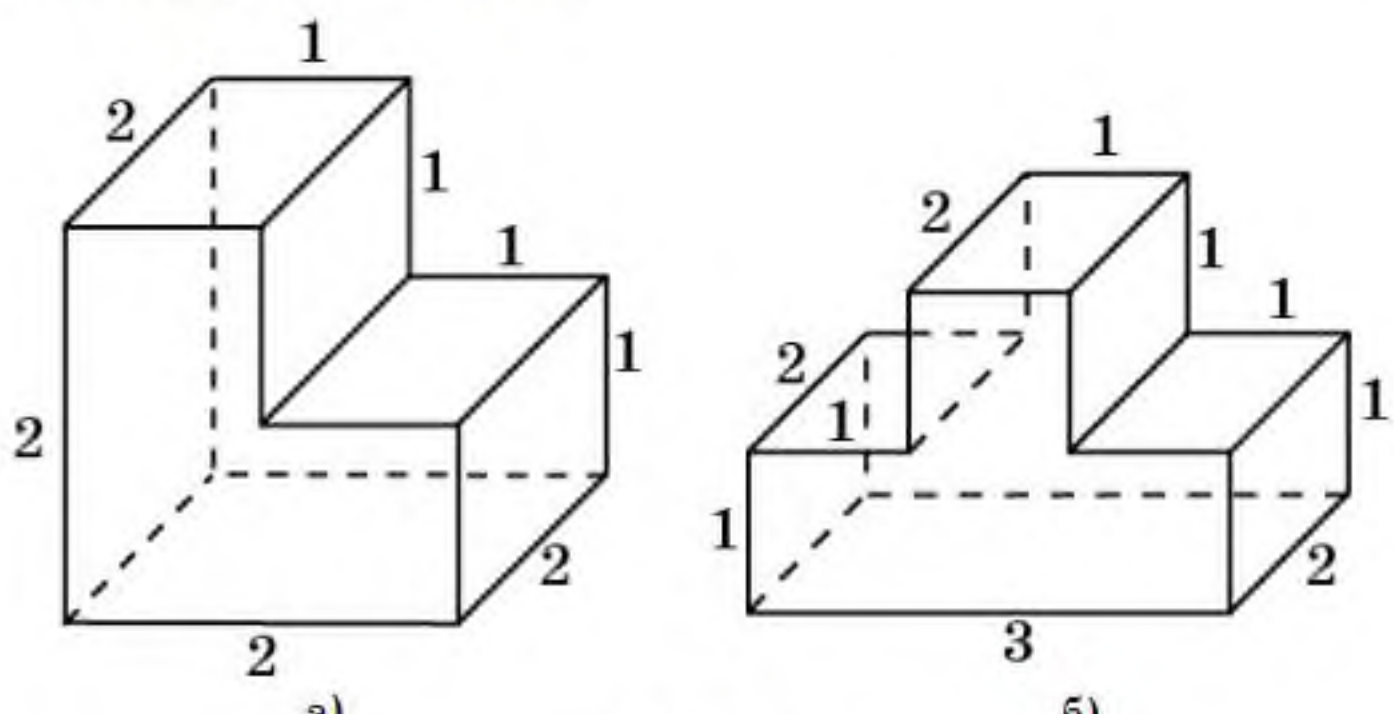
12.7. Агар тўғри бурчакли параллелепипеднинг: 1) бир чизиқли ўлчамини 2 марта орттирилса; 2) икки чизиқли ўлчамини 3 марта қисқартирилса, унда унинг ҳажми қандай ўзгаради?

12.8. Қурилиш ғиштининг оғирлиги 4 кг. Барча чизиқли ўлчамлари шу ғиштнинг ўлчамларидан тўрт марта кичик бўладиган ўйинчоқ ғиштнинг оғирлиги қанча грамм бўлади?

B

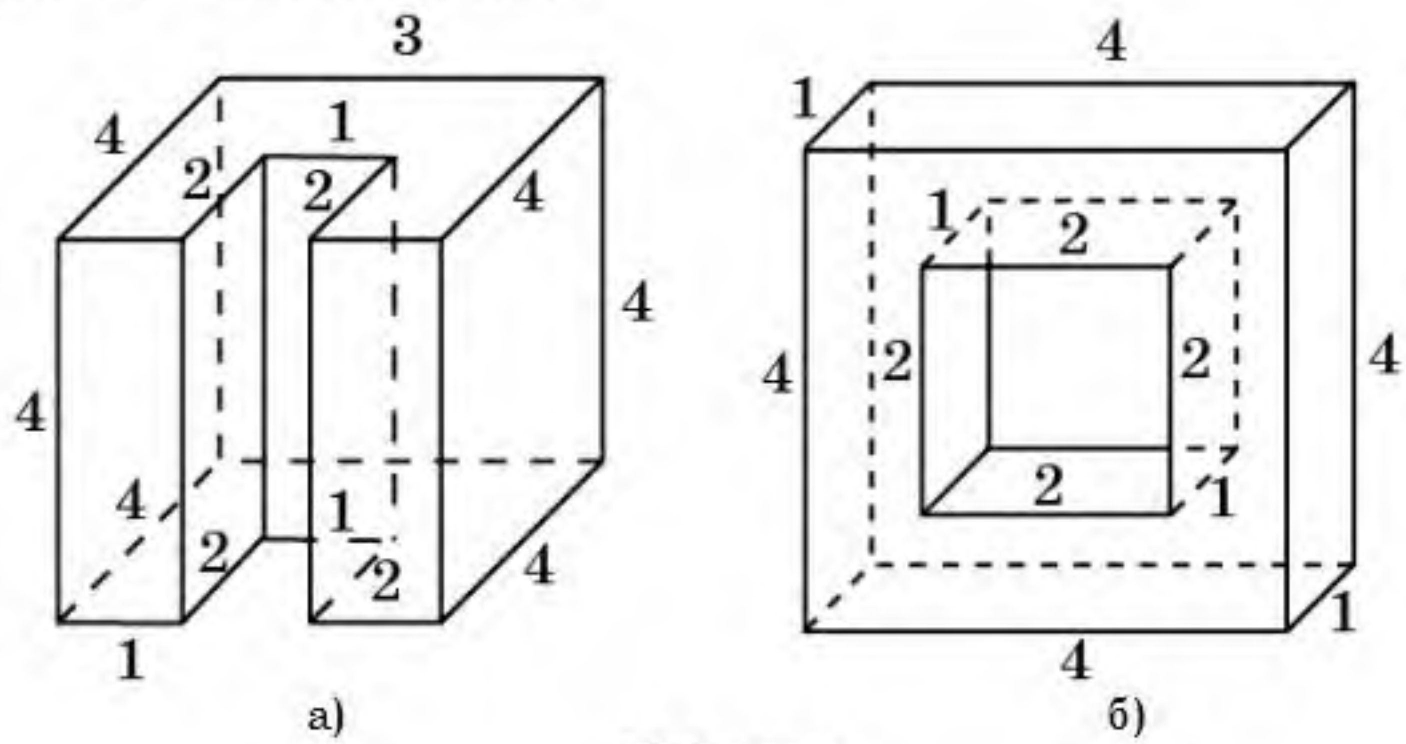
12.9. Мактабдаги синф хонасининг баландлиги 3,5 м га тенг. Агар ҳар бир ўқувчига 7,5 $м^3$ ҳаво керак бўлса, унда 28 ўқувчига мўлжалланган синф хонасининг юзи қандай бўлиши керак?

12.10. 12.2-расмдаги тўғри бурчакли параллелепипедлардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг.



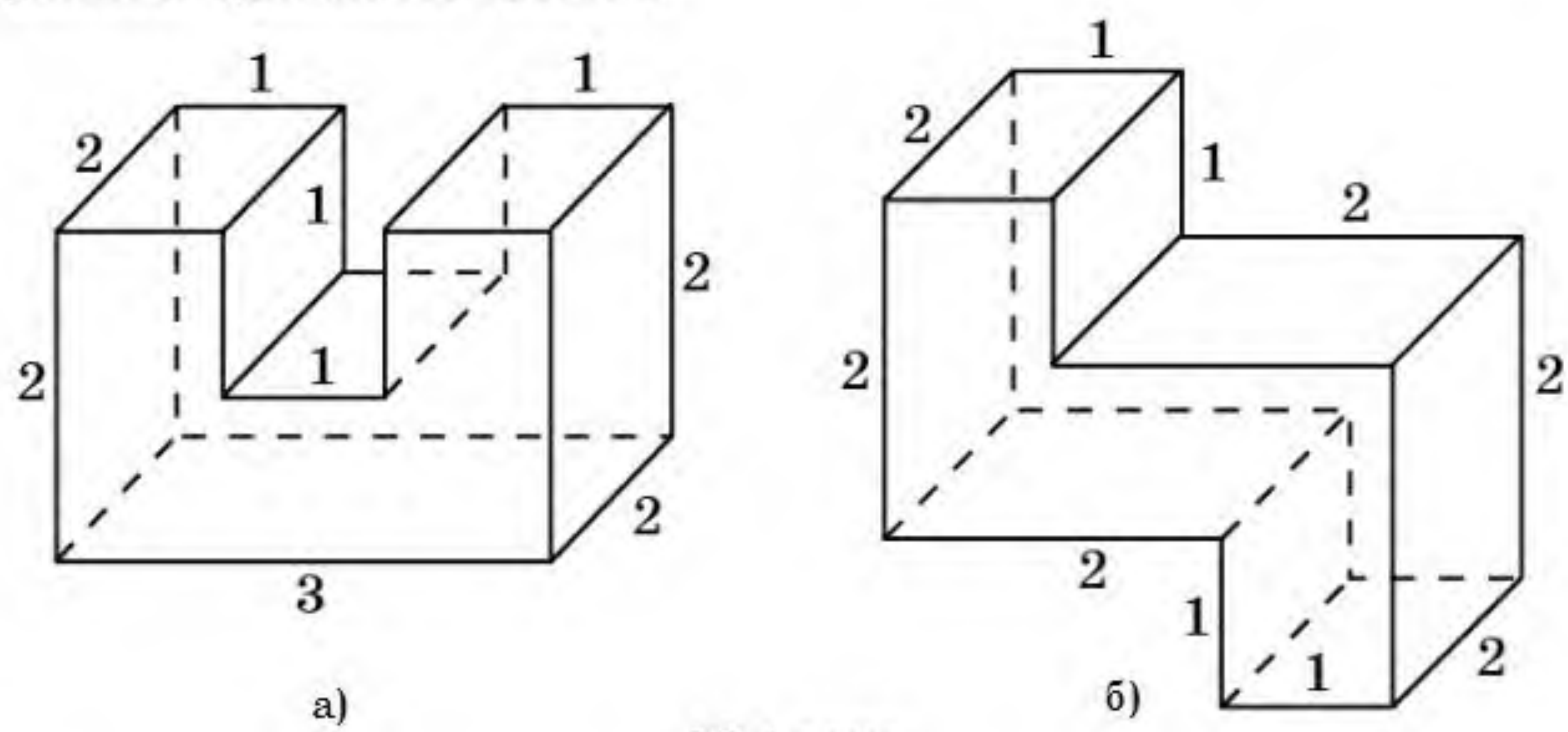
12.2-расм

12.11. 12.3-расмдаги тўғри бурчакли параллелепипедлардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг.



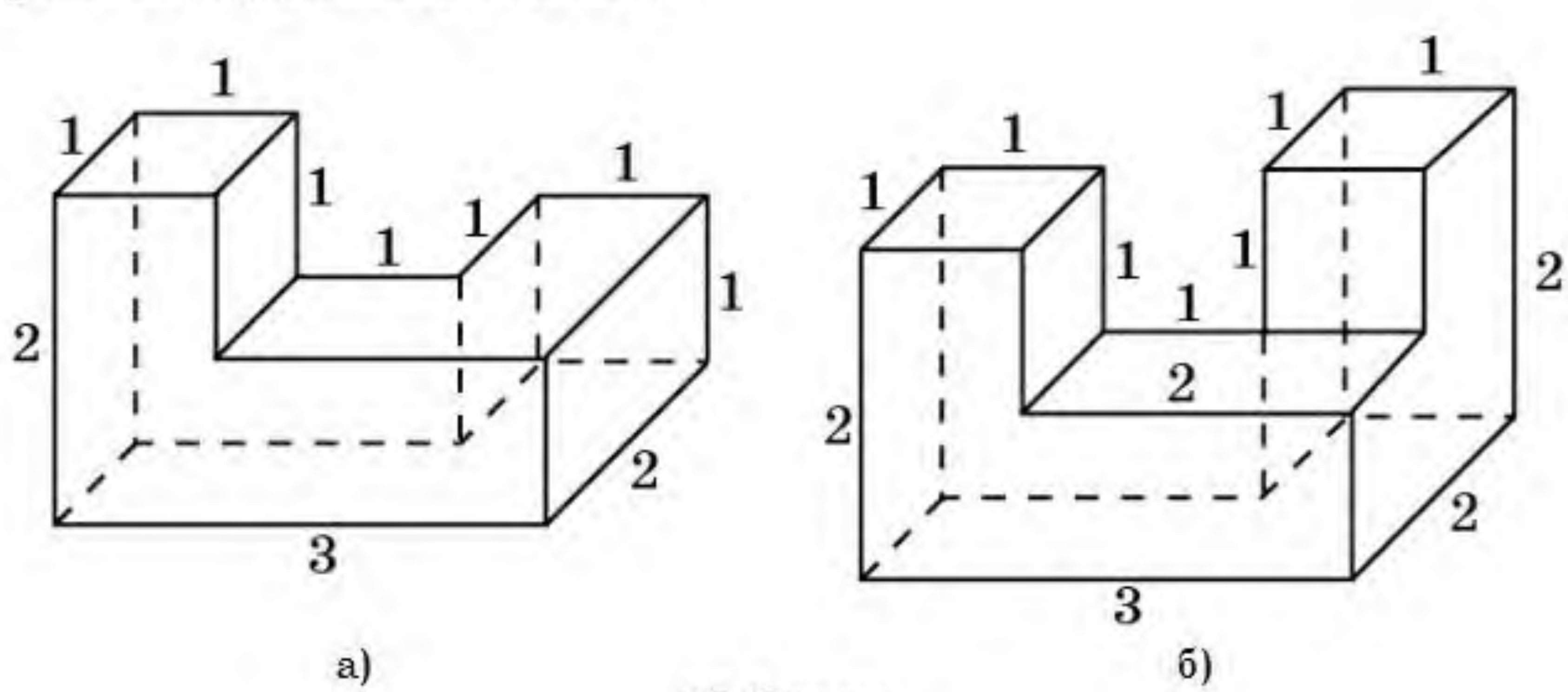
12.3-расм

12.12. 12.4-расмдаги тўғри бурчакли параллелепипедлардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг.



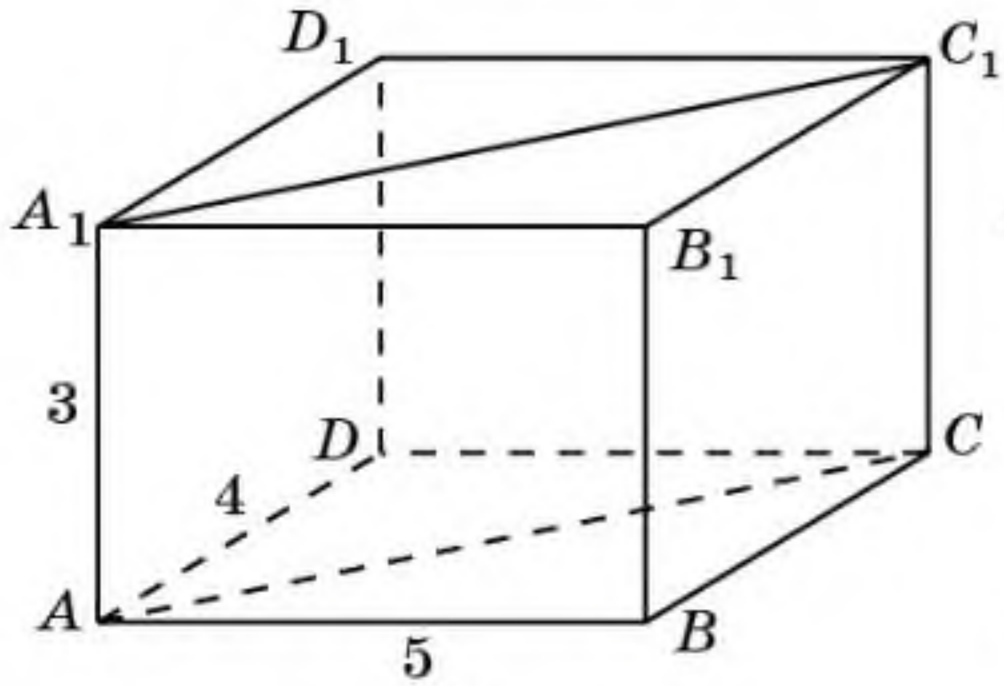
12.4-расм

12.13. 12.5-расмдаги тўғри бурчакли параллелепипедлардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг.

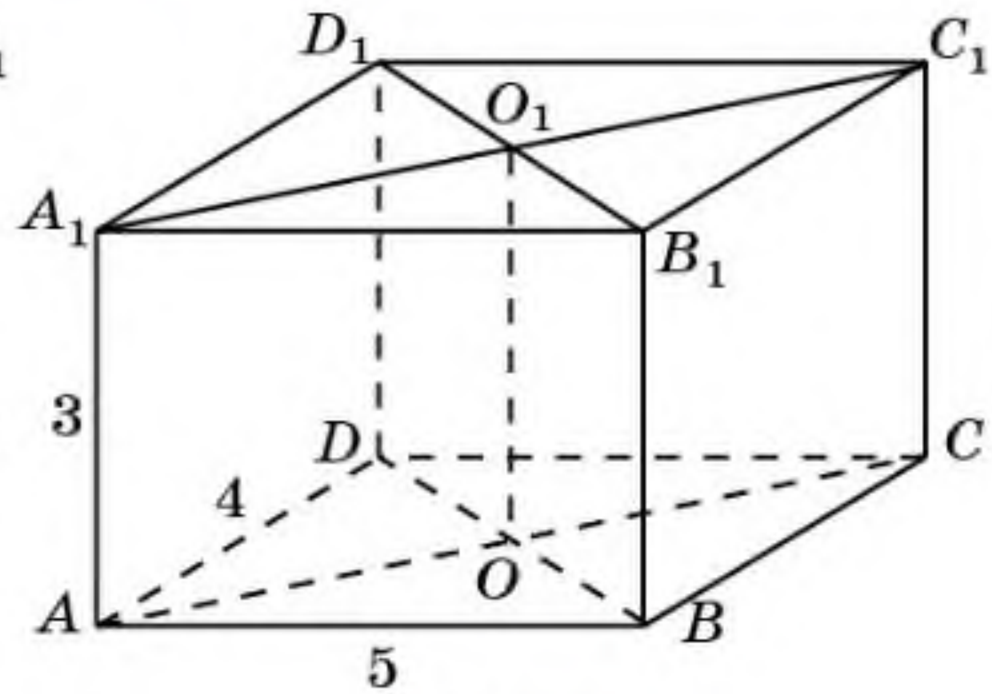


12.5-расм

12.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган қирралари 5 см, 4 см, 3 см га тенг. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призманинг ҳажмини топинг (12.6-расм).



12.6-расм

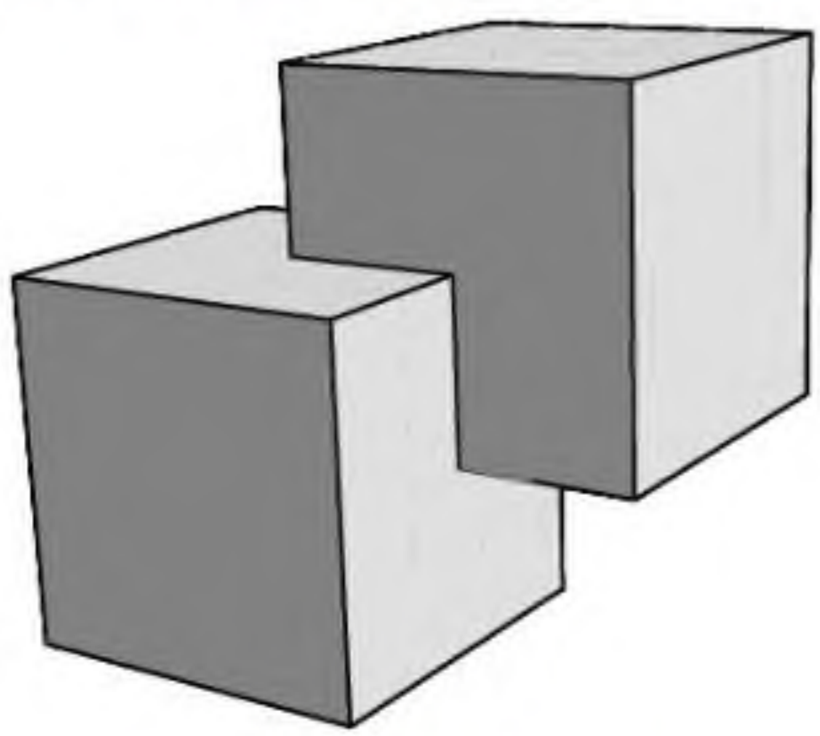


12.7-расм

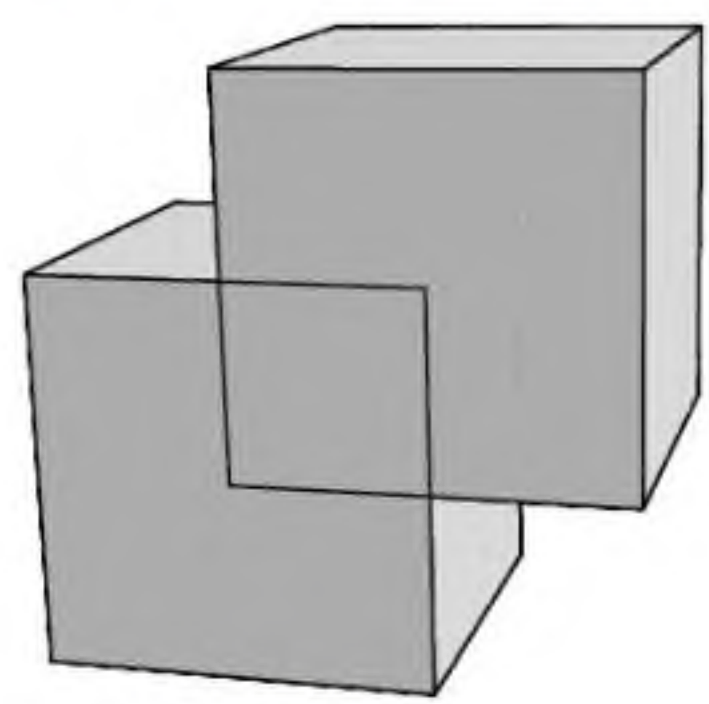
12.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган қирралари 5 см, 4 см, 3 см га тенг. $ABOA_1B_1O_1$ учбурчакли призманинг ҳажмини топинг (12.7-расм).

