ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық

11

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған

Алматы «Атамұра» 2020

1 – 5173

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
Г 31

Оқулық Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі бекіткен жалпы орта білім беру деңгейінің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-11-сыныптарына арналған «Алгебра және анализ бастамалары» пәнінің жаңартылған мазмұндағы Типтік оқу бағдарламасына сәйкес дайындалды.

Пікір жазған ҚР ҰҒА-ның академигі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор **Өтелбаев М.Ө.**

Авторлары:
Ә. Н. Шыныбеков, Д. Ә. Шыныбеков, Р. Н. Жұмабаев, С. С. Маделханов

ПАЙДАЛАНҒАН ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР:

— жаңа негізгі материалды бекіту сұрақтары

— практикалық және шығармашылық тапсырмалар

— тарихқа шолу

Есептер:

A — бастақты деңгей

B — орта деңгей

C — жоғары деңгей

✱ — шығармашылық немесе күрделілігі жоғары тапсырмалар мен есептер

▲ — дәлелдеудің немесе есепті шешудің басы

■ — дәлелдеудің немесе есепті шешудің соңы

Г 31 **Геометрия.** Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық / Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жұмабаев, С.С. Маделханов. — Алматы: Атамұра, 2020. — 192 бет.

ISBN 978-601-331-770-0

ISBN 978-601-331-770-0

АЛҒЫ СӨЗ

Бұл оқулық жаңартылған оқу бағдарламасына сәйкес орта білім беретін жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған. Планиметрия курсымен салыстырғанда 10- және 11-сыныптарда оқытылатын стереометрия курсының өзіндік ерекшеліктері бар: мұнда кеңістіктік фигуралар мен олардың қасиеттері қарастырылады. Сондықтан оқушылардың кеңістіктік ойлау қабілеттерін дамыту оқулықтың басты мақсаттарының бірі болып табылады. Уақытты тиімді пайдалану үшін кеңістік фигураларының модельдерін, онлайн графиктік ресурстарды қолдануды ұсынамыз (оқулықта осындай ресурстарға сілтемелер берілді). Математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарға ұсынылатын материалдар (*) белгісімен берілген. Сонымен қатар, C тобының тапсырмалары да негізінен математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарға арналған. Дегенмен математиканы меңгеруде қабілет танытқан оқушылар бұл материалдарды сабақтан тыс уақыттарда, өз беттерінше меңгергендері дұрыс. Бұл тапсырмалардың математикалық олимпиадаларға және өзге конкурстарға қатысып жүрген оқушыларға пайдасы тиері сөзсіз.

Осы оқулықты қолдану барысында мынадай қағидаларды ұстанған дұрыс: әр бөлімнің соңында өтілген тақырыпты бекіту мақсатында ұсынылған тапсырмаларды орындап отыру қажет. Әр оқушы **A** тобы материалдары мен практикалық тапсырмаларды толық меңгеріп алған соң ғана ретімен **B** және **C** топтарының есептеріне көшкені дұрыс. Сонымен бірге әр бөлімнің соңында берілген теориялық сұрақтарға жауап беруді дағдыға айналдырған жөн.

Ізденіс пен еңбек өз жемісін берері сөзсіз!

10-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Бұл бөлімде:

- **10-сынып материалдарын еске түсіресіңдер;**
- **жаңа өтілетін материалдарды нәтижелі меңгеруге дайындық жасайсыңдар.**

1. Кеңістікте қиылыспайтын екі түзу параллель болады деген тұжырым дұрыс па?

2. Кеңістікте қандай түзулер параллель түзулер, айқас түзулер деп аталады?

3. Қандай түзу мен жазықтықты параллель деп атайды? Түзу мен жазықтықтың параллельдігінің белгісін тұжырымдаңдар.

4. Қандай екі жазықтықты параллель деп атайды? Екі жазықтықтың параллельдік белгісін тұжырымдаңдар.

5. Кеңістікте екі түзу арасындағы бұрыш деп нені айтады? Қандай түзулерді өзара перпендикуляр деп атайды?

6. Қандай түзуді берілген жазықтыққа перпендикуляр деп атайды?

7. Түзудің жазықтыққа перпендикулярлық белгісін тұжырымдаңдар.

8. Бір жазықтыққа перпендикуляр екі түзудің өзара параллель болатынын дәлелдеңдер.

9. Нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикуляр деп нені айтады? Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық қалай анықталады?

10. Нүктеден жазықтыққа жүргізілген көлбеу және оның проекциясы деп нені айтады?

11. Үш перпендикуляр туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

12. Қандай жазықтықтар перпендикуляр деп аталады?

13. Екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін тұжырымдап дәлелдеңдер.

14. Айқас түзулердің арақашықтығы қалай анықталады?

15. Параллель проекциялаудың қандай қасиеттерін білесіңдер?

16. Кеңістік фигураларын қағаз бетінде кескіндеу ережелерін айтыңдар. Мысал келтіріңдер.

17. Ортогональ проекция деген не? Көпбұрыштың ортогональ проекциясының ауданын қалай табуға болады?

18. Кеңістіктегі вектор деп нені айтады? Оларға қандай амалдар қолданылады? Үш векторды қосудың параллелепипед ережесін айтыңдар.

19. Кеңістіктегі нүкте мен вектордың координаталары қалай анықталады?

20. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі деп нені айтады? Векторлар арасындағы бұрыш қалай анықталады?

21. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын жазыңдар, оның мағынасын түсіндіріңдер.

A

0.1. AB кесіндісі және онымен қиылыспайтын α жазықтығы берілген. Кесінді ұштарынан жүргізілген параллель түзулер α жазықтығына перпендикуляр және оны сәйкесінше A_1 және B_1 нүктелерінде қиып өтеді:

1) $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 7$ см; 2) $AA_1 = 12$ мм, $BB_1 = 8$ мм деп алып, AB кесіндісінің ортасынан α жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

0.2. CD кесіндісінің ортасы — O нүктесі. C, O және D нүктелерінен өтетін өзара параллель түзулер α жазықтығын сәйкесінше C_1, O_1 және D_1 нүктелерінде қиып өтеді, ал C және D нүктелері α жазықтығының бір жақ бөлігінде орналасқан. 1) $CC_1 = 3$ м, $DD_1 = 11$ м болса, OO_1-ді;

2) $OO_1 = 12$ см, $DD_1 = 4$ см болса, CC_1-ді табыңдар.

0.3. Алдыңғы есепті C және D нүктелері α жазықтығының әртүрлі жақтарында орналасқан деп алып шығарыңдар.

0.4. P және Q нүктелері α жазықтығында, Q және R нүктелері β жазықтығында, P, Q, R нүктелері γ жазықтығында жататыны белгілі. Сәйкес сызбаны салып көрсетіңдер.

0.5. α, β, γ жазықтықтары қос-қостан a, b, c түзулері бойымен қиылысады және $a \parallel b$, $b \parallel c$. Сәйкес сызбаны салып көрсетіңдер.

0.6. $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$ шартын қанағаттандыратын OA, OB және OC түзулері берілген. $OA = OB = OC$ деп алып, ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

0.7. OA және OB кесінділерінің орталары — сәйкесінше A_1 және B_1. α жазықтығы A_1 және B_1 нүктелері арқылы өтеді. $AB \parallel \alpha$ екенін көрсетіп, 1) $AB = 8$ см болғанда A_1B_1-ді; 2) $A_1B_1 = 3$ м болғанда AB-ны табыңдар.

0.8. Параллель α және β жазықтықтары AOB бұрышының OA қабырғасын A_1, A_2 нүктелерінде, OB-ны B_1, B_2 нүктелерінде қиып өтеді. $OB_1 = 12$ см, $OB_2 = 18$ см, $A_2B_2 = 54$ см деп алып, A_1B_1-ді табыңдар.

0.9. OA, OB, OC түзулері өзара перпендикуляр. 1) $OA = 3$ см, $AB = 5$ см, $OC = 3$ см; 2) $OA = a$, $AB = b$, $AC = c$ деп алып, BC-ны табыңдар.

0.10. A және B нүктелерінен α жазықтығына түсірілген перпендикулярлардың табандары — сәйкесінше A_1 және B_1 нүктелері.

AB кесіндісі мен α жазықтығы қиылыспайды. 1) $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 14$ см, $AB = 13$ см болса, A_1B_1-ді; 2) $AA_1 = 27$ мм, $BB_1 = 20$ мм, $A_1B_1 = 24$ мм болса, AB-ны табыңдар.

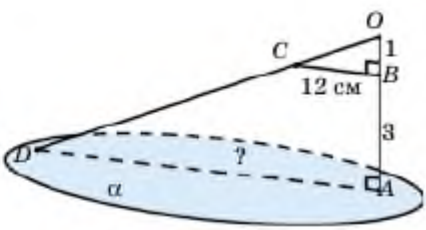
0.11. A нүктесінен α жазықтығына AB перпендикуляры мен AC көлбеуі жүргізілген. 1) $AB = 6$ м, $AC = 10$ м болса, көлбеу проекциясының ұзындығын; 2) $AB = 24$ см, $BC = 10$ см болса, көлбеудің ұзындығын табыңдар.

0.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. 1) $\overline{DA} + \overline{DC} + \overline{DD_1}$; 2) $\overline{A_1B_1} + \overline{C_1B_1} + \overline{D_1B_1}$ қосындысына тең және ұштары параллелепипед төбелерінде орналасқан векторды көрсетіңдер.

0.13. A, B, C нүктелері бір түзудің бойында жатады. Осы түзуден тысқары орналасқан кез келген O нүктесі үшін $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ векторларының компланар болатынын көрсетіңдер.

0.14. Алдыңғы есеп шартында 1) $\overline{AC} = \overline{CB}$; 2) $\overline{AC} = 2\overline{CB}$ деп алып, $\overline{OC}$ векторын $\overline{OA}$ және $\overline{OB}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

B



0.15. B нүктесі OA кесіндісін $OB : BA = 1 : 3$ қатынасында бөледі. A нүктесі арқылы BC кесіндісіне параллель α жазықтығы жүргізілген. OC түзуі α-ны қандай да бір D нүктесінде қиып өтетінін көрсетіп, $BC = 12$ см болғанда AD-ны табыңдар.

0.16. O нүктесі $ABCD$ квадраты жазықтығынан тысқары жатыр. Осы жазықтыққа параллель α жазықтығы OA, OB, OC, OD кесінділерін сәйкесінше A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелерінде қиып өтеді. Егер $OA_1 : OA = 1 : 3$ және $AB = 12$ см болса, $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрышының периметрін табыңдар.

0.17. $ABCD$ параллелограмының әрбір төбесі арқылы өтетін өзара параллель түзулер қайсыбір α жазықтығын сәйкесінше A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелерінде қиып өтеді және A, B, C, D нүктелері α-ның бір жақ бөлігінде орналасады. 1) $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 5$ м, $CC_1 = 6$ м; 2) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$ болса, DD_1-ді табыңдар.

0.18. $ABCD$ тіктөртбұрышының жазықтығына AK перпендикуляры жүргізілген және K нүктесінен B, C және D нүктелеріне дейінгі қашықтық сәйкесінше 6 см, 9 см және 7 см. AK-ны табыңдар.

0.19. Жазықтықтан 8 см қашықтықта жатқан нүктеден осы жазықтықпен 45° бұрыш жасайтын екі көлбеу жүргізілген. Егер көлбеулердің проекциялары арасындағы бұрыш 120°-қа тең болса, көлбеу табандарының арақашықтығын табыңдар.

0.20. ABC үшбұрышында $AC = BC = 10$ см, $\angle B = 30°$. BD түзуі ABC жазықтығына перпендикуляр және $BD = 5$ см. D нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты және B нүктесінен ADC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

0.21. K нүктесі — ABC үшбұрышының AA_1 медианасының ортасы, O — кеңістіктің кез келген нүктесі. $\overrightarrow{OK}$ векторын $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

0.22. $OABC$ — қыры $\sqrt{2}$-ке тең дұрыс тетраэдр, K — OA кесіндісінің ортасы. $\overrightarrow{BK}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңдар.

0.23. $\vec{m}$, $\vec{n}$ және $\vec{k}$ векторлары $\vec{m} - \vec{n} - \vec{k} = \vec{0}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$, $|\vec{k}| = 7$ шарттарын қанағаттандырады. $\vec{n} \cdot \vec{k} - \vec{m} \cdot \vec{n} - \vec{m} \cdot \vec{k}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

0.24. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары қос-қостан перпендикуляр және $|\vec{a}| = a$. $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{c})$ скалярлық көбейтіндісінің мәнін табыңдар.

C

0.25.* ABC үшбұрышының төбелерінен бірдей қашықтықта жатқан кеңістік нүктелерінің жиынын анықтаңдар.

0.26. Екіжақты бұрыштың әртүрлі жақтарынан алынған A және B нүктелерінен оның қырына AC және BD перпендикулярлары жүргізілген және $AC = BD$. $\angle ABC = \angle BAD$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

0.27. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының диагоналі $2\sqrt{3}$-ке тең. P, Q және R нүктелері — сәйкесінше BB_1, B_1C_1 және C_1D_1 қырларының орталары. Кубты PQR жазықтығымен қиғанда пайда болатын көпбұрыштың периметрін табыңдар.

0.28.* $OABC$ үшбұрышты пирамидасының табанына параллель жүргізілген жазықтық оның OA, OB және OC қырларын сәйкесінше A_1, B_1 және C_1 нүктелерінде қиып өтеді. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының медианаларының қиылысу нүктелері арқылы өтетін түзу оның O төбесі арқылы өтетінін дәлелдеңдер.

0.29. Координаталық жазықтықта берілген ABC үшбұрышының ауданы $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$ формуласымен анықталатынын дәлелдеңдер.

0.30.* Скалярлық көбейтіндінің көмегімен $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$ өрнегінің ең үлкен мәнін табыңдар және ол x-тің қандай мәнінде ең үлкен мәнге ие болады?

I бөлім. КӨПЖАҚТАР

Осы бөлімде сендер геометрияның ең қызықты тақырыптарының бірі көпжақтармен танысасыңдар. Көпжақтарды күнделікті өмірде өте жиі кездестіреміз. Олар — сәулетті ғимараттар. Сол ғимараттар элементтерінің ауданы мен ұзындығын, көлемін есептеуді осы бөлімде оқып-үйренесіңдер.

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

1.1. Көпжақты бұрыш, геометриялық дене туралы түсінік. Көпжақ ұғымы

1.2. Призма және оның элементтері, призма түрлері. Призманың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

1.3. Пирамида, қиық пирамида және олардың элементтері

1.4. Көпжақтардың жазықтықпен қималары. Дұрыс көпжақтар

Нұр-Сұлтан қаласында орналасқан Бейбітшілік және келісім сарайы — Қазақстандағы халықтардың бірлік пен достығының, бейбітшілік пен ынтымақтастығының белгісі. Пирамиданың табаны — өлшемі (62×62)м болатын шаршы, биіктігі де 62 м. Ғимараттың сыртқы беті шыны және тас плиталармен қапталған. Осы бөлімді оқып-үйрену барысында пирамиданың сыртқы бүйір бетінің ауданы қалай есептелінетінін білетін боласыңдар.

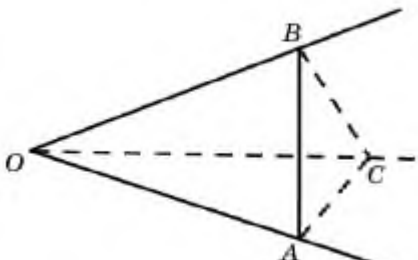
1.1 Көпжақты бұрыш, геометриялық дене туралы түсінік. Көпжақ ұғымы

Бұл тақырыпта көпжақ ұғымымен танысып, соңында:

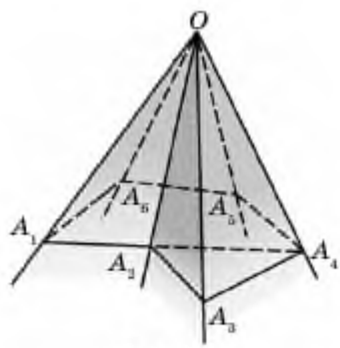
- **көпжақты бұрыш пен геометриялық дене ұғымдарын білесіңдер, оларды жазықтықта кескіндей аласыңдар;**
- **көпжақтың анықтамасын және оның элементтерін білесіңдер;**
- **көпжақтардың элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.**

1.1.1. Үшжақты және көпжақты бұрыштар

Кеңістікте O нүктесінен тараған, бір жазықтық бойында жатпайтын OA, OB және OC сәулелерін қарастырайық. Бұл сәулелер AOB, BOC және COA жазық бұрыштарын анықтайды. Кеңістіктің осы жазық бұрыштармен шектелген бөлігін ***үшжақты бұрыш*** деп атайды (1.1-сурет). O нүктесі үшжақты бұрыштың ***төбесі***, үшжақты бұрыштың AOB, BOC және COA жазық бұрыштары — ***жақтары***, ал осы бұрыштардың қабырғаларын үшжақты бұрыштың ***қырлары*** деп атайды.

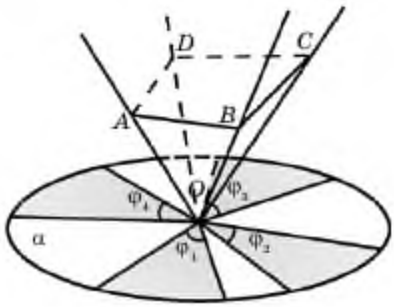


1.1-сурет

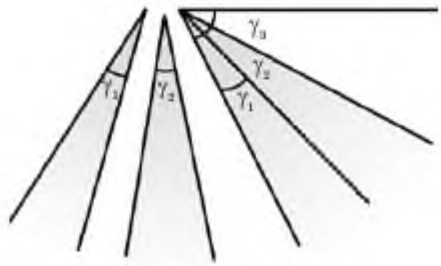


1.2-сурет

Көпжақты бұрыш — ортақ O төбесінен шығатын бұрыштар белгілі бір ретпен алынып, бірінші мен соңғысын қоса есептегенде, әр қос бұрышының ортақ қыры бар n ($n \geqslant 0$) жазық бұрыш. Жақтарының санына байланысты үшжақты, төртжақты, бесжақты және т.с.с. ***n жақты*** бұрыштар қарастырылады. Мысалы, 1.2-суретте алтыжақты бұрыш бейнеленген. Егер көпжақты бұрыш оның әрбір жағы арқылы өтетін жазықтықтың бір жақ бөлігінде орналасса, мұндай көпжақты бұрышты ***дөңес көпжақты бұрыш*** деп атайды. Мысалы, үшжақты бұрыштардың кез келгені дөңес болады, ал жақтарының саны үштен көп әрбір көпжақты бұрыш дөңес бола бермейді. 1.2-суретте көрсетілген алтыжақты бұрыш дөңес емес, себебі оның A_1OA_2 жағы арқылы өтетін жазықтық бұл фигураны ішкі нүктелері арқылы қиып өтеді.



1.3-сурет

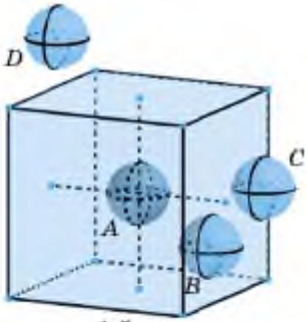


1.4-сурет

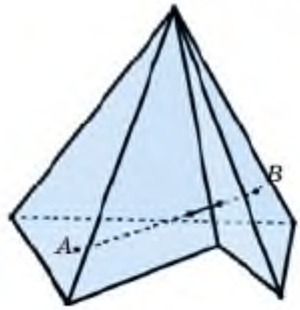
Кез келген дөңес көпжақты бұрыштың төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы 360°-тан кем және әрбір жазық бұрышы өзге жазық бұрыштарының қосындысынан кем. Оны 1.3 және 1.4-суреттерден көруге болады. 1.3-суретте $OABCD$ төртжақты бұрышын әрбір қыры бойынша қиып, α жазықтығына орналастырсақ, бұл төртжақты бұрыштың жақтары α жазықтығын толық жаппайтынын, яғни $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + + \varphi_4 < 360°$ екенін көреміз. 1.4-суретте $\gamma_1 + \gamma_2 < \gamma_3$ теңсіздігін қанағаттандыратын γ_1, γ_2 және γ_3 бұрыштарының қабырғаларын біріктіріп үшжақты бұрыш құрастыру мүмкін емес. Үш жақты бұрыш құрастыру үшін $\gamma_3 < \gamma_1 + \gamma_2$ шарты орындалу керек.

1.1.2. Геометриялық дене түсінігі

Жиындар теориясынан кейбір мәліметтерді еске түсірелік. Мұнда геометриялық фигураларды оның құрамына енетін нүктелердің жиыны ретінде қарастырамыз. А нүктесі мен Φ фигурасы берілсін. Егер барлық нүктелері Φ фигурасына тиісті болатын, центрі A нүктесінде орналасқан шар табылса, онда A нүктесін Φ фигурасының *ішкі нүктесі* деп атайды. Центрі A нүктесінде орналасқан кез келген шардың әрі Ф фигурасына тиісті, әрі Φ-ға тиісті емес нүктелері бар болса, A нүктесі Φ фигурасының шегаралық нүктесі деп аталады. Барлық нүктелері Φ фигурасына тиісті емес, центрі A нүктесінде орналасқан шар табылса, A нүктесі Φ фигурасының *сыртқы нүктесі* деп аталады.



1.5-сурет



1.6-сурет

Φ фигурасын қандай да бір радиусы R-ге тең шар ішіне толық орналастыру мүмкін болса, бұл фигураны ***шектелген* фигура** деп атайды. Φ шектелген фигурасының барлық шегаралық нүктелер жиынын оның ***беті***, Φ фигурасының барлық ішкі нүктелер жиыны мен оның бетінде жатқан нүктелер жиынын ***геометриялық дене*** деп атайды. Мысалы, 1.5-суретте A нүктесі — кубтың ішкі нүктесі, B, C — оның шегаралық нүктелері, D —сыртқы нүкте. Кубтың беті алты квадраттан құралған.

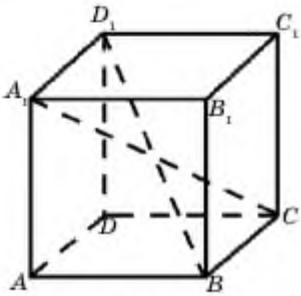
Дененің кез келген екі ішкі нүктесін қосатын кесінді толық осы денеде жатса, бұл денені *дөңес дене* деп атаймыз. Мысалы, төменгі сыныптардан белгілі параллелепипед, үшбұрышты пирамида, цилиндр, куб, шар, конус және т.с.с. фигуралар — дөңес денелер. 1.6-суретте бейнеленген дене дөңес емес, себебі оның ішінде жатқан A және B нүктелерін қосатын AB кесіндісі толығымен осы денеде жатпайды.

1.1.3. Көпжақ ұғымы

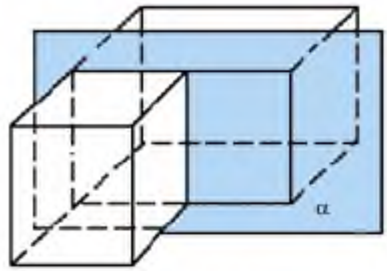
Орта мектепте қарастырылатын геометриялық денелердің ауқымды бөлігін көпжақтар құрайды. ***Көпжақтар*** деп беті санаулы көпбұрыштардан құралған геометриялық денені айтады. Көпжақ бетіндегі әр көпбұрышты оның ***жағы***, осы көпбұрыштың қабырғасын көпжақтың ***қыры*** деп атайды. Көпжақ жағының (көпбұрыштың) төбесін көпжақтың ***төбесі***, ал бір жағына тиісті емес екі төбесін қосатын кесіндіні көпжақтың ***диагоналі*** деп атайды. Мысалы, 1.7-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы кескінделген. Оның 6 жағы, 12 қыры және 8 төбесі бар. A_1C және BD_1 кесінділері — оның диагональдары.

Геометриялық денелер сияқты көпжақтар да дөңес және дөңес емес болып екіге бөлінеді. Егер көпжақтың әрбір екі нүктесін қосатын кесінді осы көпжақта толығымен жатса, бұл көпжақты ***дөңес көпжақ*** деп атайды.

Басқаша айтқанда, егер көпжақ оның әрбір жағы арқылы өтетін жазықтықтың бір жағында орналасса, бұл — дөңес көпжақ. Көпжақтың қайсыбір жағы арқылы өтетін жазықтық оны екі бөлікке бөлсе, бұл көпжақты *дөңес емес көпжақ* деп атайды. Мектеп курсында біздер негізінен дөңес көпжақтарды қарастырамыз.



1.7-сурет



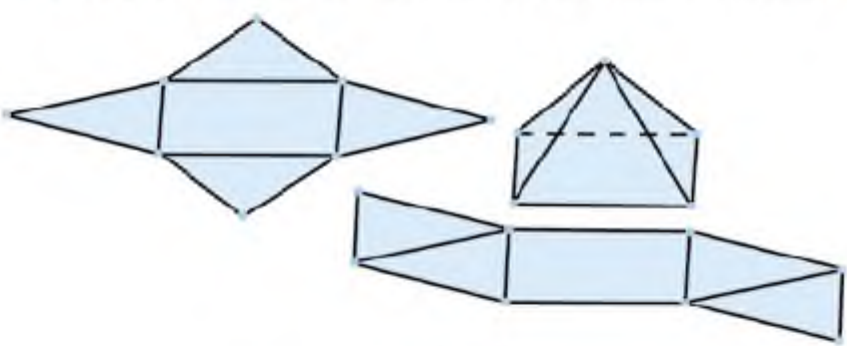
1.8-сурет

Мысалы, 1.8-суретте қарастырылған көпжақ дөңес емес, себебі оның бір жағы арқылы өтетін α жазықтығы көпжақты екі бөлікке бөліп тұр.

Көпжақты оның бірнеше қырлары бойымен қиып, шыққан көпбұрыштардың бірігуін жазықтық бетіне орналастырғанда шыққан фигураны осы көпжақтың ***жазбасы*** деп атайды. Бір көпжақты әртүрлі тәсілдермен қиып, оның әртүрлі жазбаларын алуға болады. Мысалы, 1.9-суретте төртбұрышты пирамиданың әртүрлі жазбалары келтірілген. Көпжақтың барлық жақтарының аудандарының қосындысын оның ***толық бетінің ауданы*** деп атайды. Оны $S_{т.б.}$ арқылы белгілейді. Енді бірнеше мысал қарастыралық.

1-мысал.

Қыры 2 см болатын кубтың толық бетінің ауданын табайық. ▲

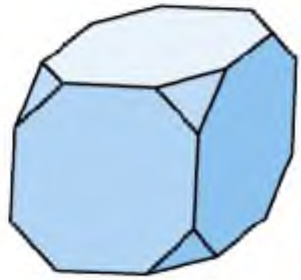


1.9-сурет

Кубтың бір жағының ауданы $(2 \cdot 2)$ см^2 = = 4 см^2. Кубтың осындай өзара тең 6 жағы бар. Сондықтан оның толық бетінің ауданы:

$$S_{т.б.} = 6 \cdot 4 \text{ см}^2 = 24 \text{ см}^2.$$ ■

Жалпы, кез келген көпжақ үшін жоғары математика курсында $n-m+k=2$ теңдігі дәлелденеді (**Эйлер теоремасы**). Мұндағы n — көпжақ төбелерінің, m — қырларының, k — жақтарының саны.



1.10-сурет

2-мысал.

Көпжақтың 14 жағы бар: 8 жағы — үшбұрыш, 6 жағы — сегізбұрыш (1.10-сурет). Көпжақтың төбелер санын анықтау керек.

▲ 8 үшбұрыш пен 6 сегізбұрыш қырларының саны: $8 \cdot 3 + 6 \cdot 8 = 72$. Көпжақтың әр қыры екі жағына ортақ, сондықтан көпжақ қырларының саны 72-нің жартысы 36-ға тең. Эйлер теоремасы бойынша:

$$n-m+k = 2 \Rightarrow n-36+14=2 \Rightarrow n=24.$$

Көпжақтың 24 төбесі бар. ■

• ***Қосымша электрондық ресурстар***

http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/9ec3aaf6-95cd-35b0-b94e-9138604828c7/00145619754673487.htm

1. Үшжақты (көпжақты) бұрыш деген қандай бұрыш?
2. Көпжақты бұрыштың қандай элементтері бар?
3. Көпжақты бұрыштың төбесіндегі жазық бұрыштардың қосындысы қандай болуы қажет? Жауаптарыңды негіздеңдер.
4. Кеңістік фигурасының ішкі (сыртқы, шекаралық) нүктесі деген не?
5. Геометриялық дене деп нені түсінесіңдер?
6. Дөңес дене (көпжақ) деп қандай денелерді (көпжақтарды) айтады?
7. Қандай денелерді көпжақтар деп атайды? Көпжақтардың қандай элементтерін білесіңдер? Мысал келтіріңдер.
8. Көпжақ жазбасы деген не? Мысал келтіріңдер.
9. Көпжақтың толық бетінің ауданы қалай анықталады?

ЕСЕПТЕР

А

Практикалық тапсырма

1.1. Төрт жағы бар көпжақ салыңдар. Оның неше қыры және төбесі бар?

1.2. Қатты қағаздан үшжақты (төртжақты, бесжақты) бұрыш жасаңдар. Оның барлық элементтерін атап көрсетіңдер.

1.3. Қыры 5 см болатын кубтың қайсыбір жазбасын жасаңдар және оның көмегімен куб құрастырыңдар. Жалпы, кубтың неше жазбасы бар? Осы жазбалардың барлық мүмкін түрлерін салып көрсетіңдер.