12.16. Балиқни ўстиришга мўлжалланган аквариумнинг асоси — томонлари 40 см ва 50 см бўладиган тўғри тўртбурчак. Аквариумдаги сувнинг чуқурлиги 80 см. Бу сув иккинчи аквариумга қуйиб олинди. Иккинчи аквариумнинг таги — томонлари 80 см ва 100 см га тенг тўғри тўртбурчак. Бундаги сувнинг чуқурлиги қандай бўлади?

12.17. Бирининг учи иккинчисининг марказида жойлашган икки бирлик кубнинг умумий қисмининг ҳажмини топинг (12.8-расм).



12.8-расм



12.9-расм

12.18. Бирининг икки учи иккинчисининг икки ёғининг марказларида жойлашган икки бирлик кублардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг (12.9-расм).

12.19. Қурилиш ғиштининг ўлчами 25 см × 12 см × 6 см. Цемент эритмаси ҳажмини 15% га орттирадиган бўлса, 10000 ғиштдан иборат деворнинг ҳажмини топинг.

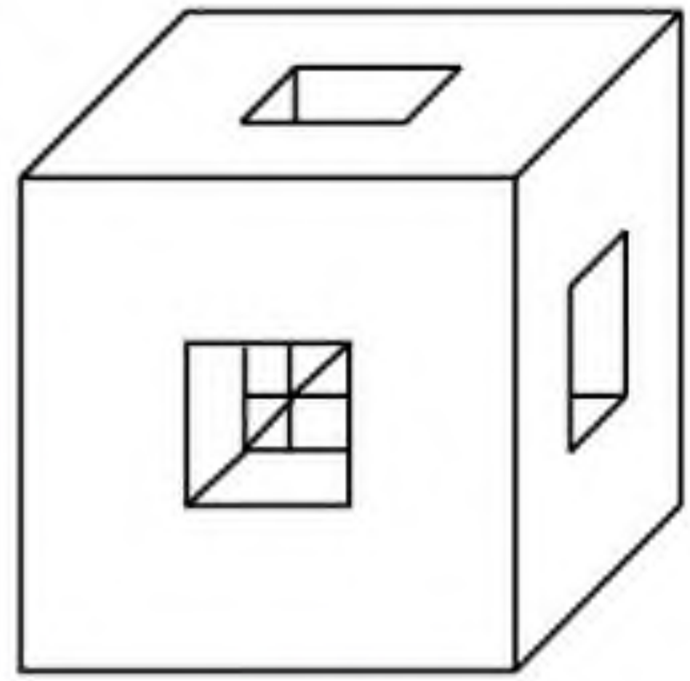
12.20. Қирралари 1 см, 6 см ва 8 см бўлган уч қўрғошин кубни эритиб бир куб ясалди. Олинган куб қиррасининг узунлигини топинг.

C

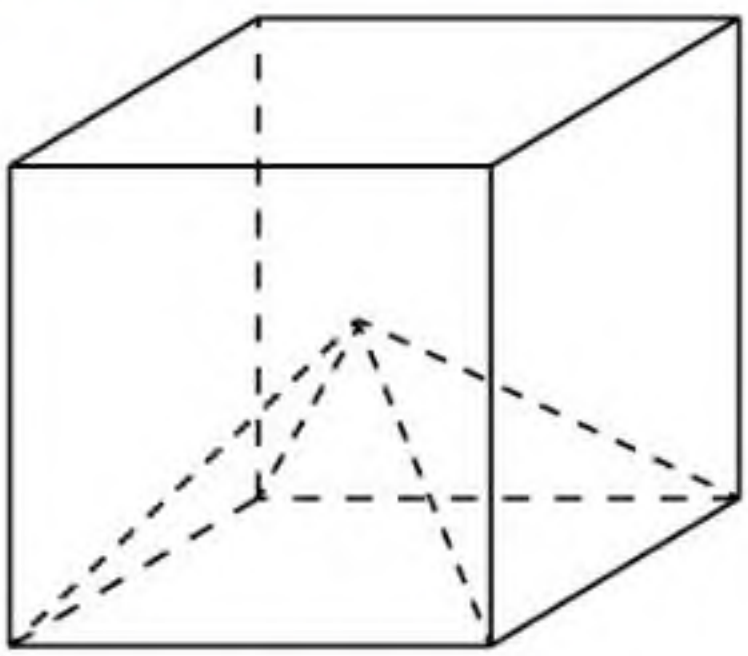
12.21. Агар кубнинг ҳар бир қиррасини 2 см га орттирса, унда кубнинг ҳажми 98 $см^3$ га ортади. Куб қиррасини топинг.

12.22. Қирраси 6 см бўлган кубнинг ҳар бир ёғидан томони 2 см га тенг ковак квадрат тешиклар ясалган (12.10-расм). Кубнинг қолган қисмининг ҳажмини топинг.

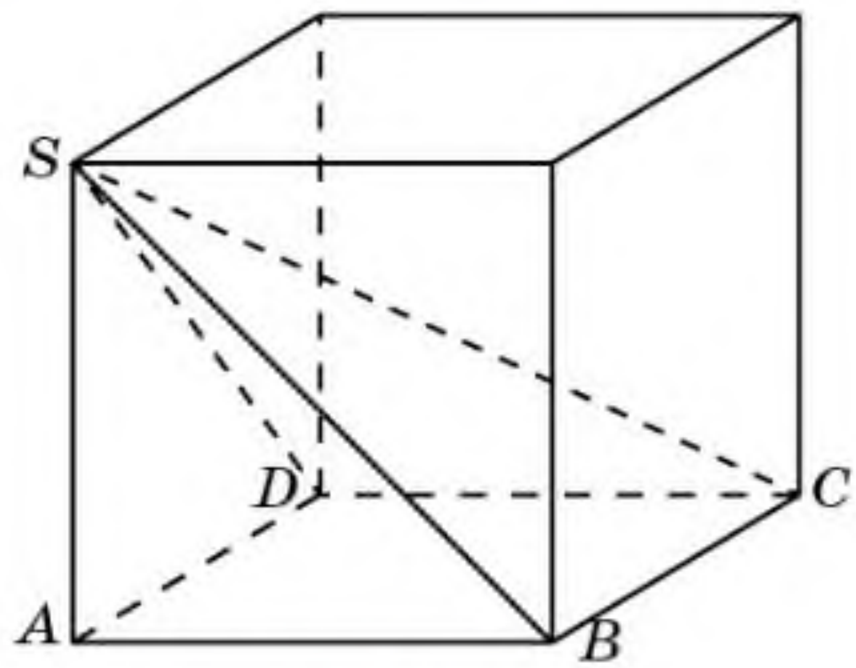
12.23. Мунтазам тўрт бурчакли пирамиданинг асоси — бирлик кубнинг бир ёғи, учи эса шу кубнинг маркази бўлади (12.11-расм). Пирамиданинг ҳажмини топинг.



12.10-расм



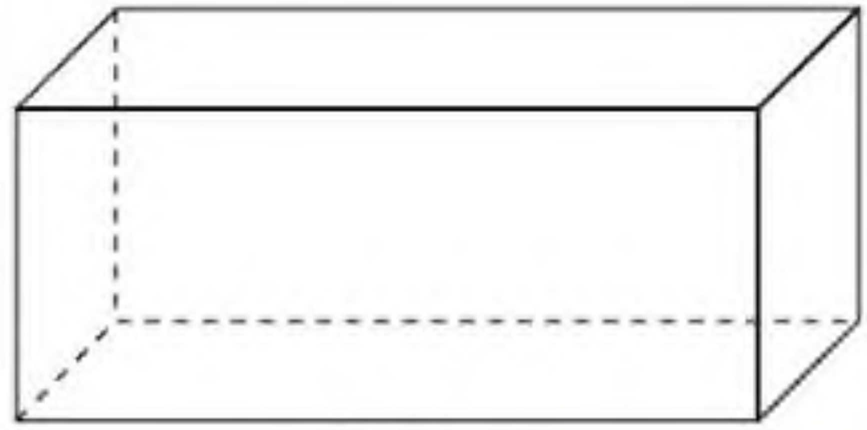
12.11-расм



12.12-расм

12.24. Тўрт бурчакли пирамиданинг асоси — бирлик кубнинг бир ёғи, учи эса шу ёғида ётмайдиган кубнинг учи бўлади (12.12-расм). Пирамиданинг ҳажмини топинг.

12.25. Параллелепипед шаклидаги идиш берилган (12.13-расм). Идиш ҳажмининг тенг ярми сув билан тўлдирилган. Расмини тасвирлаб кўрсатинг ва тушунтиринг. Агар идишнинг узунлиги 4 м, эни баландлигидан 0,5 м ортиқ, баландлиги эса



12.13-расм

узунлигининг 37,5% ни ташкил этса, қуйилган сувнинг ҳажмини топинг.

12.26. Аквариумнинг узунлиги 80 см, эни 45 см, баландлиги эса 55 см. Сув сатҳи аквариумнинг юқорги четидан 10 см паст бўлиши учун шу аквариумга неча литр сув қуйиш керак?

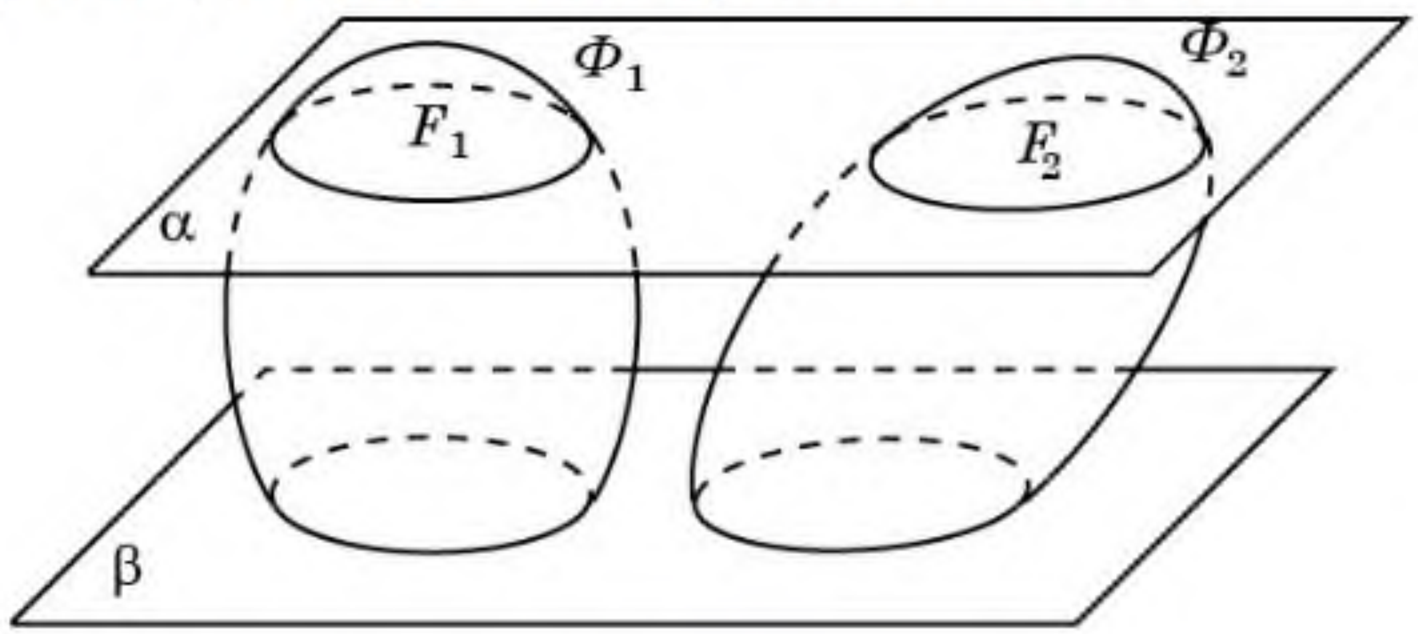
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

12.27. Призманинг, ички чизилган ва ташқи чизилган призмаларнинг таърифларини такрорланг.

13-§. Призма ҳажми

Италиялик математик Бонавентура Кавальери (1598—1647 йй.) тавсия этган фазовий фигураларнинг ҳажмларини ҳисоблаш усулини кўриб чиқайлик.

Кавальери принципи. ***Агар фазодаги Φ_1 ва Φ_2 фигураларининг бир текисликка параллел бўлган текисликлар билан кесимларида юзлари бир хил F_1 ва F_2 фигуралари ҳосил бўлса, унда берилган фазовий фигураларнинг ҳажмлари тенг бўлади*** (13.1-расм).



13.1-расм

Кавальери принципини асослаш учун Φ_1 ва Φ_2 фигураларини қалинлиги бир хил юпқа қатламлардан иборат деб оламиз. Улар Φ_1 ва Φ_2 фигураларининг ҳар қандай текисликка параллел бўлган текисликлар билан кесишишидан ҳосил бўлади (13.1-расм). Мана шу қатламларнинг қалинлиги билан юзларининг тенглигидан уларнинг ҳажмларининг тенглиги келиб чиқади. Демак, мана шу қатламлардан иборат Φ_1 ва Φ_2 фигураларнинг ҳажмлари ҳам тенг бўлади.

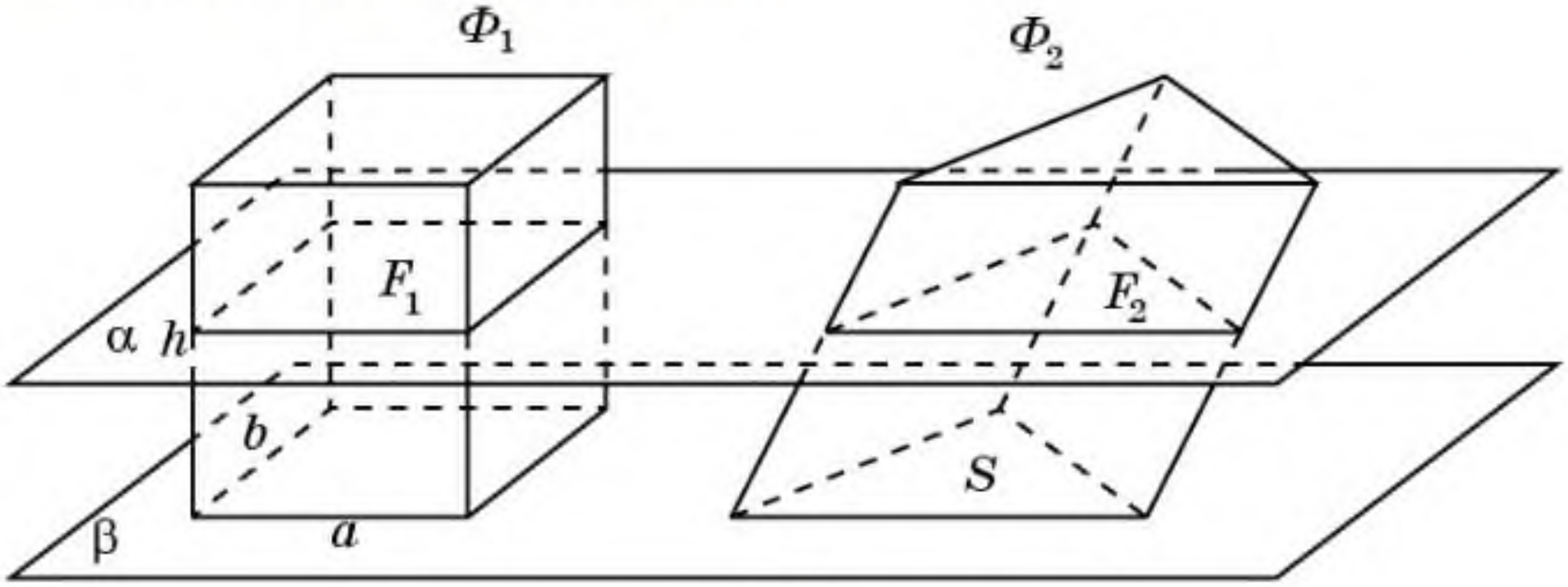
Кавальери принципини фойдаланиб, ҳар қандай призманинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқариш мумкин.

Теорема. ***Призманинг ҳажми унинг асоси юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг бўлади:***

$$V = S \cdot h,$$

бу ерда S — призма асосининг юзи, h — призманинг баландлиги.

Исботи. Асосининг юзи S ва баландлиги h бўлган призма учун тўғри бурчакли параллелепипедни кўриб чиқамиз. Унинг бир учидан чиққан қирралари a, b, h га тенг ва $a \cdot b = S$ бўлсин. Призма билан параллелепипедни унинг a, b томонлари ётган ёғи призма асосининг b текислигида ётадигандай ва ўзлари шу текисликнинг бир ёғида бўладигандай қилиб жойлаштирамиз (13.2-расм).



13.2-расм

Параллелепипеднинг b текислигига параллел бўлган a текислиги билан кесимида b текислигидаги томонлари a, b бўлган тўғри тўртбурчакка тенг тўғри тўртбурчак ҳосил бўлади. Призманинг шу a текислиги билан кесимида призманинг асосига тенг кўпбурчак олинади. Бу кесимларнинг юзлари тенг. Демак, Кавальери принципи бўйича параллелепипед билан призманинг ҳажмлари тенг бўлади. Бундан призманинг ҳажми $V = S \cdot h$ бўлиши келиб чиқади. ◻

Тўғри призманинг баландлиги унинг ён қирраси билан юзма-юз келади, ҳажми эса асосининг юзи билан ён қиррасининг кўпайтмасига тенг бўлади.

Баландлиги h ва асосининг томонлари a бўлган мунтазам: а) учбурчакли; б) олтибурчакли призманинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқаринг.

Саволлар

1. Кавальери принципи қандай мулоҳаза қилинади?
2. Призманинг ҳажми қандай ҳисобланилади?

Машқлар

А

13.1. Учбурчакли призманинг асоси — катетлари 3 см ва 4 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Призманинг баландлиги 10 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

13.2. Мунтазам учбурчакли призманинг баландлиги 5 см га, асосининг томонлари эса 4 см га тенг. Шу призманинг ҳажмини топинг.

13.3. Мунтазам олтибурчакли призманинг ён қирралари 3 см га, асосининг томонлари эса 2 см га тенг. Шу призманинг ҳажмини топинг.

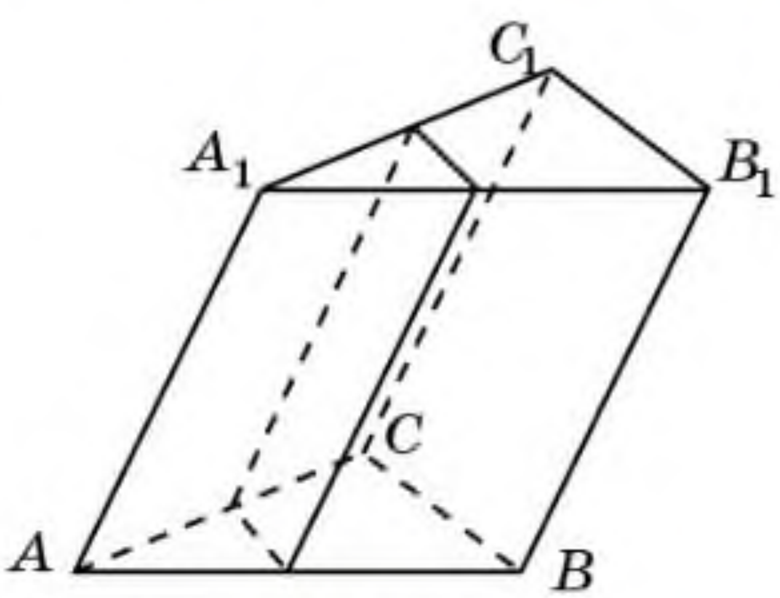
13.4. Тўртбурчакли призманинг асоси — томонлари 1 см га тенг квадрат. Призманинг ён қирралари 2 см га тенг ва улар асос текислиги билан 60° бурчак ясайди. Призманинг ҳажмини топинг.

13.5. Параллелепипеднинг ёғи — томонлари 1 см ва ўткир бурчаги 60° бўлган ромб. Параллелепипеднинг бир қирраси 1 см га тенг ва шу ёғи билан 60° бурчак ясайди. Унинг ҳажмини топинг.

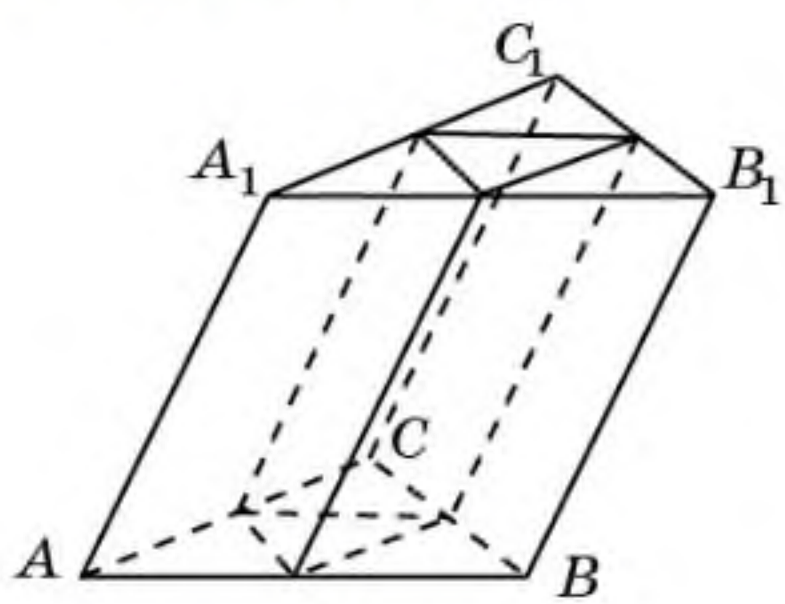
B

13.6. Мунтазам учбурчакли призманинг ҳажми 4800 $см^3$ га, асосининг томонлари 20 см га тенг. Призманинг баландлигини топинг.

13.7. Учбурчакли призма асосининг ўрта чизиғи орқали унинг ён қиррасига параллел текислик ўтказилган (13.3-расм). Бу текислик призманинг ҳажмини қандай нисбатда бўлади?