1.4. Футбол добының беті 20 дұрыс алтыбұрыш, 12 дұрыс бесбұрыштан, барлығы 32 жақтан тұратын көпжаққа ұқсайды (1.11-сурет). Бұл көпжақтың неше төбесі бар?

1.11-сурет

1.5. Төбесіндегі жазық бұрыштарының шамасы 1) 140°, 86° және 38°; 2) 110°, 80° және 42°; 3) 160°, 130° және 82°; 4) 160°, 130° және 80° болатын үшжақты бұрыш құрастыру мүмкін бе?

1.6. Төбесіндегі жазық бұрыштарының шамасы 1) 30°, 80°, 90° және 160°; 2) 150°, 90°, 90° және 20°; 3) 150°, 60°, 50° және 30°; 4) 170°, 100°, 90° және 80° болатын төртжақты бұрыш құрастыру мүмкін бе?

1.7. 6 төбесі және 8 жағы бар көпжақтың неше қыры бар?

1.8. n, m және k көпжақтың сәйкесінше төбелері, қырлары және жақтарының санын білдіреді. Берілген мәліметтер бойынша осы үштіктің белгісіз шамасын табыңдар: 1) $n=4$, $m=6$; 2) $n=8$, $k=6$; 3) $m=18$, $k=8$.

1.9. Кубтың берілген қыры бойынша оның толық бетінің ауданын табыңдар: 1) 3 см; 2) 6 дм; 3) 12 м; 4) 20 см.

1.10. Кубтың қырын 30%-ға ұзартсақ, оның толық бетінің ауданы қанша пайызға артады?

A. 30%; B. 69%; C. 119.7%; D. 169%.

1.11. Кубтың толық бетінің ауданы бойынша оның қырын табыңдар: 1) 24 м²; 2) 54 см²; 3) 150 дм²; 4) 294 мм².

1.12. Қыры 1) 2 см; 2) 4 м; 3) 5 дм; 4) 12 мм болатын дұрыс тетраэдрдің (барлық жақтары дұрыс үшбұрыш болатын үшбұрышты пирамида) толық бетінің ауданын табыңдар.

1.13. Үшжақты бұрыштың төбесіндегі екі жазық бұрыш 45°-қа тең. Осы жазық бұрыштардың жақтары өзара перпендикуляр. Үшінші жазық бұрыштың шамасын табыңдар.

1.14. Төбесі O нүктесінде жатқан $OABC$ үшжақты бұрышының барлық жазық бұрыштары 90°-қа тең. $OA=1$, $OB=1$ және $OC=2$ деп алып, 1) OAB; 2) OBA; 3) OCA; 4) OCB бұрышын табыңдар.

B

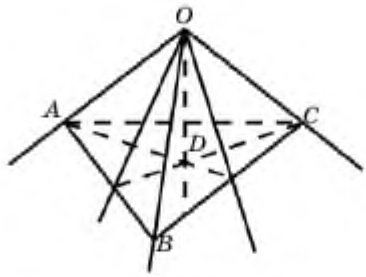
1.15. Жазықтықтан тысқары жатқан нүктеден онымен 60° және 20° жасайтын екі көлбеу жүргізілген. Осы көлбеулердің арасындағы бұрыш қандай болуы мүмкін?

1.16. Тік параллелепипедтің табандары — диагональдары 10 см, 24 см болатын ромбтар. Параллелепипедтің биіктігі 10 см. Параллелепипедтің 1) диагональдарын; 2) толық бетінің ауданын табыңдар.

1.17. $OABC$ үшжақты бұрышында $\angle BOC=90^\circ$, $\angle AOB=\angle AOC=60^\circ$, $OA=a$. 1) A нүктесінен BOC жазықтығына дейінгі қашықтықты; 2) OA қыры мен BOC жазықтығы арасындағы бұрышты табыңдар.

1.18. $OABC$ үшжақты бұрышында $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$, $OA = OB = OC$. ABC және BOC жазықтықтарының өзара перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

1.19. Барлық жазық бұрыштары 90°-қа тең үшжақты бұрыштың ішкі нүктесінен оның жақтарына дейінгі қашықтық 5 см, 7 см және 9 см. Осы нүктеден үшжақты бұрыштың төбесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

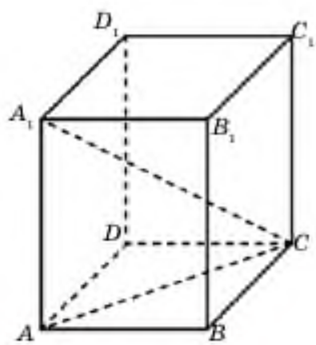


1.12-сурет

1.20. $OABC$ үшжақты бұрышының барлық жазық бұрыштары 90°. Оның ішкі D нүктесінен жақтарына дейінгі қашықтықтар өзара тең. $OD = 4\sqrt{3}$ см деп алып, осы қашықтықты табыңдар (1.12-сурет).

1.21. 1.18-есеп шартын $OA=OB=OC=a$ деп алып, $OABC$ пирамидасының толық бетінің ауданын табыңдар.

1.22. Жақтарының бірі квадрат болып келген тікбұрышты парал-лелепипедтің диагоналі $2a$, квадрат пішінді жағының қабырғасы a деп алып, оның 1) қалған қырларын; 2) толық бетінің ауданын табыңдар (1.13-сурет).



1.13-сурет

▲ **Берілгені:** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тікбұрышты параллелепипед. $ABCD$ — квадрат. $AB = a$, $A_1C = 2a$.

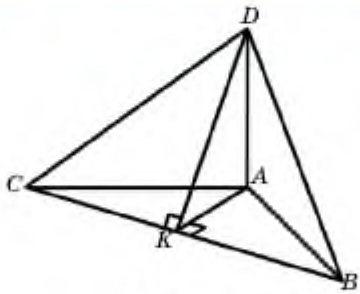
Т/к: 1) өзге қырларын; 2) $S_{т.б}$ — ?

Шешуі. 1) $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ жақтары квадрат болғандықтан, бұл жақтарының қырлары өзара тең және оның шамасы шарт бойынша a-ға тең. $A_1A = BB_1 = CC_1 = DD_1$-ді тапса, жеткілікті.

AC — квадраттың диагоналі, яғни $AC = a\sqrt{2}$. ΔACA_1 — тікбұрышты үшбұрыш. Онда

$$AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = \sqrt{2}a.$$

2) $S_{т.б.} = 2 \cdot S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABB_1A_1} = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot \sqrt{2}a = 2(1 + 2\sqrt{2})a^2$. ■



1.14-сурет

1.23. Үшжақты бұрыштың барлық жазық бұрыштары тік. Үшжақты бұрыштың жақтары қосқостан перпендикуляр екенін көрсетіңдер.

1.24. Үшбұрыштың қабырғалары 10 см, 17 см және 21 см. Оның үлкен бұрышының төбесі A нүктесінен үшбұрыш жазықтығына AD перпендикуляры тұрғызылған, AD=15 см. D нүктесі мен үшбұрыштың үлкен қабырғасының арақашықтығын табыңдар (1.14-сурет).

C

1.25. Үшжақты бұрыштың жазық бұрыштары 45°, 45° және 60°. Жазық бұрыштары 45°-қа тең жақтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

1.26. Дөңес көпжақты бұрыштың іргелес жақтарының арасындағы сүйір бұрыштар саны ең көп дегенде нешеу болуы мүмкін?

1.27. Іргелес жатқан жақтарының аудандары S_1 мен S_2 болатын тікбұрышты параллелепипедтің толық бетінің ауданы мен диагоналін табыңдар. a — бұл жақтардың ортақ қыры.

1.28. Тетраэдрдің бір қыры a, өзге қырлары b. $0 < a < b\sqrt{3}$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

1.29. Тікбұрышты параллелепипедтің төбесі ортақ үш жағының аудандары S_1, S_2 және S_3. Оның қырларын табыңдар.

1.30.* Үшжақты бұрыштың барлық қырларынан бірдей қашықтықта жатқан нүктелер жиынын анықтаңдар.

1.31.* Үшжақты бұрыштың барлық жақтарынан бірдей қашықтықта жатқан нүктелер жиынын анықтаңдар.

1.32. Қыры a-ға тең кубтың диагоналі мен онымен қиылыспайтын қыры арасындағы қашықтықты табыңдар (1.15-сурет).

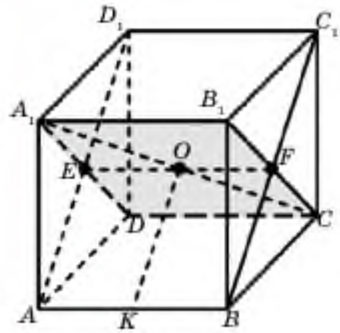
▲ **Берілгені:** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Т/к: A_1C мен AB-ның арақашықтығын.

Шешуі: (A_1B_1CD) және (ABC_1D_1) жазықтықтары өзара перпендикуляр.

Себебі $BF \perp B_1C$, $B_1F \perp EF$ және $BF \perp EF$. Егер $AK = KB$ болса, $OK \| AE \| BF$. Сондықтан $OK \perp (A_1B_1CD)$, демек, $OK \perp A_1C$. Олай болса, OK-ның ұзындығы бізге қажет қашықтық. $OK = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Жауабы: $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. ■



1.15-сурет

Қайталауға арналған жаттығулар

1.33. 1) ABC тікбұрышты үшбұрышының B тік бұрышынан AC гипотенузасына BD биіктігі түсірілген. AB=13, BD=12 болса, ABC үшбұрышының ауданын табыңдар.

2) ABC тікбұрышты үшбұрышының A тік бұрышынан BC гипотенузасына AH биіктігі түсірілген. CH=3, AC=5 болса, ABC үшбұрышының ауданын есептеңдер.

1.2. Призма және оның элементтері, призманың түрлері. Призманың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

Бұл тақырыпта призма және оның элементтері, призманың түрлері, жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандарымен танысып, соңында:

- **призманың анықтамасын, элементтерін, призма түрлерін білесіңдер және оларды жазықтықта кескіндей аласыңдар;**
- **призманың элементтерін табуға есептер шығара аласыңдар;**
- **призманың бүйір және толық бетінің аудандары форму-**

2 – 5173

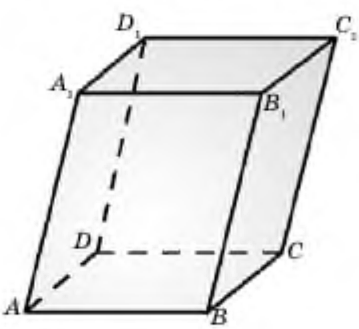
ларын қорытып шығарасыңдар және оларды есептер шығарғанда қолдануды меңгересіңдер;
- **призмалардың жазбаларын жасай аласыңдар.**

1.2.1. Призма және оның элементтері, призманың түрлері

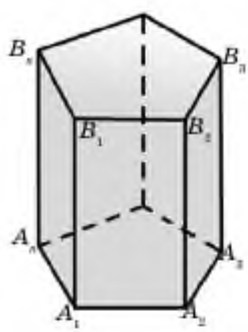
Екі жағы параллель жазықтықтарда жатқан өзара тең n бұрыштар, қалған n жағы параллелограмм болатын көпжақты ***n* бұрышты *призма*** деп атайды. Параллель жазықтықтарда жатқан өзара тең n бұрыштарды призманың ***табандары***, ал параллелограмм болып табылатын басқа жақтарын ***бүйір жақтары***, табаны мен бүйір жақтарының қабырғаларын ***призма қырлары*** (табан қырлары мен бүйір қырлары) деп атайды (1.17-сурет).

Призманың табандары орналасқан параллель α және β жазықтықтары арасындағы қашықтықты оның ***биіктігі*** деп атайды.

Призманың бүйір қырлары табан жазықтығына перпендикуляр болса, оны ***тік призма***; перпендикуляр болмаса, **көлбеу призма** деп атайды. Тік призманың барлық бүйір жақтары — тіктөртбұрыш. Призманы оның табанындағы көпбұрыштың төбелерінің санына байланысты ***n бұрышты призма*** деп атайды. 1.17-суретте бесбұрышты тік призма кескінделген, ал 1.16-суреттегі төртбұрышты призма — көлбеу призма. Табаны дұрыс көпбұрыш болып келген тік призма — ***дұрыс призма***.



1.16-сурет



1.17-сурет

Табаны параллелограмм болатын призманы ***параллелепипед*** деп атайды.

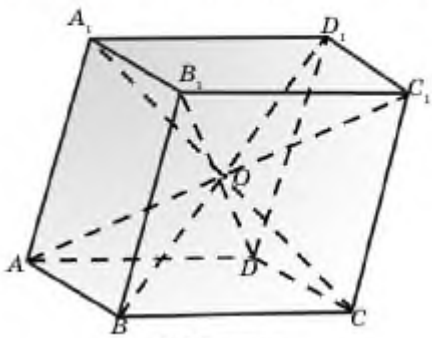
Параллелепипедтің 6 жағы бар және олардың барлығы — параллелограмм. Сондықтан параллелепипедтің қарама-қарсы жақтары — өзара параллель және тең параллелограмдар.

1-теорема

Параллелепипедтің диагональдары бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.

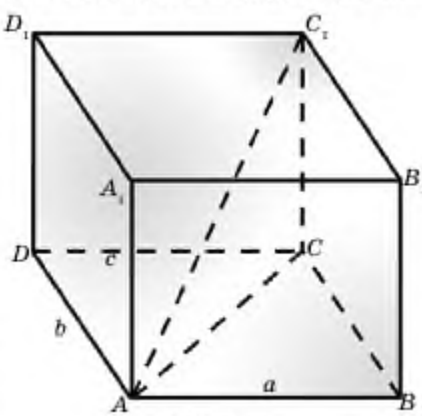
▲ Айталық, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілсін (1.18-сурет). Оның AC_1, BD_1, A_1C және B_1D диагональдары бір нүктеде қиылысатынын көрсетейік.

Шынында да, параллелепипедтің AB, A_1B_1, C_1D_1 және CD қырлары өзара параллель және тең. Осы сияқты AD, BC, B_1C_1 және A_1D_1 қырлары да параллель және тең. Сондықтан A_1BCD_1 және ABC_1D_1 төртбұрыштары параллелограмм және олардың диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді. Демек, A_1BCD_1 параллелограмының A_1C және BD_1 диагональдары O нүктесінде қиылысып, осы нүктеде қақ бөлінеді. Онда ABC_1D_1 параллелограмының BD_1 және AC_1 диагональдары да BD_1-дің ортасы O нүктесінде қиылысып, осы нүктеде қақ бөлінеді. Осы сияқты B_1D диагоналі де O нүктесі арқылы өтіп, осы нүктеде қақ бөлінетіні A_1B_1CD параллелограмынан шығады. Сонымен, параллелепипедтің барлық диагональдары O нүктесі арқылы өтеді және осы нүктеде қақ бөлінеді. Теорема дәлелденді. ■



1.18-сурет

Бүйір қырлары табан жазықтығына перпендикуляр болатын параллелепипедті ***тік параллелепипед*** деп атайды. Тік параллелепипедтің бүйір жақтары тіктөртбұрыштар, табандары кез келген параллелограмм болады. Табаны да тіктөртбұрыш болатын тік параллелепипедті ***тікбұрышты параллелепипед*** деп атайды. 1.19-суретте $ABCD$ параллелограмм болса, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тік параллелепипед; $ABCD$ тіктөртбұрыш болса, тікбұрышты параллелепипед болады. Барлық қырлары өзара тең тікбұрышты параллелепипед ***куб*** деп аталады. Тікбұрышты параллелепипедтің барлық диагональ-



1.19-сурет

дары өзара тең. Тікбұрышты параллелепипед үшін төмендегідей Пифагор теоремасының жалпылама түрі орындалады.

2-теорема

Тікбұрышты параллелепипед диагоналының квадраты оның үш өлшемінің (ені, ұзындығы және биіктігі) квадраттарының қосындысына тең.

▲ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = a$, $AD = b$ және $AA_1 = c$ болсын (1.19-сурет). Онда $AC_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$ теңдігі орындалатынын көрсетейік.

Шынында да, $ABCD$ тіктөртбұрыш болғандықтан,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2.$$

Ал $AA_1 = CC_1 = c$ және ΔACC_1 тікбұрышты үшбұрыш ($CC_1 \perp (ABC)$). Сондықтан $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$ теңдігі орындалады. Теорема дәлелденді. ■

1.2.2. Призманың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

Призманың бүйір жақтарының аудандарының қосындысын призманың ***бүйір бетінің ауданы*** деп атайды.

3-теорема

Тік призманың бүйір бетінің ауданы оның биіктігін табанының периметріне көбейткенге тең.

$$S_{б.б} = h \cdot p.$$

▲ Призманың биіктігі h, табанының периметрі p-ға тең болсын. Онда $S_{б.б} = hp$ формуласы орындалатынын көрсетейік.

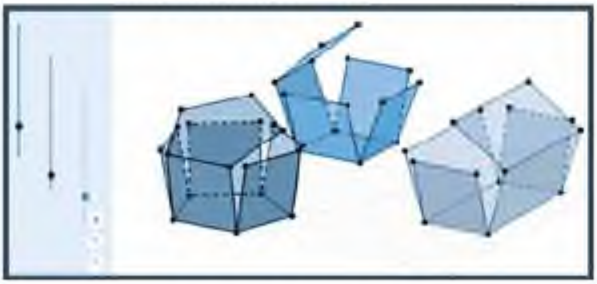
Шынында да, тік призманың бүйір жақтары — тіктөртбұрыштар. Сондықтан призма табанының қабырғасы — тіктөртбұрыштың бір қабырғасы, ал бүйір қыры — екінші қабырғасы (призманың биіктігі) болып табылады (1.17-сурет).

Олай болса,

$$S_{б.б} = A_1A_2 \cdot h + A_2A_3 \cdot h + \ldots + A_nA_1 \cdot h = (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) \cdot h = p \cdot h. ■$$

Призманың толық бетінің ауданы оның бүйір бетінің ауданы мен екі еселенген табан ауданының қосындысына тең: $S_{т.б.} = S_{б.б} + 2S_{таб}$.

Призманың жазбасы дегеніміз — оның барлық жақтарын өлшемдерін өзгертпей бір жазықтыққа көшіру.

Қосымша электронды сілтеме	QR-Code
3D анимацияға сілтеме «Әртүрлі үш призманың жазбасы» – https://geogebra.org/classic/ttsjw3ug 	

1. Қандай көпжақты призма деп атайды? Призманың қандай элементтері бар?
2. Тік призма, көлбеу призма және дұрыс призма деген не?
3. Тік призманың бүйір бетінің ауданы қалай анықталады?
4. Қандай призманы параллелепипед деп атайды?
5. Параллелепипед диагональдарының қандай қасиеті бар? Оны дәлелдеңдер.
6. Қандай параллелепипедті тік параллелепипед, тікбұрышты параллелепипед деп атайды?
7. Пифагор теоремасының жалпылама түрі қалай тұжырымдалады? Оны дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

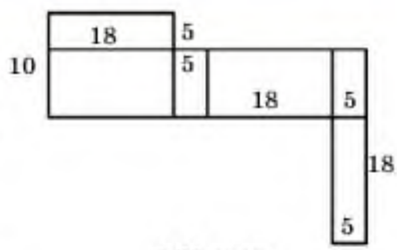
Практикалық тапсырма

1.34. Ағаш немесе қатты қағаздан 1) тік; 2) тікбұрышты; 3) көлбеу параллелепипедтің моделін жасаңдар.

1.35. Қатты қағаздан 1) үшбұрышты; 2) алтыбұрышты дұрыс призманың жазбасын жасап, одан сәйкес призманы құрастырыңдар.

1.36. Кубтың қыры 12-ге тең. Оның толық бетінің ауданы тік призманың толық бетінің ауданына тең. Тік призманың табаны — гипотенузасы 10, бір катеті 6 болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призманың биіктігін табыңдар.

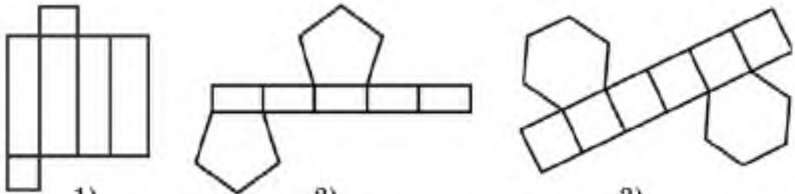
1.37. Көпжақтың түрін жазбасы бойынша анықтап, толық бетінің ауданын есептеңдер (1.20-сурет).



1.20-сурет

1.38. Көпжақты анықтаңдар және суретін салыңдар: 1) көпжақтың жақтары шаршы мен тіктөртбұрыштардан құралған және 12 қыры бар; 2) көпжақтың бес жағы бар, оның екеуі бір-бірі-мен беттесетін үшбұрыштар, ал қалған үшеуі тіктөртбұрыштар; 3) көпжақ алты бірдей квадраттан құралған.

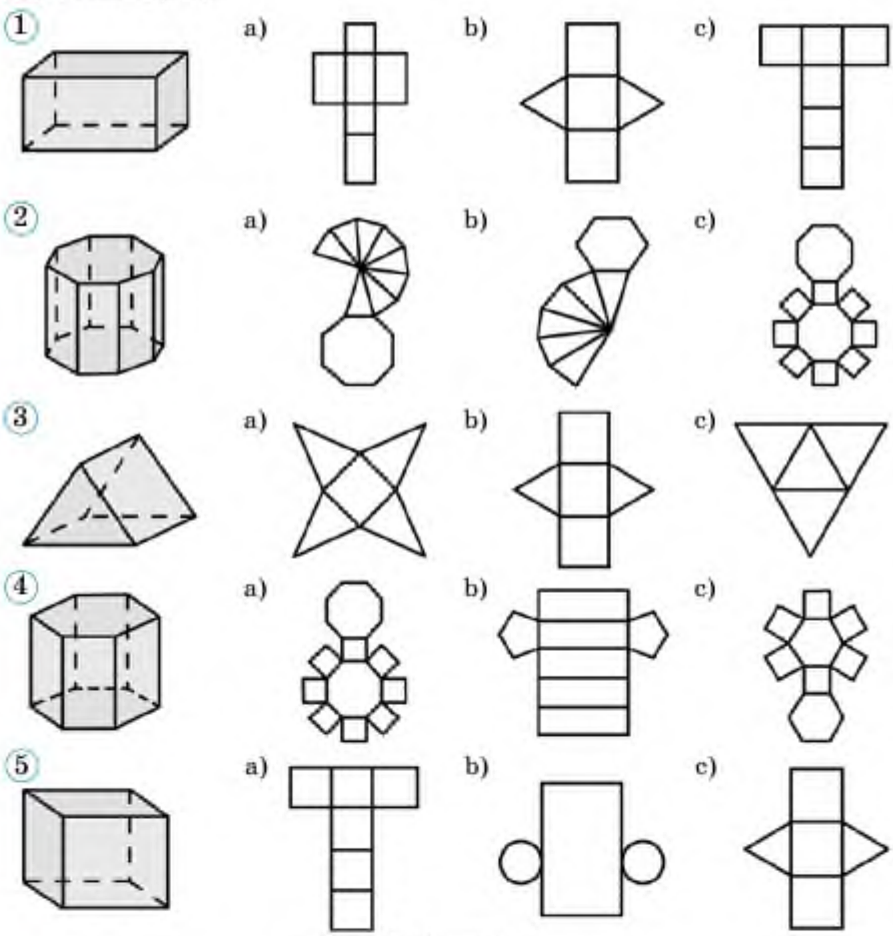
1.39. 1.21-суреттердегі жазбалары бойынша көпжақтарды анықтаңдар. Көпжақтың қанша төбесі, қыры бар?



1) 2) 3)

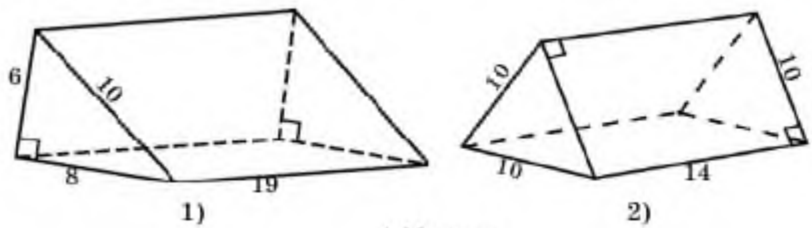
1.21-сурет

1.40. Көпжақтың толық атын және оның жазбасын анықтаңдар (1.22-сурет):



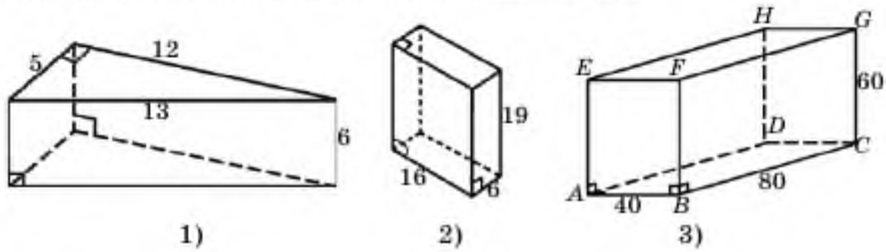
1.22-сурет

1.41. Сызбада көрсетілген өлшемдері бойынша үшбұрышты призмалардың толық бетінің ауданын есептеңдер (1.23-сурет).



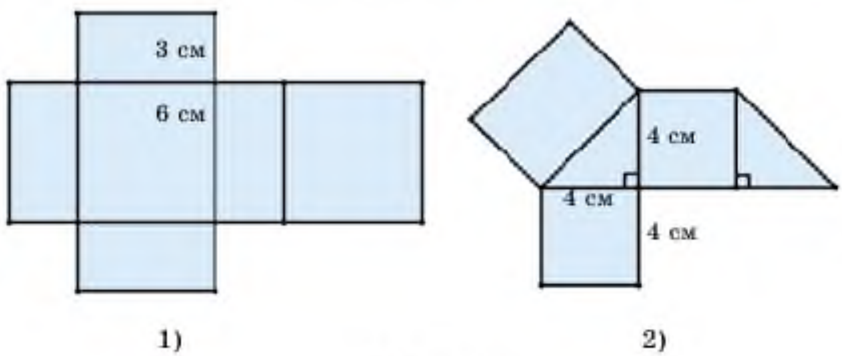
1.23-сурет

1.42. 1.24-суреттегі көпжақтарды анықтап, олардың бүйір бетінің және толық бетінің ауданын есептеңдер.



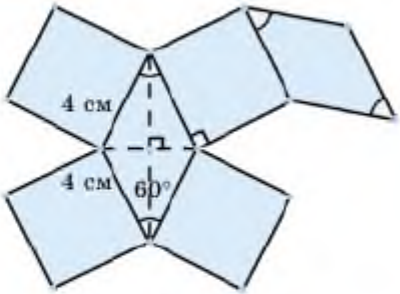
1.24-сурет

1.43. 1.25-суреттегі көпжақтарды анықтап, олардың бүйір бетінің және толық бетінің ауданын есептеңдер.

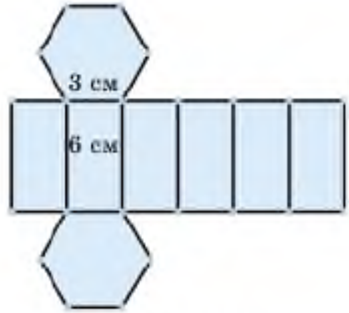


1.25-сурет

1.44. Призманың табаны — сүйір бұрышы $60°$, қабырғасы 4 см болатын ромб. Призманың бүйір жақтары — квадрат. Призма жазбасының ауданы $16\left(4+\sqrt{3}\right)$ см² болатынын көрсетіңдер (1.26-сурет).



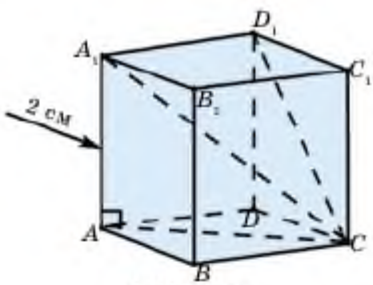
1.26-сурет



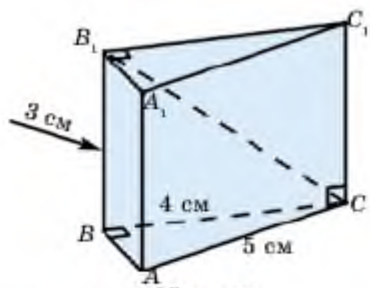
1.27-сурет

1.45. Призманың табаны — қабырғасы 3 см-ге тең дұрыс алтыбұрыш. Биіктігі 6 см призма жазбасының ауданы $27\left(4+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ см² болатынын көрсетіңдер (1.27-сурет).

1.46. Қыры 2 см куб берілген. Оның 1) бүйір жағының диагоналін; 2) диагоналін; 3) **диагональдық қимасының** ауданын; 4) толық бетінің ауданын табыңдар (1.28-сурет).



1.28-сурет



1.29-сурет

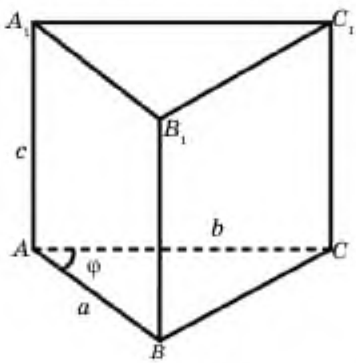
1.47. Тік призманың табаны — катеті 4 см, гипотенузасы 5 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Үлкен катетіндегі бүйір жағының диагоналін және призманың толық бетінің ауданын есептеңдер (1.29-сурет). Призманың биіктігі 3 см.

1.48. Тікбұрышты параллелепипедтің a, b және c өлшемдері бойынша оның диагоналін табыңдар: 1) $a=1$ м, $b=2$ м, $c=2$ м; 2) $a=5$ см, $b=4$ см, $c=10$ см; 3) $a=6$ дм, $b=8$ дм, $c=24$ дм; 4) $a=7$ мм, $b=13$ мм, $c=\sqrt{71}$ мм.