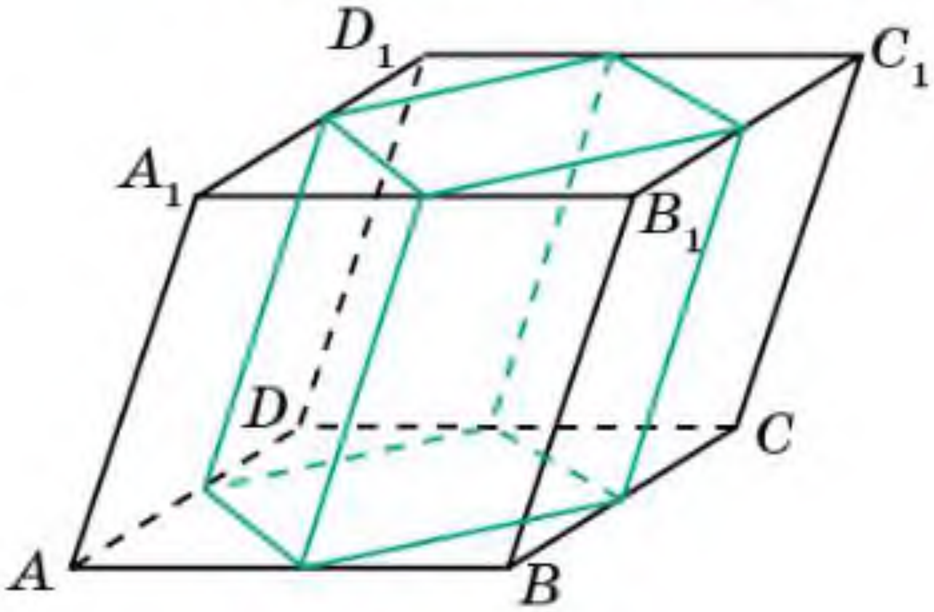


13.3-расм



13.4-расм

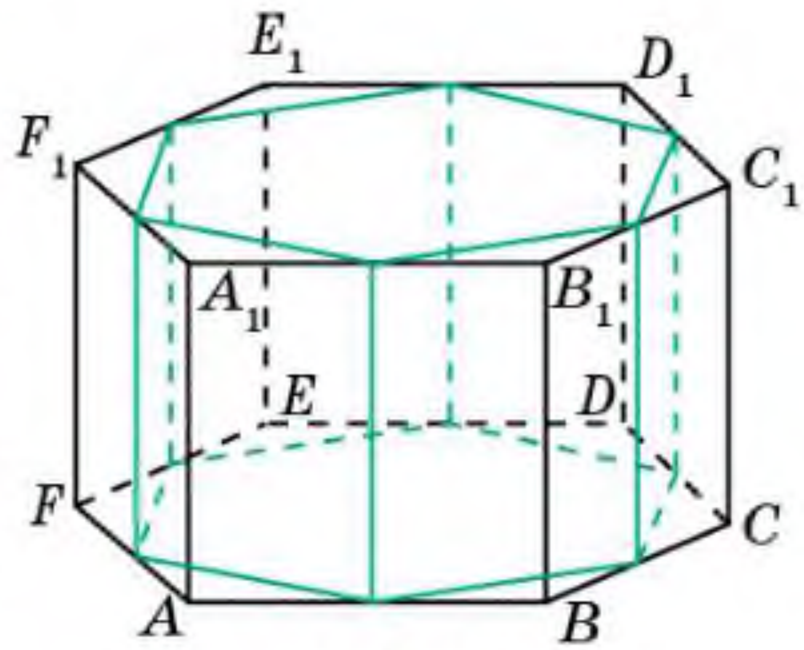
13.8. Учбурчакли призманинг ҳажми 12 $см^3$ га тенг. Асосининг учлари берилган призма асосининг томонларининг ўрталари бўладиган иккинчи призманинг ҳажмини топинг (13.4-расм).



13.5-расм

13.9. Тўртбурчакли призманинг ҳажми 10 $см^3$ га тенг. Асосининг учлари берилган призма асосининг томонларининг ўрталари бўладиган иккинчи призманинг ҳажмини топинг (13.5-расм).

13.10. Олтибурчакли призманинг ҳажми 12 $см^3$ га тенг. Асосининг учлари берилган призма асоси томонларининг ўрталари бўладиган иккинчи призманинг ҳажмини топинг (13.6-расм).

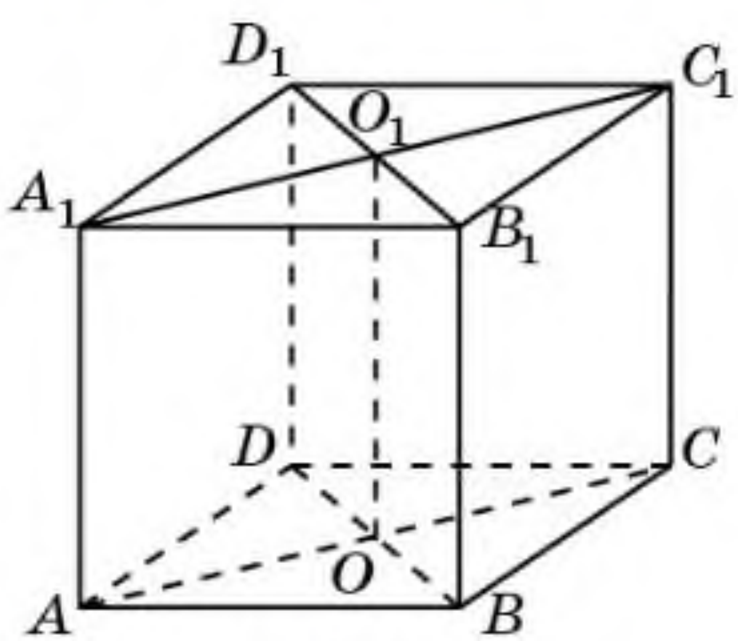


13.6-расм

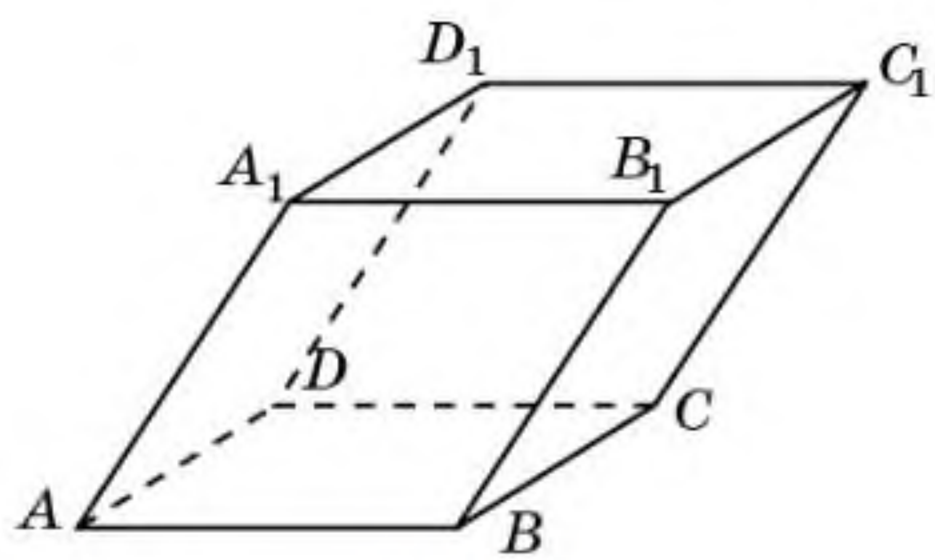
13.11. Икки мунтазам n-бурчакли призма ўхшаш бўлиши учун уларнинг ён қирралари билан асосининг томонларига тегишли шартларни мулоҳаза қилинг. Шу призма ҳажмларининг нисбатини топинг.

C

13.12. Тўғри призманинг асоси — юзи 1 $м^2$ га тенг бўлган ромб. Унинг диагонали бўйича кесимларининг юзлари 3 $м^2$ га ва 6 $м^2$ га тенг (13.7-расм). Призманинг ҳажмини топинг.



13.7-расм



13.8-расм

13.13. Параллелепипеднинг умумий учга эга уч ёғи — томонлари 1 см, учидаги ўткир бурчаги 60° га тенг ромб (13.8-расм). Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

13.14. Айланиш жисмлари ва цилиндр таърифларини такрорланг.

14-§. Цилиндр ҳажми

Кавальери принципини цилиндрнинг ҳажмини топишда қўлланайлик.

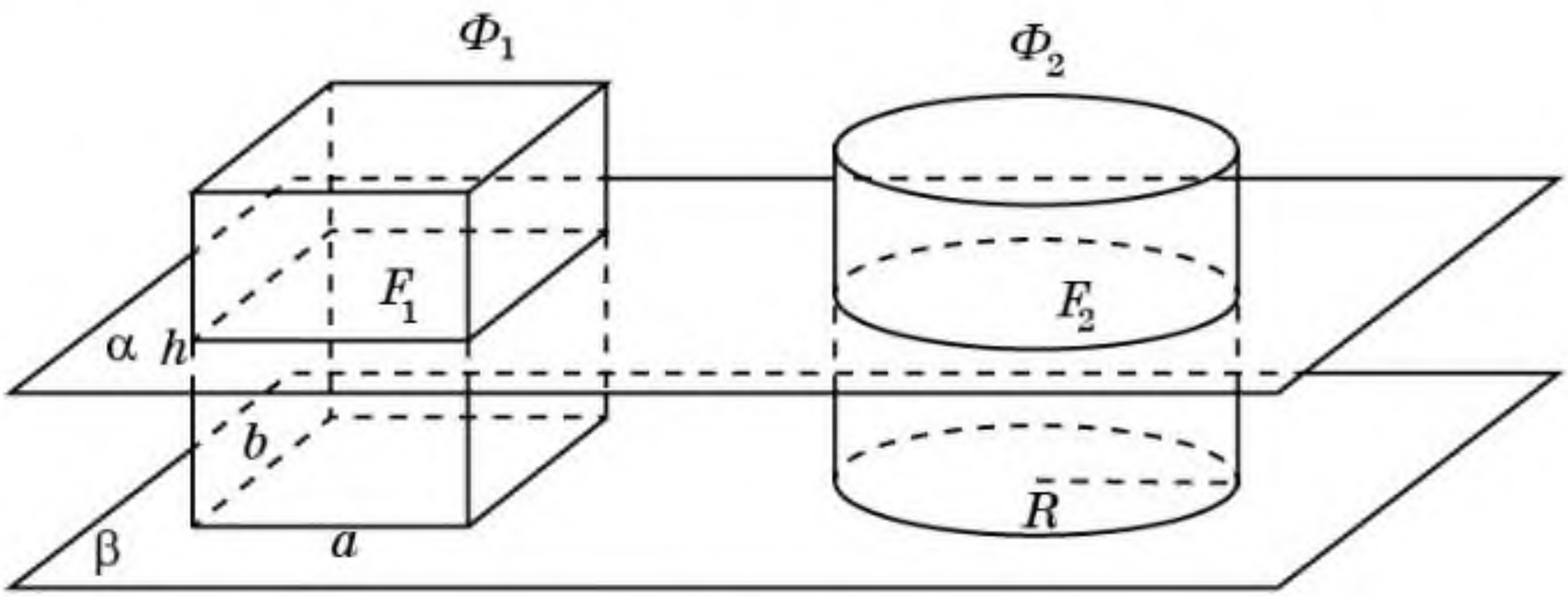
Теорема. ***Цилиндрнинг ҳажми унинг асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг бўлади*:**

$$V = S \cdot h = \pi R^2 \cdot h,$$

Бунда: S — цилиндр асосининг юзи, R — асосининг радиуси, h — цилиндрнинг баландлиги.

Исботи. Теореманинг исботи призманинг ҳажмини топиш формуласининг исботига ўхшаш бўлади. Асосининг радиуси R ва баландлиги h бўлган цилиндр учун тўғри бурчакли параллелепипедни кўриб чиқамиз. Унинг бир учидан чиқувчи қирралари a, b, h га тенг ва $a \cdot b = \rho R^2$ бўлсин.

Цилиндр билан параллелепипедни унинг a, b томонлари ётган ёғи цилиндр асосининг b текислигида ётувчи ва ўзлари шу текисликнинг бир ёқ бўлагида бўладигандай жойлаштирамиз (14.1-расм).



14.1-расм

Параллелепипеднинг b текислигига параллел α текислиги билан кесимида β текислигидаги томонлари a, b бўлган тўғри тўртбурчакка тенг тўғри тўртбурчак ҳосил бўлади. Цилиндрнинг шу а текислиги билан кесимида — цилиндрнинг асосига тенг доира олинади. Бу кесимларнинг юзлари тенг. Демак, Кавальери принципи бўйича параллелепипед билан цилиндрнинг ҳажмлари тенг бўлади. Бундан цилиндрнинг ҳажми $\rho R^2 \cdot h$ бўлади. □

Савооллар

1. Цилиндрнинг ҳажми қандай ҳисобланади?

Машқлар

А

14.1. Цилиндрнинг ясовчиси 3 см га, асосининг радиуси эса 2 см га тенг. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

14.2. Цилиндрнинг ўқ кесими — томони a см бўлган квадрат. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

14.3. Бир коса иккинчисига нисбатан 2 марта баландроқ, иккинчи коса эса биринчисига нисбатан 1,5 марта кенгроқ. Қандай косанинг сиғимлиги юқори?

14.4. Квадратнинг томони a га тенг. Квадратни томони ётган тўғри чизиқ орқали айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

14.5. Цилиндрнинг ўқ кесимидан диагонали 1 см га тенг ва у асос текислигига 30° бурчак остида оғади. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

14.6. Бирлик кубга ички чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.

14.7. Тўғри призманинг асоси — томони 1 см га тенг квадрат. Призманинг ён қирраси 2 см га тенг. Шу призмага ташқи чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.

B

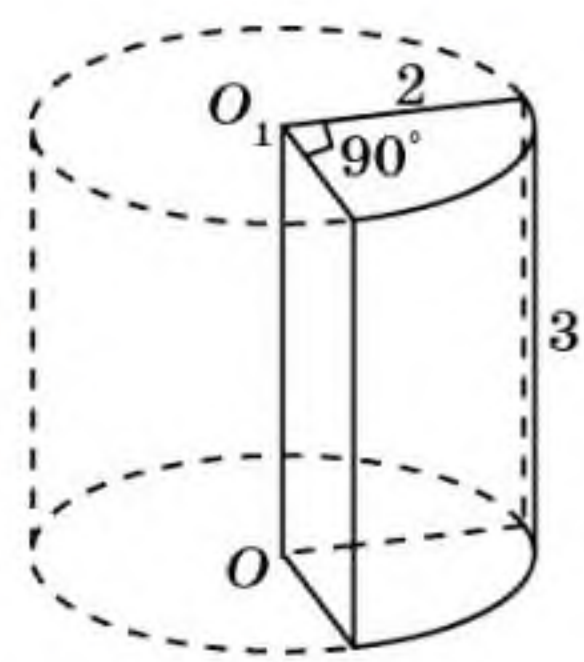
14.8. Тўғри бурчакли a ва b га тенг томонлари ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда икки цилиндр ҳосил бўлди. Шу цилиндрларнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.

14.9. Мунтазам тўрт бурчакли призмага ташқи чизилган цилиндрнинг ҳажми шу призмага ички чизилган цилиндрнинг ҳажмидан неча марта ортиқ?

14.10. 14.2-расмдаги цилиндр асосининг радиуси 2 см га, ясовчиси эса 3 см га тенг. Шу цилиндрдан икки ёқли тўғри бурчак ясаб кесилиб олинган қисмининг ҳажмини топинг.

14.11. Цилиндрсимон идиш асосининг диаметри 9 см га тенг. Идишга қандайдир жисмни солганда унинг ичидаги суюқликнинг сатҳи 12 см га кўтарилди. Жисмнинг ҳажмини топинг.

14.12. Цилиндрсимон идишдаги суюқликнинг сатҳи 16 см га тенг. Агар шу суюқликнинг диаметри бу идишдан 2 марта катта бўладиган иккинчи идишга қуйилса, унда суюқликнинг сатҳи қандай баландликда бўлади?



14.2-расм

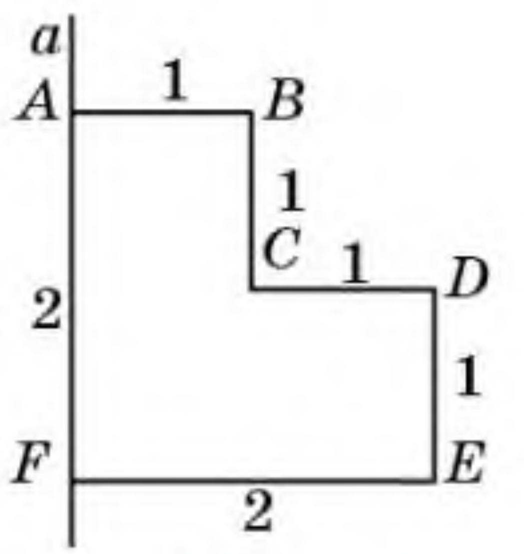
14.13. Цилиндрнинг ён сиртининг ёйилмаси — томонлари 1 см ва 2 см бўлган тўғри тўртбурчак. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

14.14. Бирлик сферага ташқи чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.

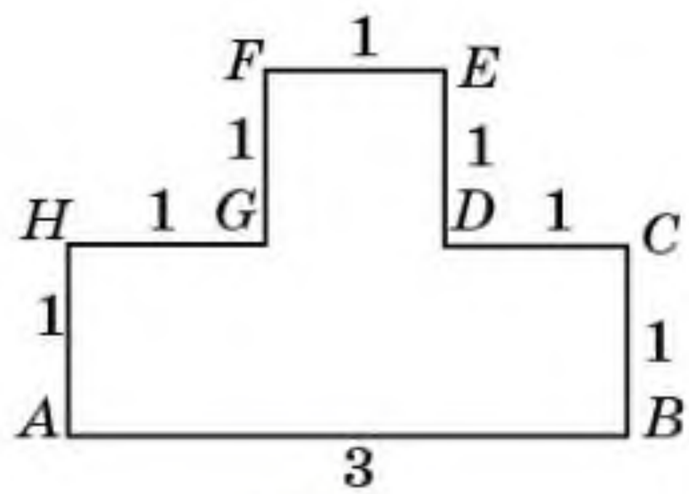
14.15. Иккита цилиндр ўхшаш бўлиши учун уларнинг асосларининг радиуслари билан ясовчиларига тегишли шартларни ёзинг. Уларнинг ҳажмлари нисбатини топинг.

C

14.16. 14.3-расмда барча бурчаклари тўғри бўлган кўпбурчак тасвирланган. Шу кўпбурчакни 2 см га тенг томони ётадиган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.



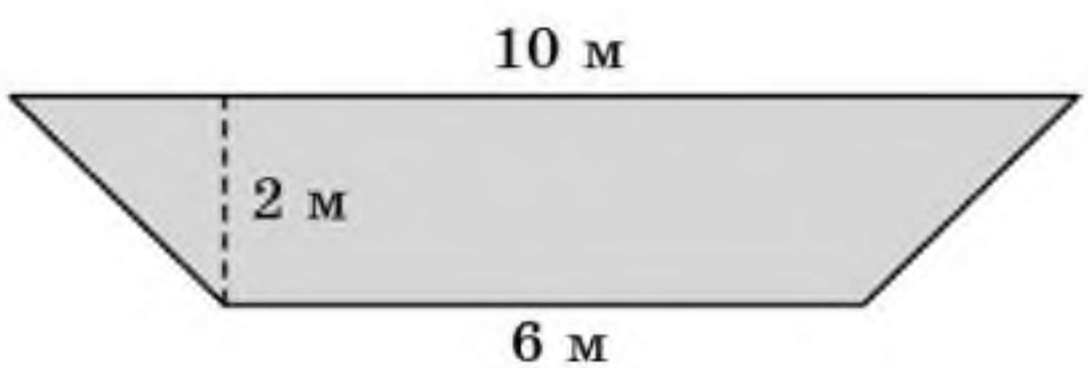
14.3-расм



14.4-расм

14.17. 14.4-расмда барча бурчаклари тўғри бўлган кўпбурчак тасвирланган. Шу кўпбурчакни 3 см га тенг томони ётадиган *AB* тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

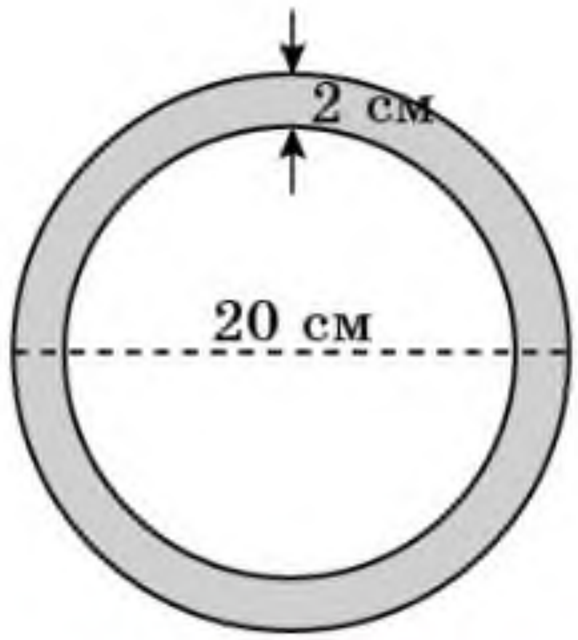
14.18. Дарё ҳавзасининг кўндаланг кесимининг тасвири тенг ёнли трапеция шаклида. Унинг асослари 10 м ва 6 м, баландлиги эса 2 м (14.5-расм). Дарё оқимининг тезлиги 1 м/с бўлса, ушбу тасвирдан 1 мин да қандай ҳажмдаги сув оқиб ўтишини топинг. Жавобини метр куб билан ифодаланг.



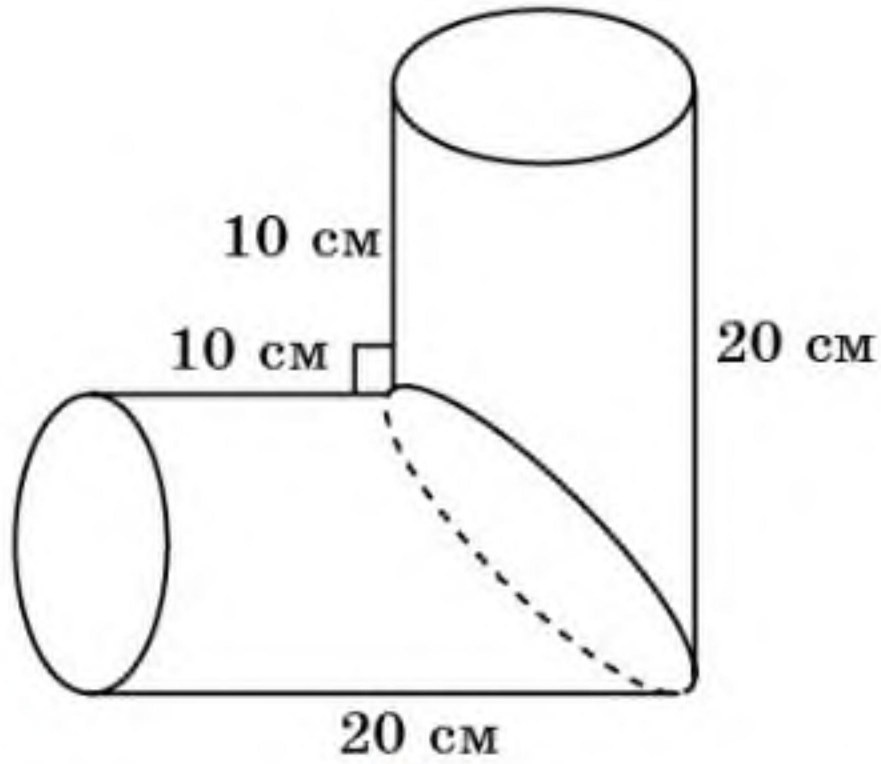
14.5-расм

14.19. Чўян қувурининг узунлиги 2 м, ташқи диаметри эса 20 см га тенг. Қувур деворининг қалинлиги 2 см (14.6-расм). Агар чўяннинг зичлиги тахминан 7,5 г/см³ бўлса, қувурнинг оғирлигини топинг. Жавобни килограмм билан ифодаланг (р d 3).

14.20. 14.7-расмдаги 90° бурчак ясовчи цилиндрларнинг иккита тенг бўлагидан иборат фигуранинг ҳажмини топинг (р d 3).



14.6-расм



14.7-расм

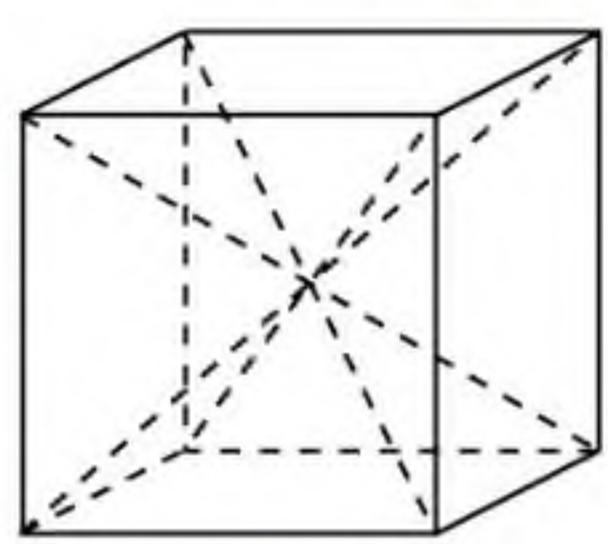
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

14.21. Пирамида ва кесик пирамиданинг таърифларини такрорланг.

15-§. Пирамида ва кесик пирамида ҳажмлари

Пирамиданинг ҳажмини ҳисоблаш ҳақидаги дастлабки маълумотлар бизнинг эрамиздан 3000 йил аввал қадимги вавилонликлар билан мисрликларнинг папирусларидан топилган.

Қизиқарлиси шундаки, улар пирамиданинг ҳажмини топишнинг умумий формуласини келтириб чиқармади, лекин аниқ пирамидаларнинг ҳажмларини ҳисоблаган. Шундай қилиб баландлиги S$\frac{1}{2}$ га, асоси 1 га тенг бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ҳажмини топа олган. У учун улар қирраси ўлчов бирлигига тенг кубни олиб, уни 6 га тенг мунтазам тўртбурчакли пирамидаларга бўлган. Бу пирамидаларнинг асослари кубнинг ёқлари бўлади ва улардан ҳар бирининг учи кубнинг марказида жойлашади (15.1-расм). Барча олтита пирамида ўзаро тенг бўлади. Бундан улардан ҳар бирининг ҳажми куб ҳажмининг $\frac{1}{6}$ га тенг бўлади.

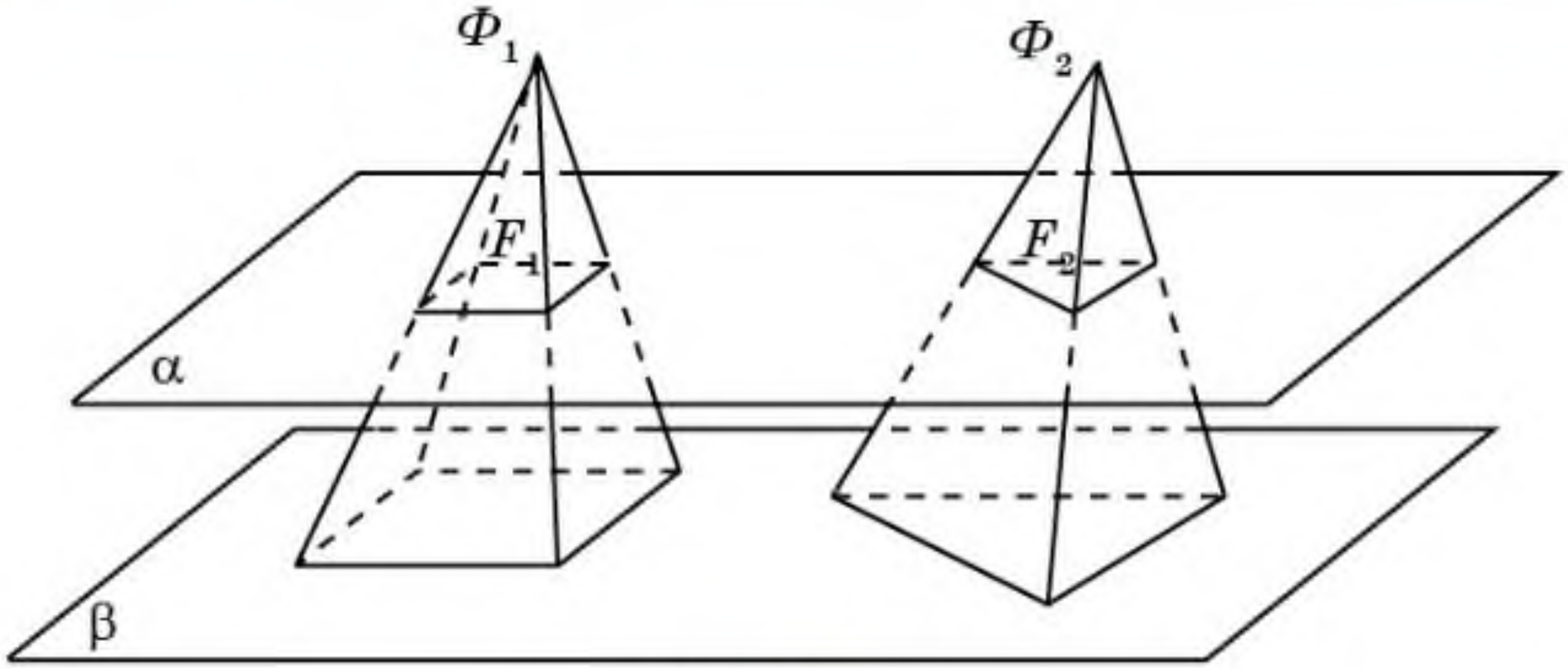


15.1-расм

Кавальери принципини қўлланиб, мана шундай ёрдамчи теоремани исботлайлик.

Теорема. *Агар икки пирамиданинг баландликлари ва асосларининг юзлари ўзаро тенг бўлса, унда уларнинг ҳажлари ҳам тенг бўлади.*

Исботи. Φ_1 ва Φ_2 пирамидаларининг баландликлари h га тенг бўлсин ва юзлари S га тенг бўлган асослари бир b текислигида ётсин (15.2-расм).



15.2-расм

b текислигига параллел ва ундан x (0 m x m h)узоқликда бўлган a текислигини ўтказамиз (15.2-расм). Шунда пирамидаларнинг мана шу текислик билан кесимларида ҳосил бўлган F_1 ва F_2 фигуралари мос ҳолда асосларига ўхшаш бўлади ва иккаласида ҳам k ўхшашлик коэффициенти $(h - x) : h$ га тенг бўлади. Демак, F_1 ва F_2 фигураларининг S_1 ва S_2 юзлари мос ҳолда $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулалари билан ифодаланади. Шундай қилиб, улар ўзаро тенг бўлади. Кавальери принципи бўйича пирамидаларнинг ҳажмлари тенг бўлиши келиб чиқади.

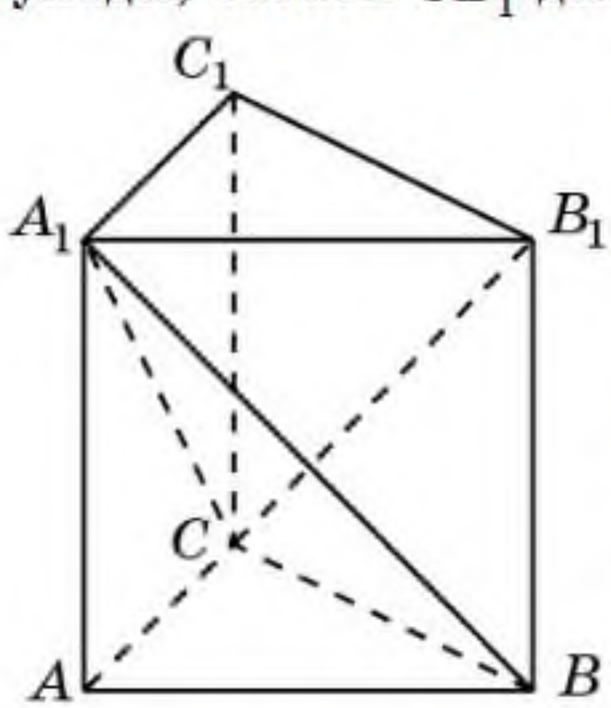
Энди учбурчакли пирамиданинг ҳажми ҳақидаги асосий теоремани исботлайлик.

Теорема. ***Учбурчакли пирамиданинг ҳажми унинг асоси юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг бўлади.***

Исботи. A_1ABC — учбурчакли пирамида бўлсин. Уни $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призма сигача тўлдирамиз (15.3-расм).

B, C, A_1 ва C, B_1, A_1 нуқталари орқали ўтувчи текисликлар бу призмани учи A_1 нуқтаси бўлган A_1ABC, A_1CBB_1 ва $A_1CB_1C_1$ пирамидаларига бўлади.

A_1CBB_1 ва $A_1CB_1C_1$ пирамидаларининг CBB_1 ва CB_1C_1 асослари тенг бўлади, сабаби CB_1 диагонали CBB_1C_1 параллелограммни иккита тенг учбурчакларга бўлади. Шу билан бирга бу пирамидаларнинг учлари умумий ва асослари бир текисликда ётади. Демак, бу пирамидаларнинг умумий баландлиги бўлади. Бундан пирамидаларнинг ҳажмлари тенг бўлиши келиб чиқади. Энди A_1ABC ва $CA_1B_1C_1$ пирамидаларини кўриб чиқайлик. Уларнинг ABC ва $A_1B_1C_1$ асослари тенг ва баландликлари ҳам тенг бўлади. Демак бу пирамидаларнинг ҳажмлари тенг бўлади. Бинобарин, барча учта пирамиданинг ҳажмлари тенг бўлади.



15.3-расм

Призманинг ҳажми унинг асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг эканини эсга олиб, учбурчакли пирамиданинг V ҳажмини топиш формуласини ёзамиз:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

бу ерда S — пирамида асосининг юзи, h — пирамиданинг баландлиги.

Энди ҳар қандай пирамиданинг ҳажмини топиш масаласини кўриб чиқамиз.

Теорема. ***Пирамиданинг ҳажми унинг асоси юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг бўлади.***

Исботи. Берилган пирамида учун асосининг юзи билан баландлиги бир хил учбурчакли пирамидани кўриб чиқамиз.

Кавальери принципи бўйича бу пирамидаларнинг ҳажмлари тенг бўлади. Демак, қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

бу ерда S — пирамида асосининг юзи, h — пирамиданинг баландлиги.

Баландлиги h ва асосининг томонлари a бўлган мунтазам: а) учбурчакли; б) олтибурчакли пирамиданинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқаринг.

Кесик пирамиданинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқарайлик.

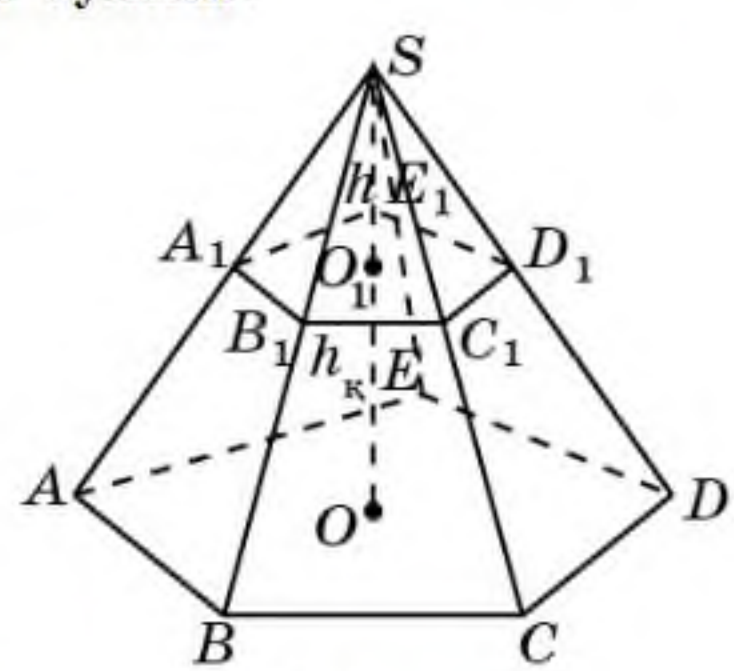
Теорема. ***Кесик пирамиданинг V ҳажми қуйидаги формула билан ҳисобланади:***

$$V = \frac{1}{3}h_к(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

бу ерда S, s — кесик пирамида асосларининг юзлари, $h_к$ — унинг баландлиги.

Исботи. Кесик пирамида асосларининг юзлари S ва s га тенг бўлсин. Унинг $h_к$ баландлиги эса дастлабки ва кесилиб олинган пирамидалар баландликларининг $(H - h)$ айирмасига тенг бўлсин.

15.4-расмда $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ бешбурчакли кесик пирамида тасвирланган.



15.4-расм

Кесик пирамиданинг V ҳажми учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

Кесик пирамиданинг $h_к$ баландлигини унинг асосларининг S, s юзлари билан дастлабки ва кесилиб олинган пирамидаларнинг H, h баландликлари орқали ифодалаймиз.

Пирамиданинг асосига параллел текислик билан кесимида унинг асосига ўхшаш фигура ҳосил бўлишини кўрамиз. Ўхшашлик коэффициенти эса пирамиданинг учидан кесим текислигига ва асос текислигигача бўлган масофаларнинг нисбатига тенг, яъни $\frac{h}{H}$ га тенг бўлади. Шунинг билан ўхшаш фигураларнинг юзларининг нисбати ўхшашлик коэффициентининг квадратига тенг бўлади.

Бундан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{H - h_к}{H}\right)^2.$$

Бу тенгликдан H ва h баландликларини топамиз:

$$H = \frac{h_к\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}},\ h = \frac{h_к\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Топилган H, h қийматларини кесик пирамиданинг V ҳажми учун формулага қўйиб, изланаётган формулани топамиз:

$$V = \frac{1}{3}\left(S\frac{h_к\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} - s\frac{h_к\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}h_к \cdot \frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} = \frac{1}{3}h_к(S + \sqrt{S \cdot s} + s). \square$$

Баландлиги $h_к$ ва асосларининг томонлари a билан b бўлган мунтазам тўрт бурчакли кесик пирамиданинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқаринг.

Саволлар

1. Учбурчакли пирамиданинг ҳажми қандай ҳисобланади?
2. Ҳар қандай пирамиданинг ҳажми қандай ҳисобланади?
3. Кесик пирамиданинг ҳажми қандай ҳисобланади?

Машқлар

A

15.1. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлиги h га, асосининг томонлари эса a га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқаринг.

15.2. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлиги 3 м га, ён қирралари эса 5 м га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.

15.3. Мунтазам учбурчакли пирамиданинг баландлиги билан асосининг томонлари 1 см га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.

15.4. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг баландлиги билан асосини томонлари 1 см га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.

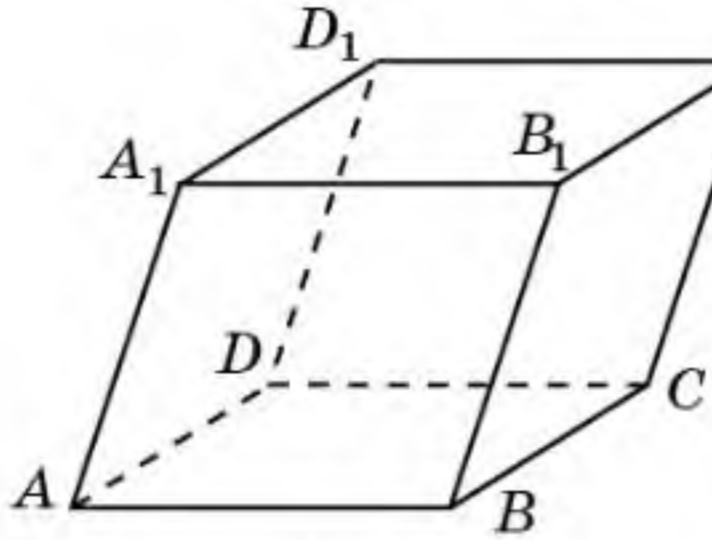
15.5. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 см га, ён қирралари эса 2 см га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.

15.6. Тетраэдрнинг қирраси 1 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

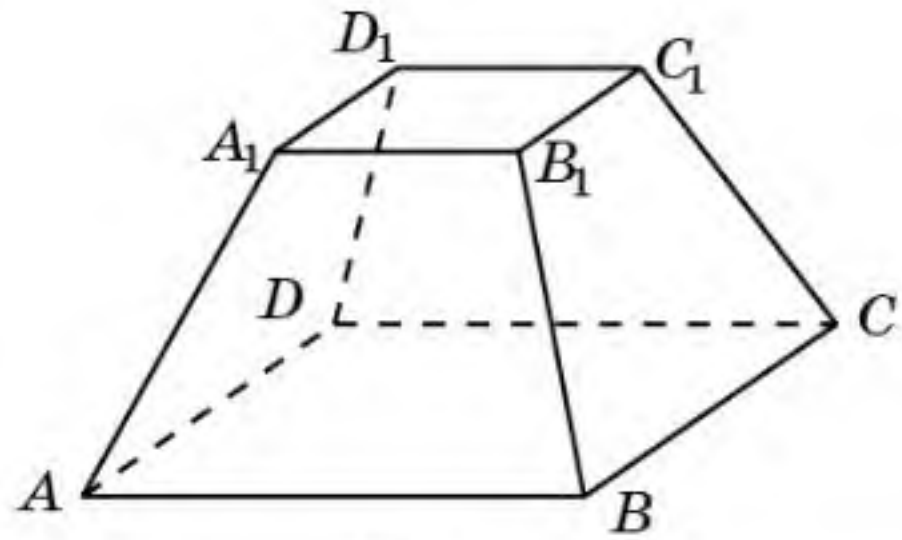
15.7. Агар мунтазам тетраэдрнинг барча қирраларини 2 марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?

15.8. Агар мунтазам пирамиданинг баландлигини 3 марта орттирса, асоси томонларини эса 3 марта камайтирса, унда унинг ҳажми қандай ўзгаради?

15.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедининг ҳажми 1 см^3 га тенг. Учлари: A, B, C, D, B_1; 2) A, B, D, C_1 нуқталари бўладиган кўпёқнинг ҳажмини топинг (15.5-расм).



15.5-расм



15.6-расм

15.10. Пирамида баландлигининг ўртаси орқали ўтувчи ва асосига параллел текислик билан кесими ўтказилган. Пирамиданинг ҳосил бўлган қисмлари ҳажмларининг нисбатини топинг.

15.11. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамиданинг баландлиги 3 см га, асосларининг томонлари эса 2 см ва 1 см га тенг. Кесик пирамиданинг ҳажмини топинг (15.6-расм).

B

15.12. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг диагонал кесими — томони 1 см бўлган тенг томонли учбурчак. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.

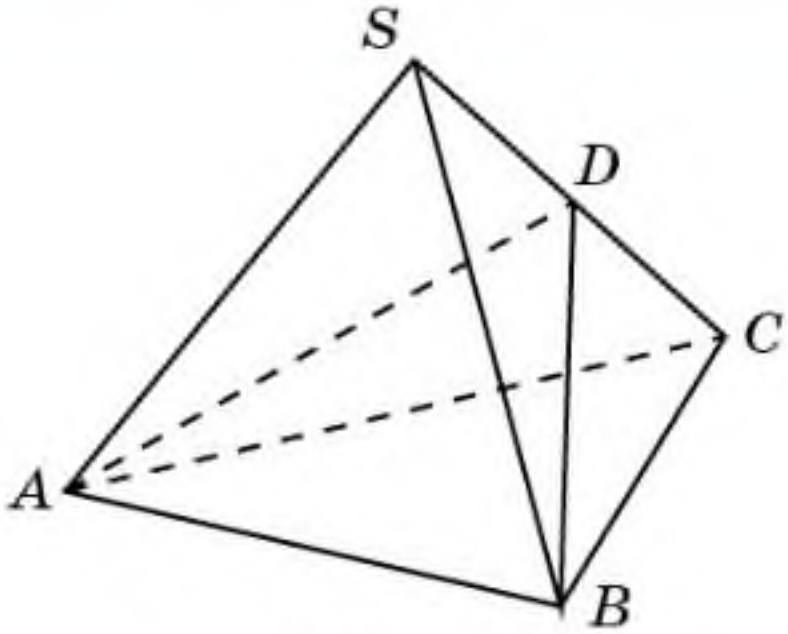
15.13. Учбурчакли пирамиданинг ён қирралари ўзаро перпендикуляр ва уларнинг ҳар қайсиси 1 см га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.

15.14. Учбурчакли пирамиданинг барча ён қирралари 1 см га, учидаги бурчаклари эса 60°, 90° ва 90° га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.

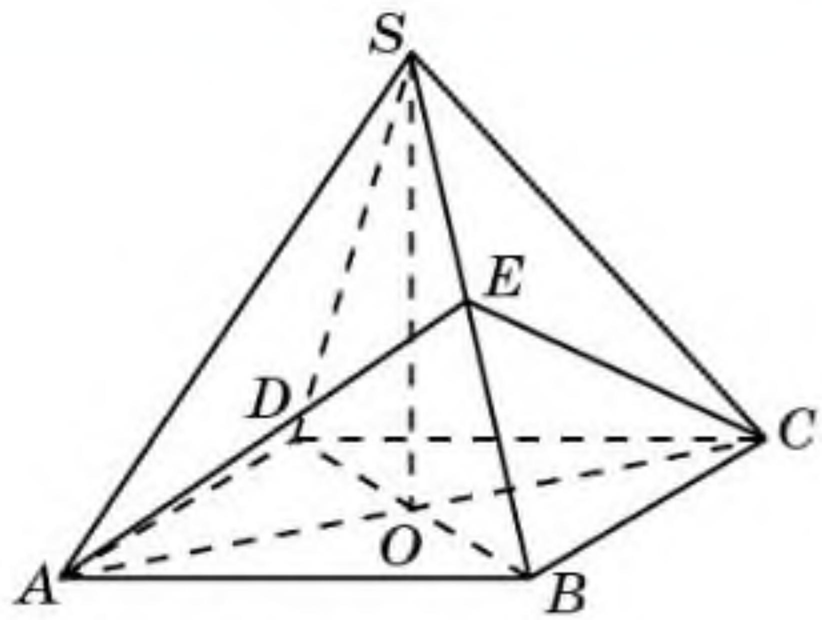
15.15. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ҳажми 6 см^3 га, асосининг томонлари 1 см га тенг. Пирамиданинг баландлигини топинг.

15.16. Параллелепипеднинг ҳажми 1 см^3 га тенг (15.5-расм). BDA_1C_1 тетраэдрининг ҳажмини топинг.

15.17. Учбурчакли пирамида асосининг бир томони ва унга қарши ётган қиррасининг ўртаси орқали текислик ўтади (15.7-расм). Бу текислик пирамиданинг ҳажмини қандай нисбатда бўлади?