1.49. 1.48-есеп шартында тікбұрышты параллелепипедтің 1) бүйір бетінің ауданын; 2) толық бетінің ауданын; 3) диагональдық қимасының (параллелепипедтің диагоналі және осы диагональмен ортақ төбесі бар бүйір қыры арқылы өтетін жазықтық көмегімен алынған қимасының) ауданын табыңдар.

1.50. Бір төбесінен шығатын үш жағының аудандары бойынша тікбұрышты параллелепипедтің үш өлшемін табыңдар: 1) 30 см^2, 40 см^2, 48 см^2; 2) 21 м^2, 33 м^2, 77 м^2.

1.51. Тік параллелепипед табанының қабырғалары a және b, олардың арасындағы бұрышы φ, бүйір қыры c. Параллелепипедтің бүйір беті мен толық бетінің ауданын табыңдар: 1) $a=2$ см, $b=3$ см, $\varphi=60^\circ$, $c=5$ см; 2) $a=2$ м, $b=5$ м, $\varphi=45^\circ$, $c=6$ м; 3) $a=5$ мм, $b=8$ мм, $\varphi=30^\circ$, $c=10$ мм.



1.30-сурет

1.52. 1.51 - есептің берілгендерін пайдаланып, осы есепті үшбұрышты тік призма үшін шығарыңдар (1.30-сурет).

1.53. Дұрыс төртбұрышты призманың табан ауданы 169 см^2, биіктігі 10 см. Оның бүйір беті мен толық бетінің ауданын табыңдар.

1.54. Дұрыс үшбұрышты призманың табан қыры a, биіктігі h. Призманың толық бетінің ауданын табыңдар: 1) $a=5$ м, $h=8$ м; 2) $a=2\sqrt{3}$ см, $h=4$ см.

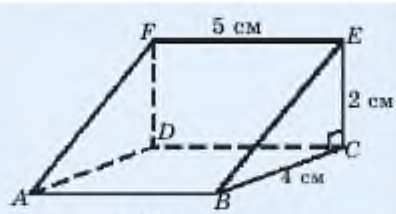
1.55. Дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір қырындағы екіжақты бұрыштың шамасын анықтаңдар.

1.56. Дұрыс призма төбелерінің саны 1) 20-ға; 2) 32-ге; 3) 105-ке тең болуы мүмкін бе? Мүмкін болса, призманың неше қыры мен жағы бар? Жауаптарыңды негіздеңдер.

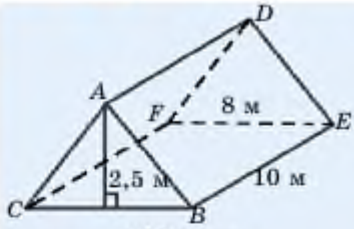
1.57. Кубтың диагоналі d-ны оның қыры a арқылы өрнектеңдер.

Практикалық тапсырмалар (1.58 – 1.59):

1.58. Қыста балаларға арнап 1.31-суретте көрсетілгендей сырғанақ салынды. Сырғанақтың бетіне қатыратын мұздың ауданын анықтаңдар.



1.31-сурет



1.32-сурет

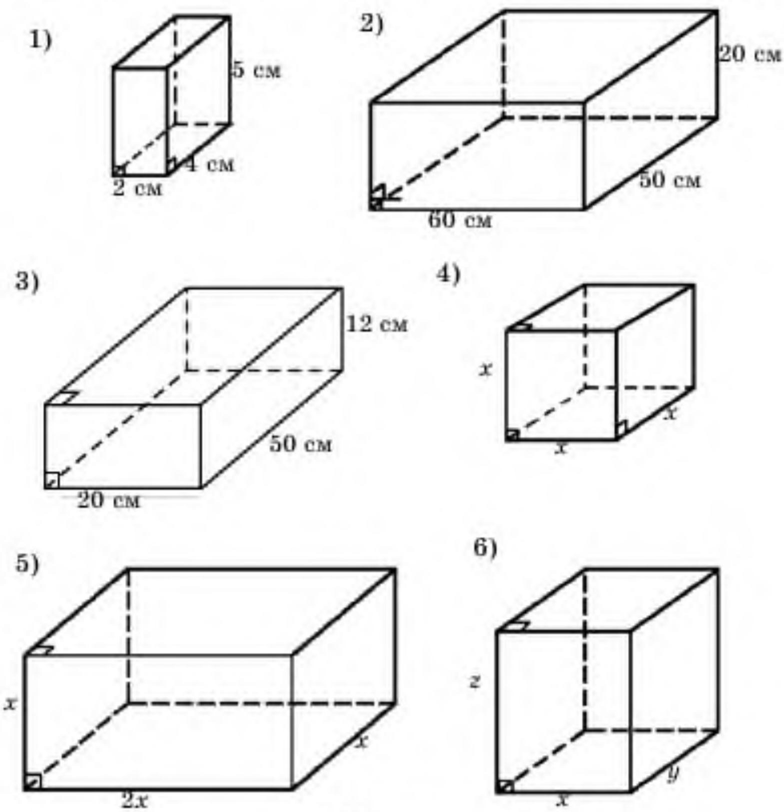
1.59. Үй шатыры 1.32-суретте көрсетілген үлгіге сәйкес салыну жоспарлануда. Шатырдың биіктігі 2,5 м. Үйдің ұзындығы 10 м, ал ені 8 м. Бір шифердің ауданы 2 м². болса, шатырды қаптау үшін қанша шифер алу керек?

B

1.60. Кубтың диагоналі d-ны оның жағының диагоналі d_1 арқылы өрнектеңдер.

1.61. Тікбұрышты параллелепипедтің бүйір қыры 5 см, табан ауданы 360 см², табанының диагоналі 41 см. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

1.62. 1.33-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтің ішіне орналастыруға болатын ең үлкен стерженьнің ұзындығын анықтаңдар:



1.33-сурет

1.63. Тік призманың табаны — ромб. Призманың диагональдары 8 см және 5 см, биіктігі 2 см. Ромбының қабырғасын анықтаңдар.

1.64. Тікбұрышты параллелепипедтің табан қабырғаларының қатынасы 7:24, биіктігі 5 см, бүйір бетінің ауданы 620 см^2. Оның табан қабырғаларын табыңдар.

1.65. Тікбұрышты параллелепипедтің үш өлшемінің қатынасы 3:7:8, бүйір бетінің ауданы 640 см^2. Параллелепипедтің қырларын табыңдар.

1.66. Диагональдары 5 м және 8 м, биіктігі 2 м, ал табан диагональдарының арасындағы бұрышы 60° болатын тік параллелепипед берілген. Параллелепипедтің толық бетінің ауданын табыңдар.

1.67. Дұрыс үшбұрышты призма қырларының әрқайсысы a-ға тең. Оның толық бетінің ауданын табыңдар.

▲ **Берілгені:** $ABCA_1B_1C_1$ — табанында теңқабырғалы үшбұрыш жатқан дұрыс үшбұрышты призма. Призманың қыры a.

Т/к: $S_{т.б.}$ — ?

Шешуі: $\triangle ABC \Rightarrow AB = AC = BC = a \Rightarrow S_{таб} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$P_{таб} = AB + AC + BC = 3a,\ h = AA_1 = a;$

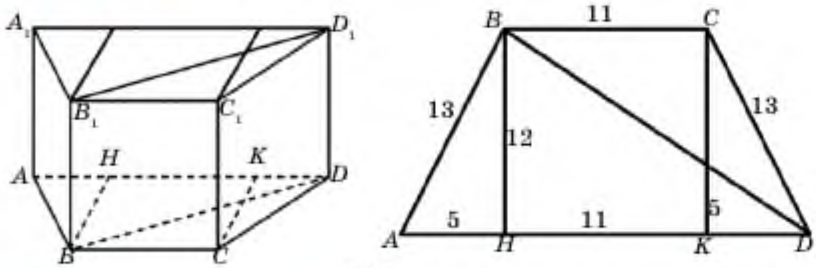
$$S_{т.б} = 2S_{таб} + P_{таб} \cdot h = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a \cdot a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)a^2 = \frac{6+\sqrt{3}}{2}a^2.$$ ■

1.68. Жақтары сүйір бұрышы φ, қабырғасы a-ға тең ромб болатын көлбеу призманың биіктігін табыңдар.

1.69. Куб диагональдық қимасы арқылы екі бөлікке бөлінген. Кубтың қырын 4 см деп алып, шыққан бөліктің жазбасын салыңдар.

1.70. Дұрыс үшбұрышты призманың бүйір жақтары — квадраттар, табанына іштей сызылған шеңбердің радиусы r. Призманың толық бетінің ауданын табыңдар.

1.71. Тік призманың табаны — теңбүйірлі трапеция. Трапецияның бүйір қабырғасы 13 см, табандары 11 см және 21 см. Призманың диагональдық қимасының ауданы 180 см^2. Призманың толық бетінің ауданын табыңдар.



1.34-сурет

▲ **Берілгені:** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тік призма. $ABCD$ — теңбүйірлі трапеция (1.34-сурет). $AD = 21$ см, $BC = 11$ см, $AB = 13$ см, $S_{BDD_1B_1} = 180$ см^2.

Т/к: $S_{т.б.}$ — ?

Шешуі: $\Delta ABH \Rightarrow BH = 12$ см, $\Delta BHD \Rightarrow BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$ см, $S_{BDD_1B_1} = BD \cdot BB_1 = 20 \text{ см} \cdot BB_1 = 180 \text{ см}^2 \Rightarrow BB_1 = 9$ см.

$S_{т.б.} = 2 \cdot S_{ABCD} + (AB + BC + CD + AD) \cdot BB_1 = 2 \cdot \dfrac{11+21}{2} \cdot 12 + (13 + 11 + 13 + 21) \cdot 9 = 906$ см^2. ■

C

1.72. Тікбұрышты параллелепипедтің табан қабырғаларының қатынасы 3:4 қатынасындай, диагональдық қимасының ауданы 15 см^2. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

1.73. Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қырларының арақашықтығы 17 см, 10 см және 21 см. Оның үлкен жағынан қарама-қарсы қырына дейінгі қашықтықты табыңдар.

1.74.* Табаны тікбұрышты үшбұрыш болып келген тік призманың барлық төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктені анықтаңдар.

1.75. Егер тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі мен төбесі ортақ үш қыры α, β және γ-ға тең бұрыштар жасаса, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ теңдігінің орындалатынын көрсетіңдер.

1.76. Егер тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі мен төбесі ортақ үш жағы α, β және γ-ға тең бұрыштар жасаса, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

Қайталауға арналған жаттығулар

1.77. 1) ABC үшбұрышының AB және BC қабырғалары 6-ға тең. AB қабырғасы диаметр болатындай етіп шеңбер жүргізілген. Бұл шеңбер BC қабырғасын D нүктесінде қияды және $BD:DC=2:1$ екені белгілі. AC қабырғасын табыңдар.

2) ABC тікбұрышты үшбұрышының BC катеті диаметр болатындай шеңбер салынған. Ол шеңбер гипотенузаны $AD:DB=1:3$ қатынасы орындалатындай D нүктесінде қияды. C төбесінен гипотенузаға түсірілген биіктік 3-ке тең. BC катетінің ұзындығын табыңдар.

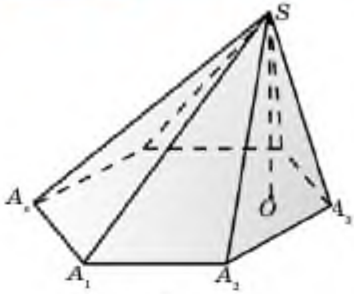
1.3. Пирамида, қиық пирамида және олардың элементтері

Бұл тақырыпта пирамида және оның элементтерімен танысып, соңында:

- **пирамиданың анықтамасын, оның элементтерін, пирамида түрлерін білесіңдер және оларды жазықтықта кескіндей аласыңдар;**
- **пирамида төбесінің табан жазықтығына проекциясының орналасуын анықтап, сәйкес есептеулер жүргізе аласыңдар;**
- **пирамиданың элементтерін табуға есептер шығара аласыңдар;**
- **қиық пирамиданың анықтамасын біліп, оны жазықтықта кескіндей аласыңдар;**
- **пирамиданың (қиық пирамиданың) бүйір және толық бетінің аудандары формулаларын қорытып шығара аласыңдар және оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар;**
- **пирамиданың жазбаларын жасай аласыңдар.**

1.3.1. Пирамида және оның элементтері. Дұрыс пирамида

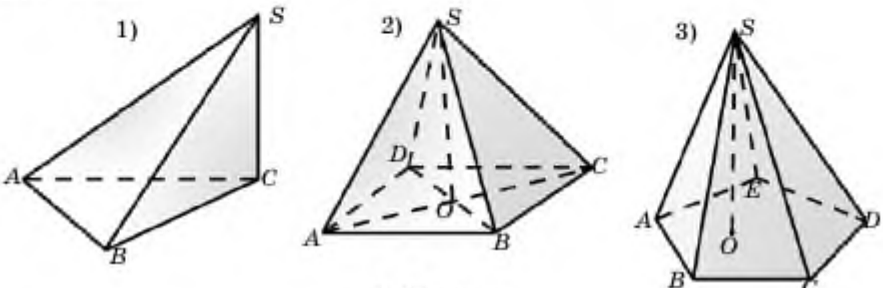
$A_1A_2 \dots A_n$ түрінде берілген n бұрышы мен осы n бұрыш жазықтығында жатпайтын S нүктесін қарастырайық. S нүктесін берілген көпбұрыш төбелерімен қоссақ, SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 үшбұрыштарын аламыз. Кеңістіктің осы үшбұрыштармен және берілген $A_1A_2 \dots A_n$ көпбұрышымен шектелген бөлігін ***пирамида*** деп атайды. S нүктесін пирамиданың ***төбесі***, берілген $A_1A_2 \dots A_n$ көпбұрышын ***табаны***, SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 үшбұрыштарын



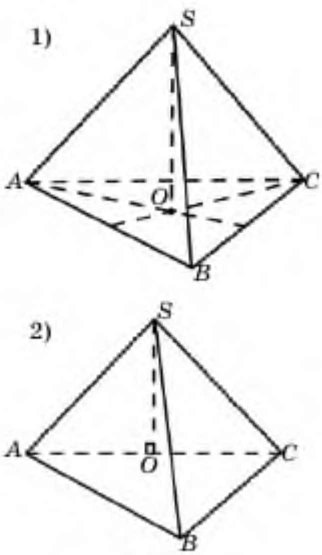
1.35-сурет

бүйір жақтары, $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ кесінділерін пирамиданың ***бүйір қырлары*** деп атап, бұл пирамиданы $SA_1A_2 \ldots A_n$ арқылы белгілейді (1.35-сурет).

Пирамиданы оның табанындағы көпбұрыштың төбелерінің санына байланысты ***n бұрышты пирамида*** деп те атайды. Мысалы, 1.36-суретте сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты және бесбұрышты пирамидалар кескінделген. Пирамиданың төбесінен табан жазықтығына түсірілген перпендикулярды оның ***биіктігі*** деп атайды.



1.36-сурет

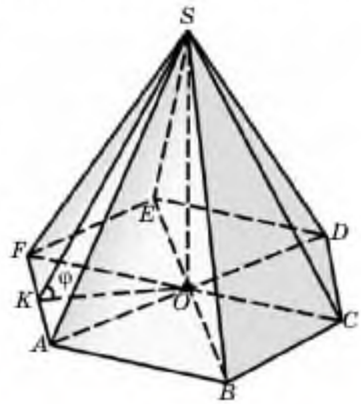


1.37-сурет

Пирамиданың жазықтықтағы кескінін дұрыс салу үшін оның биіктігінің табаны қай нүктеге түсетінін білу өте маңызды. Мысалы, 1.36-суреттегі үшбұрышты пирамида биіктігінің табаны ABC үшбұрышының C төбесіне, ал төртбұрышты пирамиданың биіктігі пирамида табанының диагональдарының қиылысу нүктесіне түсіп тұр. 1.37-суретте бір қарағанда сыртқы пішіндері бірдей екі үшбұрышты пирамида кескінделген. Бұл пирамидалардың біріншісінде биіктіктің табаны ABC үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесінде болса, екіншісінде биіктіктің табаны AC қабырғасының ортасында жатады. Сондықтан олар әртүрлі пирамидалар.

Пирамиданың табаны дұрыс көпбұрыш болып, биіктігінің табаны оның табанындағы көпбұрыштың центрімен беттессе, мұндай пирамидаларды ***дұрыс пирамидалар*** деп атайды. Мысалы, 1.37, 1)-суретте үшбұрышты және 1.36, 2)-суретте төртбұрышты дұрыс пирамидалар, 1.38-суретте дұрыс алтыбұрышты пирамида кескінделген. Дұрыс пирамидалардың бүйір қырлары өзара тең, себебі олардың табан жазықтығындағы проекциялары тең (1.38-суретте $AO = BO = CO = DO = EO = FO$). Сондықтан дұрыс пирамидалардың бүйір жақтары өзара тең теңбүйірлі үшбұрыштар болады.

Дұрыс пирамиданың бүйір жағының биіктігін оның ***апофемасы*** деп атайды. 1.38-суретте $SK \perp AF$, яғни SK кесіндісі — SAF жағының апофемасы.



1.38-сурет

4-теорема

Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның апофемасы мен табанының жарты периметрінің көбейтіндісіне тең:

$$S_{б.б.} = l \cdot p.$$

l — апофема, p — жарты периметр.

▲ Дұрыс пирамиданың апофемасы l, табанындағы дұрыс көпбұрыштың қабырғасы a болса (1.38-сурет, $SK = l$, $AF = a$), пирамиданың SAF жағының ауданы $\frac{1}{2}a \cdot l$-ге тең. Дұрыс пирамиданың бүйір беті осындай n үшбұрыштан құралған және табанының жарты периметрі $\frac{na}{2}$, демек,

$$S_{б.б.} = n \cdot \frac{1}{2}al = l \cdot \frac{na}{2} = lp. \blacksquare$$

Дұрыс пирамидалардың бүйір бетінің ауданын оның ортогональ проекциясы ауданының формуласымен де анықтауға болады.

Шынында да, 1.38-суретте OAF үшбұрышы — SAF жағының ортогональ проекциясы. Осы үшбұрыштар арасындағы екіжақты бұрыштың шамасы φ-ге тең болса, $S_{OAF} = S_{SAF} \cdot \cos\varphi$ немесе $S_{SAF} = \dfrac{S_{OAF}}{\cos\varphi}$ теңдігі орындалады. $S_{б.б.} = n \cdot S_{SAF}$ және табан ауданы $S_т = n \cdot S_{OAF}$ болғандықтан, $S_{б.б.} = n \cdot S_{SAF} = n \cdot \dfrac{S_{OAF}}{\cos\varphi} = \dfrac{S_т}{\cos\varphi}$ формуласын аламыз. Сонымен,

$$S_{б.б.} = \frac{S_т}{\cos\varphi}.$$

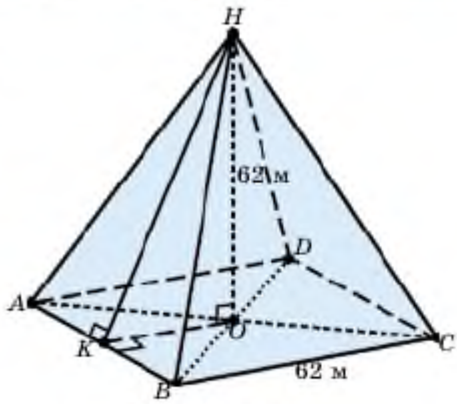
Шығармашылық есеп

Нұр-Сұлтан қаласында орналасқан Бейбітшілік және келісім сарайы — Қазақстанда бірлік пен достықтың, бейбітшілік пен ынтымақтастықтың белгісі. Пирамида табаның өлшемі (62×62) м, биіктігі 62 м. Ғимараттың сыртқы беті шыны және тас плиталармен қапталған. Пирамиданың сыртқы ауданын, яғни бүйір бетінің ауданын есептеу керек (1.39-сурет).

▲ Алдымен пирамиданың апофемасын есептеп аламыз: $BC = 62 \Rightarrow OK = \dfrac{62}{2}$. $\Delta HKO \Rightarrow \angle O = 90°$. Пифагор теоремасы бойынша

$$HK = \sqrt{HO^2 + OK^2} =$$

$$= \sqrt{62^2 + \left(\frac{62}{2}\right)^2} = \sqrt{4805}.$$



1.39-сурет

Пирамиданың табаны — квадрат, жарты периметрі

$$p = \frac{62 \cdot 4}{2} = 124 \text{ м}.$$

4-теорема бойынша

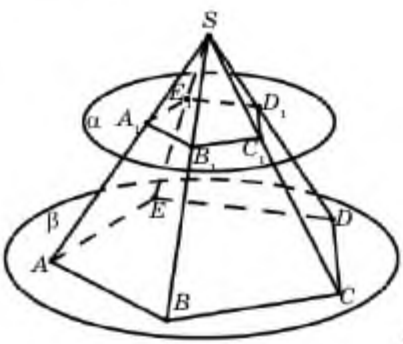
$$S_{б.б.} = l \cdot p = \sqrt{4805} \cdot 124 = 8595{,}4 \text{ м}^2.$$

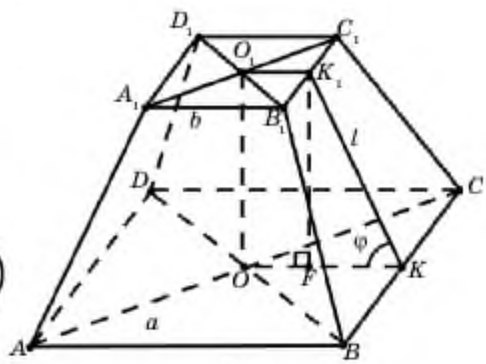
Жауабы: Бейбітшілік және келісім сарайының сыртқы ауданына 8595,4 м² әйнек және тас плиталар жұмсалған. ■

1.3.2. Қиық пирамида

n бұрышты пирамиданы табанына параллель жазықтықпен қиып өтсек, нәтижесінде берілген пирамидадан төменгі және жоғарғы жақтары ұқсас n бұрыштар, бүйір жақтары трапециялар болатын көпжақ алынады. Алынған көпжақты *қиық пирамида* деп атайды.

1.40, 1-суретте $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ бесбұрышты қиық пирамида кескінделген. Мұнда α және β жазықтықтары өзара параллель. $ABCDE$ және $A_1B_1C_1D_1E_1$ бесбұрыштары қиық пирамиданың ***табандары***, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 — бүйір қырлары, ABB_1A_1, BCC_1B_1, ..., EAA_1E_1 трапециялары қиық пирамиданың бүйір жақтары болады. Табан жазықтықтарының арақашықтығы қиық пирамиданың ***биіктігі*** деп аталады.





1.40-сурет

Қиық пирамида дұрыс пирамиданың бөлігі болса, оны ***дұрыс қиық пирамида*** деп атайды. Дұрыс қиық пирамиданың апофемасы дегеніміз толық пирамида апофемасының бөлігі. Ол қиық пирамида табандарының жазықтықтарымен шектелген. 1.40,2-суретте төртбұрышты дұрыс қиық пирамида кескінделген. Дұрыс қиық пирамиданың табандарының жарты периметрлері сәйкесінше p_1 (кіші табанының) және p_2 (үлкен табанының) болса, дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы

$$S_{б.б.} = (p_1 + p_2) \cdot l$$

формуласымен анықталатынын көрсету қиын емес. Мұндағы l — апофема. Үлкен табанындағы екіжақты бұрыштың шамасы φ болса, дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын

$$S_{б.б.} = \frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi}$$

формуласымен анықтайды. Мұндағы S_2 — үлкен табанының ауданы, S_1 — кіші табанының ауданы.

▲ Бізге белгілі: $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $KK_1 = l$. Демек, $O_1K_1 = OF = \frac{b}{2}$, $OK = \frac{a}{2}$ және $FK = \frac{a-b}{2}$. KFK_1 тікбұрышты үшбұрышының φ бұрышының косинусы:

$$\cos\varphi = \frac{FK}{KK_1} = \frac{a-b}{2l}.$$

Енді берілген қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын анықтайық:

$$S_{б.б.} = 4 \cdot S_{AA_1B_1B} = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot l = 2l \cdot (a+b).$$

1.40, 2-суреттегі қиық пирамиданың табан аудандарын анықтаймыз:

$$S_2 = S_{ABCD} = a^2, \qquad S_1 = S_{A_1B_1C_1D_1} = b^2.$$

Косинус φ бұрышын қолданып, формуланың оң жағының шешімін жазайық:

$$\frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi} = \frac{a^2 - b^2}{\frac{a-b}{2l}} = \frac{(a-b)(a+b)\cdot 2l}{(a-b)} = 2l \cdot (a+b).$$

Демек,

$$S_{б.б} = \frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi}. \blacksquare$$

1. Қандай көпжақты пирамида деп атайды? Оның элементтерін атап көрсетіңдер.
2. Қандай пирамиданы дұрыс пирамида деп атайды?
3. Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданын қандай формулалармен анықтайды?
4. Қиық пирамида деген не? Оның элементтерін атап көрсетіңдер.
5. Дұрыс қиық пирамида деген не?
6. Дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын қандай формулалармен есептейді? Оларды дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

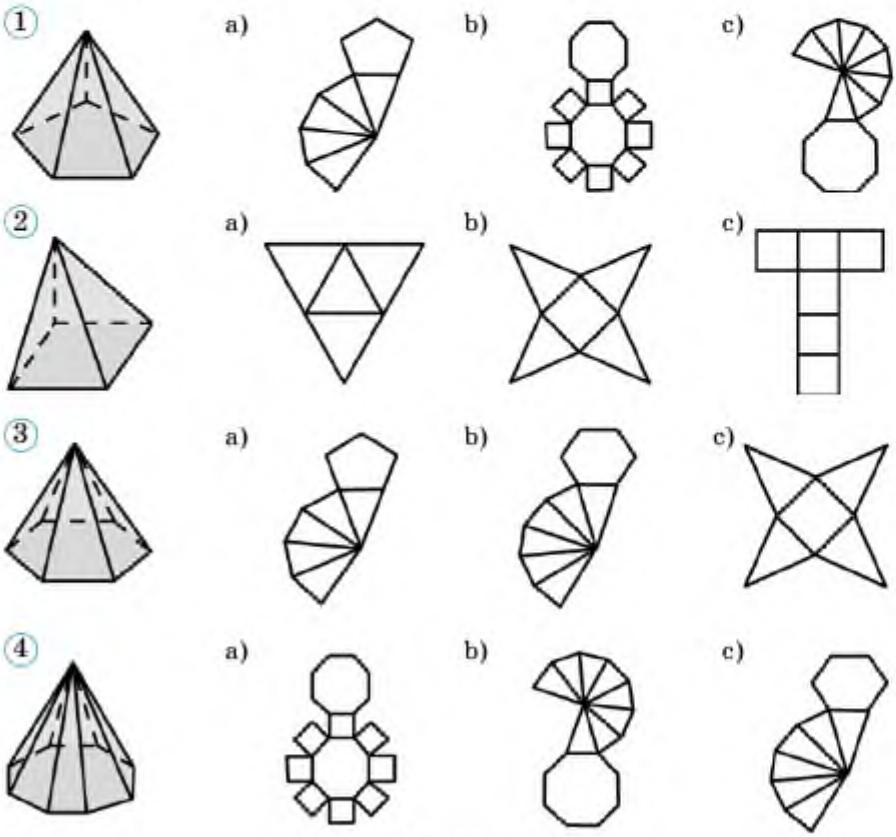
А

Практикалық тапсырма

1.78. Қатты қағаздан немесе өзге материалдардан дұрыс 1) үшбұрышты; 2) төртбұрышты пирамиданың моделін жасаңдар.

1.79. Қатты қағаздан дұрыс алтыбұрышты 1) пирамиданың; 2) қиық пирамиданың жазбасын жасап, одан сәйкес алтыбұрышты пирамиданы және қиық пирамиданы құрастырыңдар.

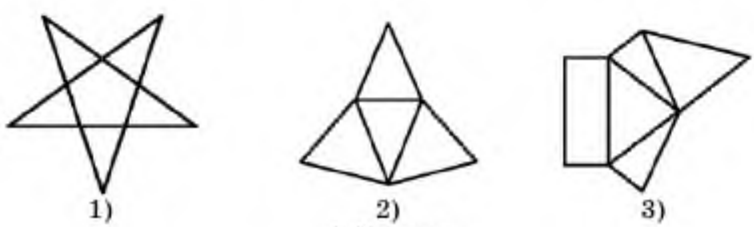
1.80. Пирамидалардың толық атын және оның жазбасын анықтаңдар (1.41-сурет):



1.41-сурет

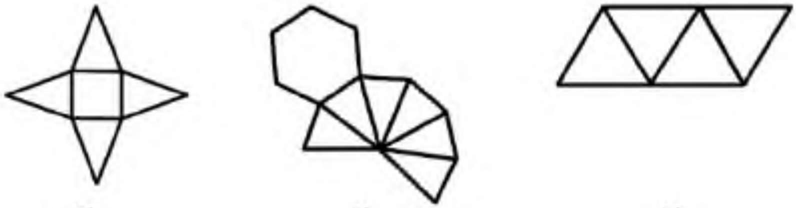
1.81. 1.42-суреттегі жазбалары бойынша көпжақтарды анықтаңдар.

1.82. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың төбесіндегі жазық бұрышы 1) 20°; 2) 30°; 2) 60°; 3) 70 болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.



1.42-сурет

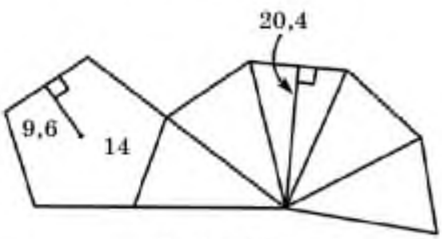
1.83. 1.43-суреттегі жазбалары бойынша көпжақтарды анықтаңдар.



1) 2) 3)

1.43-сурет

1.84. Қырларының саны 1) 8; 2) 13; 3) 98; 4) 127-ге тең пирамида табыла ма? Табылса, ол неше бұрышты пирамида болады? Жауаптарыңды негіздеңдер.



1.44-сурет

1.85. 1.44-суреттегі көпжақты анықтап, оның бүйір бетінің және толық бетінің ауданын есептеңдер.

1.86. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табан қабырғасы a, апофемасы l. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар: 1) a=3 см, l=4 см; 2) a=8 м, l=7 м.

1.87. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табанындағы екіжақты бұрыш φ, табан қабырғасы a деп алып, пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар: 1) $\varphi = 45°$, $a = 3\sqrt{2}$ см; 2) $\varphi = 60°$, a=4 м.

1.88. 1.86-есепті дұрыс төртбұрышты пирамида үшін шығарыңдар.

▲ **Берілгені:** $PABCD$ — дұрыс төртбұрышты пирамида. Оның $ABCD$ табаны — қабырғасы a-ға тең квадрат, пирамиданың апофемасы l.

Т/к: $S_{б.б}$ — ? 1) a = 3 см, l = 4 см; 2) a = 8 м, l = 7 м.

Шешуі: $S_{б.б} = \frac{1}{2} P_{таб} \cdot l \Rightarrow P_{таб} = P_{ABCD} = 4a$.

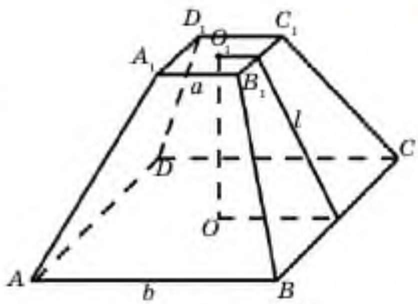
1) $S_{б.б} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ см².

2) $S_{б.б} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 = 112$ м².

Жауабы: 1) $S_{б.б} = 24$ см²,

2) $S_{б.б} = 112$ м². ■

1.89. 1.87-есепті дұрыс төртбұрышты пирамида үшін шығарыңдар.



1.45-сурет

1.90. Екі бүйір жағы табанына перпендикуляр болатын 1) үшбұрышты; 2) төртбұрышты пирамида салыңдар. Оның биіктігінің табанын анықтаңдар.

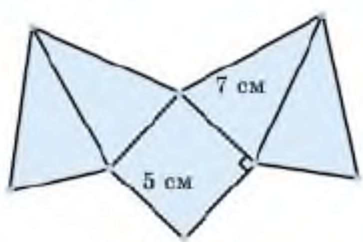
1.91. Табаны теңбүйірлі трапеция, биіктігі трапецияның диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтетін пирамиданы салыңдар.

1.92. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары a және b, l — апофема. Қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар: 1) a=3 см, b=5см; l=4 см; 2) a=8 м, b=12м; l=5 м (1.45-сурет).

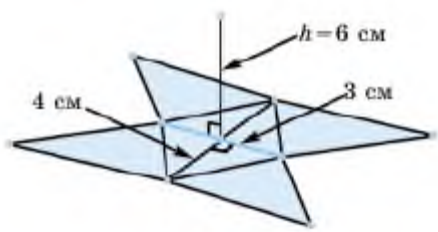
1.93. 1.92-есепті дұрыс үшбұрышты қиық пирамида үшін шығарыңдар.

1.94. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табан қабырғасы 8 м, бүйір қыры табан жазықтығымен 60°-қа тең бұрыш жасайды. Пирамиданың 1) бүйір қырын; 2) бүйір бетінің ауданын табыңдар.

1.95. Пирамида табаны — қабырғалы 5 см-ге тең квадрат. Бүйір қыры 7 см болса, оның жазбасының ауданы $5\left(5+\sqrt{171}\right)$ см^2 болатынын көрсетіңдер (1.46-сурет).

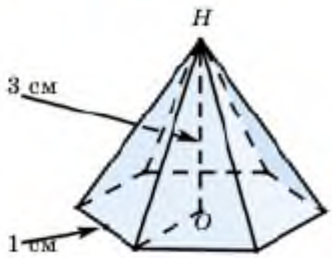


1.46-сурет

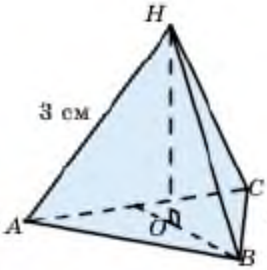


1.47-сурет

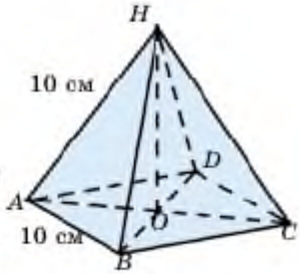
1.96. Пирамиданың табаны — диагональдары 6 см және 8 см болатын ромб. Пирамиданың биіктігі 6 см. Пирамида жазбасының ауданы $8\left(3+\sqrt{305}\right)$ см^2 болатынын көрсетіңдер (1.47-сурет).



1.48-сурет



1.49-сурет



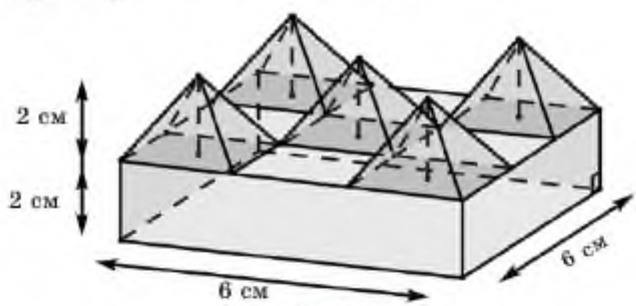
1.50-сурет

1.97. Пирамиданың табаны — қабырғасы 1 см болатын дұрыс алтыбұрыш. Пирамиданың биіктігі 3 см. Пирамиданың толық бетінің ауданы $S_{т.б.} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{13})$ см² болатынын көрсетіңдер (1.48-сурет).

1.98. Қырлары 3 см болатын дұрыс тетраэдр берілген. Тетраэдрдің 1) биіктігін; 2) толық бетінің ауданын табыңдар (1.49-сурет).

1.99. Пирамиданың табаны квадрат және барлық қырлары өзара тең және 10 см. Пирамиданың толық бетінің ауданы $S_{т.б.} = 25\left(4+\sqrt{3}\right)$ см² болатынын көрсетіңдер (1.50-сурет).

1.100. Бес пирамида және бір тікбұрышты параллелепипедтен құрастырылған фигура 1.51-суретте көрсетілген. Параллелепипедтің табаны — қыры 6 см-ге тең квадрат. Параллелепипедтің және пирамиданың биіктіктері 2 см. Көпжақтың толық бетінің ауданы $20\left(5+\sqrt{5}\right)$ см² екенін көрсетіңдер.



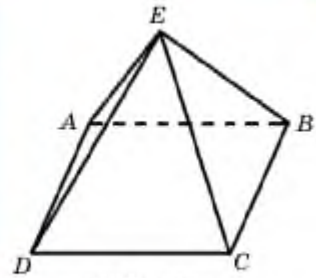
1.51-сурет

B

1.101. Дұрыс үшбұрышты пирамида табанының қабырғасы 6 см, биіктігі $\sqrt{22}$ см. 1) Пирамиданың апофемасын; 2) табанындағы екіжақты бұрышын; 3) бүйір қырын; 4) бүйір қыры мен табан жазықтығы арасындағы бұрышты табыңдар.

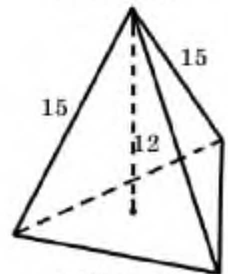
Практикалық тапсырма

1.102. Үйдің шатыры 1.52-суретте көрсетілгендей салынған. Шатырдың бүйір жақтары — қабырғасы 4 метрге тең дұрыс үшбұрыштар. Шатырдың биіктігін анықтаңдар.



1.52-сурет

1.103. Үшбұрышты пирамиданың табаны — дұрыс үшбұрыш, биіктігі 12 см, бүйір қыралы 15 см. Пирамида табанының қабырғасын анықтаңдар (1.53-сурет).



1.53-сурет

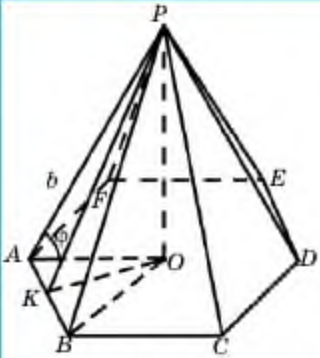
1.104. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табан қабырғасы 6 м, апофемасы 5 м. 1) Пирамиданың биіктігін; 2) табанындағы екіжақты бұрышын; 3) бүйір қырын; 4) бүйір қыры мен табаны арасындағы бұрышты; 5) төбесіндегі жазық бұрышты табыңдар.

1.105. Төртбұрышты пирамиданың табаны теңбүйірлі трапеция, оған сырттай сызылған шеңбердің центрі трапецияның үлкен табанында орналасқан. Пирамиданың бүйір қырлары өзара тең деп алып, оны салыңдар. Биіктігінің табанын анықтаңдар.

1.106. 1.105-есепте шеңбердің радиусы мен трапецияның кіші табаны 6 см, пирамиданың биіктігі 8 см деп алып, оның толық бетінің ауданын табыңдар. Трапецияның үлкен қабырғасындағы пирамиданың екіжақты бұрышының шамасы қандай?

1.107. Пирамиданың табаны — қабырғалары 3 см және 7 см, бір диагоналі 6 см болатын параллелограмм. Пирамиданың биіктігі 4 см және ол параллелограмның диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтеді. Пирамиданың 1) бүйір қырларын; 2) толық бетінің ауданын табыңдар.

1.108. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қыры b және ол табан жазықтығымен φ бұрыш жасайды. Пирамиданың 1) биіктігін; 2) табанына сырттай сызылған шеңбердің диаметрін; 3) табан қабырғасын; 4) апофемасын; 5) бүйір бетінің ауданын табыңдар.



1.54-сурет

▲ **Берілгені:** $PABCDEF$ — дұрыс алтыбұрышты пирамида.

$AP = b$, $\angle PAO = \varphi$ (1.54-сурет).

Т/к: 1) PO — ? 2) AD — ? 3) AB — ? 4) PK — ? 5) $S_{б.б.}$ — ?

▲ **Шешуі:** 1) $\Delta APO \Rightarrow PO = AP \cdot \sin\varphi = b \cdot \sin\varphi$.

2) $AO = b \cdot \cos\varphi \Rightarrow AD = 2b \cdot \cos\varphi$.

3) ΔABO — тең қабырғалы.

4) $AB = AO = b \cdot \cos\varphi$.

$$OK = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}b\cos\varphi.$$

$$\Delta POK \Rightarrow PK = \sqrt{KO^2 + PO^2} = \sqrt{\frac{3}{4}b^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \frac{b}{2}\sqrt{4 - \cos^2\varphi}.$$

5) $S_{б.б.} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot PK \cdot AB = 1{,}5b^2\cos\varphi\sqrt{4-\cos^2\varphi}$. ■

1.109. Пирамиданың төбесі кубтың жоғарғы жағының центрінде, табанының төбелері кубтың төменгі жағы қабырғаларының орталарында орналасқан. Кубтың қырын a деп алып, пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

1.110. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табан қабырғалары 3 см және 5 см, биіктігі 2 см. Қиық пирамиданың диагоналін табыңдар.

1.111. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамиданың табан қабырғалары 2 см және 6 см, бүйір жағы мен үлкен табаны арасындағы бұрыш 60°. Оның биіктігін табыңдар.

1.112. Қиық пирамиданың табан периметрлерінің қатынасы 13:17-ге тең. Биіктіктің ортасы арқылы өтетін табандарына параллель жазықтық оны периметрі 45 см болатын көпбұрышты бойлай қиып өтеді. Қиық пирамида табандарының периметрін табыңдар. Бұл неше бұрышты қиық пирамида болуы мүмкін?

1.113.* Бүйір қырлары өзара тең үшбұрышты қиық пирамиданың табандары — тікбұрышты үшбұрыштар. Пирамиданың гипотенузалар арқылы өтетін бүйір жағы табан жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

1.114. Пирамиданың табаны — теңбүйірлі трапеция. Трапецияның биіктігі 5 см, табандары 6 см және $4\sqrt{6}$ см. Пирамиданың бүйір қырлары өзара тең және ол 13 см. Пирамиданың биіктігін анықтаңдар.

1.115. Пирамиданың табаны — квадрат. Пирамиданың бір бүйір қыры квадраттың қабырғасына тең және табан жазықтығына перпендикуляр. Ең үлкен бүйір қыры 12 см. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

1.116. Қиық пирамиданың табаны — қабырғасы 4 және 2 болатын дұрыс үшбұрыштар. Қиық пирамиданың бүйір қыры 2 болса, оның биіктігі мен апофемасын табыңдар.

C

1.117. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамидаға бір жағы қиық пирамиданың кіші табанымен беттесетіндей, ал оған қарама-қарсы жағы үлкен табанында жататындай етіп, іштей куб сызылған. Кубтың қыры a, қиық пирамиданың кіші табанының қабырғасы үлкен табанының қабырғасынан 2 есе кем. Қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

1.118. n бұрышты пирамиданың барлық жазық бұрыштарының қосындысын табыңдар.

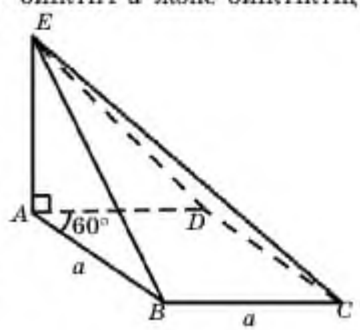
1.119. Дұрыс n бұрышты пирамиданың бүйір жақтары табан жазықтығымен φ бұрыш жасайды. Пирамиданың бүйір қыры мен табаны арасындағы бұрышты табыңдар.

1.120. Қиық пирамиданың табандарының аудандары S_1 және S_2. Оның биіктігінің ортасы арқылы табандарына параллель өтетін жазықтық пен қиық пирамиданың қиылысуынан шығатын көпбұрыштың ауданын табыңдар.

1.121. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табан қабырғасы a, іргелес екі бүйір жағы арасындағы бұрыш φ. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

1.122. Пирамиданың табаны — сүйір бұрышы 60°-қа тең ромб. Ромбының қабырғасы мен пирамиданың биіктігі a және биіктіктің табаны ромбының сүйір бұрышының төбесімен беттеседі. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар (1.55-сурет).

1.123. Пирамиданың барлық бүйір жақтары мен табаны арасындағы екіжақты бұрыштар өзара тең болса, пирамида табанындағы көпбұрышқа іштей шеңбер сызуға болатынын және пирамиданың биіктігі осы шеңбердің центрі арқылы өтетінін көрсетіңдер.



1.55-сурет

Қайталауға арналған жаттығулар

1.124.* 1) $ABCD$ параллелограмының периметрі 26 м. ABC бұрышы 120°. BCD үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің радиусы $\sqrt{3}$ м. Параллелограмның AD қабырғасы AB қабырғасынан ұзын. Параллелограмм қабырғаларын табыңдар.

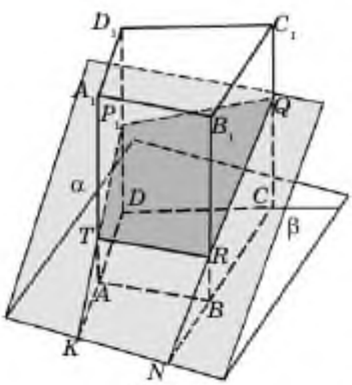
2) ABC үшбұрышының ауданы $15\sqrt{3}$ м², $\angle BAC = 120°$. ABC бұрышы ACB бұрышынан үлкен. Үшбұрыштың A төбесінен үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусына дейінгі қашықтық 2 м. Үшбұрыштың B төбесінен жүргізілген медианасының ұзындығын табыңдар.

1.4. Көпжақтардың жазықтықпен қималары. Дұрыс көпжақтар

Бұл тақырыпта көпжақтың қималарына қатысты есептер шығарып, соңында:

- **көпжақтың жазықтықпен қималарын сала білесіңдер;**
- **дұрыс көпжақтың анықтамасын біліп, дұрыс көпжақтардың түрлерін ажырата аласыңдар.**

1.4.1. Көпжақтың қималары



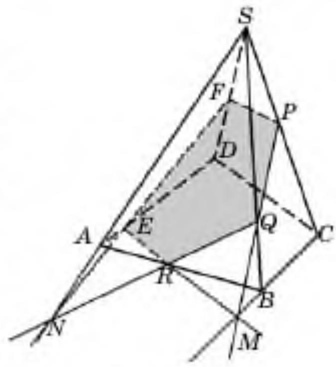
1.56-сурет

Кеңістікте Φ көпжағы мен α жазықтығының қиылысуынан пайда болған фигура осы көпжақтың ***қимасы***, ал α ***қиюшы жазықтық*** деп аталады. Дөңес көпжақтардың кез келген қимасы — дөңес көпбұрыш. α жазықтығы мен көпжақтың жағы арқылы өтетін жазықтықтың (көпжақтың қыры арқылы өтетін түзудің) қиылысу түзуін (нүктесін) қиюшы жазықтықтың ***ізі*** деп атайды. Мысалы, 1.56-суретте төртбұрышты призма мен α жазықтығының қимасы кескінделген.

Мұнда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призмасын α жазықтығымен қиып өткенде $PQRT$ қимасы алынады. P, Q, R және T нүктелері — α жазықтығының сәйкесінше DD_1, CC_1, BB_1 және AA_1 қырларындағы іздері, N нүктесі — α-ның BC түзуіндегі ізі. Осы сияқты QR түзуі — α-ның BB_1C_1C жағы арқылы өтетін жазықтықтағы ізі, KN түзуі — табан жазықтығындағы ізі. Осыдан қиюшы жазықтықтың өзге жазықтықтағы ізін табу үшін осы ізге тиісті екі нүктенің орнын білсек, жеткілікті.

1-мысал.

$SABCD$ төртбұрышты пирамидасының AB, BS және CS қырларынан сәйкесінше R, Q және P нүктелері берілген. Пирамиданың P, Q, R нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен жасайтын қимасын салу қажет (1.57-сурет).



1.57-сурет

▲ Бұл қиманы салу үшін α жазықтығының пирамиданы қиып өтетін жақтарындағы іздерін анықтаймыз. Ол үшін α жазықтығы мен пирамида қырларының қиылысу нүктелерін анықтаса, жеткілікті.

Берілгені бойынша α жазықтығы пирамиданың SC, SB және AB қырларын сәйкесінше P, Q жәнеR нүктелерінде қиып өтеді, яғни SBC жағын PQ кесіндісі бойымен, ал SAB жағын QR кесіндісі бойымен қияды. Енді α-ның табан жазықтығымен ($ABCD$) қиылысу түзуін анықтау керек. Бұл түзуге тиісті бір ғана нүктенің орны белгілі: $R \in \alpha \cap AB$. Осы түзудің екінші M нүктесі PQ және BC түзулерінің қиылысу нүктесі. Шынында да, $M = BC \cap PQ$ болса, $BC \subset SBC$, $PQ \subset SBC$. Екінші жағынан, $M \in BC \subset (ABCD)$ және $M \in PQ \subset \alpha$ болғандықтан, M нүктесі α мен $ABCD$ табан жазықтығының қиылысу түзуінде жатады. Сонымен, MR түзуі — α-ның табан жазықтығындағы ізі. Онда $E = MR \cap AD$. Осы сияқты $F = \alpha \cap SD$ нүктесін табамыз (1.57-сурет). Бізге қажет қима — $PQREF$. ■

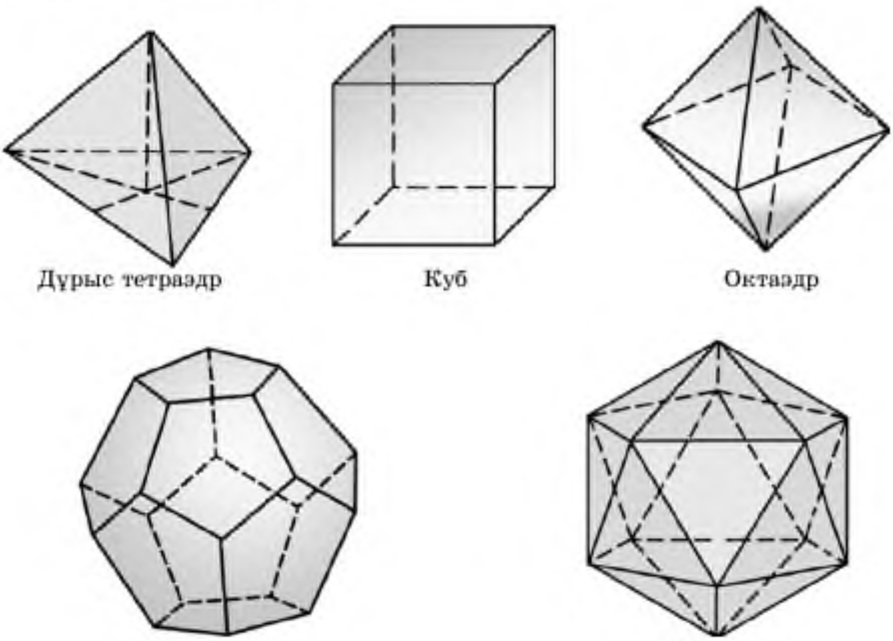
1.4.2 Дұрыс көпжақтар

Дөңес көпжақтың барлық жақтары өзара тең дұрыс көпбұрыштар және барлық төбелерінде түйісетін қырларының саны бірдей болса, бұл көпжақты ***дұрыс көпжақ*** деп атайды.

Жалпы, дұрыс көпжақтардың бес түрі бар. 1.58-суретте сәйкесінше ***дұрыс тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр*** және ***икосаэдр*** кескінделген.

Дұрыс тетраэдрдің барлық жақтары өзара тең дұрыс үшбұрыштар және оның әр төбесінде үш қыры түйіседі. Сонымен, *дұрыс тетраэдр* — барлық қырлары өзара тең үшбұрышты пирамида. Дұрыс тетраэдрді дұрыс үшбұрышты пирамидамен шатастырмау қажет. Дұрыс үшбұрышты пирамидаларда үш бүйір жағы бірдей теңбүйірлі үшбұрыштар болғанымен, олар табанындағы тең қабырғалы үшбұрышқа тең бола бермейді.

Куб (текше) — бізге төменгі сыныптардан белгілі дұрыс көпжақ. Оның жақтары — өзара тең квадраттар, ал әр төбесінде үш қыры тоғысады. Жалпы, куб көмегімен дұрыс тетраэдр мен октаэдрді тұрғызуға болады. 1.59-суретте кубтың қарама-қарсы жақтарының айқыш диагональдары көмегімен дұрыс тетраэдрді салу және куб жақтарының әрқайсысының центрлері арқылы октаэдрді салу тәсілдері көрсетілген.



Дұрыс тетраэдр Куб Октаэдр

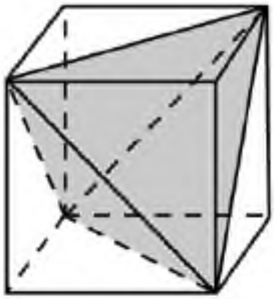
Додекаэдр Икосаэдр

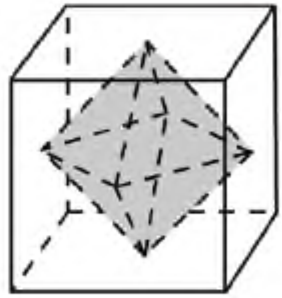
1.58-сурет

Октаэдр — өзара бірдей сегіз теңқабырғалы үшбұрыштармен шектелген. Оның алты төбесі, 12 қыры бар және әр төбесінде 4 қыры тоғысады.

Додекаэдр 12 дұрыс өзара тең бесбұрыштардан құрастырылған. Оның әр төбесінде 3 қыры тоғысады. Оның 30 қыры, 20 төбесі бар.

Икосаэдр — 20 бірдей теңқабырғалы үшбұрыштардан құрастырылған және оның әр төбесінде 5 қыры тоғысады. Оның 30 қыры, 12 төбесі бар.





1.59-сурет

• ***Қосымша электрондық ресурстар***
https://vuzlit.ru/930013/istoricheskie_svedeniya_pravilnyh_mnogogrannikah

1. Көпжақтың қимасы деп нені айтады? Қиюшы жазықтық деген не?
2. Қиюшы жазықтықтың көпжақ бетіндегі (қырларындағы) ізі деген не?
3. Қандай көпжақтарды дұрыс көпжақтар деп атайды? Олардың неше түрі бар?
4. Дұрыс үшбұрышты пирамида мен дұрыс тетраэдрдің қандай айырмашылығы бар?

ЕСЕПТЕР

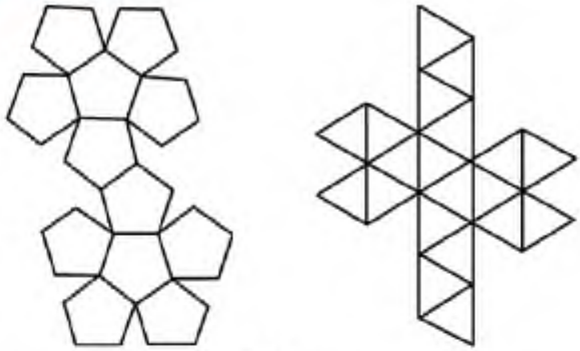
А

Практикалық тапсырма (125 – 127):

1.125. Қатты қағаздан 1) дұрыс тетраэдр; 2) гексаэдр; 3) октаэдр жазбаларын жасап, одан сәйкес денені құрастырыңдар.

1.126. Ағаштан тікбұрышты параллелепипед моделін жасап, оны қандай да бір қиюшы жазықтық бойымен арамен кесіңдер.

1.127. 1.60-суретте көрсетілген жазбалар көмегімен қатты қағаздан додекаэдр мен икосаэдр модельдерін жасаңдар. Мұнда алдын ала қатты қағаз бетіне көрсетілген жазбаларды үлкенірек масштабпен сызып алыңдар.



1.60-сурет

1.128. Халықтың арасында тұз деген атаумен белгілі натрий хлоридінің молекулалары октаэдр пішіндес кристалдық тордың төбелерінде орналасқан. Молекулалардың кристалдық тор бейнесінде ортақ қырлары бар. Натрий хлоридінің бір молекуласының көрші молекулалармен ортақ неше қыры бар (1.61-сурет)?

▲ Натрий хлоридінің бір молекуласының көрші молекулалармен ортақ қырларының санын анықтау қажет. Молекуланың құрылымы октаэдр тәрізді болғандықтан, оның 8 жағы және 6 төбесі бар. Эйлер теоремасы бойынша

$$n - m + k = 2,$$

n — көпжақ төбелерінің саны, m — қырларының саны, k — оның жақтарының саны.

$$\Rightarrow 6 - m + 8 = 2 \Rightarrow m = 12.$$

Сонымен, натрий хлоридінің әр молекуласы мен көрші молекулалардың ортақ 12 қыры бар. ■

1.61-сурет

1.129. Кубтың қыры 1) 5 см; 2) 8 см; 3) $3\sqrt{2}$ м деп алып, оның диагональдық қимасының ауданын табыңдар.

1.130. Кубтың бір төбесінде тоғысатын екі жағы диагональдарының арасындағы бұрышты табыңдар.

1.131. Төбелері 1) гексаэдр; 2) тетраэдр жақтарының центрлерінде орналасқан көпжақ дұрыс көпжақ бола ма? Бұл қандай дұрыс көпжақ?

1.132. Октаэдр неше дұрыс төртбұрышты пирамидалардан құрастырылған? Бұл пирамиданың биіктігінің табан қабырғасына қатынасы қандай?

1.133. Төбелері 1) дұрыс тетраэдр; 2) октаэдр қырларының орталарында орналасқан дене дұрыс көпжақ бола ма? Болса, ол қандай көпжақ?

1.134. Қыры 1) 5 см; 2) 12 см болатын октаэдрдің диагональдық қимасының ауданын табыңдар.

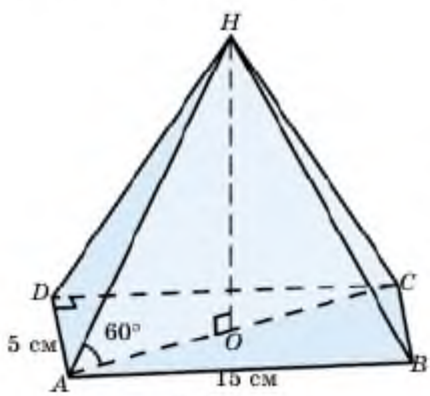
1.135. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB қыры арқылы өтетін, $ABCD$ табанымен 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$ бұрыш жасайтын қимасын салыңдар.

1.136. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмасының AB қыры арқылы және 1) C_1 төбесі арқылы; 2) CC_1 қырының ортасы арқылы өтетін қимасын салыңдар.