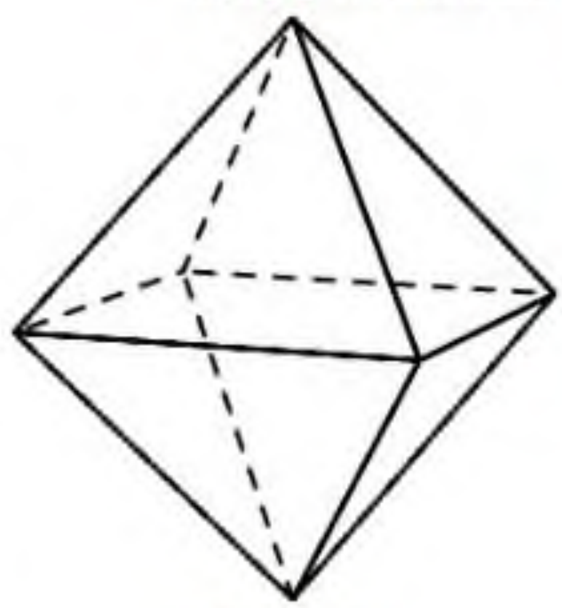


15.7-расм



15.8-расм

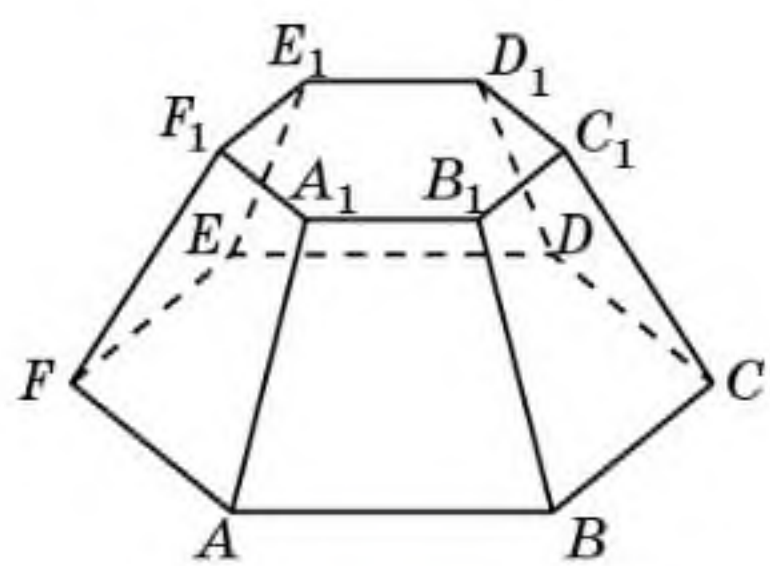
15.18. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ҳажми 12 см^3 га тенг. Пирамида асосининг AC диагонали ва унга қарши ётган ён қиррасининг E ўртаси орқали ўтувчи текислик билан кесиб олинган қисмининг ҳажмини топинг (15.8-расм).



15.9-расм

15.19. Октаэдрнинг қирралари 1 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг (15.9-расм).

15.20. Мунтазам олтибурчакли кесик пирамиданинг баландлиги 3 см га, асосларининг томонлари эса 2 см ва 1 см га тенг (15.10-расм). Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.



15.10-расм

15.11-расм

15.21. Нур-Султан шаҳридаги Тинчлик ва келишув саройи мунтазам тўртбурчакли пирамида шаклига эга (15.11-расм). Унинг баландлиги билан асосининг томони 62 м га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

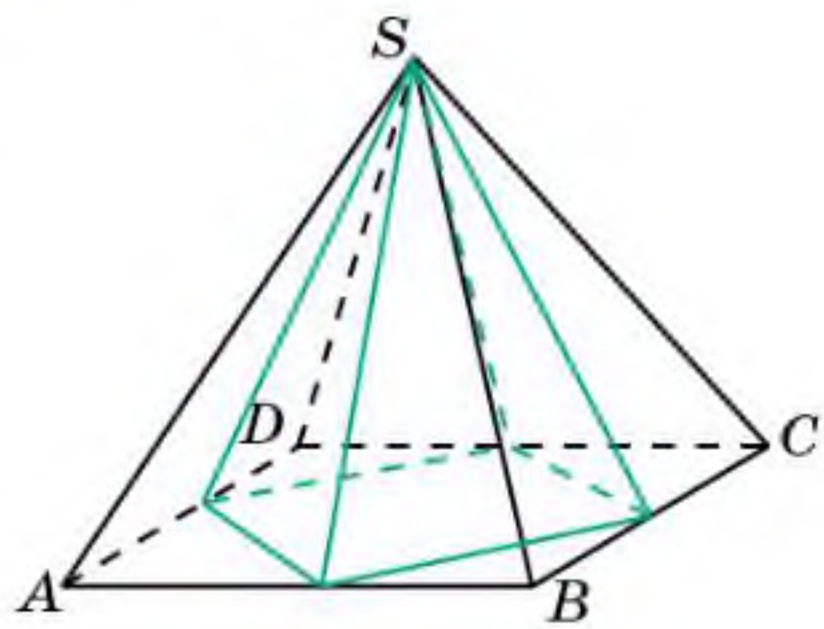
15.22. Мунтазам n-бурчакли иккита пирамида ўхшаш бўлиши учун уларнинг ён қирралари билан асосларининг томонларига тегишли шартларни ёзинг. Уларнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.

C

15.23. Мунтазам олтибурчакли пирамида асоси томонлари 1 см га, унинг ён ёғи билан асоси орасидаги бурчак эса 45° га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

15.24. *SABCD* тўрт бурчакли пирамидасининг ҳажми 1 $см^3$ га тенг. Учи берилган пирамиданинг *S* учи билан мос келадиган, асос учлари эса *ABCD* асоси томонларининг ўрталари бўладиган пирамиданинг ҳажмини топинг (15.12-расм).

15.25. Тетраэдрнинг ҳажми 1 $см^3$ га тенг. Учлари шу тетраэдрнинг қирраларининг ўрталари бўладиган кўпёқнинг ҳажмини топинг.



15.12-расм

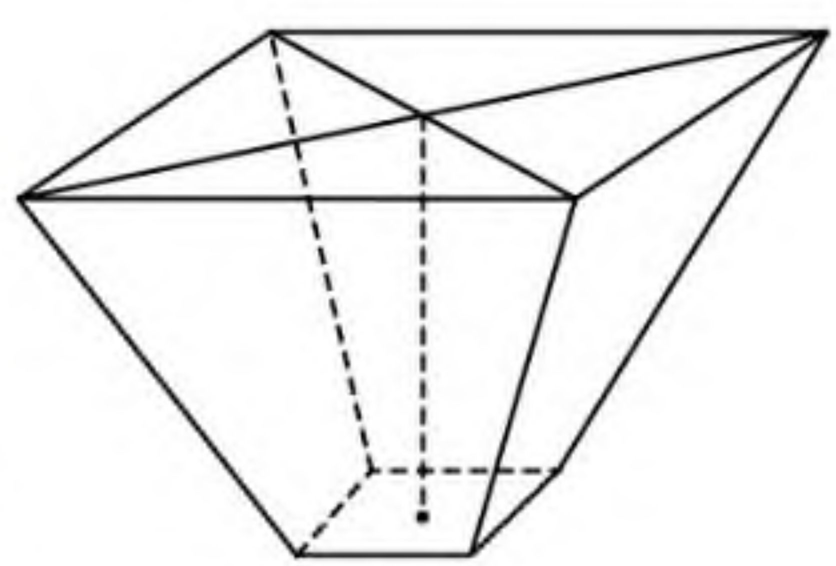
15.26. 15.13-расмда Қадимги Мисрдаги энг катта биноларнинг бири — Хеопс пирамидаси — мунтазам тўртбурчакли пирамида тасвирланган. Унинг баландлиги 146 м га, ён қирралари эса 230 м га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.

15.13-расм

15.14-расм

15.27. 15.14-расмда томи пирамида шаклидаги турғун уй тасвирланган ва унинг асоси — квадрат. Пирамиданинг барча қирралари 12 м га тенг. Шу уйнинг томининг ҳажмини топинг.

15.28. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамида шаклидаги сабзавотларни сақлашга мўлжалланган яшик асосларининг томонлари мос равишда 6 дм ва 14,4 дм га



15.15-расм

тенг (15.15-расм). Пирамиданинг баландлиги 4,3 дм. Агар 1 дм^3 да 0,675 кг сабзавот бўлса, унда яшикнинг ҳажми билан унинг ичидаги сабзавотнинг оғирлигини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

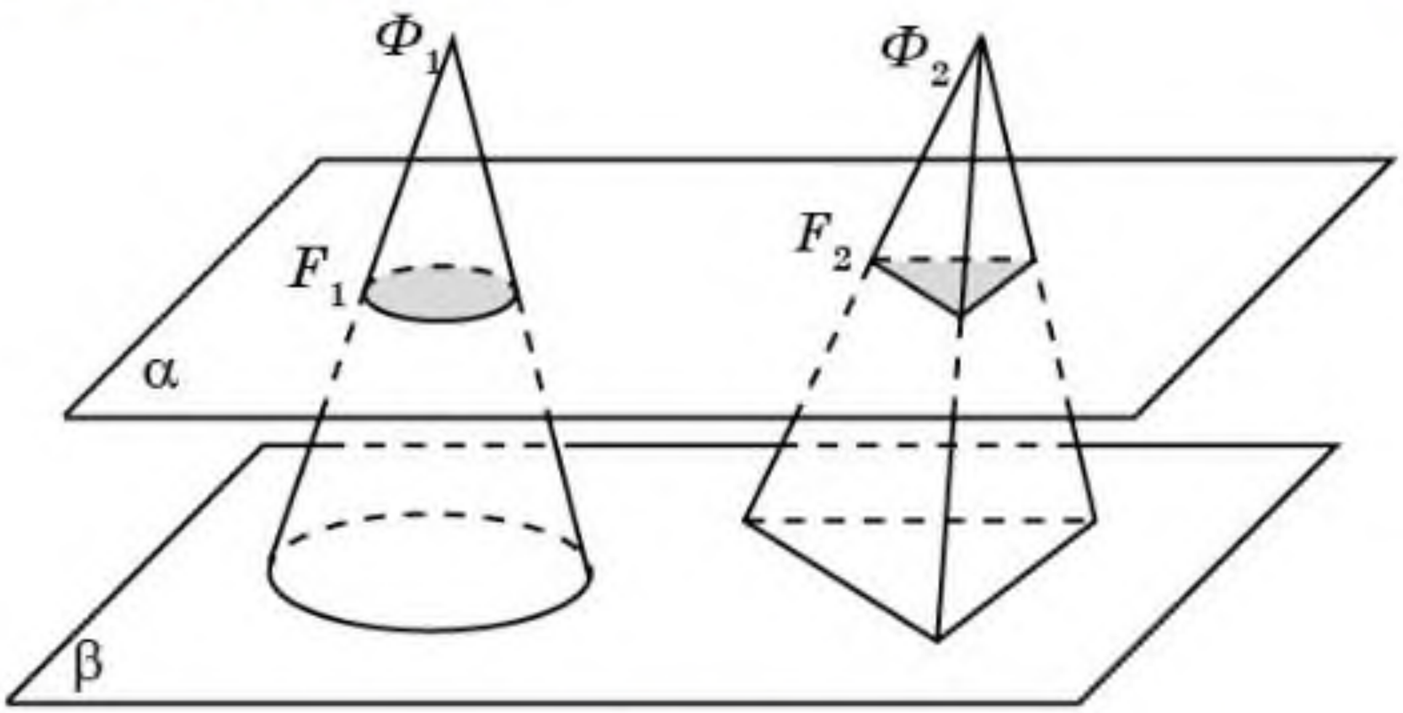
15.29. Конус ва кесик конуснинг таърифларини такрорланг.

16-§. Конус ва кесик конус ҳажмлари

Кавальери принципини конуснинг ҳажмини топишда қўлланайлик.

Теорема. ***Конуснинг ҳажми унинг асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг бўлади.***

Исботи. Асосининг юзи S ва баландлиги h га тенг конус учун асосининг юзи ва баландлиги худди шундай бўладиган қандайдир бир пирамидани кўриб чиқамиз. Уларни асослари β текислигида ётадигандай ва ўзлари шу текисликнинг бир ёқ қисмида бўладигандай қилиб жойлаштирамиз (16.1-расм).



16.1-расм

b текислигига параллел ва ундан x узоқликда бўлган a текислигини ўтказамиз (0 m x m h). Шунда конус билан пирамиданинг шу текислик билан кесимларида ҳосил бўлган F_1 ва F_2 фигуралари мос равишда асосларига ўхшаш бўлади ва иккаласида ҳам ўхшашлик коэффициенти $k = \frac{h - x}{h}$ га тенг бўлади. Демак, F_1 ва F_2 фигураларининг S_1 ва S_2 юзлари мос равишда $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулалари билан ифодаланади. Шундай қилиб, улар ўзаро тенг бўлади. Кавальери принципи бўйича конус билан пирамиданинг ҳажмлари тенг бўлиши келиб чиқади. Бундан конуснинг V ҳажмини топиш учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

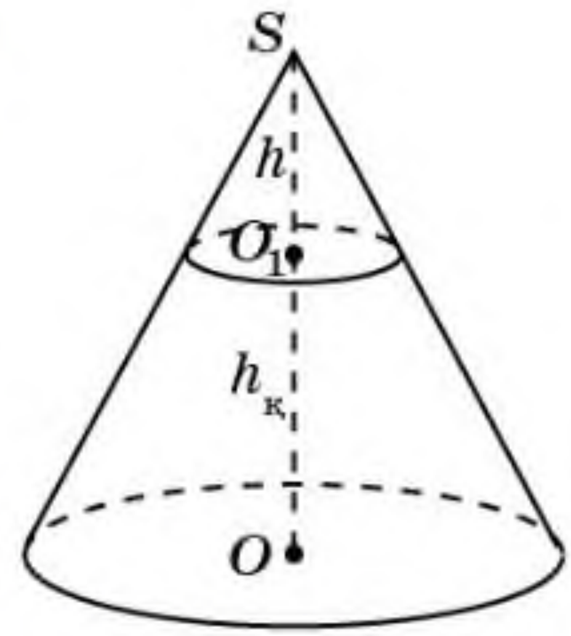
$$V = \frac{1}{3}\text{p}R^2h,$$

бу ерда R — конус асосининг радиуси, h — конуснинг баландлиги.

Кесик пирамиданинг ҳажмини топиш формуласига ўхшаш кесик конуснинг ҳажми учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$V = \frac{1}{3}h_к(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

бу ерда S, s — кесик конус асосларининг юзлари, $h_к$ — кесик конуснинг баландлиги (16.2-расм).



16.2-расм

Бу формуланинг исботи кесик пирамиданинг ҳажмини топиш формуласига ўхшаш бўлади. Уни мустақил исботланг.

Кесик конус асосларининг юзлари мос равишда $S = \pi R^2$ ва $s = \pi r^2$ га тенг эканини ҳисобга олиб, унинг V ҳажмини топиш учун қуйидаги формулани оламиз:

$$V = \frac{1}{3}\pi h_к(R^2 + R \cdot r + r^2),$$

бу ерда R ва r — кесик конус асосларининг радиуслари, $h_к$ — кесик конуснинг баландлиги.

Саволлар

1. Конуснинг ҳажми қандай ҳисобланади?
2. Кесик конуснинг ҳажми қандай ҳисобланади?

Машқлар

А

16.1. Агар конуснинг: 1) баландлигини 3 марта орттирса; 2) асосининг радиусини 2 марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?

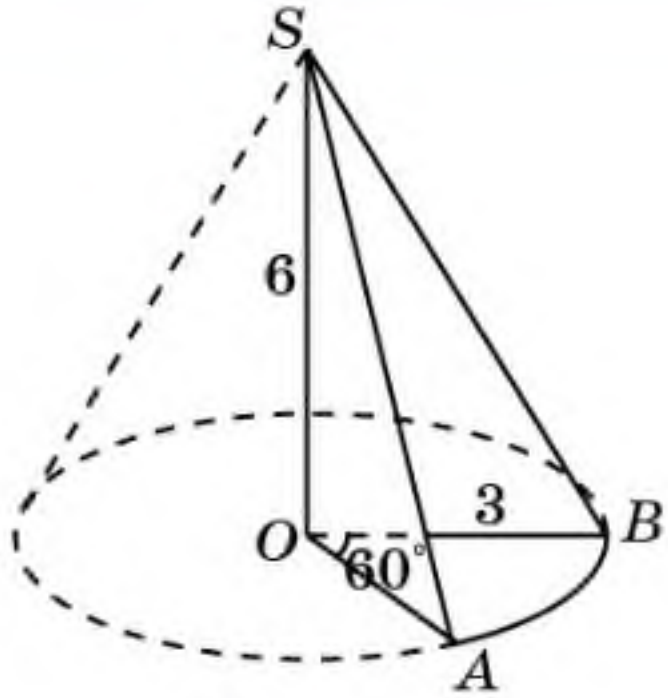
16.2. Агар конус баландлигини 2 марта камайтирса, асоси радиусини 2 марта орттирса, унда унинг ҳажми ўзгарадими?

16.3. Цилиндр билан конуснинг умумий асоси бор ва баландлиги бир хил. Цилиндрнинг ҳажми 15 $см^3$ га тенг деб олиб, конуснинг ҳажмини топинг.

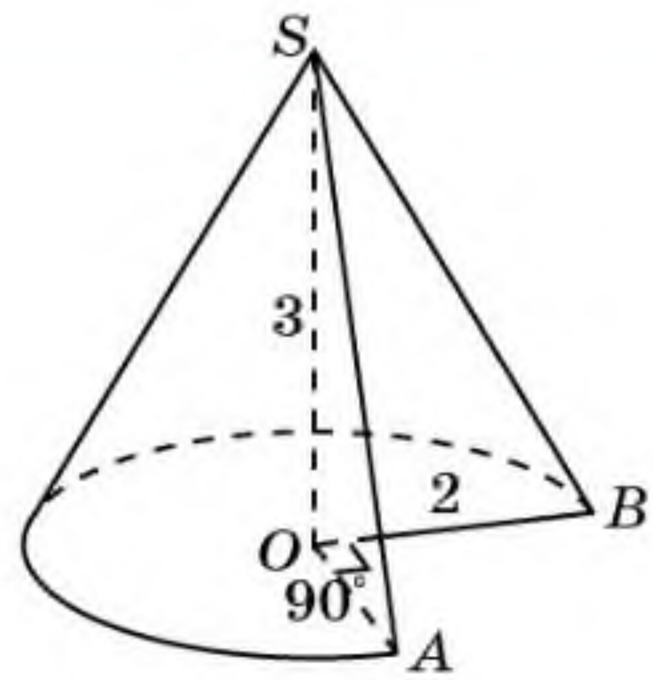
16.4. Конуснинг ҳажми V га тенг. Конуснинг баландлигининг ўртаси орқали ўтувчи ва асосига параллел бўлган кесим ўтказилган. Конуснинг ҳосил бўлган қисмлари ҳажмларининг нисбатини топинг.

16.5. Конуснинг баландлиги 3 см га, ясовчиси эса 5 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

16.6. Конус асосининг радиуси 3 см га, баландлиги эса 6 см га тенг ва $\angle AOB = 60^\circ$. 16.3-расмдаги конус қисмининг ҳажмини топинг.



16.3-расм



16.4-расм

16.7. Конус асосининг радиуси 2 см га, баландлиги эса 3 см га тенг ва $AOB = 90^\circ$. 16.4-расмдаги конус қисмининг ҳажмини топинг.

16.8. Кесик конус асосларининг радиуслари 1 см ва 2 см га, баландлиги эса 3 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

B

16.9. Конус асосининг диаметри 12 см га, ўқ кесимининг учидаги бурчаги эса 90° га тенг. Конуснинг ҳажмини топинг.

16.10. Конуснинг ўқ кесими — юзи 9 см^2 бўлган тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчак. Конуснинг ҳажмини топинг.

16.11. Томони 1 см бўлган тенг томонли учбурчакни унинг баландлиги ётадиган тўғри чизиқ атрофида айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

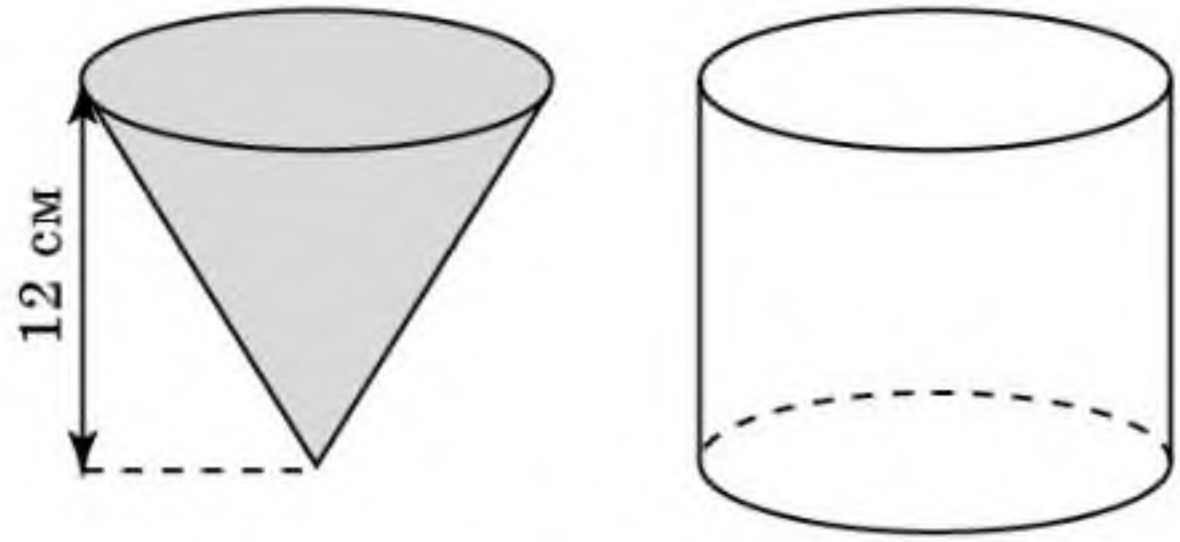
16.12. Тенг ёнли эмас тўғри бурчакли учбурчакни унинг ҳар бир катетидан айлантирганда иккита конус ҳосил бўлади. Шу конусларнинг ҳажмлари тенг бўладими?

16.13. Конуснинг ҳажми 1 см^3 га тенг. Конуснинг баландлиги тенг учта бўлакка бўлинган ва бўлиниш нуқталари орқали унинг асосига параллел текисликлар ўтказилган. Конуснинг ўртадаги бўлагининг ҳажмини топинг.

16.14. Баландлиги 12 см бўлган конус шаклидаги идишга тўлдирилган сув цилиндр шаклидаги идишга қуйилди. Цилиндр шаклидаги идиш асосининг радиуси конус шаклидаги идиш айланасининг радиусига тенг (16.5-расм). Цилиндр шаклидаги идишдаги сувнинг сатҳи унинг асосидан қандай баландликда бўлади?

16.15. Кесик конус асосларининг радиуслари 6 см ва 2 см, ясовчиси эса 5 см га тенг. Шу кесик конуснинг ҳажмини топинг.

16.16. Тенг ёнли трапециянинг асослари 4 см ва 6 см, баландлиги эса 3 см га тенг. Трапецияни унинг асосларининг ўрталари орқали



16.5-расм

ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

16.17. Иккита конус ўхшаш бўлиши учун уларнинг ясовчилари билан асосларининг радиусларига тегишли шартларни ёзинг. Шу конусларнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.