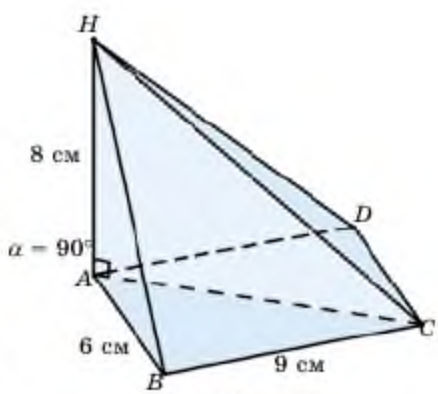
1.137. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың AB қыры мен SC қырының ортасы арқылы өтетін қимасын салыңдар. $AB=SA=4$ см деп алып, осы қиманың ауданын табыңдар.

1.138. 1.62-суретте көрсетілген пирамиданың табаны — қырлары 5 см және 15 см болатын тіктөртбұрыш. Бүйір қырлары табан жазықтығымен $60°$ бұрыш жасайды. AHC қимасының ауданы $\frac{125\sqrt{3}}{2}$ см^2 болатынын көрсетіңдер.

1.139. Пирамиданың табаны — қырлары 6 см және 9 см-тең тіктөртбұрыш. Пирамиданың биіктігі оның A төбесіне түседі және 8 см-ге тең. AHC қимасының ауданы $12\sqrt{13}$ см^2 болатынын көрсетіңдер (1.63-сурет).

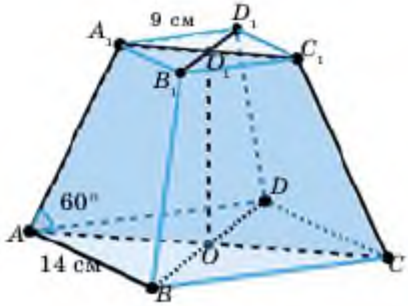


1.62-сурет

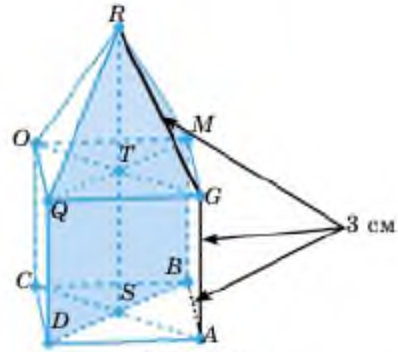


1.63-сурет

1.140. Қиық пирамиданың табандары — қырлары 14 см және 9 см квадраттар, бүйір қырлары табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Диагональдық қимасының ауданы $\frac{115\sqrt{3}}{2}$ см² екенін көрсетіңдер (1.64-сурет).



1.64-сурет



1.65-сурет

1.141. Куб және пирамидадан құралған көпжақ берілген (1.65-сурет). Көпжақтың барлық қырлары 3 см. Диагональдық қимасының ауданы $9\left(0,5+\sqrt{2}\right)$ см² болатынын көрсетіңдер.

B

1.142. Тік параллелепипедтің табаны — қабырғалары 2 см және 5 см, ал сүйір бұрышы 30° болатын параллелограмм. Параллелограмның кіші қабырғасы арқылы өтетін және табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайтын қиманың екі төбесі параллелепипедтің бүйір қырларында жатыр. Осы қиманың ауданын табыңдар.

1.143. Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының іргелес қабырғаларының орталары арқылы пирамиданың табан жазықтығына перпендикуляр қима жүргізілген. Пирамиданың биіктігі h, бүйір қыры b ($b>h$) деп алып, қиманың ауданын табыңдар.

1.144. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дұрыс қиық пирамидасында $AB=12$ см, $A_1B_1=4$ см. Қиық пирамиданың биіктігі 4 см деп алып, ABC_1D_1 қимасының ауданын табыңдар.

1.145. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры a. Оның AB, AD, B_1C_1 және C_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін қимасын салып, оның ауданын табыңдар.

1.146. Октаэдрдің барлық қырларының орталары төбелері болатын дене дұрыс көпжақ бола ма? Октаэдрдің қыры *a-ға* тең деп алып, осы алынған дененің толық бетінің ауданын табыңдар.

1.147. Төртбұрышты тік призманың бүйір қырларында орналасқан P, Q және R нүктелері арқылы өтетін қиманы салыңдар.

1.148. Дұрыс тетраэдрдің екіжақты бұрышын табыңдар.

1.149. Октаэдрдің $\angle QKP = \varphi$ болатын екіжақты бұрышын табыңдар (1.66-сурет).

▲ **Берілгені:** $ABCDPQ$ — октаэдр.

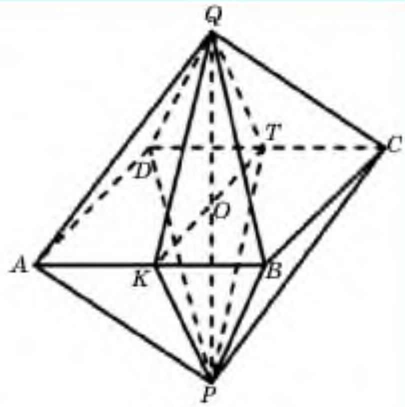
Т/к: $\angle QKP = \varphi$ — ?

Шешуі: $PKQT$ — ромб. $KT = a$, $KO = \dfrac{a}{2}$.

ΔAQB — тең қабырғалы.

$QK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. $\Delta KOQ \Rightarrow QO =$

$= \sqrt{QK^2 - KO^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow PQ = \sqrt{2} \cdot a$.



1.66-сурет

Косинустар теоремасы бойынша

$PQ^2 = KQ^2 + KP^2 - 2 \cdot KQ \cdot KP \cdot \cos\varphi$,

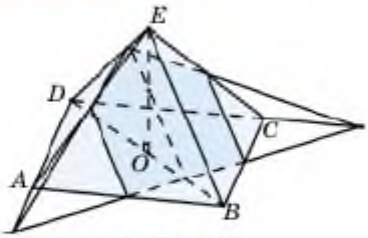
$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}a^2 - 2a^2}{2 \cdot \frac{3}{4}a^2} = -\frac{1}{3},\ \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Жауабы: $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$. ■

1.150. Қиық пирамида табандарының ауданы 2 см² және 32 см². Биіктігі өзара тең үш бөлікке бөлінген. Осы бөлу нүктелері арқылы табандарына параллель жазықтықтармен анықталатын қималардың ауданын табыңдар.

C

1.151. Қыры *a-ға* тең октаэдрдің қарама-қарсы жақтары параллель болатынын көрсетіп, олардың арақашықтығын табыңдар.



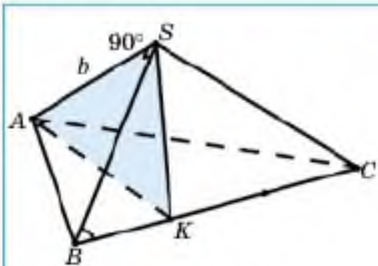
1.67-сурет

1.152. Әрбір қыры a-ға тең дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанындағы екі іргелес қабырғасының ортасы мен пирамида биіктігінің ортасы арқылы өтетін қимасын салыңдар және оның ауданын табыңдар (1.67-сурет).

1.153. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі h және ол бүйір қырымен φ бұрыш жасайды. Пирамида табанының диагоналі арқылы өтіп, табан жазықтығымен γ бұрышын жасайтын қиманың ауданын табыңдар.

1.154.* Егер дұрыс үшбұрышты пирамиданың әрбір төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы 180° болса, дененің дұрыс тетраэдр болатынын дәлелдеңдер.

1.155. Дұрыс $SABC$ пирамидасында $AS = b$, $\angle ASB = 90^{\circ}$, ΔABC — теңқабырғалы және K нүктесі BC қырын 1: 2 қатынасында бөледі, яғни $BK : KC = 1 : 2$. ASK үшбұрышының ауданын табыңдар (1.68-сурет).



1.68-сурет

▲**Берілгені:** $SABC$ — дұрыс пирамида, $AS = b$, $\angle ASB = 90^{\circ}$, $BK : KC = 1 : 2$.

Т/к: S_{ASK} — ?

Шешуі:

1) $\Delta ASB \Rightarrow AS = b, BS = b \Rightarrow AB = b\sqrt{2}$.

$BC = b\sqrt{2} \Rightarrow BK = \dfrac{\sqrt{2}}{3}b$, $\angle B = 60^{\circ}$.

Косинустар теоремасы бойынша

$AK^2 = AB^2 + BK^2 - 2AB \cdot BK \cdot \cos 60^{\circ} =$

$= 2b^2 + \dfrac{2}{9}b^2 - \dfrac{4}{3}b^2 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{14}{9}b^2 \Rightarrow AK = \dfrac{\sqrt{14}}{3}b$.

2) $\Delta BSK \Rightarrow BK = \dfrac{\sqrt{2}}{3}b$, $\angle SBK = 45^{\circ}$.

Косинустар теоремасы бойынша

$$SK^2 = BS^2 + BK^2 - 2BS \cdot BK \cdot \cos 45^{\circ} = b^2 + \frac{2}{9}b^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}b^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{9}b^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow SK = \dfrac{\sqrt{5}}{3}b$.

3) $\Delta ASK \Rightarrow AS = b,\ AK = \dfrac{\sqrt{14}}{3}b,\ SK = \dfrac{\sqrt{5}}{3}b \Rightarrow$

ΔASK-ның жарты периметрі

$p = \dfrac{1}{2}\left(b + \dfrac{\sqrt{14}}{3}b + \dfrac{\sqrt{5}}{3}b\right) = \dfrac{b}{6}\left(3 + \sqrt{14} + \sqrt{5}\right) \Rightarrow$ Герон формуласы бойынша

$$S_{ASK} = \sqrt{p(p-AS)\cdot(p-AK)\cdot(p-SK)} =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{6}\left(3+\sqrt{14}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{14}}{6}b+\frac{\sqrt{5}}{6}b-b\right)}\times$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{14}}{6}b+\frac{\sqrt{5}}{6}b-\frac{\sqrt{14}}{3}b\right)\cdot\left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{14}}{6}b+\frac{\sqrt{5}}{6}b-\frac{\sqrt{5}}{3}b\right)} =$$

$$= \left(\frac{b}{6}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}+3\right)\cdot\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}-3\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}-\sqrt{14}\right)\cdot\left(3+\sqrt{14}-\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \left(\frac{b}{6}\right)^2\sqrt{\left(\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}\right)^2-9\right)\left(9-\left(\sqrt{5}-\sqrt{14}\right)^2\right)} =$$

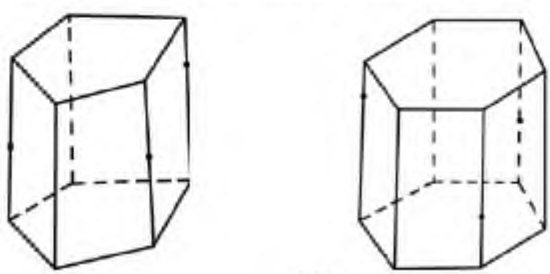
$$= \left(\frac{b}{6}\right)^2\sqrt{\left(10+2\sqrt{70}\right)\cdot\left(2\sqrt{70}-10\right)} = \frac{b^2\sqrt{180}}{36} = \frac{b^2\sqrt{5}}{6}.$$

$S_{ASK} = \dfrac{b^2\sqrt{5}}{6}$. ■

1.156. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны — қабырғасы a-ға тең квадрат, бүйір қыры b. AA_1 қыры және онымен бір төбеде тоғысатын қырлары өзара тең φ бұрышын құрайды. Параллелепипедтің AA_1 қырын қамтитын диагональдық қимасының ауданын табыңдар.

1.157. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің A_1BD қимасы оның AC_1 диагоналін 1:2 қатынасында бөлетінін дәлелдеңдер.

1.158. 1.69-суретте көрсетілген тік призмалардың белгіленген үш нүктесі арқылы өтетін қималарын салыңдар.



1.69-сурет

Қайталауға арналған жаттығулар

1.159. 1) Теңбүйірлі трапецияға іштей шеңбер сызылған. Шеңбердің радиусы 2, трапецияның ауданы 20 болса, трапецияның үлкен табанын табыңдар.

2) Теңбүйірлі трапецияға іштей шеңбер сызылған. Шеңбердің радиусы 3, трапецияның үлкен табаны 18 болса, трапецияның кіші табанын табыңдар.

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Бүйір бетінің ауданы	Площадь боковой поверхности	Surface area
2	Дұрыс көпжақ	Правильный многогранник	Regular polyhedron
3	Көпжақ	Многогранник	Polyhedron
4	Көпжақтың жазбасы	Развертка многогранника	Net of a polyhedron
5	Көпжақтың табаны	Основание многогранника	Base of a polyhedron
6	Көпжақтың төбелері	Вершины многогранника	Vertices of a polyhedron
7	Қиық пирамида	Усеченная пирамида	Truncated pyramid
8	Параллелепипед	Параллелепипед	Parallelepiped
9	Пирамида	Пирамида	Pyramid
10	Призма	Призма	Prism

«КӨПЖАҚТАР» бөлімінің қорытындысы

1) **Кез келген дөңес көпжақты бұрыштың төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы 360°-тан кіші және әр жазық бұрышы өзге жазық бұрыштарының қосындысынан кіші.**

2) Ф шектелген фигурасының барлық шекаралық нүктелер жиыны оның **беті**, ал Ф фигурасының барлық ішкі нүктелер жиыны мен оның бетінде жатқан нүктелер жиынын **геометриялық дене** деп атайды.

3) **Көпжақтар** деп беті санаулы көпбұрыштардан құралған геометриялық денені айтады. Көпжақ бетіндегі әр көпбұрышты оның

жағы, осы көпбұрыш қабырғасын көпжақтың **қыры** деп атайды. Көпжақ қырларының ұштары көпжақтың **төбесі**, ал бір жағына тиісті емес екі төбесін қосатын кесіндіні көпжақтың **диагоналі** деп атайды.

4) Көпжақты оның бірнеше қырлары бойымен қиып, шыққан көпбұрыштардың бірігуін жазықтық бетіне орналастырғанда алынған фигураны осы көпжақтың **жазбасы** деп атайды.
5) Көпжақтың барлық жақтарының аудандарының қосындысын оның толық **бетінің ауданы** деп атайды. Оны $S_{т.б.}$ арқылы белгілейді.
6) Параллелепипед диагональдары бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.
7) Тікбұрышты параллелепипед диагоналының квадраты оның үш өлшемінің (ені, ұзындығы және биіктігі) квадраттарының қосындысына тең.
8) Тік призманың бүйір бетінің ауданы оның биіктігін табанының периметріне көбейткенге тең.
9) Призманың толық бетінің ауданын анықтау үшін оның бүйір бетінің ауданын екі еселенген табан ауданына қосса жеткілікті:

$$S_{т.б} = S_{б.б} + 2S_{таб}.$$

10) Егер пирамиданың табаны дұрыс көпбұрыш болса, ал пирамиданың биіктігінің табаны оның табанындағы көпбұрыш центрімен беттессе, мұндай пирамиданы **дұрыс пирамида** деп атайды. Пирамиданың бүйір жағының биіктігін оның **апофемасы** деп атайды.
11) Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның апофемасын табанының жарты периметріне көбейткенге тең, яғни l — апофема, p — жарты периметр болса, $S_{б.в.} = l \cdot p$.
12) Дұрыс қиық пирамиданың табандарының жарты периметрлері сәйкесінше p_1 (кіші табанының) және p_2 (үлкен табанының) болса, дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы $\boldsymbol{S_{б.в} = (p_1 + p_2) \cdot l}$. Мұндағы l — апофема.
13) Кеңістікте Ф көпжағы мен α жазықтығының қиылысуынан пайда болған фигура осы көпжақтың **қимасы**, ал α **қиюшы жазықтық** деп аталады.
14) Қиюшы жазықтықтың ізі дегеніміз α жазықтығы мен көпжақтың бүйір жағынан (қырынан) өтетін жазықтықпен қиылысу түзуі (нүктесі).

II бөлім. КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Бұл бөлімде геометрияның қызықты әрі тартымды тармағының бірі — аналитикалық геометрия тәсілдерімен танысып, оларды қолдана білуді үйренесіңдер.

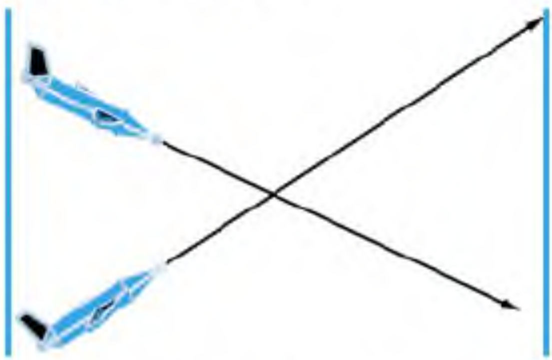
Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

2.1. Түзу мен жазықтықтың теңдеулері

2.2. Кеңістіктегі нүктелер мен жазықтықтардың өзара орналасуы

2.3. Кеңістіктегі қашықтықтарды анықтау

2.4. Кеңістіктегі бұрыштарды анықтау



Бөлімді оқып-үйрену барысында сендер ұшақтардың қандай жағдайда соқтығыспайтынын білесіңдер.

2.1. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың теңдеулері

Бұл тақырыпта кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың теңдеулерін естеріңе түсіріп, соңында:

- **бағыттаушы векторы бойынша түзудің теңдеуін және нормаль векторы бойынша жазықтықтың теңдеуін жазып, оны қолдана білесіңдер;**
- **үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазып, оны қолдануды үйренесіңдер.**

2.1.1. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың теңдеуі

Топтық жұмыс

1-тапсырма. 1) Берілген $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{p}(m; n; k)$ векторына параллель түзу жүргізуге бола ма? Болса, M_0 нүктесі арқылы $\vec{p}$ векторына параллель неше түзу өтеді?

2) Осы l түзуі бойынан кез келген $M(x; y; z)$ нүктесін алып, $\overline{M_0M}$ және $\vec{p}$ векторларының қалай орналасатынын түсіндіріңдер.

3) Векторлардың кеңістіктегі коллинеарлық шарты қалай жазылады? $\overline{M_0M}$ векторының координаталарын жазып, $\overline{M_0M}$ және $\vec{p}$ векторларының коллинеарлық шарттын жазыңдар.

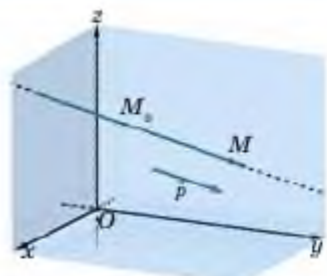
4) Пропорционалдық коэффициентті t арқылы белгілеп, коллинеарлық шартты былай жазуға болатынын көрсетіңдер:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases}$$

Бұл теңдеу қалай аталады? $M_0(2; -1; 0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{p}(3; 2; 2)$ векторына параллель түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.

Сонымен, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{p}(m; n; k)$ бағыттаушы векторына параллель l түзуінің параметрлік теңдеуі былай жазылады (2.1-сурет):

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases} \qquad (1)$$



2.1-сурет

(https://www.geogebra.org/m/cgepxeaw)

Осы жүйенің әр теңдеуінен t-ны өзге шамалар арқылы өрнектеп, мына теңдеуді алуға болатынын көрсетіңдер:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}. \qquad (2)$$

Бұл теңдеуді түзудің ***канондық теңдеуі*** деп атайды.

Топтық жұмыс

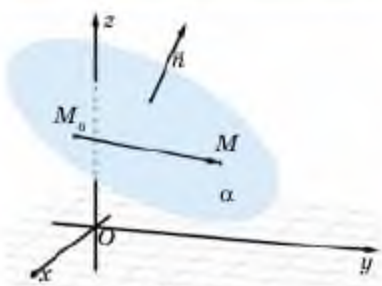
2-тапсырма. 1) Берілген $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}(a; b; c)$ векторына перпендикуляр жазықтық жүргізуге бола ма? Болса, неше жазықтық өтеді? $\vec{n}$ векторын қалай атайды?

2) Осы α жазықтығынан алынған кез келген $M(x; y; z)$ нүктесі үшін $\overline{M_0M}$ және $\vec{n}$ векторлары кеңістікте қалай орналасады? $\vec{n}\cdot\overline{M_0M}$ скаляр көбейтіндісінің мәні қандай?

3) $\overline{M_0M}$ векторының координаталарын жазып, $\vec{n}$ және $\overline{M_0M}$ векторларының перпендикулярлық шартын жазыңдар. Осы жазылған шартты α жазықтығының теңдеуі ретінде қабылдауға бола ма? Болса, бұл теңдеуді қалай атайды?

4) $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ теңдеуінен жазықтықтың $ax+by+cz+d=0$ түрінде жазылатын жалпы теңдеуін қалай алуға болады?

5) $M_0(1; 2; 3)$ және $\vec{n}(2;-3;4)$ деп алып, сәйкес жазықтықтың жалпы теңдеуін жазыңдар.



2.2-сурет

(https://www.geogebra.org/m/nd7ck4z3)

Сонымен, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}(a; b; c)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі мына түрде жазылады (2.2-сурет):

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad (3)$$

$$d=-ax_0-by_0-cz_0$$

деп алып, жазықтықтың ***жалпы теңдеуі***

$$ax+by+cz+d=0 \quad (4)$$

түрінде жазылатынын көрсетіңдер.

2.1.2. Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

Әдетте, $A\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C\ (x_3,\ y_3,\ z_3)$ нүктелері арқылы өтетін $ax+by+cz+d=0$ жазықтығының жалпы теңдеуін қолданып, теңдеулер жүйесін құрады, осы жүйеден a, b, c, d-ны табады.

$$\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1+d=0, \\ ax_2+by_2+cz_2+d=0, \\ ax_3+by_3+cz_3+d=0. \end{cases}$$

Бізге коллинеар емес $\vec{p}_1(m_1; n_1; k_1)$ және $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторлары берілсін.

$$\vec{n}(n_1k_2-n_2k_1; k_1m_2-k_2m_1; m_1n_2-m_2n_1) \quad (5)$$

векторын қарастырайық.

Топтық жұмыс

1) (5) формула бойынша $\vec{p}_1$ және $\vec{p}_2$ векторлары көмегімен $\vec{n}$ векторының координаталарын анықтаңдар; 2) $\vec{n}\cdot\vec{p}_1$ және $\vec{n}\cdot\vec{p}_2$ скаляр көбейтінділерін табыңдар; 3) Нәтижесін сыныппен бірге талқылап, қорытынды жасаңдар. Барлық уақытта $\vec{n}\perp\vec{p}_1$ және $\vec{n}\perp\vec{p}_2$ бола ма? 4) $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{p}_1$ және $\vec{p}_2$ векторларына параллель α жазықтығы табыла ма? Табылса, бұл жазықтық жалғыз бола ма? 5) Осы α жазықтығының теңдеуін қалай жазуға болатынын түсіндіріңдер және оны жазыңдар.

Мұнда $\vec{p}_1$ және $\vec{p}_2$ векторлары α жазықтығының ***бағыттаушы векторлары*** деп аталады.

1-топ тапсырмасы:	2-топ тапсырмасы:
$\vec{p}_1(1;\, 2;\, -1)$, $\vec{p}_2(3;\, -2;\, 1)$, $M_0(2;\, 0;\, 1)$	$\vec{p}_1(1;\, 2;\, 3)$, $\vec{p}_2(-1;\, 3;\, 2)$, $M_0(2;\, -4;\, 1)$
3-топ тапсырмасы:	**4-топ тапсырмасы:**
$\vec{p}_1(2;\, 4;\, 1)$, $\vec{p}_2(1;\, 2;\, -3)$, $M_0(3;\, 1;\, 4)$	$\vec{p}_1(2;\, 5;\, -3)$, $\vec{p}_2(4;\, 1;\, 1)$ $M_0(0;\, 3;\, 1)$

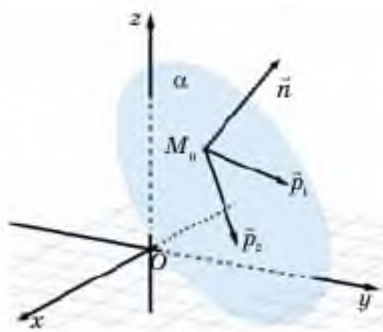
Жалпы алғанда, $\vec{p}_1(m_1;\, n_1\; k_1)$ және $\vec{p}_2(m_2;\, n_2;\, k_2)$ векторлары (5) формуламен анықталатын $\vec{n}$ векторына перпендикуляр (2.3-сурет).

$M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{p}_1(m_1;\, n_1\; k_1)$ және $\vec{p}_2(m_2;\, n_2;\, k_2)$ векторларына параллель жазықтықтың теңдеуі былай жазылады:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (6)$$

Мұнда

$$\begin{cases} a = n_1k_2 - n_2k_1, \\ b = k_1m_2 - k_2m_1, \\ c = m_1n_2 - m_2n_1. \end{cases} \quad (7)$$



2.3-сурет

(https://www.geogebra.org/classic/np3tbc8p)

Топтық жұмыс

$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ және $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар. Ол үшін жоғарыда көрсетілген тәсілдегідей M_0 нүктесі ретінде қай нүктені, $\vec{p}_1$ және $\vec{p}_2$ векторлары орнына қандай векторларды алатындарыңды анықтап, тапсырманы орындаңдар.

1-топ тапсырмасы:	2-топ тапсырмасы:
$M_1(0;\ 7;\ 2)$, $M_2(0;\ 1;\ 6)$, $M_3(-1;\ 5;\ 0)$	$M_1(4;\ -4;\ 10)$, $M_2(4;\ 10;\ -2)$, $M_3(2;\ 8;\ 4)$
3-топ тапсырмасы:	**4-топ тапсырмасы:**
$M_1(6;\ 6;\ -5)$, $M_2(4;\ -9;\ 5)$, $M_3(4;\ 6;\ -1)$	$M_1(7;\ 2;\ 2)$, $M_2(4;\ -2;\ 4)$, $M_3(2;\ 3;\ 7)$

2.1.3. Жалпы теңдеумен берілген түзудің бағыттаушы векторын анықтау

Кеңістіктегі әрбір түзуді екі жазықтықтың қиылысуы ретінде анықтауға болады. Егер кеңістікте $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ және $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ теңдеулерімен екі жазықтық берілсе,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

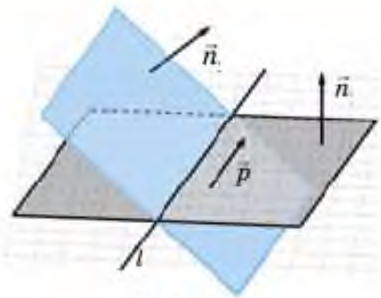
тендеулер жүйесімен осы жазықтықтардың қиылысуы арқылы анықталатын түзудің теңдеуі беріледі. (8) теңдеуді түзудің ***жалпы теңдеуі*** деп атайды.

Топтық жұмыс

Жалпы теңдеумен берілген түзудің бағыттаушы векторы мен осы түзудің бойында жататын нүктенің координаталарын қалай табуға болады? Сұраққа жауап беру үшін мына тапсырмаларды орындаңдар.

1-топ тапсырмасы:	2-топ тапсырмасы:
$\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0, \\ 3x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0, \\ 3x - 2y - 5z - 6 = 0 \end{cases}$

3-топ тапсырмасы:	4-топ тапсырмасы:
$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 4x+y-3z-3=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-4y-2z+3=0, \\ 3x+y+z-5=0 \end{cases}$



2.4-сурет

https://www.geogebra.org/classic/pzrzrhtb

(8) жалпы теңдеумен берілген түзудің бағыттаушы векторы

$\vec{p}(b_1c_2 - b_2c_1;\ c_1a_2 - c_2a_1;\ a_1b_2 - a_2b_1)$ (9)

формуласымен анықталады (2.4-сурет).

1-мысал.

$$\begin{cases} 2x-5y-7=0, \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$$

жалпы теңдеуімен берілген l түзуінің теңдеуін канондық түрде жазу керек.

▲ 1) l түзуінің бойында жататын қайсыбір M_0 нүктесінің координаталарын табу керек; 2) (9) формуланы қолданып, $\vec{n}_1(m_1;\ n_1;\ k_1)$ және $\vec{n}_2(m_2;\ n_2;\ k_2)$ векторларына перпендикуляр $\vec{p}$ векторының (бағыттаушы вектор) координаталарын табамыз.

1) Бізге берілген жүйеде екі теңдеу және үш белгісіз бар. Сондықтан бір белгісіздің мәнін қалауымызша таңдап аламыз. Айталық, $z = 0$ болсын. Онда берілген жүйе былай жазылады:

$$\begin{cases} 2x-5y=7, \\ x+3y=-2 \end{cases} \Rightarrow\ x=1,\ y=-1,$$

$M_0(1;\ -1;\ 0)$ нүктесі l түзуінің бойында жатады.

2) $\vec{n}_1(2;\ -5;\ 0)$ және $\vec{n}_2(1;\ 3;\ 4)$ болғандықтан,

$$\vec{p}(-5\cdot4-0\cdot3;\ 0\cdot1-4\cdot2;\ 2\cdot3-(-5)\cdot1)=(-20;\ -8;\ 11).$$

$\vec{p}(-20;\ -8;\ 11)$ векторы — l түзуінің бағыттаушы векторы. l түзуінің канондық теңдеуін былай жазуға болады:

$$\frac{x-1}{-20}=\frac{y+1}{-8}=\frac{z}{11}.\ ■$$

1. Түзудің канондық теңдеуі қалай жазылады? Бағыттаушы векторы мен түзудің бойында жататын нүктенің координаталарын табыңдар.
2. Нормаль вектормен берілген жазықтықтың теңдеуі қалай жазылады?

3. Жазықтықтың жалпы теңдеуі қалай жазылады? Мысал арқылы оның нормаль векторын жазып көрсетіңдер.
4. Берілген екі коллинеар емес векторларға перпендикуляр вектордың координаталары қалай анықталады? Мысал келтіріңдер.
5. Үш нүкте арқылы өтетін жазықтық теңдеуінің жазу тәсілін сипаттап, түсіндіріңдер. Мысал келтіріңдер.
6. Жалпы теңдеумен берілген түзудің бағыттаушы векторы және оның бойында орналасқан нүктенің координаталарын анықтау жолын түсіндіріңдер. Мысал келтіріңдер.