16.18. Кигиз уй — кўчманчиларнинг қадимдан келаётган турар жойи (16.6-расм). Кигиз уйнинг “керегеси” цилиндр шаклида, мана шу “кереге” билан “шаңырақ”ни бирлаштирувчи “уық”лар кесик конусни ясайди. Цилиндрнинг асосининг диаметри 5 м га, кесик конус асосларининг диаметрлари 5 м ва 1 м га, цилиндр билан кесик конуснинг баландликлари эса 2 м га тенг. Кигиз уйнинг ҳажмини топинг.

16.6-расм

C

16.19. Тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчакнинг узунлиги 3 см га тенг катети ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

16.20. Бирлик квадратни унинг диагонали ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

16.21. Конуснинг ён сиртининг ёйилмаси — радиуси 2 см га тенг ярим доира. Конуснинг ҳажмини топинг.

16.22. Қурилиш майдонидаги конус шаклидаги қум тўпламининг асосидаги айланаси узунлигини метрлик лента билан ўлчаганда 21,6 м бўлди (16.7-расм). Метрлик лентани қум тўпламининг устидан ошириб ўлчаганда унинг икки ясовчисининг узунлиги 7,8 м эканлиги аниқланди. Қум тўпламининг ҳажмини топинг (π d 3).

16.7-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

16.23. Шарнинг таърифини ва Кавальери принципини такрорланг.

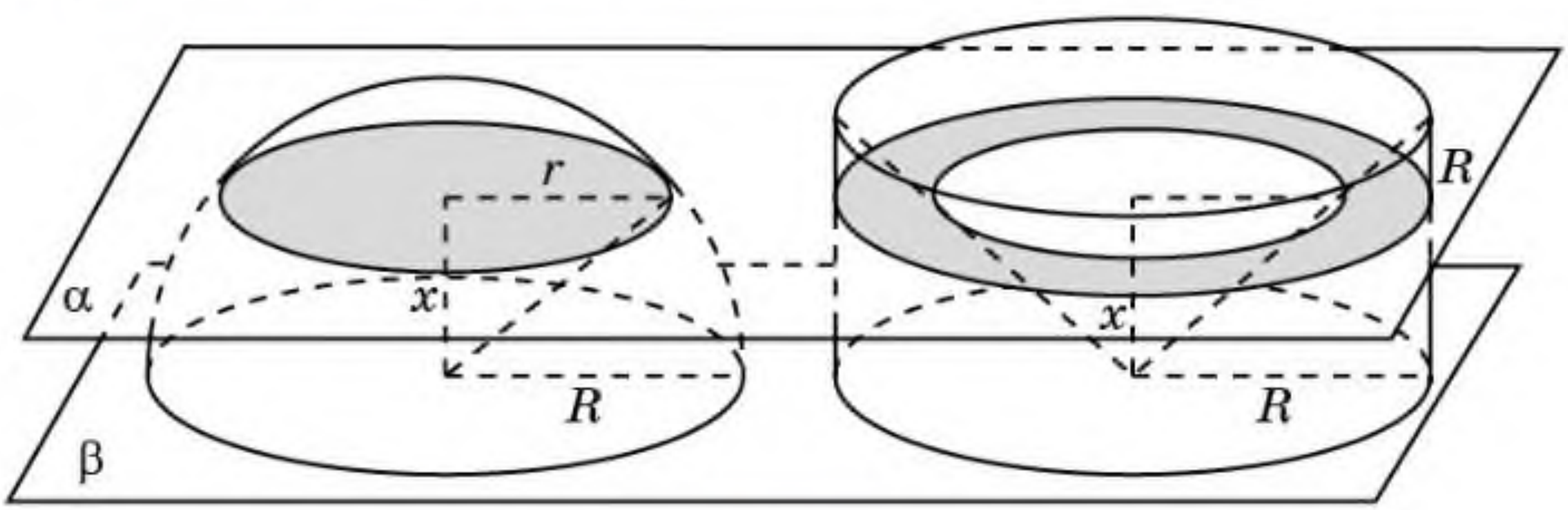
17-§. Шар ҳажми

Кавальери принципини қўлланиб, шарнинг ҳажмини топиш формуласини кўриб чиқайлик.

Теорема. ***Радиуси R га тенг шарнинг V ҳажми қуйидаги формула билан ҳисобланади:***

$$V = \frac{4}{3}\text{p}R^3.$$

Исботи. Радиуси R га тенг ва асоси b текислигида ётадиган ярим шарни кўриб чиқайлик. Шу билан бирга асоси шу b текислигида ётадиган цилиндрни олайлик ва унинг асоси радиуси R га, баландлиги ҳам R га тенг бўлсин (17.1-расм).



17.1-расм

Учи цилиндрнинг пастги асосининг марказида, асоси эса цилиндрнинг юқориги асоси бўладигандай қилиб шу цилиндрга ички конус чизамиз.

Конуснинг ичида ётувчи цилиндрнинг нуқталаридан иборат Φ фигураси билан берилган ярим шарнинг ҳажмлари тенг бўлишини исботлайлик.

b текислигига параллел ва ундан x узоқликда бўлган a текислигини ўтказамиз (0 m x m R). Шунда ярим шарнинг ўқи текислик билан кесимида радиуси $\sqrt{R^2 - x^2}$ ва юзи p$(R^2 - x^2)$ бўлган доира олинади. Φ фигурасининг a текислиги билан кесимида ички доирасининг радиуси x га, ташқи доирасининг радиуси эса R-га тенг ҳалқа ҳосил бўлади. Бу ҳалқанинг юзи pR^2 – px^2 = p$(R^2 - x^2)$-га тенг. Демак, у ярим шарнинг кесими юзига тенг бўлади.

Кавальери принципи бўйича ярим шар билан Φ фигурасининг ҳажмлари тенг бўлади. Шу ҳажмни ҳисоблайлик. У цилиндр билан конус ҳажмларининг айирмасига тенг бўлади, яъни

$$V = V_{\text{ц}} - V_{\text{к}} = \mathrm{p}R^2R - \frac{1}{3}\mathrm{p}R^2R = \frac{2}{3}\mathrm{p}R^3.$$

Шарнинг ҳажми ярим шарнинг ҳажмидан икки марта катта бўлади. Демак, шарнинг ҳажми қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$V = \frac{4}{3}\mathrm{p}R^3.$$

Саволлар

1. Шарнинг ҳажми қандай аниқланади?

Машқлар

A

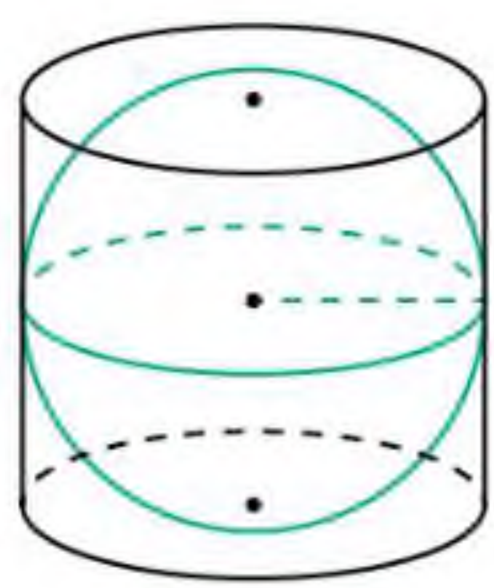
17.1. Шарнинг диаметри 6 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

17.2. Агар шарнинг радиусини: 1) 3 марта; 2) 4 марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?

17.3. Учта шарнинг радиуслари 3 см, 4 см ва 5 см га тенг. Ҳажми шу шарларнинг ҳажмларининг йиғиндисига тенг шарнинг радиусини топинг.

17.4. Ҳажмларининг йиғиндиси радиуси 6 см бўлган шарнинг ҳажмига тенг бўладигандай радиуси 2 см га тенг нечта шар олиш мумкин?

17.5. Цилиндрнинг баландлиги 2 см га тенг. Цилиндрга ички чизилган шарнинг ҳажмини топинг (17.2-расм).



17.2-расм

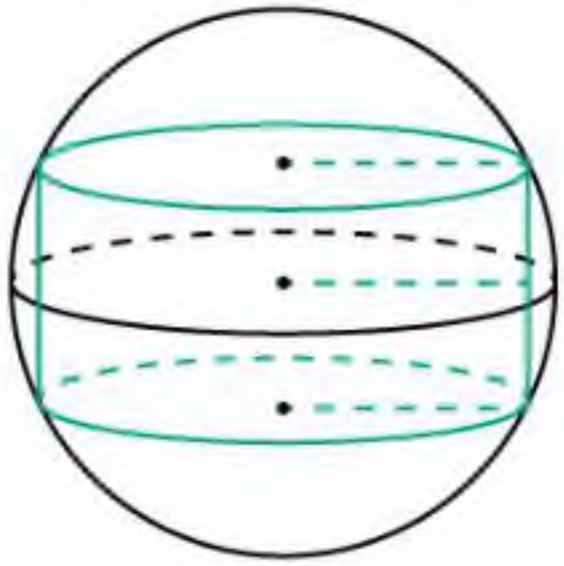
B

17.6. Шарнинг маркази билан 8 см узоқликдаги текислик билан кесимининг радиуси 6 см га тенг. Шарнинг ҳажмини топинг.

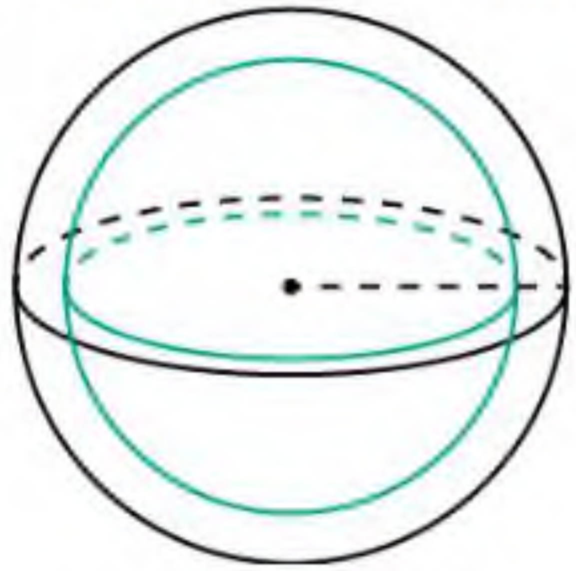
17.7. Цилиндрнинг баландлиги билан асосининг радиуси 1 см га тенг. Цилиндрга ташқи чизилган шарнинг ҳажмини топинг (17.3-расм).

17.8. Икки шарнинг сиртларининг юзлари $m : n$ каби нисбатда. Уларнинг ҳажмлари қандай нисбатда бўлади?

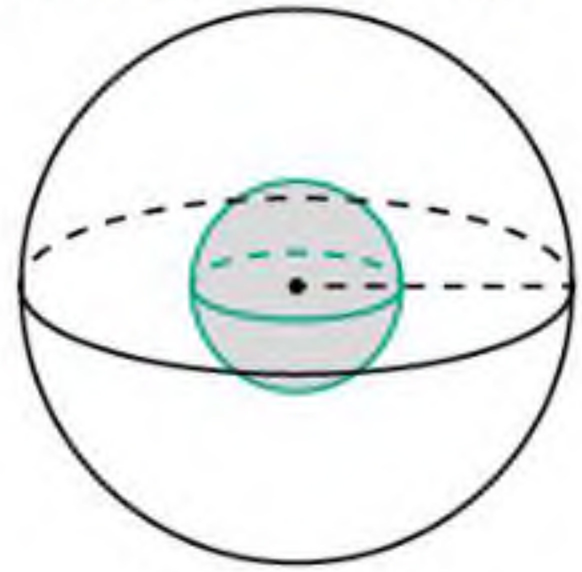
17.9. Марказлари умумий ва радиуслари R_1 билан R_2 $(R_1 > R_2)$ бўлган икки шарнинг сиртлари билан чегараланган фигура — шарсимон ҳалқанинг ҳажмини топиш формуласини топинг (17.4-расм).



17.3-расм



17.4-расм



17.5-расм

17.10. Гилос данагининг қалинлиги унинг ичидаги суягининг диаметрига тенг (17.5-расм). Гилос билан унинг ичидаги суягини шар шаклида деб олиб, данаги билан суяги ҳажмларининг нисбатини топинг.

17.6-расм

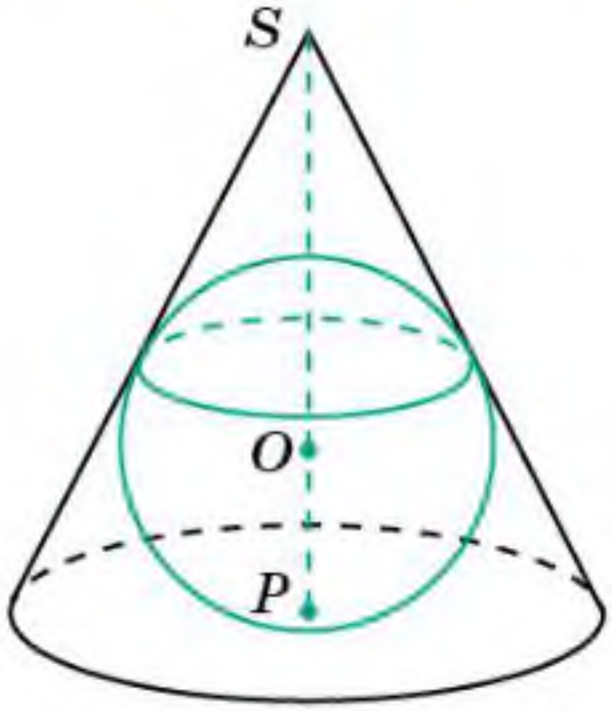
17.11. Апельсин — шар шаклидаги мева. Унинг пўстининг қалинлиги шар радиусининг бешдан бир қисмига тенг бўлади (17.4-расм). Апельсин пўсти унинг ҳажмининг қандай қисмини ташкил қилади?

17.12. Нур-Султан шаҳридаги "Бәйтерек" монументи — металдан, шиша ва бетондан ясалган баланд меъморий иншоот, барча оламдаги бирлашмалар учун мустақил Қозоғистоннинг рамзи (17.6-расм). Унинг учида диаметри 22 м га тенг шар бор. Ўша шар ҳажмини топинг.

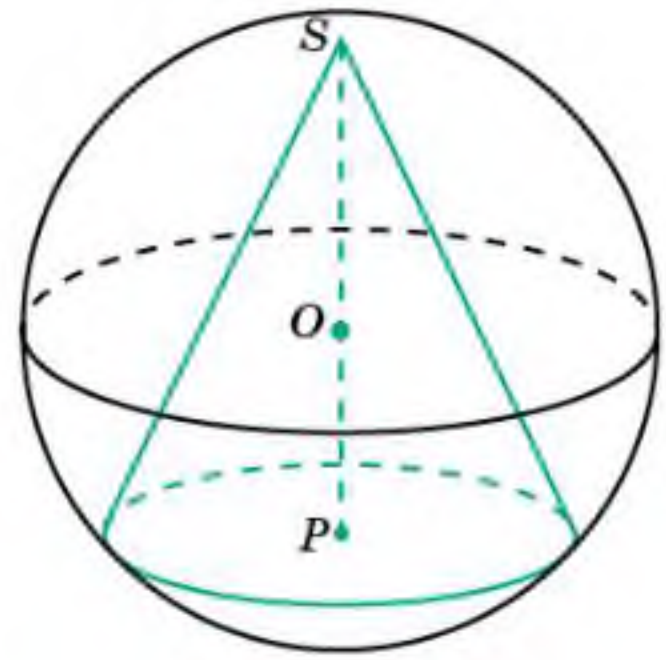
C

17.13. Конус асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тенг. Конусга ички чизилган шарнинг ҳажмини топинг (17.7-расм).

17.14. Конус асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тенг. Конусга ташқи чизилган шарнинг ҳажмини топинг (17.8-расм).

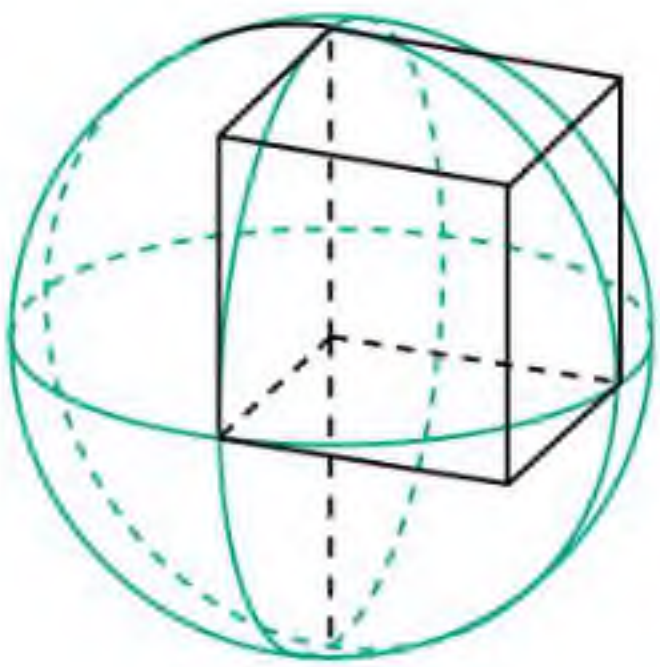


17.7-расм

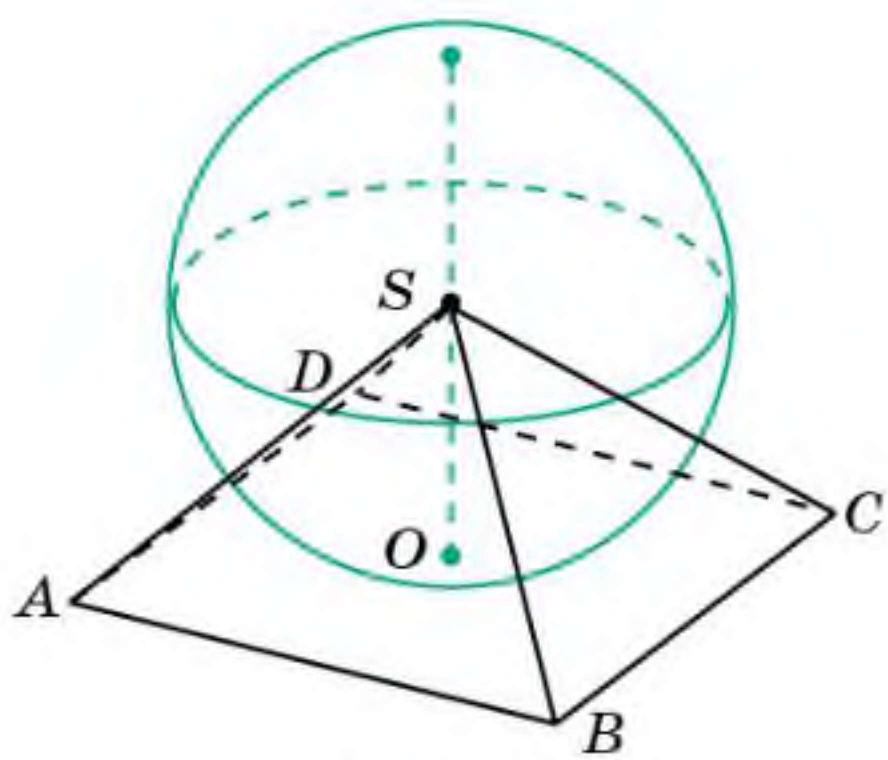


17.8-расм

17.15. Шарнинг радиуси 1 см га тенг. Унинг марказида бирлик кубнинг учи жойлашган (17.9-расм). Куб билан шарнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.



17.9-расм



17.10-расм

17.16. Мунтазам тўрт бурчакли пирамида асосининг томонлари 2 см га ва унинг баландлиги 1 см га тенг. Радиуси 1 см га тенг шарнинг марказида шу пирамиданинг учи жойлашган (17.10-расм). Пирамида билан шарнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Агар кубнинг барча қирраларини 2 марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади:

A) 2 марта; B) 4 марта; C) 6 марта; D) 8 марта?

2. Куб сиртининг юзи 12 $см^2$. Унинг ҳажмини топинг:

A) $2\sqrt{2}$ $см^3$; B) 4 $см^3$; C) $4\sqrt{2}$ $см^3$; D) 8 $см^3$.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубининг ҳажми 6 $см^3$ га тенг. ACB_1D_1 тетраэдрининг ҳажмини топинг:

A) 1 $см^3$; B) 2 $см^3$; C) 3 $см^3$; D) 4 $см^3$.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Учлари A, B, C, D, C_1 бўлган кўпёқнинг ҳажмини топинг:

A) 2 $см^3$; B) 4 $см^3$; C) 6 $см^3$; D) 8 $см^3$.

5. Мунтазам учбурчакли призманинг ён қирралари 3 см га, асосининг томонлари эса 2 см га тенг. Призманинг ҳажмини топинг:

A) $\sqrt{3}$ $см^3$; B) $2\sqrt{3}$ $см^3$; C) $3\sqrt{3}$ $см^3$; D) $4\sqrt{3}$ $см^3$.

6. Учбурчакли призма асосининг ўрта чизиғи орқали унинг ён қиррасига параллел текислик ўтказилган. Агар дастлабки призманинг ҳажми 8 $см^3$ га тенг бўлса, унда шу текислик билан кесиб олинган учбурчакли призманинг ҳажмини топинг:

A) 1 $см^3$; B) 2 $см^3$; C) 3 $см^3$; D) 4 $см^3$.

7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ҳажми 12 $см^3$ га тенг. $ABDEA_1B_1D_1E_1$ параллелепипедининг ҳажмини топинг:

A) 2 $см^3$; B) 4 $см^3$; C) 6 $см^3$; D) 8 $см^3$.

8. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призманинг ҳажми 6 $см^3$ га тенг. $A_1BCC_1B_1$ тўрт бурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг:

A) 1 $см^3$; B) 2 $см^3$; C) 3 $см^3$; D) 4 $см^3$.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ҳажми 12 $см^3$ га тенг. A_1ABCD пирамиданинг ҳажмини топинг:

A) 1 $см^3$; B) 2 $см^3$; C) 3 $см^3$; D) 4 $см^3$.

10. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг қирралари 2 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг:

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $см^3$; B) [illegible] $см^3$; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $см^3$; D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ $см^3$.

11. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ён қирралари 2 см га тенг ва улар асос текислиги билан 30° бурчак ясайди. Пирамиданинг ҳажмини топинг:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $см^3$; B) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ $см^3$; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $см^3$; D) $\sqrt{3}$ $см^3$.

12. Цилиндр шаклидаги идишдаги суюқликнинг сатҳи 8 см га етади. Агар шу суюқликнинг диаметри биринчи идишдагидан 2 марта кичик бўлган иккинчи идишга қуйилса, унда суюқликнинг сатҳи қандай баландликда бўлади:

A) 16 см; B) 32 см; C) 48 см; D) 64 см?

13. Бирлик квадратни унинг томони ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг:

A) р см^3; B) 2р см^3; C) 3р см^3; D) 4р см^3.

14. Цилидрнинг ён сиртининг ёйилмаси — томони 2 см га тенг квадрат. Цилиндрнинг ҳажмини топинг:

A) $\frac{2}{\pi}$ см^3; B) $\frac{4}{\pi}$ см^3; C) 2р см^3; D) 4р см^3.