ЕСЕПТЕР

A

2.1. Берілген түзуде жататын және оның бойында жатпайтын нүктенің координатасын табыңдар:

1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{5}$; 2) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{7}$;

3) $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-1+t, \\ z=1-t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=-1+t, \\ y=3+2t, \\ z=2-2t. \end{cases}$

2.2. Алдыңғы есепте берілген түзудің бағыттаушы векторын анықтаңдар.

2.3. Берілген түзуде жататын және оның бойында жатпайтын нүктенің координатасын табыңдар:

1) $x+2y-z-2=0$; 2) $5x-y+4z+3=0$;
3) $2x-y+z-3=0$; 4) $2y+z+3=0$.

2.4. Алдыңғы есепте берілген жазықтықтың нормаль векторын анықтаңдар.

2.5. Берілген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының коллинеар емес екенін көрсетіп, олардың екеуіне де перпендикуляр болатын $\vec{n}$ векторының координаталарын табыңдар:

1) $\vec{a}(1;2;-2)$, $\vec{b}(3;0;4)$; 2) $\vec{a}(0;3;-4)$, $\vec{b}(2;5;4)$;

3) $\vec{a}(1;3;-2)$, $\vec{b}(2;1;1)$; 4) $\vec{a}(-2;1;4)$, $\vec{b}(1;-2;3)$.

2.6. Берілген түзуде жататын және оның бойында жатпайтын нүктенің координатасын табыңдар:

1) $\begin{cases} x+y-z-5=0, \\ 2x-y-3z-13=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y+9z-3=0, \\ 2x+y-5z+8=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y - z - 5 = 0, \\ 2y - 3z + 9 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + z - 4 = 0, \\ y - z - 1 = 0. \end{cases}$

B

2.7. 2.5-есептің шартын пайдаланып, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына параллель және $M_0(-2; 3; 0)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

2.8. 2.6-есеп шартында берілген түзудің (1) формула көмегімен бағыттаушы вектордың координаталарын табыңдар және бұл түзудің канондық теңдеуін жазыңдар.

2.9. (3) және (4) формулалар көмегімен берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар:

1) $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(2; 1; 4)$, $M_3(-2; 0; 2)$;

2) $M_1(-3; 1; -2)$, $M_2(-2; 0; 3)$, $M_3(1; 1; -1)$;

3) $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(0; 1; 4)$, $M_3(2; -2; 0)$;

4) $M_1(1; 2; -2)$, $M_2(3; 0; 4)$, $M_3(0; 3; -4)$.

2.10. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасының төбелерінің координаталары берілген: $A(1; -2; 5)$, $B(-3; 0; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(-2; 1; 4)$. 1) ABC және ABD жақтарының теңдеулерін жазыңдар; 2) AB түзуінің жалпы теңдеуін жазыңдар және бұл түзудің бағыттаушы векторын табыңдар; 3) табылған вектордың $\overline{AB}$ векторымен коллинеар болатынын көрсетіңдер. Қорытынды жасаңдар.

2.11. Алдыңғы есеп шартында AB түзуінің теңдеуін екі нүкте арқылы өтетін түзу формуласы бойынша жазып, осы канондық теңдеу бойынша AB түзуінің жалпы теңдеуін жазыңдар. Бұл жазылған теңдеу алдыңғы есепте жазылған AB-ның жалпы теңдеуімен бірдей болмауы себебін түсіндіріңдер.

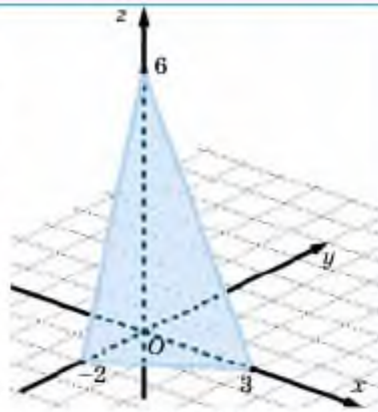
2.12. 2.10-есеп шартында пирамиданың әрбір төбесінен қарама-қарсы жағына түсірілген биіктігі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

2.13. Жазықтықтың теңдеуін кесіндінің теңдеуі түрінде жазыңдар және оның координаталық өстермен қиылысу нүктелерін табыңдар:

1) $2x - 3y + z - 6 = 0$; 2) $x + y - 2z - 4 = 0$;

3) $x - 5y + 2z + 10 = 0$; 4) $3x - y + z - 6 = 0$.

1) ▲ $ax+by+cz+d=0$ түріндегі жазықтықтың теңдеуін $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$ түріне келтіруге болады. Оны *кесіндідегі жазықтың теңдеуі* деп атайды. Ол үшін жалпы теңдеуді $d \neq 0$ санына бөлсе жеткілікті.



2.5-сурет
https://www.geogebra.org/classic/bwcy9d4n

$$2x-3y+z-6=0 \Rightarrow 2x-3y+z=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{6}-\frac{3y}{6}+\frac{z}{6}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1.$$

Осыдан, жазықтық координаталық өстерді $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -2;\ 0)$ және $C(0;\ 0;\ 6)$ нүктелерінде қиып өтетінін көреміз (2.5-сурет). ■

2.14. $M_0(5;\ -4;\ 7)$ нүктесі арқылы өтетін және 2.6-есепте берілген түзуге параллель түзудің канондық теңдеуін жазыңдар.

C

2.15. $\begin{cases} x-2y+3z-2=0, \\ 3x+y-z-3=0 \end{cases}$ түзуі арқылы өтетін және $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{4}$ түзуіне параллель жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

2.16. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}$ түзуі мен $x=-1-t$, $y=8-2t$, $z=2+t$ параметрлік теңдеумен берілген түзудің қиылысатынын көрсетіп, осы түзулер арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңдар.

2.17.* $M_0(2;\ 1;\ 3)$ нүктесі арқылы өтетін және координаталық өстерден бірдей кесінділер қиып өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

2.18. *Oxy* жазықтығында берілген түзулердің өзара орналасуын анықтаңдар:

1) $x-2y+8=0$ және $5x-y=0$;

2) $x-2y+8=0$ және $x=2y$;

3) $2x-4y=16$ және $x=2y+8$.

2.19. $M_1(1; 2)$ және $M_2(3; 4)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

2.20. $M_1(1; 2)$ және $M_2(3; 4)$ нүктелері берілген. $M_1 M_2$ кесіндісінің орта перпендикулярының теңдеуін жазыңдар.

2.2. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуы

Бұл тақырыпта кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуын зерттеп, соңында:

- **теңдеулері бойынша кеңістікте түзу мен жазықтықтың өзара орналасу ерекшеліктерін анықтай білесіңдер;**
- **теңдеулері бойынша кеңістікте екі жазықтықтың өзара орналасу ерекшеліктерін анықтай білесіңдер;**
- **теңдеулері бойынша кеңістікте екі түзудің өзара орналасу ерекшеліктерін анықтай білесіңдер.**

2.2.1. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы

Топтық жұмыс

1) Кеңістікте l түзуі мен α жазықтығының өзара орналасуының неше жағдайы болуы мүмкін? Барлық жағдайларды атап, оларды қайсыбір модель көмегімен көрсетіңдер;

2) l түзуі канондық

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}$$

теңдеуімен және α жазықтығы $ax+by+cz+d=0$ жалпы теңдеуімен берілсе, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі мен $\vec{p}(m; n; k)$ және $\vec{n}(a; b; c)$ векторлары жөнінде не айтуға болады?

Сонымен, кеңістікте l түзуі мен α жазықтығы сәйкесінше мына теңдеулермен берілсін:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}$$

және

$$ax+by+cz+d=0.$$

l түзуі мен α жазықтығының өзара орналасуының үш түрлі жағдайы болуы мүмкін: 1) түзу мен жазықтық қиылысады; 2) түзу мен жазықтық қиылыспайды, яғни олар өзара параллель орналасады; 3) түзу толығымен жазықтықта жатады.

Жұптық жұмыс

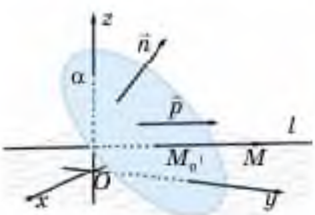
Жоғарыда көрсетілген 3 жағдайды $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі, $\vec{p}(m; n; k)$ және $\vec{n}(a; b; c)$ векторлары арқылы өрнектеп, математикалық тілде жазыңдар. Нәтижесін сыныппен бірге талқылаңдар. **I.** $\vec{p} \not\perp \vec{n}$ **II.** $\vec{p} \perp \vec{n},\ M_0 \notin \alpha$; **III.** $\vec{p} \perp \vec{n},\ M_0 \in \alpha$ болса, l түзуі мен α жазықтығы қалай орналасады? Жауаптарыңды негіздеңдер.

Сонымен,

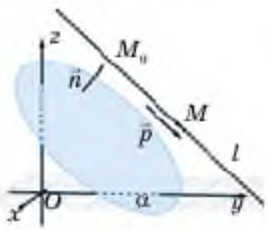
I. $\vec{p} \not\perp \vec{n}$ болса, l түзуі мен α жазықтығы қиылысады (2.6-сурет) және $\vec{p} \cdot \vec{n} \neq 0$ болуы қажет:

$$ma + nb + kc \neq 0.$$

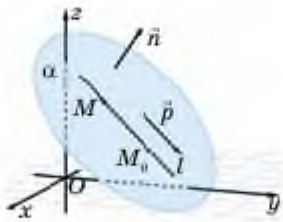
Бұл — *түзу мен жазықтықтың қиылысу шарты.*



2.6-сурет



2.7-сурет



2.8-сурет

II. $\vec{p} \perp \vec{n},\ M_0 \notin \alpha$ болса, l түзуі мен α жазықтығы өзара параллель: $l \parallel \alpha$ (2.7-сурет). Мұнда

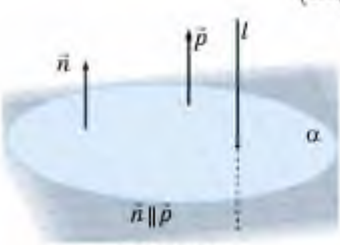
$$\begin{cases} ma + nb + kc = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0 \end{cases}$$

шарттары орындалады. Бұл — *l түзуі мен α жазықтығының өзара параллельдік шарты.*

III. $\vec{p} \perp \vec{n},\ M_0 \in \alpha$ болса, l түзуі α жазықтығында орналасады: $l \subset \alpha$ (2.8-сурет), яғни

$$\begin{cases} ma + nb + kc = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \end{cases}$$

шарттары орындалады. Бұл — *l түзуінің α жазықтығында жату шарты.*



2.9-сурет

Егер $\vec{p} \parallel \vec{n}$ болса, l түзуі α жазықтығына перпендикуляр: $l \perp \alpha$ (2.9-сурет) және бұл шарт былай жазылады:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}.$$

1-мысал. l түзуі канондық $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{1}$ теңдеуімен, α жазықтығы $x-y+3z+2=0$ теңдеуімен берілген.

l түзуі α жазықтығына қатысты қалай орналасқанын анықтайық.

▲ l түзуінде жататын $M_0(1;\ -1;\ 0)$ нүктесі мен $\vec{p}(2;\ 3;\ 1)$ бағыттаушы векторы және α жазықтығының $\vec{n}(1;\ -1;\ 3)$ нормаль векторын анықтап, $\vec{p}$ және $\vec{n}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табамыз: $\vec{p}\cdot\vec{n}=2\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot3\neq0$. Олай болса $\vec{p}\not\perp\vec{n}$, демек, l түзуі мен α жазықтығы қиылысады, бірақ олар өзара перпендикуляр емес, себебі $\vec{p}\nparallel\vec{n}$. ■

2-мысал. Алдыңғы мысалдағы l түзуі мен α жазықтығының қиылысу нүктесін табу керек.

▲ l түзуінің параметрлік теңдеуін алған ыңғайлы: $x=2t+1$, $y=3t-1$, $z=t$. α жазықтығы мен l түзуінің қиылысу нүктесінің координаталарын табу үшін осы параметрлік теңдеу мен жазықтық теңдеуін бір жүйеге алып, x, y, z шамаларының мәндерін табамыз:

$$\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-1, \\ z=-2t, \\ x-y+3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow (2t+1)-(3t-1)+3t+2=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2t+4=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow x=2(-2)+1=-3$, $y=3\cdot(-2)-1=-7$, $z=-2$. Сонымен, l түзуі мен α жазықтығы $M(-3;\ -7;\ -2)$ нүктесінде қиылысады. ■

2.2.2. Екі жазықтықтың өзара орналасуы

Топтық жұмыс

1-тапсырма:	2-тапсырма:
1) $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ 3x+y-z+1=0; \end{cases}$	1) $\begin{cases} x-y+3z-6=0, \\ y+z-3=0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ 2x-4y+2z+7=0; \end{cases}$	2) $\begin{cases} x-y+3z-6=0, \\ 2x-2y+6z+6=0; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ -2x+4y-2z+6=0. \end{cases}$	3) $\begin{cases} x-y+3z-6=0, \\ -2x+2y-6z+12=0. \end{cases}$

1) Жүйедегі теңдеулер кеңістікте қандай фигураны анықтайды?

2) Берілген теңдеулер жүйесі кеңістікте түзуді анықтай ма? Түзуді анықтайтын және анықтамайтын жүйелерді ажыратып көрсетіңдер. Жауаптарыңды негіздеңдер.

3) Егер түзу анықталса, жүйедегі теңдеулермен анықталатын жазықтықтар өзара қалай орналасады? Олардың нормаль векторлары жөнінде не айтуға болады?

4) Егер түзу анықталмаса, жүйедегі теңдеулермен анықталатын жазықтықтар өзара қалай орналасады? Олардың нормаль векторлары жөнінде не айтуға болады?

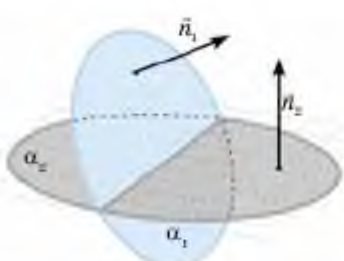
5) Егер жүйедегі теңдеулердің барлық коэффициенттері мен бос мүшелері өзара пропорционал болса, сәйкес жазықтықтар жөнінде не айтуға болады?

Осы сұрақтарға жауап бере отырып, кеңістікте екі жазықтықтың өзара орналасуы бойынша қорытынды жасаңдар.

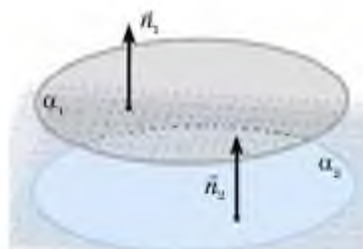
α_1 және α_2 жазықтықтары сәйкесінше $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ және $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ теңдеулерімен берілсе, бұл жазықтықтардың нормаль векторлары — $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ және $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$.

1) $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \Rightarrow \alpha_1$ және α_2 жазықтықтары түзу бойымен қиылысады (2.10-сурет). Бұл жағдайда $\vec{n}_1$ және $\vec{n}_2$ векторлары коллинеар емес.

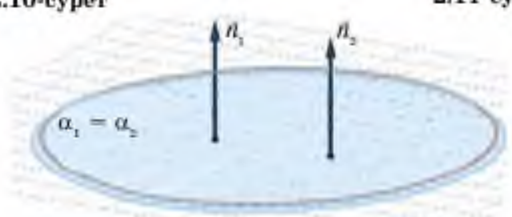
Дербес жағдайда, егер $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, яғни $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ болса, α_1 және α_2 жазықтықтары өзара перпендикуляр.



2.10-сурет



2.11-сурет



2.12-сурет
https://www.geogebra.org/classic/fvxsztuh

2) Егер $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$ болса, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ (2.11-сурет).

3) Егер $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ болса, жүйедегі екі теңдеумен бір жазықтық анықталады. Бұл жағдайда α_1 және α_2 жазықтықтары беттеседі (2.12-сурет).

2.2.3. Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуы

Топтық жұмыс

l_1 және l_2 түзулері кестеде көрсетілген теңдеулермен берілген. Сұрақтарға жауап беріңдер.

1) l_1 түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{p}_1$ мен түзуде жататын M_1 нүктесінің координаталарын табыңдар;

2) l_2 түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{p}_2$ мен түзуде жататын M_2 нүктесінің координаталарын табыңдар;

3) $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ және $\overline{M_1M_2}$ векторларының координаталарын салыстырыңдар;

4) $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$ жағдайында 2.1.2-бабындағы (5) формула бойынша $\vec{n}\perp\vec{p}_1$ және $\vec{n}\perp\vec{p}_2$ шарттарын қанағаттандыратын $\vec{n}$ векторының координаталарын табыңдар.

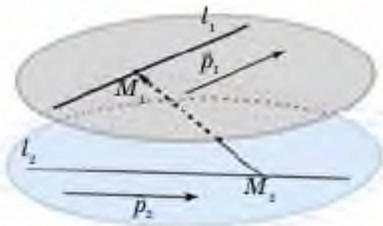
5) $\vec{n}$ векторына перпендикуляр және M_1 нүктесі арқылы өтетін α жазықтығының теңдеуін жазыңдар:

l_1 түзуінің теңдеуі	l_2 түзуінің теңдеуі
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{3}$
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$x=5-t$, $y=5+2t$, $z=2+3t$
$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{-2}$
$x=6+t$, $y=3-2t$, $z=-1-3t$	$x=5-t$, $y=5+2t$ $z=2+3t$

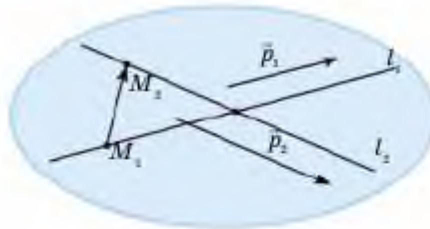
Сонымен,

1) $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ және $\overline{M_1M_2}$ компланар болмаса, l_1 және l_2 — айқас түзулер (2.13-сурет).

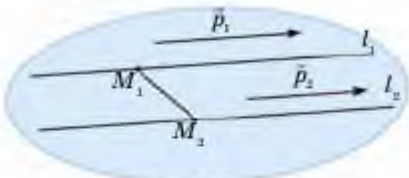
2) $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \overline{M_1M_2}$ — компланар векторлар және $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$ болса, l_1 және l_2 түзулері қиылысады (2.14-сурет).



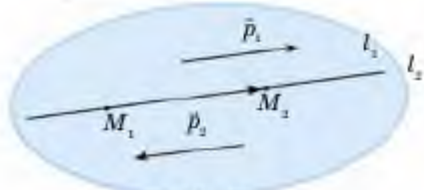
2.13-сурет



2.14-сурет



2.15-сурет



2.16-сурет

3) $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ және $\overrightarrow{p_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$ болса, $l_1 \parallel l_2$ (2.15-сурет).

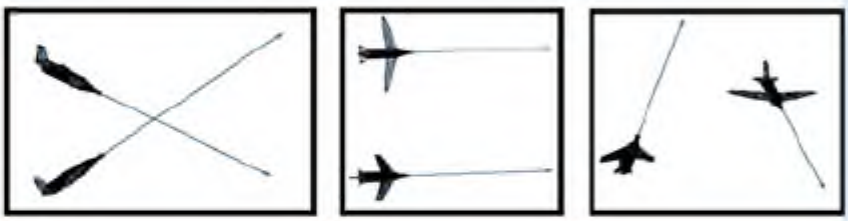
4) $\overrightarrow{p_1} \parallel \overrightarrow{p_2} \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow l_1 \equiv l_2$. Бұл жағдайда екі теңдеумен бір түзу анықталады (2.16-сурет).

1) Түзу мен жазықтықтың орналасу жағдайларының неше түрі бар? Барлық жағдайларды атап, оларға сәйкес келетін шарттарды жазыңдар және оларды талдап түсіндіріңдер.
2) Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін анықтау жолын сипаттап, түсіндіріңдер.
3) Кеңістікте екі жазықтық өзара қалай орналасады? Барлық жағдайларды атап, оларға сәйкес келетін шарттарды жазыңдар және оларды талдап түсіндіріңдер.
4) Кеңістікте екі түзу өзара қалай орналасады? Барлық жағдайларды атап, оларды түсіндіріңдер. Теңдеулері бойынша түзулердің өзара қалай орналасатынын анықтау жолын сипаттап түсіндіріңдер.

Практикалық жұмыс

Әуежолындағы ұшақтардың неліктен соқтығыспайтынын түсіндіріңдер.

Сұраққа жауап:
Ұшақтар айқас түзулер бойымен ұшқандықтан, соқтығыспайды.



ЕСЕПТЕР

А

Жұптық жұмыс (2.21 – 2.22):

2.21. $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі $ax + by + cz + d = 0$ жазықтығында жатуы үшін қандай шарт орындалуы қажет? Алынған нәтиже көмегімен $A(-1;\ -1;\ 1)$, $B(0;\ 2;\ 3)$, $C(6;\ 1;\ 0)$, $D(3;\ -2;\ -4)$, $E(1;\ 3;\ 2)$ нүктелерінің қайсысы $x - 2y + 3z - 4 = 0$ жазықтығында жататынын анықтаңдар.

2.22. $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{k}$ түзуінде жатуы үшін қандай шарт орындалуы қажет? Алынған нәтиже көмегімен $A(-1;\ 1;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ 1)$, $C(0;\ -3;\ -1)$, $D(3;\ 4;\ 2)$, $E(-1;\ -5;\ -1)$ нүктелерінің қайсысы $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{1}$ түзуінде жататынын анықтаңдар.

2.23. Түзу мен жазықтық өзара қалай орналасқан:

1) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ және $2x - y - 3z + 5 = 0$;

2) $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -1 + 2t$ және $2x + 3y + z - 9 = 0$;

3) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$ және $2x - 4y - 5z - 9 = 0$?

2.24. Кеңістікте екі жазықтық өзара қалай орналасқан:

1) $x + 2y - z - 1 = 0$ және $4x - 2y + 4z - 3 = 0$;

2) $2x - y + z - 4 = 0$ және $-6x + 3y - 3z + 8 = 0$;

3) $x + 2y - z - 1 = 0$ және $-2x - 4y + 2z - 2 = 0$?

2.25. Кеңістікте екі түзу өзара қалай орналасқан:

1) $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -1 + 2t$ және $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-3}{-6} = \dfrac{z-2}{-2}$;

2) $x = 3t,\ y = 1 - 2t,\ z = -2 + 3t$ және $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+2}{3}$?

2.26. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін табыңдар:

1) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ және $3x - 2y + z - 3 = 0$;

2) $x = 2t,\ y = 1 + t,\ z = 2t - 1$ және $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

2.27. M нүктесі арқылы өтетін және $3x - 2y + z - 3 = 0$ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін жазыңдар: 1) $M(1;\ 2;\ 3)$; 2) $M(2;\ 0;\ -2)$; 3) $M(4;\ -3;\ 1)$; 4) $M(3;\ 1;\ 1)$.

2.28. 1) Oxy; 2) Oxz; 3) Oyz координаталық жазықтығының теңдеуін жазыңдар.

2.29. 1) Ox; 2) Oy; 3) Oz координаталық өсінің теңдеуін жазыңдар.

2.30. Жазықтықтың координаталық өстермен қиылысу нүктелерін анықтаңдар. Ол үшін берілген теңдеуді жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі түрінде жазыңдар:

1) $3x + 2y + z - 6 = 0$; 2) $x - y - z + 3 = 0$;

3) $x + 3y - z - 6 = 0$; 4) $2x + y - 2z - 4 = 0$.

2.31. $M(3;\ 1;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және берілген түзуге параллель түзудің теңдеуін жазыңдар:

1) $\dfrac{x-3}{8} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{3}$; 2) $x = 2 - t,\ y = 15 + 2t,\ z = 3t - 5$;

3) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$; 4) $x = 7 + 5t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 4t$.

2.32. $M(3;\ 0;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және берілген жазықтыққа параллель жазықтықтың теңдеуін жазыңдар:

1) $x + 2y + z - 6 = 0$; 2) $x - y - 2z + 3 = 0$;

3) $x + 3y - 2z - 6 = 0$; 4) $2x + 3y - 2z - 4 = 0$.

2.33. $M(3;\ 0;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және 2.32-есепте берілген жазықтыққа перпендикуляр түзудің теңдеуін жазыңдар.

B

2.34. Кеңістікте берілген екі түзу қалай орналасады:

1) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$ және $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{2}$;

2) $x = 3t,\ y = 1 - 2t,\ z = -2 + 3t$ және $x = 1 + 2t,\ y = 1 - 2t,\ z = -1 + 2t$?

▲ 2) Түзуде жататын нүкте мен түзудің бағыттаушы векторын анықтайық. Бірінші l_1 түзуі үшін: $M_1(0;\ 1;\ -2)$, $\vec{p}_1(3; -2; 3)$; екінші l_1 түзуі үшін: $M_2(1;\ 1;\ -1)$, $\vec{p}_2(2; -2; 2)$. $\vec{p}_1$ және $\vec{p}_2$ векторларының координаталары пропорционал емес, яғни $l_1 \nparallel l_2$. Демек, бұл түзулер — айқас түзулер немесе қиылысатын түзулер. Оны анықтау үшін $\vec{n} \perp \vec{p}_1$ және $\vec{n} \perp \vec{p}_2$ шарттарын қанағаттандыратын $\overline{M_1M_2}$ векторы мен $\vec{n}$ векторын табайық:
$\overline{M_1M_2}(1; 0; 1)$, $\vec{n}(-2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2); 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2; 3 \cdot (-2) - (-2) \times 2) =$
$= (2; 0; -2)$.
$\vec{n} \cdot \overline{M_1M_2} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overline{M_1M_2}$, $\vec{n} \perp \vec{p}_1$, $\vec{n} \perp \vec{p}_2$. Осыдан бір векторға перпендикуляр үш коллинеар емес вектордың компланарлығы шығады. Олай болса, өзара параллель емес l_1 және l_2 түзулері бір жазықтықта жатады. Демек, олар қиылысады. ■

2.35. 1) $A(-1; -1; 1)$, 2) $B(0; 2; 3)$, 3) $C(6; 1; 0)$, 4) $D(3; -2; -4)$ нүктесі $x - 2y + z + d = 0$ жазықтығында жататындай етіп d бос мүшесін анықтаңдар. Кез келген нүкте үшін есептің шешімі бола ма? Тек бос мүшелерімен ғана ерекшеленетін теңдеулермен анықталатын жазықтықтар өзара қалай орналасады? Жауаптарыңды негіздеңдер.

2.36. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуын анықтаңдар. Олар қиылысатын жағдайда қиылысу нүктесін табыңдар:

1) $x = -1 + 2t$, $y = 3 + 4t$, $z = 3t$ және $2x - 2y + z - 5 = 0$;

2) $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ және $2x - y - 3z + 5 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 5y - 13, \\ 4y - z - 11 = 0 \end{cases}$ және $3x - y + 2z - 5 = 0$;

4) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-3}$ және $2x + 3y - z + 1 = 0$.

2.37. Кеңістікте $x = -1 + 2t$, $y = 3 + 4t$, $z = 3t$ түзуі арқылы өтетін және $2x + 3y - z + 1 = 0$ жазықтығына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

2.38. $M_0(1; 0; 1)$ нүктесінің

1) $\dfrac{x-3}{8} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{3}$; 2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$;

3) $x = 2 - t$, $y = 15 + 2t$, $z = 3t - 5$; 4) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$

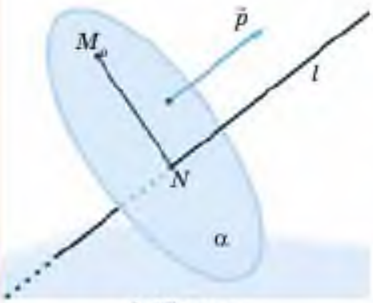
түзуіндегі проекциясын табыңдар.

▲ 4) есепті шешу үшін берілген түзудің бағыттаушы векторын табу керек. Оны екі түрлі тәсілмен анықтайды.

1-*тәсіл*: $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y+z-2=0 \end{cases}$ жүйесіндегі теңдеулердің әрқайсысы жазықтықты анықтайды. Олардың нормаль векторлары, сәйкесінше, $\vec{n}_1(1;-2;0)$ және $\vec{n}_2(0;3;1)$. (5) формула бойынша (п.2.1.3) $\vec{p}(2;1;-3)$. Енді $M_0(1;\ 0;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{p}$ векторына перпендикуляр α жазықтығының теңдеуін жазамыз:

$$2(x-1)+1(y-0)-3(z-1)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x+y-3z+1=0$. M_0 нүктесінің берілген түзу бойындағы проекциясы (N нүктесі, 2.17-сурет) осы жазықтық пен берілген түзудің қиылысу нүктесі болып табылады. Бұл нүктені анықтау үшін мына жүйені шешу керек:



2.17-сурет

(https://www.geogebra.org/classic/yeztxbkf)

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-2=0, \\ 2x+y-3z+1=0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2y-3, \\ z=-3y+2, \\ 2(2y-3)+y-3(-3y+2)+1=0; \end{cases} \Rightarrow 14y-11=0 \Rightarrow y=\frac{11}{14};$$

$x=-\dfrac{10}{7}$; $z=-\dfrac{5}{14}$.

Жауабы: $N\left(-\dfrac{10}{7};\ \dfrac{11}{14};\ -\dfrac{5}{14}\right)$.

2-*тәсіл*: Берілген түзу бойынан кез келген A және B нүктелерін алып, $\overrightarrow{AB}$ векторын α жазықтығының нормаль векторы ретінде қабылдауға болады. $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-2=0 \end{cases}$ жүйесінде үш белгісіз және екі теңдеу бар. Сондықтан бір айнымалының мәнін қалауымызша аламыз. $y_1=0$ деп алсақ, $x_1=-3$, $z_1=2$. Бір нүктенің, айталық A нүктесінің координаталары табылды: $A(-3;\ 0;\ 2)$. $y_2=1$ деп алсақ, $x_2=-1$, $z_2=-1$, яғни $B(-1;\ 1;\ -1)$. Онда $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(2;1;-3)$ және бізге қажет α жазықтығының теңдеуі $2x+y-3z-1=0$ түрінде жазылып, есептің шешуі әрі қарай көрсетілген тәсілмен жалғасады.

Жауабы: $N\left(-\dfrac{10}{7};\ \dfrac{11}{14};\ -\dfrac{5}{14}\right)$. ■

2.39. Oz өсіне параллель және $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 0;\ 1)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

C

2.40. Түзулердің айқас орналасатынын көрсетіп, олардың әрқайсысы арқылы өтетін және екіншісіне параллель жазықтықтың теңдеуін жазыңдар:

1) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+3}{3}$ және $\begin{cases} x+2y+3=0, \\ 3y+z=0; \end{cases}$

2) $x=-1+t,\ y=t,\ z=1+2t$ және $\begin{cases} y=3x-1, \\ z=4x+2. \end{cases}$

2.41. $A(1;\ 2;\ 4)$ нүктесі мен $2x-y+3z-6=0$, $x+2y-z+3=0$ жазықтықтарының қиылысу сызықтары арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

2.42.* Кеңістікте $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$ түзуі $ABCD$ параллелограмының AB қабырғасы, $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$ түзуі AC диагоналі арқылы өтеді. $C\ (3;\ 2;\ 1)$ нүктесі параллелограмның төбесі болуы мүмкін бе? Егер мүмкін болса, 1) параллелограмның өзге төбелерінің координаталарын; 2) параллелограмм диагональдарының қиылысу нүктесін табыңдар; 3) параллелограмның өзге қабырғалары арқылы өтетін түзулердің канондық теңдеуін жазыңдар.

2.43. Пирамиданың ортақ төбесі бар үш жағы жатқан жазықтықтардың теңдеулері берілген: $x-2y+3=0$, $3y+z-1=0$, $2x+y-z-1=0$. Пирамиданың осы төбесінің координаталарын табыңдар.

▲ Бір төбеден өтетін, яғни бір қиылысу нүктесі бар пирамиданың үш бүйір жағы жатқан жазықтықтардың теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-1=0, \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases}$$

Оны $A\ (x,y,z)$ нүктесі арқылы белгілейміз және берілген төбенің координаталарын табамыз.

Шешуі:

1) Жүйедегі бірінші өрнекті (-2) санына көбейтеміз және оны үшінші өрнекке қосамыз:

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \quad \big|\cdot(-2) \\ 3y+z-1=0, \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}-2x+4y-6=0, \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0.\end{cases} \Big| (1)+(3) \quad \Leftrightarrow \begin{cases}5y-z-7=0, \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0.\end{cases}$$

2) Енді бірінші өрнекке $z = 1 - 3y$ теңдеуін қойып, A (x,y,z) төбесінің координаталарын табамыз:

$$\begin{cases}5y-(1-3y)-7=0, \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8y=8, \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=1, \\ z=-2, \\ x=-1.\end{cases}$$

3) Төбенің координаталары $A(-1,\ 1,\ -2)$;

4) $3D$ суретке сілтеме:

https://www.geogebra.org/classic/udfrmfhd ■

Қайталауға арналған жаттығулар

2.44. 1) $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(3;2;1)$; 2) $\vec{a}(-2;3;4)$, $\vec{b}(5;0;2)$.

Табу керек: $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

2.45. $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болса, ABC үшбұрышының түрін анықтаңдар: 1) a=8, b=6, c=10; 2) a=4, b=5, c=6; 3) a=5, b=6, c=9. Жауаптарыңды негіздеңдер.

2.3. Кеңістіктегі қашықтықтарды анықтау

Тақырыпты оқып-үйрену барысында:

- **нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты анықтауды үйреніп, оны есептер шығарғанда қолданасыңдар;**
- **нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты анықтау формуласын қорытып шығарасыңдар және оны есептер шығарғанда қолданасыңдар.**

2.3.1. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

Топтық жұмыс

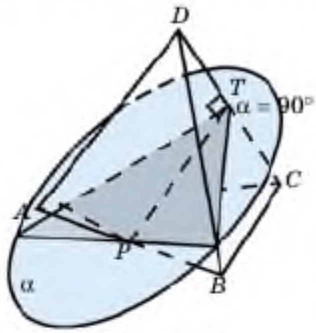
Түзуден тысқары орналасқан нүктеден осы түзуге дейінгі қашықтықты қалай анықтауға болатынын ойластырып, нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты анықтау алгоритмін тұжырымдаңдар. Алынған нәтиже бойынша келесі тапсырманы орындаңдар: $A(1;\ 2;\ 3)$ нүктесінен төменде берілген түзуге дейінгі қашықтықты анықтаңдар:

1-топ тапсырмасы	2-топ тапсырмасы
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$x = 5 - t,\ y = 5 + 2t,$ $z = 2 + 3t$
3-топ тапсырмасы	**4-топ тапсырмасы**
$\begin{cases} x+2y+3=0, \\ 3y+z=0; \end{cases}$	$\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{-2}$
5-топ тапсырмасы	**6-топ тапсырмасы**
$x = 6 + t,\ y = 3 - 2t,$ $z = -1 - 3t$	$\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ 2x-4y+2z+7=0; \end{cases}$

Сонымен, *l түзуінен тысқары орналасқан A нүктесінен осы түзуге дейінгі* ***қашықтық*** *деп A нүктесінен l түзуіне түсірілген перпендикулярдың табанына дейінгі қашықтықты айтады.* Осы қашықтықты анықтау үшін 1) *A нүктесі арқылы l түзуіне перпендикуляр өтетін α жазықтығының теңдеуін жазу керек;* 2) *l түзуі мен α жазықтығының қиылысу нүктесі B-ның координаталарын анықтаймыз;* 3) *A нүктесінен B нүктесіне дейінгі қашықтықты табамыз.* Бұл бізге қажет қашықтық.

1-мысал. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасы төбелерінің координаталары берілген: $A(1;\ -2;\ 5)$, $B\ (-3;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 1)$ және $D(-3;\ 1;\ 4)$. AB қырының ортасынан CD түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

▲Алдымен AB кесіндісінің ортасы P нүктесі және $\overline{CD}$ векторы координаталарын анықталық: $x_p=\frac{1-3}{2}=-1;$ $y_p=\frac{-2+0}{2}=-1;$ $z_p=\frac{5+0}{2}=2,5$. Олай болса, $P(-1;\ -1;\ 2,5)$, $\overline{CD}(-3-0;\ 1-0;\ 4-1) = \overline{CD}\,(-3;\ 1;\ 3)$. Енді P нүктесі арқылы өтетін және $\overline{CD}$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазамыз: $-3(x+1)+(y+1)+$ $+3(z-2{,}5)=0 \Rightarrow 3x-y-3z+9{,}5=0$. Осыдан кейін CD түзуінің параметрлік теңдеуін жазамыз: $x=-3t$, $y=t$, $z=3t+1$. Соңында, мына жүйені шешеміз:



2.18-сурет
https://www.geogebra.org/classic/bjwn5asb

$$\begin{cases} x=-3t, \\ y=t, \\ z=3t+1, \\ 3x-y-3z+9{,}5=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3\cdot(-3t)-t-3\cdot(3t+1)+9{,}5=0 \Rightarrow t=\frac{65}{190}.$$

$\Rightarrow x=-1\frac{5}{190};\ y=\frac{65}{190};\ z=2\frac{5}{190}$, яғни (2.18-сурет) $T\left(-1\frac{5}{190};\frac{65}{190};2\frac{5}{190}\right)$. Енді PT-ны табамыз:

$$PT=\sqrt{\left(-1\frac{5}{190}+1\right)^2+\left(\frac{65}{190}+1\right)^2+\left(2\frac{5}{190}-2{,}5\right)^2}=\sqrt{\frac{(-5)^2}{190^2}+\frac{255^2}{190^2}+\frac{(-90)^2}{190^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{25+8100+255^2}{190^2}}=\sqrt{\frac{73150}{190\cdot190}}=\sqrt{\frac{77}{38}}=1{,}42.$$

2.3.2. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

Топтық жұмыс

Жазықтық бойында жатпайтын нүктеден осы жазықтыққа дейінгі қашықтық деп нені айтуға болатынын ойластырып, түсіндіріңдер. Ол үшін жазықтыққа нүктеден түсірілген перпендикулярдың табаны ұғымын естеріңе түсіріңдер және осы айтылған қашықтық ұғымына анықтама беріңдер. Нәтижесін сыныппен бірге талқылаңдар, қорытынды жасаңдар. Осы қашықтықты анықтау алгоритмін құрыңдар.

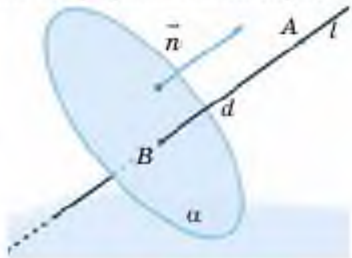
Сонымен, *α жазықтығынан тысқары орналасқан A нүктесінен осы жазықтыққа дейінгі* **қашықтық** *деп A нүктесінен α жазықтығына түсірілген перпендикулярдың табанына дейінгі қашықтықты айтамыз.* Осы қашықтықты анықтау үшін: 1) *A нүктесі арқылы α жазықтығына перпендикуляр жүргізілген l түзуінің теңдеуін жазу керек;* 2) *l түзуі мен α жазықтығының қиылысу нүктесі B-ның координаталарын анықтайды;* 3) *A нүктесінен B нүктесіне дейінгі қашықтықты табады.* Бұл бізге қажет қашықтық.

Енді, жалпы жағдайда, осы қашықтықты анықтайтын формуланы қорытып шығарайық:

Айталық, бізге $ax + by + cz + d = 0$ теңдеуімен α жазықтығы және осы жазықтықта жатпайтын $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі берілсін. Онда A нүктесі арқылы өтетін және α жазықтығына перпендикуляр l түзуіне $\vec{n}(a; b; c)$ векторы бағыттаушы вектор болады (2.19-сурет). Сондықтан l түзуінің параметрлік теңдеуі былай жазылады: $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + zt$. Енді осы түзу мен α жазықтығының қиылысу нүктесі B-ның координаталарын табу үшін мына жүйені шешу қажет:

$$\begin{cases} x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct, \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d + t(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$.



2.19-сурет

3D бейнеге сілтеме: https://www.geogebra.org/classic/yeztxbkf

Енді жазу көлемін қысқарту үшін $P = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ деп белгілеп аламыз. Сонда B-ның координаталары былай анықталады: $x = x_0 + aP$, $y = y_0 + bP$, $z = z_0 + cP$, яғни $B(x_0 + aP;\ y_0 + bP;\ z_0 + cP)$. Олай болса,

$$AB = \sqrt{(x_0 + aP - x_0)^2 + (y_0 + bP - y_0)^2 + (z_0 + cP - z_0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(aP)^2 + (bP)^2 + (cP)^2} = |P|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \left|-\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Сонымен, A нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтықты h арқылы белгілеп, біз мына формуланы дәлелдедік:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (1)$$

2-мысал. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасының төбелерінің координаталары берілген: $A(1; 3; 0)$, $B(4; -1; 2)$, $C(3; 0; 1)$ және $D(4; 3; 5)$. Пирамиданың D төбесінен түсірілген биіктігінің ұзындығын табу керек.

▲ Алдымен ABC жағының теңдеуін жазамыз. Ол үшін $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларына перпендикуляр $\vec{n}$ векторының координаталарын анықтаймыз. $\overrightarrow{AB}(3; -4; 2)$ және $\overrightarrow{AC}(2; -3; 1)$ болғандықтан, (5) формула (п.2.1.2) бойынша

$$\vec{n}(-4+6;\ 4-3;\ -9+8) = \vec{n}(2;\ 1;\ -1)$$

векторы ABC жазықтығының нормаль векторы болады Сондықтан бұл жазықтықтың теңдеуі былай жазылады:

$$2(x-1)+(y-3)-(z-0)=0 \Rightarrow 2x+y-z-5=0.$$

Пирамиданың D төбесінен түсірілген биіктігі DH болса, (1) формула бойынша

$$DH=\frac{|2\cdot4+1\cdot3-1\cdot5-5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Жауабы: $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ■

1. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық деп нені түсінесіңдер? Оны анықтау алгоритмін сипаттап, түсіндіріңдер.
2. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық деп нені түсінесіңдер? Оны анықтау формуласын сипаттап, түсіндіріңдер және осы формуланы қорытып шығарыңдар.

ЕСЕПТЕР

A

2.46. $A(1; 2; 3)$ нүктесінен 1) $3x-y-3z-3=0$; 2) $2x+y+3z-7=0$; 3) $2x-y+3z+9=0$; 4) $3x-4y+8=0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.47. 1) $A(2; 0; -3)$; 2) $B(0; 3; 1)$; 3) $C(-1; 1; 3)$; 4) $D(-2; 1; 4)$ нүктесінен $2x+y+3z-7=0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.48. $A(1; 2; 3)$ нүктесінен 1) $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{-2}$; 2) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$; 3) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{2}$; 4) $x=6+t$, $y=5+2t$, $z=2+3t$ түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

2.49. 1) $A(2; 0; -3)$; 2) $B(0; 3; 1)$; 3) $C(-1; 1; 3)$; 4) $D(-2; 1; 4)$ нүктесінен $x=6+t$, $y=5+2t$, $z=2+3t$ түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

B

2.50. $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ және $\begin{cases} x-2y+2z-8=0, \\ x+6z-6=0 \end{cases}$ түзулерінің параллель екенін көрсетіп, олардың арақашықтығын табыңдар.

2.51. m-нің қандай мәндерінде $\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ түзуі мен $3x+4y+2z-5=0$ жазықтығы өзара параллель болады? Олардың арақашықтығын табыңдар.

Жұптық жұмыс (2.52 – 2.53):

2.52. Параллель түзулер арасындағы қашықтықты қалай табуға болады? Осы қашықтықты анықтау алгоритмін жазыңдар және нәтижесін сыныппен бірге талқылаңдар. Төмендегі параллель түзулердің арақашықтығын табыңдар:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-2}$ және $x=6+2t$, $y=5+3t$, $z=2-2t$;

2) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{1}$ және $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-5}{1}$.

2.53. Параллель жазықтықтар арасындағы қашықтықты қалай табуға болады? Осы қашықтықты анықтау алгоритмін жазыңдар және нәтижесін сыныппен бірге талқылаңдар. Төмендегі параллель жазықтықтардың арақашықтығын табыңдар:

1) $2x-y+3z-5=0$ және $2x-y+3z+7=0$;

2) $x+y-3z+4=0$ және $2x+2y-6z-9=0$.

2.54. Егер α_1 және α_2 параллель жазықтықтары сәйкесінше $ax+by+cz+d_1=0$ және $ax+by+cz+d_2=0$ теңдеулерімен берілсе, бұл жазықтықтардың арақашықтығы

$$d=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

формуласымен анықталатынын көрсетіңдер.

▲ Айталық, $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)\in\alpha_1$ болсын. Бізге қажет d қашықтығы былай анықталады:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Мұнда $ax_0+by_0+cz_0+d_1=0\Rightarrow ax_0+by_0+cz_0=-d_1$ болғандықтан,

$$d=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\ ■$$

C

2.55. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасы төбелерінің координаталары берілген: $A(2;\,0;\,-3)$, $B(0;\,3;\,1)$, $C(-1;\,1;\,3)$, $D(-2;\,1;\,4)$. Оның әр төбесінен түсірілген биіктігінің ұзындығын табыңдар.

2.56. $A(2; 0; -3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-1; 1; 3)$ нүктелері $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің төменгі табанының, $A_1(5; 2; 4)$ — жоғарғы табанының төбелері. Параллелепипедтің 1) өзге төбелерінің координаталарын; 2) табандары арқылы өтетін жазықтықтардың теңдеулерін; 3) биіктігінің ұзындығын (табандарының арақашықтығын) табыңдар.

2.57.* l_1 және l_2 айқас түзулерінің арақашықтығы деп нені түсінесіңдер? Осы қашықтық ретінде екі түзудің нүктелері арасындағы қашықтықтардың ең қысқасын алуға бола ма? Болса, оны қалай табады? Осы қашықтықты анықтау алгоритмін құрыңдар және оны сыныппен бірге талқылаңдар. $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} x = 2, \\ y = 2 \end{cases}$ түзулерінің айқас орналасқанын көрсетіп, олардың арақашықтығын табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

2.58. $A(2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(-1; 1)$ нүктелері — ABC үшбұрышының төбелері. Үшбұрыш бұрыштарының косинусын табыңдар.

2.59. Ромбының қабырғасы оның диагональдарымен өзара 4:5 қатынасындай бұрыштар жасайды. Ромб бұрыштарын табыңдар.

2.60. Төбесіндегі бұрышы $120°$ болатын теңбүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің диаметрі 18 см. Үшбұрыштың бүйір қабырғасын табыңдар.

2.4. Кеңістіктегі бұрыштарды анықтау

Бұл тақырыпты оқу-үйрену барысында:

- **түзулердің теңдеулері бойынша олардың арасындағы бұрышты таба білесіңдер;**
- **координаталардағы түзулердің параллельдігі мен перпендикулярлығы шартын есептер шығарғанда қолдана білесіңдер;**
- **түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты таба білесіңдер;**
- **екі жазықтық арасындағы бұрышты таба білесіңдер.**

2.4.1. Түзулер арасындағы бұрыш

Топтық жұмыс

Бізге канондық теңдеулермен l_1 және l_2 түзулері берілсін:

$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{k_1}$ және $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{k_2}$. Осы l_1 және l_2 түзулері арасындағы бұрышты қалай табуға болатынын ойластырыңдар. Осы бұрышты анықтағанда $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ және $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторларын қалай қолдануға болады? Әдетте, атап көрсетілмесе, екі түзу арасындағы бұрыш ретінде сүйір бұрыш алынады. Осы мәліметті ескеріңдер. Жауаптарыңды сыныппен бірге талқылаңдар. Келесі l_1 және l_2 түзулері арасындағы бұрышты табыңдар:

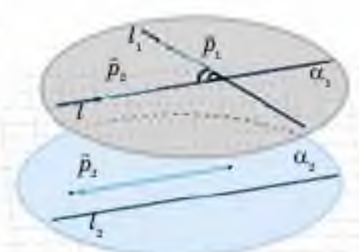
l_1 түзуінің теңдеуі	l_2 түзуінің теңдеуі
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{3}$
$\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{3}$	$x=5-t,\ y=5+2t,$ $z=2+3t$
$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-2}{1}$
$x=6+2t,\ y=3-2t,\ z=-1-3t$	$x=5+t,\ y=5+2t,\ z=2+2t$

Сонымен, $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ және $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторлары арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos\left(\widehat{\vec{p}_1, \vec{p}_1}\right)=\frac{m_1m_2+n_1n_2+k_1k_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+k_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+k_2^2}}$$

формуласымен анықталады.

Мұндағы $\vec{p}_1$ және $\vec{p}_2$ векторлары арасындағы бұрыш олардың бағытына байланысты сүйір де, доғал да, ал $\cos\left(\widehat{\vec{p}_1, \vec{p}_2}\right)$ мәні оң да, теріс те болуы мүмкін. l_1 және l_2 түзулері арасындағы бұрыш доғал емес деп саналғандықтан, бұл бұрыштың косинусын мына формуламен анықтау қажет (2.20-сурет):



2.20-сурет

$$\cos\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + k_1k_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}. \quad (1)$$

Егер $l_1 \perp l_2$ болса,

$$m_1m_2 + n_1n_2 + k_1k_2 = 0. \quad (2)$$

Егер $l_1 \parallel l_2$ болса, бұл түзулердің бағыттаушы векторларының координаталары өзара пропорционал:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (3)$$

2.4.2. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш

Топтық жұмыс

Айталық, $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$ теңдеуімен l түзуі және $ax + by + cz + d = 0$ теңдеуімен α жазықтығы берілсін. Мына сұрақтарға жауап беріңдер:

• түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш деп нені түсінесіңдер? Түзудің жазықтықтағы проекциясы деп нені айтады?

• Түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты анықтау үшін $\vec{p}(m; n; k)$ және $\vec{n}(a; b; c)$ векторларын қалай қолдануға болады? Жауаптарыңды негіздеп, оны сыныппен бірге талқылаңдар. Талқылау нәтижесін пайдаланып, төмендегі теңдеулермен берілген түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты анықтаңдар.

l түзуінің теңдеуі	α жазықтығының теңдеуі
$\frac{x-3}{8} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{3}$	$x + 2y + z - 6 = 0$
$x = 2 - t,\ y = 15 + 2t,\ z = 3t - 5$	$x - y - 2z + 3 = 0$
$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$	$x + 3y - 2z - 6 = 0$
$x = 7 + 5t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 4t$	$2x + 3y - 2z - 4 = 0$

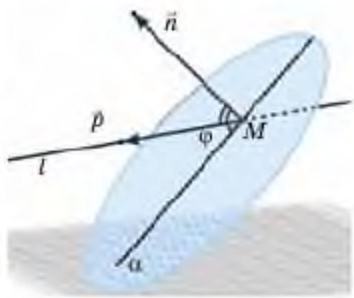
Сонымен, егер l түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{p}(m; n; k)$, α жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}(a; b; c)$ болса, осы векторлар арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos\left(\widehat{\vec{p}, \vec{n}}\right) = \frac{ma + nb + kc}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Мұндағы $\vec{p}$ және $\vec{n}$ векторлары арасындағы бұрыш олардың бағытына байланысты сүйір де, доғал да, яғни $\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)$ мәні оң да, теріс те болуы мүмкін. Сонда $\vec{p}$ және $\vec{n}$ векторларының арасындағы сүйір бұрыштың косинусы

$$\left|\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right| = \frac{|ma+nb+kc|}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

l түзуі және α жазықтығы арасындағы бұрышты φ деп алсақ, бұл бұрыш үшін $\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)$ теңдігі орындалады (2.21-сурет). Бұрыштың сүйір екенін ескерсек, $\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right) = \left|\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right|$ теңдігін аламыз. Олай болса, l түзуі және α жазықтығы арасындағы бұрыштың синусы мына формуламен анықталады:



2.21-сурет

$$\sin\varphi = \frac{|ma+nb+kc|}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (4)$$

Егер $l \parallel \alpha$ болса,

$$ma + nb + kc = 0 \qquad (5)$$

теңдігі орындалады. $l \perp \alpha$ жағдайында $\vec{p} \parallel \vec{n}$. Олардың координаталары өзара пропорционал:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}. \qquad (6)$$

2.4.3. Жазықтықтар арасындағы бұрыш

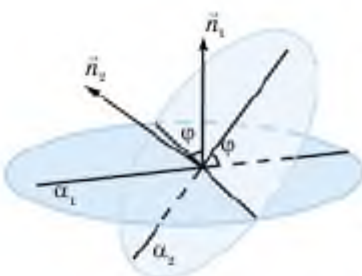
Топтық жұмыс

Кеңістікте α_1 және α_2 жазықтықтарының теңдеулері берілсін: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ және $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Осы жазықтықтар арасындағы бұрышты анықтау тәсілін ойластырыңдар. Мұндағы $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ және $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ нормаль векторларын қалай қолдануға болады? Жауаптарыңды негіздеп, сыныппен бірге талқылаңдар. Талқылау қорытындысы бойынша төмендегі теңдеулермен берілген α_1 және α_2 жазықтықтарының арасындағы екіжақты бұрыштың шамасын анықтаңдар:

α_1 жазықтығының теңдеуі	α_2 жазықтығының теңдеуі
$x + 2y + z - 6 = 0$	$4x - y - 2z + 3 = 0$
$5x + 3y - 2z - 6 = 0$	$2x + 3y - 2z - 4 = 0$
$x - 2y + z - 3 = 0$	$3x + y - z + 1 = 0$
$x - 2y + z - 3 = 0$	$2x - 4y + 2z + 7 = 0$

Сонымен, егер α_1 және α_2 жазықтықтарының нормаль векторлары $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ және $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ болса, осы векторлардың арасындағы бұрыштың косинусы былай анықталады:

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$



2.22-сурет

Мұндағы $\vec{n}_1$ және $\vec{n}_2$ векторлары арасындағы бұрыш олардың бағытына байланысты сүйір де, доғал да, ал $\cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right)$ шамасының мәні оң да, теріс те болуы мүмкін (2.22-сурет). Сондықтан α_1 және α_2 жазықтықтарының арасындағы екіжақты бұрыштың косинусы мына формуламен анықталады:

$$\cos\left(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}\right) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \qquad (7)$$

$\alpha_1 \parallel \alpha_2$ жағдайында сәйкес теңдеулердің коэффициенттері пропорционал:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \qquad (8)$$

$\alpha_1 \perp \alpha_2$ жағдайында

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \tag{9}$$

1-мысал. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасы төбелерінің координаталары берілген: $A(2; 0; -3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-1; 1; 3)$, $D(-2; 1; 4)$. 1) $\angle ABC$ бұрышын; 2) AD түзуі мен ABC жағы арасындағы бұрышты; 3) ABC және ABD жақтары арасындағы екіжақты бұрышты табу керек.

▲ 1) ABC үшбұрышында доғал бұрыштар болуы мүмкін. Сондықтан $\angle ABC$ бұрышын $\overline{BA}$ және $\overline{BC}$ векторлары арасындағы бұрыш ретінде анықтау қажет. Мұндағы $\overline{BA}$ $(2; -3; -4)$ және $\overline{BC}$ $(-1; -2; 2)$, $\left|\overline{BA}\right| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$ және $\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$ болғандықтан, екі вектордың арасындағы бұрышты табу формуласы бойынша

$$\cos(\angle ABC) = \frac{2\cdot(-1)+(-3)\cdot(-2)+(-4)\cdot 2}{\sqrt{29}\cdot 3} = \frac{-4}{3\sqrt{29}} = -\frac{4\sqrt{29}}{87}.$$

Бұрышты табу үшін осы бұрыштың косинусын, не синусын, не тангенсін тапса жеткілікті деп түсіну қажет. Қажет жағдайда бұл бұрыштың жуық мәні кестеден алынады.

2) AD түзуі мен ABC жағының арасындағы бұрышты табу үшін олардың теңдеулерін жазып алу керек. $\overline{AD}(-4; 1; 7)$ болғандықтан, AD түзуінің теңдеуі былай жазылады: $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+3}{7}$.

$\overline{BA}$ $(2; -3; -4)$ және $\overline{BC}$ $(-1; -2; 2)$ болғандықтан, ABC жағының нормаль векторы былай жазылады: $\vec{n}_1(-6; -8; 4-4; -4-3) = (-14; 0; -7)$. Енді -7-ге қысқартып, нормаль вектор ретінде $\vec{n}_1$ $(2; 0; 1)$ векторын аламыз. Сонымен, ABC жағының теңдеуі былай жазылады: $2(x-2) + 0(y-0) + (z+3) = 0 \Rightarrow 2x + z - 1 = 0$. Онда бізге қажет φ бұрышы:

$$\sin\varphi = \frac{|-4\cdot 2 + 1\cdot 0 + 7\cdot 1|}{\sqrt{4^2+1^2+7^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{330}}{330}.$$

3) ABC жағының теңдеуін біз білеміз: $2x + z - 1 = 0$. Енді ABD жағының теңдеуін жазу керек. $\overline{AD}(-4;\ 1;\ 7)$ және $\overline{AB}(-2;\ 3;\ 4)$ болғандықтан, ABD жағының нормаль векторы былай жазылады: $\vec{n}(4 - 21;\ -14 + 16;\ -12 + 2) = \vec{n}(-17;\ 2;\ -10)$. Онда ABD жағының теңдеуі $-17(x - 2) + 2y - 10(z + 3) = 0 \Rightarrow 17x - 2y + 10z - 4 = 0$ түрінде жазылады. Сонымен, бұл екіжақты бұрыш γ болса,

$$\cos\gamma = \frac{|2\cdot 17 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 10|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17^2 + 2^2 + 10^2}} = \frac{44}{\sqrt{1965}} = \frac{44\sqrt{1965}}{1965}.$$

Жауабы: 1) $\cos(\angle ABC) = \dfrac{-4\sqrt{29}}{87}$; 2) $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{330}}{330}$.

3) $\cos\gamma = \dfrac{44\sqrt{1965}}{1965}$. ■

1. Берілген теңдеулері бойынша екі түзудің арасындағы бұрыш қалай анықталады? Айқас түзулер арасындағы бұрыш ретінде қай бұрыш алынады?
2. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш қалай анықталады? Формуласын жазып, оны түсіндіріңдер.
3. Берілген теңдеулері бойынша екі жазықтық арасындағы бұрыш қалай анықталады? Формуласын жазып, оны түсіндіріңдер.
4. Үшбұрыштың бұрыштарын оның сәйкес қабырғалары арқылы өтетін түзулердің теңдеулері көмегімен анықтаудың тиімсіз тұсы қандай? Жауаптарыңды негіздеңдер. $\angle ABC$ бұрышын анықтау үшін қандай векторларды қолдану қажет?

ЕСЕПТЕР

А

2.61. Берілген түзулер арасындағы бұрышты табыңдар:

1) $\dfrac{x-3}{8} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{3}$ және $x = 2 - t,\ y = 15 + 2t,\ z = 3t - 5$;

2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$ және $x = 7 + 5t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 4t$.