15. Тенг томонли учбурчакнинг томони 2 см га тенг. Учбурчакни унинг баландлиги ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{\pi}{3}$ см^3; D) р$\sqrt{3}$ см^3.

16. Конуснинг ясовчиси 2 см га тенг ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясайди. Конуснинг ҳажмини топинг:

A) р см^3; B) 2р см^3; C) 3р см^3; D) 4р см^3.

17. Конуснинг ён сиртининг ёйилмаси — радиуси 3 см га ва марказий бурчаги 120° га тенг доиравий сектор. Конуснинг ҳажмини топинг:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{2\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3.

18. Кесик конуснинг ўқ кесими — асослари 4 см ва 2 см, ён томони эса 2 см бўлган тенг ёнли трапеция. Кесик конуснинг ҳажмини топинг:

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$р см^3; B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$р см^3; C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$р см^3; D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$р см^3.

19. Шар сиртининг юзи 36 см^2 га тенг. Шарнинг ҳажмини топинг:

A) $24\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; B) $36\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; C) $48\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; D) $60\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3.

20. Цилиндрнинг ўқ кесими — бирлик квадрат. Шу цилиндрга ташқи чизилган шарнинг ҳажмини топинг:

A) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$; B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

ҲАЖМ

А

1. Тўғри бурчакли параллелепипед ёғининг юзаси 12 $см^2$ га ва шу ёғига перпендикуляр қирраси 4 см га тенг. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
2. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми 24 $см^3$ га, бир қирраси эса 3 см га тенг. Параллелепипеднинг шу қиррасига перпендикуляр бўлган ёғининг юзасини топинг.
3. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми 60 $см^3$ га, бир ёғининг юзи эса 12 $см^2$ га тенг. Параллелепипеднинг шу ёғига перпендику ляр бўлган қиррасини топинг.
4. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган иккита қирраси 2 см ва 6 см га тенг. Параллелепипеднинг ҳажми 48 $см^3$ га тенг. Параллелепипеднинг шу учидан чиқувчи учинчи қиррасини топинг.
5. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган учта қирраси 4 см, 6 см, 9 см га тенг. Мана шу параллелепипедга тенгдош бўлган кубнинг қиррасини топинг.
6. Агар кубнинг барча қирраларини уч марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
7. Учбурчакли тўғри призманинг асоси — катетлари 6 см ва 8 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак, ён қирраси эса 5 см га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.
8. Учбурчакли тўғри призманинг асоси — катетлари 3 см ва 5 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Призманинг ҳажми 30 $см^3$ га тенг. Унинг ён қиррасини топинг.
9. Мунтазам олтибурчакли призма асосининг томонлари 1 см га, ён қирралари эса $\sqrt{3}$ см га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.
10. Агар мунтазам тетраэдрнинг барча қирраларини икки марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
11. Пирамиданинг баландлиги 6 см га тенг, асоси эса томонлари 3 см ва 4 см бўлган тўғри тўртбурчак. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
12. Пирамиданинг асоси — томонлари 3 см ва 4 см бўлган тўғри тўртбурчак. Пирамиданинг ҳажми 16 $см^3$ га тенг. Унинг баландлигини топинг.
13. Мунтазам учбурчакли пирамида асоси томонлари 1 см га, баландлиги эса $\sqrt{3}$ см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
14. Мунтазам учбурчакли пирамида асоси томонлари 2 см га, ҳажми эса $\sqrt{3}$ $см^3$ га тенг. Унинг баландлигини топинг.

15. Агар пирамиданинг баландлигини тўрт марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
16. Ичида 6 л суви бор цилиндр шаклли идишга қандайдир жисм солинди. Шунда идишдаги сувнинг сатҳи 1,5 марта кўтарилди. Жисмнинг ҳажми нимага тенг?
17. Цилиндр шаклли идишдаги сувнинг сатҳи 18 см. Агар шу сувни диаметри биринчи идишдан 3 марта катта бўлган иккинчи идишга қуйилса, сувнинг сатҳи қандай баландликда бўлади?
18. Конус асосининг юзи 2 $см^2$ га, ясовчиси эса 6 см га тенг ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясайди. Конуснинг ҳажмини топинг.
19. Агар конуснинг баландлигини уч марта қисқартирса, унда унинг ҳажми неча марта камаяди?
20. Агар конус асосининг радиусини 1,5 марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
21. Цилиндр билан конуснинг асоси ва баландлиги умумий. Конуснинг ҳажми 10 $см^3$ га тенг. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.
22. Цилиндр билан конуснинг асоси ва баландлиги умумий. Цилиндрнинг ҳажми 150 $см^3$ га тенг. Конуснинг ҳажмини топинг.
23. Агар шар радиусини уч марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?

B

24. Кубнинг диагонали $\sqrt{12}$ см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
25. Кубнинг ҳажми $24\sqrt{3}$ $см^3$ га тенг. Унинг диагоналини топинг.
26. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 2 см, 4 см га, диагонали эса 6 см га тенг. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
27. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 2 см, 3 см га, ҳажми эса 36 $см^3$ га тенг. Параллелепипеднинг диагоналини топинг.
28. Агар кубнинг ҳар бир қиррасини 1 см га орттирса, унда унинг ҳажми 19 $см^3$ га ортади. Кубнинг қиррасини топинг.
29. Параллелепипеднинг ёғи — томони 1 см га ва ўткир бурчаги 60° га тенг бўлган ромб. Параллелепипеднинг бир қирраси шу ёғи билан 60° бурчак ясайди ва 2 см га тенг. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
30. Цилиндр асосининг радиуси билан баландлиги 2 см га тенг. Шу цилиндрга ташқи чизилган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
31. Цилиндр асосининг радиуси 1 см га тенг. Шу цилиндрга ташқи чизилган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми 8 $см^3$ га тенг. Цилиндрнинг баландлигини топинг.

32. Сферанинг радиуси 2 см га тенг. Шу сферага ташқи чизилган кубнинг ҳажмини топинг.
33. Сферага ташқи чизилган кубнинг ҳажми 216 $см^3$ га тенг. Сферанинг радиусини топинг.
34. Учбурчакли призманинг ҳажми 32 $см^3$ га тенг. Призма асосининг ўрта чизиғи орқали унинг ён қиррасига параллел текислик ўтказилган. Кесиб олинган учбурчакли призманинг ҳажмини топинг.
35. Учбурчакли призма асосининг ўрта чизиғи орқали унинг ён қиррасига параллел текислик ўтказилган. Кесиб олинган учбурчакли призманинг ҳажми 5 $см^3$ га тенг. Дастлабки призманинг ҳажмини топинг.
36. Призма асослари — томонлари 2 см бўлган мунтазам олтибурчак. Призманинг ён қирралари $2\sqrt{3}$ см га тенг ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясайди. Унинг ҳажмини топинг.
37. Мунтазам тўрт бурчакли пирамиданинг баландлиги 6 см га, ён қирралари эса 10 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
38. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлиги 12 см га, ҳажми эса 200 $см^3$ га тенг. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.
39. Пирамиданинг асоси — тўғри тўртбурчак. Пирамиданинг бир ён ёғи унинг асос текислигига перпендикуляр, бошқа учта ён ёқлари эса асос текислиги билан 60° бурчак ясайди. Пирамиданинг баландлиги 6 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
40. Учбурчакли пирамиданинг ён қирралари ўзаро перпендикуляр ва уларнинг ҳар қайсиси 3 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
41. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 2 см га, ён қирралари 4 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
42. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ҳажми 6 $см^3$ га, асосининг томонлари 1 см га тенг. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.
43. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 4 см га, ён ёғи билан асосининг орасидаги бурчаги эса 45° га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедининг ҳажми 12 $см^3$ га тенг. B_1ABC учбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.
45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубининг ҳажми 12 $см^3$ га тенг. E, F, E_1, F_1 нуқталари — BC, CD, B_1C_1, C_1D_1 қирраларининг ўрталари. $CEFC_1E_1F_1$ учбурчакли призмасининг ҳажмини топинг.
46. Кубнинг ҳажми 12 $см^3$ га тенг. Асоси — кубнинг ёғи, учи эса — кубнинг марказида ётувчи тўртбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.
47. $ABCA_1B_1C_1$ призмасининг ҳажми 6 $см^3$ га тенг. Шу призмадан C_1ABC учбурчакли пирамидаси кесиб олинган. Қолган бўлакнинг ҳажмини топинг.

48. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг бўлаги бўлган $SABC$ учбурчакли пирамидасининг ҳажми 1 см^3 га тенг. Олтибурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.

49. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ҳажми 12 см^3 га тенг. E нуқтаси — SB қиррасининг ўртаси. $EABC$ учбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.

50. Учбурчакли пирамиданинг ҳажми 12 см^3 га тенг. Шу пирамиданинг учи орқали ва асосининг ўрта чизиғи орқали ўтувчи текислик билан кесиб учбурчакли пирамида олинган. Кесиб олинган учбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.

51. $SABC$ учбурчакли пирамиданинг ҳажми 15 см^3 га тенг. Шу пирамида асосининг AB томони орқали ўтувчи текислик унга қарши ётган SC ён қиррасини S нуқтасидан бошлаб ҳисоблаганда 1 : 2 каби нисбатда бўлувчи D нуқтада кесиб ўтади. $DABC$ пирамиданинг ҳажмини топинг.

52. Бир цилиндр шаклидаги идиш иккинчисидан икки марта баланд, лекин иккинчи идишнинг ичи 1,5 марта кенг. Иккинчи идиш ҳажмининг биринчи идиш ҳажмига нисбатини топинг.

53. Конуснинг ҳажми 12 см^3 га тенг. Конуснинг баландлигини тенг бўладиган қилиб унинг асосига параллел кесувчи текислик ўтказилган. Кесиб олинган конуснинг ҳажмини топинг.

54. Конуснинг баландлиги 6 см га, ясовчиси эса 10 см га тенг. Унинг ҳажмининг π га нисбатини топинг.

55. Конус асосининг диаметри 6 см га, ўқ кесимининг учидаги бурчаги эса 90° га тенг. Унинг ҳажмининг ρ га нисбатини топинг.

56. Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг катети 6 см га тенг. Шу учбурчакнинг бир катети ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган конус ҳажмининг ρ га нисбатини топинг.

57. Учта шарнинг радиуслари 6 см, 8 см ва 10 см. Ҳажми шу шарларнинг ҳажмларининг йиғиндисига тенг бўлган янги шар радиусини топинг.

C

58. Тўғри призманинг асоси — юзи 3 см^2 га тенг ромб. Диагонал кесимларининг юзлари 8 см^2 ва 12 см^2. Призма ҳажмини топинг.

59. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг учта ёқларининг юзлари 2, 3, 6. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубининг қирраси 3 см га тенг. Кубнинг $ABCD$ ёғининг қўшни томонларининг ўрталари орқали ўтувчи ва AA_1 қиррасига параллел кесувчи текисликлар билан тўртта учбурчакли призмалар олинди. Призманинг қолган қисмининг ҳажмини топинг.

61. Мунтазам олтибурчакли призманинг ҳажми 12 $см^3$. Учлари берилган призма асосларининг томонларининг ўрталари бўлган янги призманинг ҳажмини топинг.
62. Кубнинг қирраси 6 см га тенг. Учлари кубнинг тўртта учи билан мос келадигандай кубга ички мунтазам тетраэдр чизилган. Тетраэдрнинг ҳажмини топинг.
63. Тўртбурчакли пирамиданинг ҳажми 12 $см^3$ га тенг. Пирамиданинг учи ва асосининг қўшни томонларининг ўрталари орқали ўтадиган кесувчи текисликлар билан тўртта учбурчакли пирамидалар кесилиб олинди. Пирамиданинг қолган қисмининг ҳажмини топинг.
64. Кубнинг қирраси 6 см га тенг. Учлари шу куб ёқларининг марказларида ётадиган октаэдрнинг ҳажмини топинг.
65. Шарнинг ҳажми 1 $см^3$ га тенг. Шу шарга ташқи чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.
66. Шарнинг ҳажми 12 $см^3$ га тенг. Асоси — шарнинг катта доираси, баландлиги эса шу доира текислигига перпендикуляр радиуси бўладиган конуснинг ҳажмини топинг.

СИРТНИНГ ЮЗИ

А

1. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи қирралари 1 см, 2 см, 3 см га тенг. Унинг сиртининг юзини топинг.
2. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи икки қирраси 3 см ва 4 см. Параллелепипед сиртининг юзи 52 $см^2$. Унинг шу учидан чиқувчи учинчи қиррасини топинг.
3. Агар кубнинг барча қирраларини уч марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?
4. Агар тетраэдрнинг барча қирраларини икки марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?
5. Мунтазам олтибурчакли призманинг баландлиги 6 см га, асосининг томонлари 3 см га тенг. Призманинг ён сиртининг юзини топинг.
6. Учбурчакли тўғри призманинг баландлиги 10 см га тенг, асоси эса — катетлари 6 см ва 8 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Призма сиртининг юзини топинг.
7. Цилиндрнинг баландлиги 2 см га, асосидаги айлананинг узунлиги эса 3 см га тенг. Цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг.
8. Конуснинг ясовчиси 2 см га, асосидаги айлананинг узунлиги эса 3 см га тенг. Конуснинг ён сиртининг юзини топинг.
9. Агар конуснинг ясовчисини 3 марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?
10. Агар конус асосининг радиусини 1,5 марта камайтирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта камаяди?

11. Шарнинг катта доирасининг юзи 1 $см^2$ га тенг. Шар сиртининг юзини топинг.
12. Агар шарнинг радиусини икки марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?

B

13. Кубнинг диагонали 1 см га тенг. Унинг сиртининг юзини топинг.
14. Куб сиртининг юзи 8 $см^2$ га тенг. Унинг диагоналини топинг.
15. Куб сиртининг юзи 24 $см^2$ га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
16. Кубнинг ҳажми 27 $см^3$ га тенг. Унинг сиртининг юзини топинг.
17. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 2 см ва 4 см. Параллелепипеднинг диагонали 6 см га тенг. Унинг сиртининг юзини топинг.
18. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 1 см ва 2 см. Параллелепипед сиртининг юзи 16 $см^2$ га тенг. Унинг диагоналини топинг.
19. Агар кубнинг ҳар бир қиррасини 1 см га орттирса, унда унинг сиртининг юзи 30 $см^2$ га тенг. Кубнинг қиррасини топинг.
20. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 1 см ва 2 см. Параллелепипеднинг ҳажми 6 $см^3$ га тенг. Унинг сиртининг юзини топинг.
21. Тўғри призманинг ён қирраси 5 см га тенг, асоси эса диагоналлари 3 см ва 4 см бўлган ромб. Призма сиртининг юзини топинг.
22. Тўғри призманинг асоси — диагоналлари 6 см ва 8 см бўлган ромб. Призма сиртининг юзи 248 $см^2$ га тенг. Унинг ён қиррасини топинг.
23. Мунтазам тўртбурчакли призма асосининг томонлари 3 см га, сиртининг юзи 66 $см^2$ га тенг. Унинг ён қиррасини топинг.
24. Учбурчакли призманинг икки ён ёқлари ўзаро перпендикуляр. Уларнинг умумий қирралари 10 см га тенг ва бошқа ён қирраларидан 6 см ва 8 см узоқликда ётади. Призманинг ён сиртининг юзини топинг.
25. Учбурчакли тўғри призманинг асоси — катетлари 6 см ва 8 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Призма сиртининг юзи 288 $см^2$ га тенг. Унинг баландлигини топинг.
26. Учбурчакли призманинг ён сиртининг юзи 12 $см^2$ га тенг. Призма асосининг ўрта чизиғи орқали ён қиррасига параллел текислик ўтказилган. Кесиб олинган учбурчакли призманинг ён сиртининг юзини топинг.
27. Учбурчакли призма асосининг ўрта чизиғи орқали ён қиррасига параллел текислик ўтказилган. Кесиб олинган учбурчакли призма ён сиртининг юзи 8 $см^2$ га тенг. Дастлабки призманинг ён сиртининг юзини топинг.

28. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ён қирралари 5 см га, асоси томонлари эса 6 см га тенг. Пирамида сиртининг юзини топинг.
29. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлиги 4 см га, асоси томонлари эса 6 см га тенг. Пирамида сиртининг юзини топинг.
30. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ён қирралари 5 см га, асоси томонлари эса 6 см га тенг. Пирамида ён сиртининг юзини топинг.
31. Агар октаэдрнинг барча қирраларини 3 марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?
32. Конуснинг баландлиги 6 см га, ясовчиси 10 см га тенг. Конус сирти юзининг π га нисбатини топинг.
33. Конуснинг ён сиртининг юзи унинг асосининг юзидан икки марта катта. Конуснинг ясовчиси билан асос текислигининг орасидаги бурчагини топинг.
34. Конус сиртининг юзи 12 см^2 га тенг. Унинг баландлигини тенг бўладигандай асосига параллел кесим ўтказилган. Кесиб олинган конус сиртининг юзини топинг.
35. Шар ҳажми 36π. Унинг сирти юзининг π га нисбатини топинг.
36. Бир шарнинг ҳажми иккинчи шарнинг ҳажмидан 27 марта катта. Биринчи шар сиртининг юзи иккинчи шар сиртининг юзидан неча марта катта бўлади?
37. Икки шарнинг радиуслари 6 см ва 8 см. Шу шарларнинг сиртларининг юзларининг йиғиндисига тенг бўладиган учинчи шарнинг радиусини топинг.

C

38. Цилиндрнинг ўқ кесимининг юзи 1 см^2 га тенг. Цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг.
39. Шарга ташқи чизилган цилиндр сиртининг юзи 9 см^2 га тенг. Шар сиртининг юзини топинг.

АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИ

Кўпбурчакларнинг айланиши

A

1. ABC тўғри бурчакли учбурчагининг катетлари $AC = BC = 1$ см. Шу учбурчакни AC катети ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
2. ABC тўғри бурчакли учбурчагининг катетлари $AC = BC = 1$ см. Шу учбурчакни CH баландлиги ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

3. ABC тенг томонли учбурчагининг томони 1 см га тенг. Шу учбурчакни CH баландлиги ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
4. ABC тенг ёнли учбурчагида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$, CH — баландлиги. Шу учбурчакни CH баландлиги ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
5. $ABCD$ тенг ёнли трапециянинг AD ва BC ён томонлари 1 см га, AB ва CD асослари эса мос равишда 2 см ва 1 см га тенг. Шу трапецияни AB ва CD асосларининг ўрталари орқали ўтувчи c тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
6. $ABCD$ тўғри бурчакли трапециянинг AB ва CD асослари мос равишда 2 см ва 1 см га тенг, кичик ён томони эса 1 см га тенг. Шу трапецияни AD томони ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

B

7. ABC тўғри бурчакли учбурчагининг катетлари $AC = BC = 1$ см. Шу учбурчакни AB томони ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
8. ABC тенг томонли учбурчагининг томони 1 см га тенг. Шу учбурчакни AB томони ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
9. ABC тенг ёнли учбурчагида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120$ Шу учбурчакни AB томони ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
10. ABC тўғри бурчакли учбурчагида $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. Шу учбурчакни AB томони ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
11. $ABCD$ ромбнинг томонлари 1 см га, ўткир бурчаги эса 60° га тенг. Шу ромбни AC тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
12. $ABCD$ ромбнинг томонлари 1 см га, ўткир бурчаги эса 60° га тенг. Шу ромбни BD тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
13. $ABCD$тенг ёнли трапециянинг AD ва BC ён томонлари 1 см га, AB ва CD асослари эса мос равишда 2 см ва 1 см га тенг. Шу трапецияни AB тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

14. $ABCD$ тўғри бурчакли трапециянинг AB ва CD асослари эса мос равишда 2 см ва 1 см га тенг, кичик ён томони эса 1 см га тенг. Шу трапецияни AB тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

C

15. ABC тенг ёнли учбурчагида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^{\circ}$. Шу учбурчакни AC томони ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
16. ABC тўғри бурчакли учбурчагида $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^{\circ}$, CH — баландлиги. Шу учбурчакни CH баландлиги ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
17. $ABCD$ ромбнинг томонлари 1 см га, ўткир бурчаги эса 60° га тенг. Шу ромбни AB тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
18. $ABCD$ тенг ёнли трапециянинг AD ва BC ён томонлари 1 см га, AB ва CD асослари эса мос равишда 2 см ва 1 см га тенг. Шу трапецияни CD тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
19. $ABCD$ тенг ёнли трапециянинг AD ва BC ён томонлари 1 см га, AB ва CD асослари эса мос равишда 2 см ва 1 см га тенг. Шу трапецияни ўрта чизиғи ётган c тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
20. $ABCD$ тўғри бурчакли трапециянинг AB ва CD асослари мос равишда 2 см ва 1 см га тенг, кичик ён томони эса 1 см га тенг. Шу трапецияни CD тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
21. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчагининг томонлари 1 см га тенг. Шу олтибурчакни AB тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
22. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчагининг томонлари 1 см га тенг. Шу олтибурчакни AC тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
23. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчагининг томонлари 1 см га тенг. Шу олтибурчакни AD тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
24. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчагининг томонлари 1 см га тенг. Шу олтибурчакни AB ва DE томонларининг ўрталари орқали ўтувчи с тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

Кўпёқларнинг айланиши

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини AA_1 тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ ёқларининг марказлари орқали ўтувчи с тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
3. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призмасининг барча қирралари 1 см га тенг. Шу призмани AA_1 тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
4. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призмасининг барча қирралари 1 см га тенг. Шу призмани ABC ва $A_1B_1C_1$ ёқларининг марказлари орқали ўтувчи c тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 см га тенг. Шу призмани асосларининг марказлари орқали ўтувчи c тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

B

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини BC ва B_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи c тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
7. $ABCD$ бирлик тетраэдрини унинг DH баландлиги ётган тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
8. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 см га тенг. Шу пирамидани SH баландлиги ётган тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
9. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ён қирралари 2 см га, асосининг томонлари эса 1 см га тенг. Шу пирамидани SH баландлиги ётган тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 см га тенг. Шу призмани AA_1 тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

C

11. $ABCD$ бирлик тетраэдрини AB тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

12. $S'ABCDS''$ бирлик октаэдрини $S'S''$ тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
13. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 см га тенг. Шу призмани BC ва B_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи c тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 см га тенг. Шу призмани BC ва B_1C_1қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи c тўғри чизиғи бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

ФАН-НОМ КЎРСАТКИЧЛАРИ

ЖАВОБЛАР

10-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

1. 1) 3; 2) 6; 3) 10; 4)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.** Битта ёки чексиз кўп. **3.** 1) 4; 2) 10; 3)* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **4.** 1) 4; 2) 8; 3)* 15. **8.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **9.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **10.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) 2n. **11.** 1) ҳа; 4) йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. **12.** 1) 9; 2) 12; 3) 15; 4) 18; 5) 3n. **13.** 1) йўқ; 3) ҳа; 4) ҳа; 2) йўқ. **14.** 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) n + 2. **15.** 1) ҳа; 2) ҳа; 3) ҳа; 4) ҳа. **16.** 1) Тўртбурчак; 2) бешбурчак; 3) олтибурчак. 17. 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) n + 1. **18.** 1) ҳа; 2) ҳа; 3) ҳа; 4) ҳа. **19.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) 2n. **20.** 1) йўқ; 4) йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. **21.** 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) n + 1. **22.** 1) ҳа; 2) ҳа; 3) ҳа; 4) ҳа. **23.** 1) Тўртбурчак; 2) бешбурчак; 3) олтибурчак. **24.** 1) 18; 2) 18; 3) 6; 4) 27. **27.** 1) 24; 2) 24; 3) 3; 4) 24. **28.** 1) Айқаш тўғри чизиқлар; 2) Айқаш тўғри чизиқлар; 3) кесишади. **29.** 1) Айқаш тўғри чизиқлар; 2) Айқаш тўғри чизиқлар, 3) кесишади. **33.** 1) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, BCC_1B1, EFF_1E_1; 2) DEE_1D_1. **35.** 1) 3; 2) 3; 3) 1; 4) 4. **37.** 1) 3; 2) 48. **38.** 1) 60°; 2) 90°; 3) 90°. **39.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°. **40.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **41.** 1) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **42.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **43.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $1\frac{1}{2}$. **44.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **45.** 45°. **46.** 60°. **47.** 1) 60°; 2) 30°; 3) 90°; 4) 90°. **48.** $\frac{1}{3}$. **49.** $-\frac{1}{3}$. **50.** 6. **51.** 1) 2; 2) $\sqrt{5}$. **52.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6}$. 53. $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. 54. $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$. **55.** 1) 120°; 2) 90°. **56.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; г) 0. **57.** 1. **58.** A(0; 1; 0), B(1; 1; 0), C(1; 0; 0), D(0; 0; 0), A_1(0; 1; 1), B_1(1; 1; 1), C_1(1; 0; 1), D_1(0; 0; 1). **59.** A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0), D(1; $\sqrt{3}$; 0), E(0; $\sqrt{3}$; 0), F(−0,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0), A_1(0; 0; 1), B_1(1; 0; 1), C_1(1,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1), D_1(1; $\sqrt{3}$; 1), E_1(0; $\sqrt{3}$; 1), F_1(−0,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1). **60.** 1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{5}$. **61.** (x − 1)2 + (y − 2)2 + (z − 2)2 = 9. **62.** R = 3, O(2; −1; 0). **63.** 7. **64.** 6x + 3y + 2z = 6.