2.62. Жазықтықтар арасындағы бұрыштың шамасын табыңдар:

1) $x + 2y + z - 6 = 0$ және $x - y - 2z + 3 = 0$;

2) $x + 3y - 2z - 6 = 0$ және $2x + 3y - 2z - 4 = 0$.

2.63. Екі түзу арасындағы бұрышты анықтаңдар:

1) $\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-5}{3}$ және $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{3}$;

2) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-5}{1}$ және $x = 2 - 2t$, $y = 1 + 3t$, $z = 3t - 2$;

3) $x = 7 + 5t$, $y = 4 + t$, $z = 5 + 4t$; және $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$;

4) $x = 5t$, $y = 4 + 2t$, $z = 1 - 4t$ және $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = 3t - 1$.

2.64. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты анықтаңдар:

1) $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+5}{5}$ және $x + 2y + 3z + 6 = 0$;

2) $x = 2 - t$, $y = 15 + 2t$, $z = 3t - 5$ және $2x + y - 2z - 6 = 0$;

3) $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-2}{1}$ және $x - 5y - 2z + 4 = 0$;

4) $x = 2 - 3t$, $y = 4 - t$, $z = -1 + 4t$ және $x + y - 2z - 1 = 0$.

2.65. Екі жазықтық арасындағы бұрышты анықтаңдар:

1) $2x - 5y - 2z + 4 = 0$ және $x + 2y + z - 6 = 0$;

2) $x + 2y - 2z - 1 = 0$ және $4x - y - 2z + 3 = 0$;

3) $2x + y - 2z - 6 = 0$ және $x + 3y - 2z - 6 = 0$;

4) $3x + 2y - z + 6 = 0$ және $2x + 3y - 2z - 4 = 0$.

B

2.66. $x - 2y + 2z - 5 = 0$ жазықтығына параллель болатын және бұл жазықтықтан 1) 2-ге; 2) 4-ке; 3) 5-ке; 4) 8-ге тең қашықтықта өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

▲ 1) $x - 2y + 2z - 5 = 0$ — берілген жазықтық. Бізге қажет жазықтықтың теңдеуі де $x - 2y + 2z + d = 0$ түрінде жазылады (оны негіздеңдер). Сонда бұл екі жазықтықтың арақашықтығы былай есептеледі (2.54-есепті қараңдар):

$$2 = \frac{|d+5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|d+5|}{3} \Rightarrow |d+5| = 6 \Rightarrow d_1 = -11,\ d_2 = 1.$$

Бізге қажет жазықтықтың теңдеуі былай жазылады:

$x - 2y + 2z - 11 = 0$ немесе $x - 2y + 2z + 1 = 0$.■

2.67. $\begin{cases} 2x + y - 4z + 1 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ түзуі және $M_0(2;\ 3;\ -1)$ нүктесі мен координаталар бас нүктесі арқылы өтетін түзудің арасындағы бұрышты табыңдар.

2.68. $M_0(2;\ 0;\ -2)$ нүктесі арқылы өтетін және 1) Oy өсіне параллель; 2) Oy өсіне перпендикуляр түзудің теңдеуін жазыңдар.

2.69. $\begin{cases} x + 3y - 4z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$ түзуі мен оның $2x + 2y - 3z - 1 = 0$ жазықтығындағы проекциясы арасындағы бұрышты табыңдар.

2.70. $M_0(2;\ 0;\ -2)$ нүктесінен өтетін және $\begin{cases} x - 4z + 1 = 0, \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$ түзуіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

2.71. $x = 4z + 10$ жазықтығы мен $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ түзуінің 1) қиылысу нүктесін; 2) арасындағы бұрышын табыңдар.

2.72. $ABCD$ үшбұрышты пирамидасы төбелерінің координаталары берілген: $A(1;\ 8;\ -3)$, $B(3;\ 4;\ 1)$, $C(-1;\ 2;\ 3)$, $D(-3;\ -2;\ 5)$. 1) $\angle ABC$; 2) AD түзуі мен ABC жағы арасындағы бұрышты; 3) ABC және ABD жақтары арасындағы бұрышты табыңдар.

C

2.73. Oy өсі арқылы өтетін және $x - y = 0$ жазықтығымен $60°$ бұрыш жасап қиылысатын жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

2.74.* $2x + 2y - z = 0$ және Oxy жазықтықтары арасындағы екіжақты бұрышты қақ бөлетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

2.75. $A(1;\ 8;\ -3)$, $B(3;\ 4;\ 1)$, $C(-1;\ 2;\ 3)$, $A_1(-3;\ -2;\ 5)$ нүктелері $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің төбелері. Оның 1) өзге төбелерінің координаталарын; 2) AB, AC және AA_1 қырларының теңдеулерін; 3) $\angle ABC$; 4) AA_1қыры мен табан жазықтығы арасындағы бұрышты; 5) AB, AC және AA_1қырларында тоғысатын екіжақты бұрыштарды табыңдар.

2.76. $x = 2 + t$, $y = 15 + 2t$, $z = 2t - 5$ түзуі мен координаталық өстердің арасындағы бұрыштардың косинустарын табыңдар. Бұл косинустарды түзудің бағыттаушы косинустары деп атайды. Сонымен, егер α, β және γ осы аталған бұрыштар болса, онда $\cos\alpha = \frac{1}{3}; \cos\beta = \frac{2}{3}; \cos\gamma = \frac{2}{3}$. Мұнда $\vec{p}(1;\ 2;\ 2)$ берілген түзудің бағыттаушы векторы және $|\vec{p}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Олай болса, $\vec{p}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ векторы да берілген түзуге параллель бірлік вектор. Жалпы жағдайда, $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$ түзуінің бағыттаушы косинустарын табыңдар.

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Жазықтықтың теңдеуі	Уравнение плоскости	Plane equation
2	Жазықтықтың жалпы теңдеуі	Общее уравнение плоскости	General equation of a plane
3	Жазықтықтың нормаль векторы	Вектор нормали плоскости	Normal vector of a plane

4	Түзудің теңдеуі	Уравнение прямой	Line equation
5	Түзудің бағыттаушы векторы	Направляющий вектор прямой	Leading vector of a line
6	Түзудің канондық теңдеуі	Каноническое уравнение прямой	Canonical equation of a line
7	Түзудің параметрлік теңдеуі	Параметрическое уравнение прямой	Parametric equation of a line
8	Түзудің жалпы теңдеуі	Общее уравнение прямой	General equation of a line

«КЕҢІСТІКТЕ ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ» бөлімінің қорытындысы

1) $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{p}(m; n; k)$ бағыттаушы векторына параллель l түзуінің параметрлік теңдеуі былай жазылады:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt, \end{cases}$$

2) Осы жүйенің әрбір теңдеуінен t-ны өзгелері арқылы өрнектеп,

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$

теңдеулерін алуға болса, бұл теңдеуді түзудің **канондық теңдеуі** деп атайды.

3) $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ арқылы өтетін және $\vec{n}(a; b; c)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі былай жазылады:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

4) Жазықтықтың **жалпы теңдеуі:**

$$ax + by + cz + d = 0.$$

5) $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ және $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторларына параллель жазықтықтың теңдеуі:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Мұндағы:

$$\begin{cases} a = n_1k_2 - n_2k_1, \\ b = k_1m_2 - k_2m_1, \\ c = m_1n_2 - m_2n_1. \end{cases}$$

6) Кеңістіктегі әрбір түзуді екі жазықтықтың қиылысуы ретінде анықтауға болады. Егер $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ және $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ теңдеулерімен екі жазықтық берілсе,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

жүйесімен осы жазықтықтардың қиылысуы арқылы анықталатын түзудің теңдеуі беріледі. Бұл теңдеуді түзудің **жалпы теңдеуі** деп атайды.

7) $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ және $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторлары арасындағы бұрыш мына формуламен анықталады:

$$\cos\left(\widehat{\vec{p}_1, \vec{p}_2}\right) = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + k_1k_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}.$$

8) Егер l түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{p}(m; n; k)$, ал α жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}(a; b; c)$ болса, α жазықтығы мен l түзуінің арасындағы бұрыштың синусы былай анықталады:

$$\sin\varphi = \frac{|ma + nb + kc|}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

9) Егер α_1 және α_2 жазықтықтарының нормаль векторлары $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ және $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ болса, жазықтықтардың арасындағы бұрыштың косинусы былай анықталады:

$$\cos\left(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}\right) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

III бөлім. АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ

Осы тарауда сендер геометрияның қызықты тақырыптарының бірі айналу денелерімен танысасыңдар. Сәулет өнерінде айналу денелеріне жататын цилиндр, конус, қиық конус тәріздi ғимараттар көптеп кездеседі.

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

3.1. Цилиндр.

3.2. Конус. Қиық конус

3.3. Сфера және шар

«НҰР ӘЛЕМ» — Нұр-Сұлтан қаласындағы, ЭКСПО-2017-нің архитектуралық символы. Бұл — әлемдегі ең үлкен сфера түріндегі ғимарат. Оның диаметрі 80 м. Осы сфера тәрізді ғимарат 8 қабаттан тұрады. Осы тарауды оқып-үйрену барысында оның 7-қабаты қимасының ауданын есептеуді үйренесіңдер.

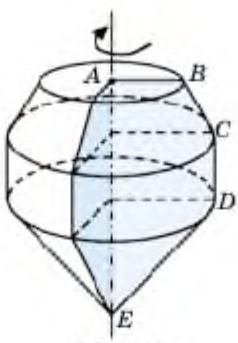
3.1. Цилиндр

Бұл тақырыпта цилиндр және оның элементтерімен танысып, соңында:

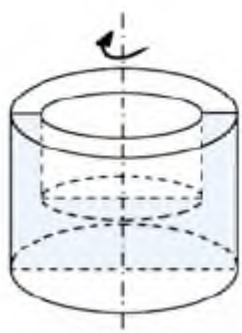
- **цилиндрдің анықтамасын, оның элементтерін білесіңдер, цилиндрді жазықтықта кескіндей аласыңдар;**
- **цилиндрдің бүйір беті және толық беті аудандары формулаларын қорытып шығарасыңдар және оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар;**
- **цилиндрдің элементтерін табуға есептер шығара аласыңдар;**
- **цилиндрдің жазбаларын жасай аласыңдар;**
- **цилиндрдің жазықтықпен қималарын кескіндеп, есептер шығара аласыңдар.**

3.1.1. Айналу денелері және айналу беттері түсінігі

Айналу денелері мен айналу беттері түсініктерін ажырата білу қажет. Алдымен айналу денелері түсінігін қарастырайық. Айталық, $ABCDE$ жазық бесбұрышы берілсін. Оны AE қабырғасы арқылы өтетін түзуден айналдырайық. Сонда 3.1-суретте көрсетілген дене алынады. Бұл денені ***айналу денесі***, AE түзуін айналу денесінің ***өсі*** деп атайды. Айналу денесінің өсі арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда пайда болған қима оның ***өстік қимасы*** деп аталады. Айналу денесінің әрбір өстік қимасы оның өсіне қатысты симметриялы бастапқы жазық фигураға тең екі фигурадан құралады. Айналу денесін оның өсіне перпендикуляр жазықтықтармен қиғанда алынған қималары дөңгелек немесе сақина болады (3.2-сурет).

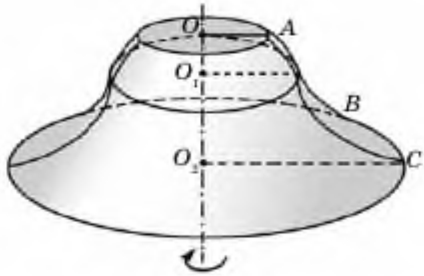


3.1-сурет


3.2-сурет

Айналу денесінің шегаралық нүктелерінің жиыны оның ***беті*** немесе ***айналу беті*** деп аталады.

Жалпы, айналу беттерін қайсыбір жазық сызықтардан құралған фигураны белгілі бір өстен айналдырып алуға болады. Мысалы, 3.3-суретте AB және BC доғаларынан құралған сызықты OO_2 өсінен айналдырғанда шыққан бет кескінделген. Мұнда AB және BC доғаларынан құралған сызықты айналу бетінің ***жасаушысы*** деп атайды.



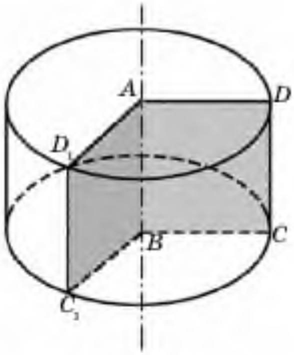
3.3-сурет

Сонымен, айналу денесін (бетін) алу үшін айналу өсі мен осы өстен айналатын жазық фигураны көрсетсе, жеткілікті.

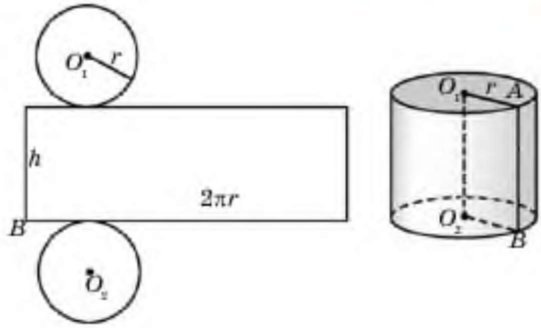
3.1.2. Цилиндр

Цилиндр деп тіктөртбұрышты бір қабырғасынан айналдырғанда шыққан денені айтады.

Мысалы, 3.4-суретте $ABCD$ тіктөртбұрышының AB қабырғасынан айналғанда шыққан цилиндр кескінделген. AB қабырғасы цилиндрдің ***өсі*** деп аталады. Жалпы, мұндай цилиндрлерді ***дөңгелек цилиндр***, оның бетін ***цилиндрлік бет*** деп атайды. Мұнда CD кесіндісі мен цилиндрдің бүйір бетінде жатқан CD-ға параллель кесінділер осы цилиндрлік беттің жасаушылары болады: CD, C_1D_1 — жасаушылар. Сонымен, цилиндр жасаушысының айналуынан шыққан бет — оның ***бүйір беті***. AD және BC кесінділерінің айналуынан өзара тең екі дөңгелек алынады. Оларды цилиндрдің ***табандары*** деп атайды. AD және BC — табан радиустары. Цилиндр жасаушыларының ұзындығы оның ***биіктігі*** болады, себебі олар цилиндрдің табан жазықтықтары арасындағы қашықтықты анықтайды.



3.4-сурет



3.5-сурет

Егер цилиндрді табандарында орналасқан шеңберлер бойымен және бір жасаушысы бойымен қиып, шыққан фигураны жазықтық бетіне жазып орналастырсақ, онда цилиндрдің ***жазбасын*** аламыз (3.5-сурет). Цилиндрдің табан радиусы r-ге тең болса, цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы өлшемдері h (цилиндр биіктігі) және $2\pi r$-ге (цилиндр табанындағы шеңбер ұзындығы) тең тіктөртбұрыш болады. Олай болса, бұл цилиндрдің бүйір бетінің ауданы

$$S_{б.б.} = 2\pi rh,$$

толық бетінің ауданы

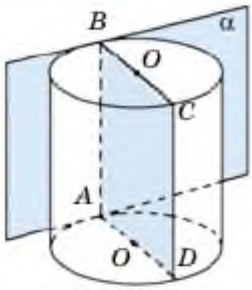
$$S_{т.б.} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r\,(r + h).$$

3.1.3. Цилиндрге іштей және сырттай сызылған призмалар

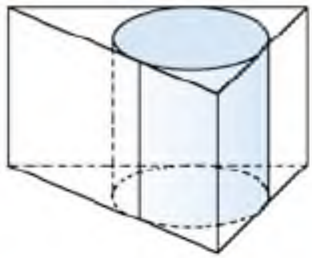
Цилиндрдің жасаушысы арқылы өтетін және цилиндр мен өзге ортақ нүктелері болмайтын жазықтықты цилиндрге ***жанама жазықтық*** деп атайды. 3.6-суретте кескінделген α жазықтығы — берілген цилиндрге жанама жазықтық. Осы жасаушы арқылы өтетін цилиндрдің өстік қимасы α жанама жазықтығына перпендикуляр: $(ABCD) \perp \alpha$.

Табандары цилиндрдің сәйкес табанында жатқан, бүйір жақтары цилиндрдің бүйір бетін жанайтын тік призманы ***цилиндрге сырттай сызылған призма*** деп атайды. 3.7-суретте цилиндрге сырттай сызылған үшбұрышты призма кескінделген. Оның табандары цилиндр табандарына сырттай сызылған үшбұрыштар болады.

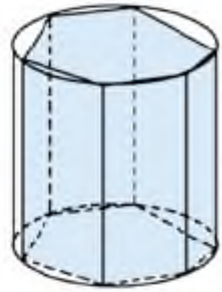
Табандары цилиндрдің сәйкес табандарына іштей сызылған көпбұрыш болатын тік призманы ***цилиндрге іштей сызылған призма*** деп атайды. 3.8-суретте цилиндрге іштей алтыбұрышты тік призма сызылған және оның табандары цилиндр табандарындағы шеңберлерге іштей сызылған.



3.6-сурет



3.7-сурет

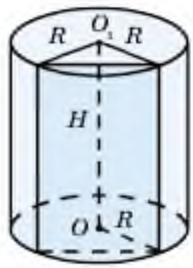


3.8-сурет

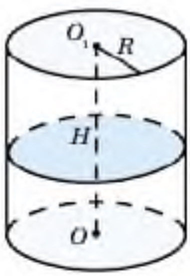
3.1.4. Цилиндрдің қималары

Кеңістікте Φ айналу денесі мен α жазықтығының қиылысуынан пайда болған фигура осы дененің ***қимасы***, α жазықтығы ***қиюшы жазықтық*** деп аталады.

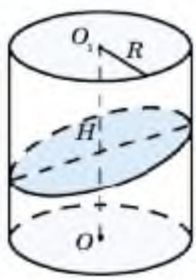
Цилиндр өсі арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда пайда болатын қиманы цилиндрдің *өстік қимасы* деп атайды. Ол — тіктөртбұрыш.



Цилиндр өсіне параллель жазықтықпен қиғанда шығатын қима — тіктөртбұрыш.



Цилиндр өсіне перпендикуляр жазықтықпен қиғанда шығатын қима дөңгелек болады.



Цилиндрді оның өсіне көлбеу жазықтықпен қиғанда шығатын қима эллипс болады.

Қосымша электрондық ресурстар
https://scienceforum.ru/2019/article/2018011262

1. Айналу денесі деп нені айтады? Айналу денесінің өстік қимасы деген не? Жасаушы деген не?
2. Қандай бетті айналу беті деп атайды? Оның айналу денесінен қандай айырмашылығы бар?
3. Дөңгелек цилиндр деген не? Оның табандары, биіктігі, бүйір беті деп нені айтады?
4. Цилиндр бетінің жазбасы деген не? Ол қандай фигуралардан құралған және ауданы қандай формуламен анықталады?
5. Цилиндрге сырттай және іштей сызылған тік призманы қалай түсінесіңдер?
6. Қандай жазықтықты цилиндрге жанама жазықтық деп атайды?

ЕСЕПТЕР

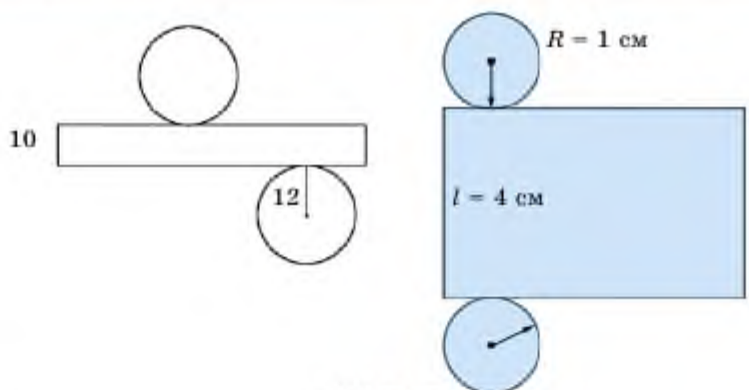
А

Практикалық тапсырма

3.1. Күнделікті тұрмыс-тіршілікте кездесетін цилиндрлік беттерге (денелерге) мысал келтіріңдер.

3.2. Бір парақ қағаз көмегімен цилиндрлік бет жасауға бола ма? Бұл тіктөртбұрышты қағазды тік дөңгелек цилиндрдің бүйір беті деп алып, оның табан радиусы мен биіктігін табыңдар. Есептің неше жауабы бар?

3.3. Квадратты бір қабырғасынан айналдырғанда шыққан денені салыңдар.

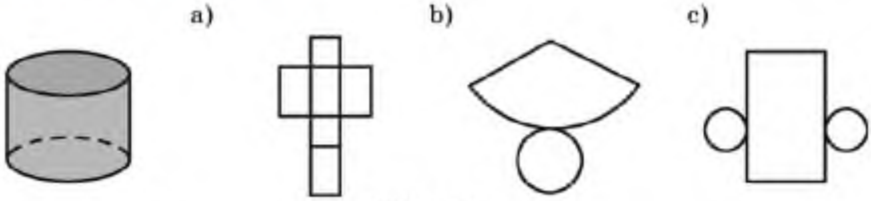


3.9-сурет

3.4. Жазбасы бойынша фигураны анықтаңдар (3.9-сурет). Олардың толық бетінің ауданын есептеңдер.

3.5. Тіктөртбұрышты кіші қабырғасынан айналдырғанда шыққан денені салыңдар.

3.6. Фигураның толық атын және оның жазбасын анықтаңдар (3.10-сурет).

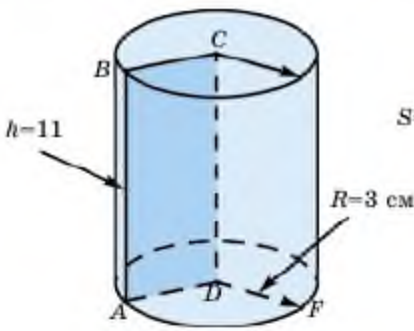


3.10-сурет

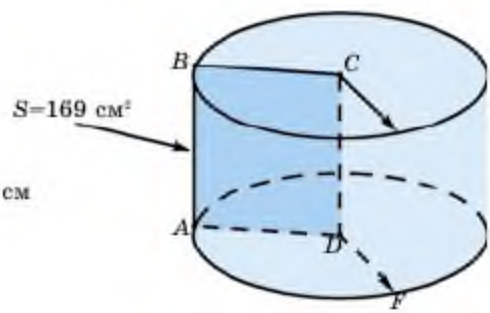
3.7. Табан радиусы r-ге, биіктігі h-қа тең цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар: 1) r=2 см, h=3 см; 2) r=10 мм, h=7 мм; 3) r=5 м, h=12 м.

3.8. Цилиндрдің өстік қимасы квадрат және оның ауданы S. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар: 1) S=16 см^2; 2) S=121 м^2; 3) S=441 мм^2.

3.9. Цилиндрдің биіктігі 11 см, радиусы 3 см. Оның толық бетінің ауданын есептеңдер (3.11-сурет).



3.11-сурет



3.12-сурет

3.10. Ауданы 169 см^2 квадратты бір қабырғасынан айналдырғанда пайда болған цилиндрдің толық бетінің ауданы мен радиусын табыңдар (3.12-сурет).

3.11. Өлшемдері 2 см және 4 см болатын тіктөртбұрыштың әр қабырғасынан айналғанда шыққан цилиндрді салыңдар. Олардың өстік қимасының ауданы мен бүйір бетінің ауданын табыңдар.

3.12. Цилиндрдің табан радиусы 6 см, биіктігі 5 см. Оның өстік қимасының диагоналін табыңдар.

3.13. Цилиндрдің өстік қимасының диагоналі 12 см және ол табан жазықтығына 30° бұрышпен көлбеген. Цилиндрдің 1) табан радиусын; 2) биіктігін; 3) табан ауданын табыңдар.

3.14. Цилиндрге қыры 4 см болатын куб іштей сызылған. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

3.15. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы — қабырғасы 10 см болатын квадрат. Цилиндрдің радиусын табыңдар.

3.16. Цилиндрдің неше 1) симметрия центрі; 2) симметрия өсі; 3) симметрия жазықтығы бар? Оның симметрия жазықтықтарының барлығы да цилиндр өсі арқылы өтуі міндетті ме? Жауаптарыңды негіздеңдер.

3.17. Цилиндрдің өстік қимасының диагоналі 48 см және ол табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген. Цилиндрдің 1) табанының радиусын; 2) биіктігін; 3) табан ауданын табыңдар.

3.18. Цилиндрдің биіктігі 12 см, радиусы 10 см. Цилиндрді оның өсіне параллель жазықтықпен қиғанда квадрат пайда болды. Цилиндрдің өсінен қимаға дейінгі қашықтықты анықтаңдар.

Практикалық тапсырма

3.19. Ұзындығы 4 м, диаметрі 20 см құбыр жасау керек. Қаңылтырларды дәнекерлегенде оның ауданының 2,5%-ы беттеседі деп алып, осындай 4 құбыр жасау үшін қажет қаңылтырлардың ауданын есептеңдер.

B

3.20. Тіктөртбұрышты әр қабырғасынан айналдырып, екі түрлі цилиндр алуға болады. Олардың бүйір бетінің аудандарының тең екенін көрсетіңдер. Толық бетінің аудандары тең бола ма?

3.21. 1) Тең қабырғалы үшбұрыштың; 2) дұрыс алтыбұрыштың бір қабырғасынан айналғанда шыққан айналу денесін салыңдар.

3.22. Алдыңғы есептегі айналу денелерінің өстік қимасын көпбұрыштың қабырғасы *a-ға* тең деп алып табыңдар.

3.23. Радиусы 5 см және биіктігі 6 см цилиндрдің өсінен 3 см қашықтықтағы өсіне параллель қимасының ауданын табыңдар.

▲ **Берілгені:** цилиндрдің биіктігі $OO_1 = 6$ см, радиусы $OA = 5$ см, $AA_1B_1B - OO_1$ осіне параллель цилиндрді қиюшы жазықтық. $OF = 3$см — цилиндрдің осі мен оны қиятын жазықтыққа дейінгі арақашықтық.

Т/к: $S_{\text{Қима}}(AA_1B_1B)$ — ?

Шешуі: $S_{\text{Қима}}(AA_1B_1B) = OO_1 \cdot AB.$

1) Берілген параметрлерді қолданып цилиндрді құрастырғанда оның табанында теңбүйірлі үшбұрыш AOB жататынын көреміз. Оның бүйір қабырғалары радиустарда жатыр: $R = OA = OB = 5$ см, $OF = 3$ см — O нүктесінен AB (цилиндр қимасының табаны) қабырғасына түсетін биіктік.

2) Пифагор теоремасын қолданып AB-ны табамыз:

$$AF = \sqrt{OA^2 - OF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ см}.$$

$AB = 2AF = 2 \cdot 4 = 8$ см.

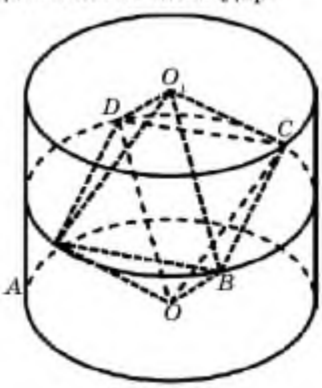
3) Цилиндрдің биіктігі $OO_1 = 6$ см. Ендеше, қиюшы үшбұрыштың ауданы

$S_{\text{Қима}}(AA_1B_1B) = OO_1 \cdot AB = 6 \cdot 8 = 48$ см².

4) 3D суретке сілтеме:

https://www.geogebra.org/classic/pvfegnca ■

3.24. Цилиндрге дұрыс алтыбұрышты призма 1) іштей; 2) сырттай сызылған. Цилиндр мен призманың бүйір беттерінің қатынасын табыңдар.



3.13-сурет

3.25. Цилиндрдің биіктігі оның радиусынан 6 см артық, толық бетінің ауданы 112 см². Цилиндрдің радиусы мен биіктігін табыңдар.

3.26. Екі қарама-қарсы төбесі цилиндр табандарының центрлерінде, өзге төбелері цилиндрдің бүйір бетінде орналасатындай етіп осы цилиндрге дұрыс октаэдр іштей сызылған. Октаэдрдің қыры a деп алып, цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар (3.13-сурет).

3.27. Радиусы R цилиндрдің бүйір бетінің ауданы табан аудандарының қосындысына тең. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.

3.28. Биіктігі h және табан қабырғасы a-ға тең дұрыс үшбұрышты тік призмаға іштей сызылған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

3.29. Алдыңғы есептегі призмаға сырттай сызылған цилиндрдің остік қимасының ауданын табыңдар.

Практикалық тапсырма

3.30. Диаметрі 1420 мм болатын газ құбырын екі қайтара оқшаулағыш материалмен орап шығады. Газ құбырының 1 километрін орауға жұмсалатын материалдың ауданын табыңдар. Материалдың қалыңдығын есепке алмаймыз.

▲ **Берілгені:** цилиндр. $R = 710$ мм $= 0{,}71$ м, $l = 1$ км $= 1000$ м.

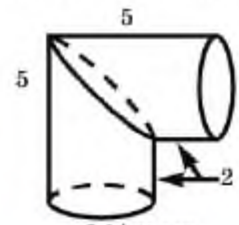
Т/к: $2S_{б.б.}$ — ?

Шешуі: $2S_{б.б.} = 2 \cdot 2\pi Rl = 2 \cdot 2\pi \cdot 0{,}71 \cdot 1000 = 2 \cdot 1420\ \pi$м$^2 \approx$
≈ 8918 м^2. ■

3.31. Берілген S өстік қимасының ауданы бойынша цилиндрдің бүйір бетінің ауданын анықтау мүмкін бе? Жауаптарыңды негіздеңдер.