I боб. КЎПЁҚЛАР

1-§

3. а), б). **4.** а), б). **5.** а), б), в), г). **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\sqrt{29}$. **8.** 1. **9.** 9 марта. **10.** 4 марта. **11.** 4 марта. **12.** 94. **13.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$. **14.** $6 + 3\sqrt{3}$. **15.** в), д), е). **16.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **18.** 2 см ва $\sqrt{5}$ см. **19.** $\sqrt{5}$ см. **20.** 4 см. **21.** а) 22 см; б) 28 см². **22.** а) 92 см²; б) 48 см². **23.** а) 34 см² б) 34 см². **24.** а) 22 см²; б) 26 см². **25.** 30 см². **26.** d 27600 м². **27.** б), в), г), д) — қавариқ; а) е) — қавариқ эмас. **28.** 288 см². **29.** $\sqrt{5}$ см. **30.** Йўқ. **31.** Йўқ.

2-§

2. а), в). **3.** а), в). **4.** Бешбурчакли пирамида. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $1 + \sqrt{3}$. **8.** $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{2}$. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** 4 марта. **11.** 9 марта. **15.** $\sqrt{7}$ см. **16.** $\sqrt{10}$. **17.** d 8595 м². **18.** d 8,3 га. **19.** $5 + 3\sqrt{3}$ см². **20.** 1 см. **21.** d 1710 дм².

3-§

1. 8. **2.** 12. **3.** 6. **6.** а) Мунтазам олтибурчакли призма; б) бешбурчакли пирамида. **7.** а) ҳа; б) ҳа. **8.** ҳа. **9.** ҳа. **10.** У = 12, Қ = 24, Ё = 12; У − Қ + Ё = 0. **11.** У = 6, Қ = 12, Ё = 8. **12.** У = 20, Қ = 30, Ё = 12.

4-§

1. 1) У = 4, Қ = 6, Ё = 4; 2) У = 8, Қ = 12, Ё = 6; 3) У = 6, Қ = 12, Ё = 8; 4) У = 12, Қ = 30, Ё = 20; 5) У = 20, Қ = 30, Ё = 12. **2.** Йўқ. Ёқларининг ҳар хил сони бирикадиган учлари бор бўлади. **3.** Ҳа, бу октаэдр. **7.** 5. **8.** 3. **9.** Куб ва октаэдр. **10.** Икосаэдр ва додекаэдр. **11.** Тетраэдр, $\sqrt{2}$. **12.** Октаэдр, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.** Октаэдр, $\frac{1}{2}$. **14.** Октаэдр, 1 см. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 4. **17.** 8. **18.** Тетраэдр, $\frac{1}{3}$. **19.** Куб, $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **20.** Додекаэдр. **21.** Икосаэдр. **22.** 10. **23.** 6.

5*-§

2. 1) ҳа; 2) ҳа; 3) Ҳа. **3.** 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. **4.** 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. **5.** 1) ҳа; 2) ҳа; 3) Ҳа. **6.** 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. **7.** 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. **9.** Берилган тўғри чизиқларининг текислигида жойлашган, уларга параллел бўлган ва улардан бир хил узоқликда жойлашадиган тўғри чизиқнинг нуқталари. **10.** 1) Берилган текисликларнинг кесишиш тўғри чизиғининг нуқталари; 2) берилган текисликларга параллел ва улардан бир хил узоқликда жойлашадиган текисликнинг нуқталари. **11.** Ҳа. **12.** 1) ҳа; 2) ҳа; 3) Ҳа. **13.** 1) 3; 2) 7. **14.** 1) 4; 2) 7. **15.** 1), 2) 1. **16.** 1) 4; 2) 6. **17.** 1) n, агар n – тоқ сон, $n + 1$, агар n – жуфт сон; 2) 0, агар n – тоқ сон, 1, агар n – жуфт сон. **18.** 1) $n + 1$; 2) n. **19.** 1) 9; 2), 3) 15. **20.** 1) 9; 2), 3) 15. **21.** Ҳа, масалан, сферанинг симметрия маркази унда ётмайди. **22.** 1) Ёқлари параллелограммлар бўлган параллелепипедда симметрия маркази бор, лекин симметрия ўқи йўқ; 2) мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг симметрия ўқи бор, лекин симметрия маркази йўқ. **23.** 1) Ёқлари параллелограммлар бўлган параллелепипедда симметрия маркази бор, лекин симметрия текислиги йўқ; 2) асоси параллелограмм бўлган тўртбурчакли пирамиданинг симметрия ўқи бор, лекин симметрия текислиги йўқ. **24.** 1) Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг симметрия текислиги бор, лекин симметрия маркази йўқ; 2) мунтазам учбурчакли пирамиданинг симметрия текислиги бор, лекин симметрия ўқи йўқ.

Ўзингизни текширинг!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	A)	B)	B)	C)	A)	D)	D)	A)	C)	B)	D)	C)	D)	D)	A)	B)	C)	A)	D)

II боб. АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

6-§

2. Чексиз кўп. **3.** Доира. **4.** Цилиндр. **5.** Ҳалқа. **6.** 5 см. **7.** $\frac{1}{2\pi}$ см. **8.** 1) 4р см²; 2) 6р см². **10.** Тўғри тўртбурчак. **11.** 1) ҳа; 2) ҳа; 3) ҳа. **12.** 1) цилиндр; 2) цилиндр. **13.** 1) $2\sqrt{2}$р; 2) $\sqrt{2}$р. **14.** 1) цилиндр; 2) Цилиндр. **15.** 1) 2р; 2) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$. **16.** 1) цилиндр; 2) цилиндр. **17.** 1) 12р; 2) 4р. **18.** 10р ≈ 31,4 (м²). **19.** $30\sqrt{2 - 2\cos 10^\circ}$ см². **20.** 26 см². **21.** Асосларининг радиуслари 2 ва 1, баландликлари эса 1 бўлган иккита цилиндрдан иборат фигура. Бу фигура сиртининг юзи 14 р га тенг. **22.** Асосларининг радиуслари 2, 1, 1, баландликлари эса 1 бўлган учта цилиндрдан иборат фигура. Бу фигура сиртининг юзи 16р га тенг. **23.** 350р см². **24.** $\frac{2R\left(1 - \cos\frac{\alpha}{R}\right)}{\mathrm{tg}\,\beta}$ см².

7-§

2. Чексиз кўп. **3.** Доира. **4.** Конус. **5.** Конуснинг ён сирти. **6.** 5. **7.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. **8.** 1 см. **9.** 1 см. **10.** 3р см². **11.** Ҳа. **12.** $\frac{\pi}{4}$ см². **13.** $\sqrt{5}$р см². **14.** 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа.

15. Асослари умумий бўлган икки конусдан иборат фигура. **16.** Асослари умумий бўлган икки конусдан иборат фигура. Унинг сиртининг юзи $\sqrt{2}$р га тенг. **17.** Конус. **18.** $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$. **19.** Конус. **20.** 3р см^2. **21.** 15 см^2. **22.** $2h^2$. **23.** Асослари умумий бўлган Иккита тенг конуслардан иборат фигура. Унинг сиртининг юзи $\sqrt{2}$р см^2 га тенг. **24.** 0,5 см. **25.** 120°. **26.** 37. **27.** 42,12 м^2. **28.** 1440 см^2.

8-§

2. Чексиз кўп. **3.** Доира. **4.** Кесик конус. **5.** Кесик конуснинг ён сирти. **6.** 5 см. **7.** 80р см^2. **8.** Ҳа. **10.** 9р см^2. **11.** 1) Йўқ; 2), 3) ҳа. **12.** 1 см. **13.** 2 см. **14.** $\frac{17\pi}{4}$ см^2. **15.** Кесик конус. **16.** $(10+9\sqrt{2})$р см^2. **17.** Кесик конус. **18.** 14р см^2. **19.** $6\sqrt{2}$р $\approx$ 26,6 (м^2). **20.** Асослари умумий бўлган иккита тенг кесик конуслардан иборат фигура. Унинг сиртининг юзи 3,5р см^2 га тенг. **21.** 1 см ва 0,5 см. **22.** d 161 г. **23.** d 1,1 дм^2. **24.** d 88 см, d 63 см, d 24,3 см, d 21 дм^2.

9-§

2. 1) $OA < R$; 2) $OA > R$. **3.** 1) Сфера ичида ётади; 2) сферада ётади; 3) сферадан ташқарида ётади. **4.** Чексиз кўп. **5.** 110 мм. **6.** 1 см. **7.** 1) кесишади; 2) уринади; 3) умумий нуқталарга эга эмас. **8.** 1) Битта; 2) битта ҳам эмас; 3) чексиз кўп. **9.** 4 см. **10.** 4 см. **11.** 1) Кесишади; 2) уринади; 3) умумий нуқталарга эга эмас. **12.** 5 см. **13.** 8 см. **14.** 5 см. **15.** 1) Кесишади; 2) уринади; 3) умумий нуқталарга эга эмас. **16.** ≈ 6369 км. **17.** 2 см ва 10 см. **18.** 1 см. **19.** 1) Кесишади; 2) уринади; 3) умумий нуқталарга эга эмас.

10*-§

1. R ва $2R$. **2.** $\frac{h}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **4.** $2\sqrt{3}$ см. **5.** $\sqrt{3}$ см. **6.** 2,5 см. **7.** 6р см^2. **8.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **9.** $R=\frac{r^2+h^2}{2h}$. **10.** $3\frac{1}{8}$ см. **11.** $R=\frac{r(\sqrt{r^2+h^2}-r)}{h}$. **12.** $1\frac{1}{2}$ см. **13.** $\sqrt{3}$ см. **14.** 1) 1 см; 2) $\sqrt{2}-1$ см. **15.** 1) 1 см; 2) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ см.

11-§

1. 4р см^2. **2.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$ см. **3.** 12 см^2. **4.** 1) 4; 2) 9; 3) n^2 марта ортади. **5.** 2 : 3. **6.** 10 см. **7.** 1. **8.** р. **9.** 2р. **10.** 160000 марта. **11.** 3 марта. **12.** 4 марта. **13.** 400р см^2. **14.** ≈ 509554140 км^2. **15.** ≈ 1520 м^2. **16.** 19200 м^2. **18.** $\frac{\pi}{2}$ см^2. **19.** $\frac{2\pi}{3}$ см^2.

Ўзингизни текширинг!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B)	C)	C)	D)	B)	C)	A)	C)	D)	C)	D)	D)	C)	D)	A)	D)	C)	B)	C)	D)

III боб. ЖИСМЛАР ХАЖМЛАРИ

12-§

1. 54 см^2. **2.** 8 см^3. **3.** 8 см^3. **4.** 7 см^3. **5.** 27 марта. **6.** 8 марта. **7.** 1) 2 марта ортади; 2) 9 марта камаяди. **8.** 62,5 г. **9.** 60 м^2. **10.** а) 6; б) 8. **11.** а) 40; б) 12. **12.** б) 10. **13.** а) 5; б) 6. **14.** 30 см^3. **15.** 15 см^3. **16.** 20 см. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** $1\frac{3}{4}$. **19.** ≈ 21 м^3. **20.** 9 см. **21.** 3 см. **22.** 160 см^3. **23.** $\frac{1}{6}$. **24.** $\frac{1}{3}$. **25.** 6 м^2. **26.** 162 л.

13-§

1. 60 см³. **2.** $20\sqrt{3}$ см³. **3.** $18\sqrt{3}$ см³. **4.** $\sqrt{3}$ см³. **5.** 0,75 см³. **6.** $16\sqrt{3}$ см. **7.** 1 : 3. **8.** 3 см³. **9.** 5 см³. **10.** 9 см³. **12.** 3 м³. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см³.

14-§

1. 12р см³. **2.** $\frac{\pi a^3}{4}$ см³. **3.** Иккинчи. **4.** рa^3. **5.** $\frac{3\pi}{32}$ см³. **6.** $\frac{\pi}{4}$. **7.** р см³. **8.** $\frac{a}{b}$ ёки $\frac{b}{a}$. **9.** Икки марта. **10.** 3р см³. **11.** 243р см³. **12.** 4 см. **13.** Цилиндр асосини танлаб олишимизга боғлиқ бўлади. $\frac{1}{\pi}$ см³ еки $\frac{1}{2\pi}$ см³. **14.** 2р. **16.** 5р см³. **17.** 6р см³. **18.** 960 м³. **19.** 162 кг. **20.** 2250 см³.

15-§

1. $\frac{1}{3}a^2h$. **2.** 32м³. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см³. **5.** $1\frac{1}{2}$ см³. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ см³. **7.** 8 марта. **8.** 3 марта камаяди. **9.** 1) $\frac{1}{3}$ см³; 2) $\frac{1}{6}$ см³. **10.** 1 : 7. **11.** 7 см³. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **13.** $\frac{1}{6}$ см³. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **15.** $4\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{1}{3}$ см³. **17.** 1 : 1. **18.** 3 см³. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ см³. **20.** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ см³. **21.** ≈ 79443 м³. **23.** $\frac{3}{4}$ см³. **24.** $\frac{1}{2}$ см³. **25.** $\frac{1}{2}$ см³. **26.** 3074176 м³. **27.** ≈ 407 м³. **28.** 473 дм³, 319 кг.

16-§

1. 1) Уч; 2) тўрт марта ортади. **2.** 2 марта ортади. **3.** 5 см³. **4.** 1 : 7. **5.** 16р см³. **6.** 3р см³. **7.** 3р см³. **8.** 7р см³. **9.** 72р см³. **10.** 9р см³. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см³. **12.** Йўқ. **13.** $\frac{7}{27}$ см³. **14.** 4 см. **15.** 52р см³. **16.** 19р см³. **18.** ≈ 55,5 м³. **19.** 9р см³. **20.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см³. **22.** V = 19,44 м³.

17-§

1. 36р см³. **2.** 1) 27; 2) 64 марта ортади. **3.** 6 см. **4.** 27. **5.** $\frac{4\pi}{3}$ см³. **6.** $\frac{4000\pi}{3}$ см³. **7.** $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ см³. **8.** $m^{\frac{3}{2}} : n^{\frac{3}{2}}$. **9.** $\frac{4\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3)$. **10.** 26 : 1. **11.** ≈ 0,5. **12.** $\frac{5324\pi}{3} \approx 5572$ (м³). **13.** $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **14.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **15.** $\frac{\pi}{6}$ см³. **16.** $\frac{2\pi}{9}$ см³.

Ўзингизни текширинг!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	B)	D)	C)	B)	D)	D)	B)	B)	C)	B)	A)	A)	A)	A)	D)	C)	B)	A)

ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

ҲАЖМ

1. 48 см³. **2.** 8 см². **3.** 5 см. **4.** 4 см. **5.** 6 см. **6.** 27. **7.** 120 см³. **8.** 4 см. **9.** 4,5 см³. **10.** 8. **11.** 24 см³. **12.** 4 см. **13.** 0,25 см³. **14.** 3 см. **15.** 4. **16.** 3. **17.** 2 см. **18.** 2 см³. **19.** 3. **20.** 2,25. **21.** 30 см³. **22.** 50 см³. **23.** 27. **24.** 8 см³. **25.** 6 см. **26.** 32 см³. **27.** 7 см. **28.** 2 см. **29.** 1,5 см³. **30.** 32 см³. **31.** 2 см. **32.** 64 см³. **33.** 3 см. **34.** 8 см³. **35.** 20 см³. **36.** 18 см³. **37.** 256 см³. **38.** 13 см. **39.** 48 см³. **40.** 4,5 см³. **41.** 12 см³. **42.** 7 см. **43.** 48 см³. **44.** 2 см³. **45.** 1,5 см³. **46.** 2 см³. **47.** 4 см³. **48.** 6 см³. **49.** 3 см³. **50.** 3 см³. **51.** 10 см³. **52.** 1,125. **53.** 1,5 см³. **54.** 128 см³. **55.** 9 см³. **56.** 72 см³. **57.** 12 см³. **58.** 12 см³. **59.** 6 см³. **60.** 13,5 см³. **61.** 9 см³. **62.** 72 см³. **63.** 6 см³. **64.** 36 см³. **65.** 1,5 см³. **66.** 3 см³.

СИРТНИНГ ЮЗИ

1. 22 $см^2$. **2.** 2 см. **3.** 9. **4.** 4. **5.** 108 $см^2$. **6.** 288 $см^2$. **7.** 6 $см^2$. **8.** 3 $см^2$. **9.** 3. **10.** 1,5. **11.** 4 $см^2$. **12.** 4. **13.** 2 $см^2$. **14.** 2 см. **15.** 8 $см^3$. **16.** 54 $см^2$. **17.** 64 $см^2$. **18.** 3 см. **19.** 2 см. **20.** 22 $см^2$. **21.** 62 $см^2$. **22.** 10 см. **23.** 4 см. **24.** 240 $см^2$. **25.** 10 см. **26.** 6 $см^2$. **27.** 16 $см^2$. **28.** 84 $см^2$. **29.** 96 $см^2$. **30.** 72 $см^2$. **31.** 9. **32.** 144. **33.** 60. **34.** 3 $см^2$. **35.** 36. **36.** 9. **37.** 10 см. **38.** р $см^2$. **39.** 6 $см^2$.

АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИ

Кўпбурчакларнинг айланиши

1. $\frac{\pi}{3}$ $см^3$ ва $(\sqrt{2}+1)$р $см^2$. **2.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ $см^3$ ва $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ $см^2$. **3.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ $см^3$ ва 0,75р $см^2$. **4.** $\frac{\pi}{8}$ ва $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{4}$. **5.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{24}$ $см^3$ ва 2,75р $см^2$. **6.** $\frac{7\pi}{3}$ $см^3$ ва $(3\sqrt{2}+5)$р $см^2$. **7.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ $см^3$ ва $\sqrt{2}$р $см^2$. **8.** $\frac{\pi}{4}$ $см^3$ ва $\sqrt{3}$р $см^2$. **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ ва р. **10.** 9,6р ва 16,8р. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ $см^3$ ва р $см^2$. **12.** 0,25р $см^3$ ва $\sqrt{3}$р $см^2$. **13.** р $см^3$ ва $2\sqrt{3}$р $см^2$. **14.** $\frac{4\pi}{3}$ $см^3$ ва $(\sqrt{2}+3)$р $см^2$. **15.** $\frac{\pi}{4}$ ва $\frac{(\sqrt{3}+3)\pi}{2}$. **16.** 8,192 р ва 23,04 р. **17.** 0,75р $см^3$ ва $2\sqrt{3}$р $см^2$. **18.** 1,25р $см^3$ ва $3\sqrt{3}$р $см^2$. **19.** $\frac{11\pi}{32}$ $см^3$ ва $\frac{5\sqrt{3}\pi}{14}$ $см^2$. **20.** $\frac{5\pi}{3}$ $см^3$ ва $(\sqrt{2}+5)$р $см^2$. **21.** 4,5р $см^3$ ва $6\sqrt{3}$р $см^2$. **22.** $\frac{19\sqrt{3}\pi}{12}$ $см^3$ ва 7р $см^2$. **23.** р $см^3$ ва $2\sqrt{3}$р $см^2$. **24.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{12}$ $см^3$ ва 3,5р $см^2$.

Кўпёқларнинг айланиши

1. 2р ва $(2\sqrt{2}+4)$р. **2.** 0,5р ва $(\sqrt{2}+1)$р. **3.** р $см^3$ ва 4р $см^2$. **4.** $\frac{\pi}{3}$ $см^3$ ва $\frac{(2\sqrt{3}+2)\pi}{2}$ $см^2$. **5.** р $см^3$ ва 4р $см^2$. **6.** 1,25р ва $(\sqrt{5}+2{,}5)$р. **7.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ ва $\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ $см^3$ ва $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ $см^2$. **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ $см^3$ ва 3р $см^2$. **10.** 4р $см^3$ ва 12р $см^2$. **11.** 0,25р ва $\sqrt{3}$р. **12.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ ва $\sqrt{2}$р. **13.** 0,75р $см^3$ ва $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{2}$ $см^2$. **14.** 3,25р $см^3$ ва $\frac{(2\sqrt{13}+13)\pi}{2}$ $см^2$.

МУНДАРИЖА

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 11 классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательных школ

(*на узбекском языке*)

Муҳаррирлар *М. Зайниддинова, В. Мусаева*
Бадиий муҳаррир *Л. Уралбаева*
Техник муҳаррир *Л. Садикова*
Компьютерда саҳифаловчи *Д. Бағдаулет*

Нашриётга 7 июль 2003 йилда Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлигининг № 0000001 давлат лицензияси берилган

ИБ № 6247

Нашрга 19.08.20 рухсат этилди. Ҳажми 70 × 100 $^1/_{16}$. Офсет қоғози.
Ҳарф тури "SchoolBook Kza ". Офсет нашри. Шартли босма табоғи 10,32 + 0,32 форзац.
Шартли бўёқ тамғаси 21,96. Нашр ҳисоб табоғи 6,51 + 0,54 форзац.
Адади 3500 дона. Буюртма №

"Мектеп" нашриёти, 050009, Алмати шаҳри, Абай шоҳ кўчаси, 143
Факс: 8(727) 394-42-30, 394-37-58
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz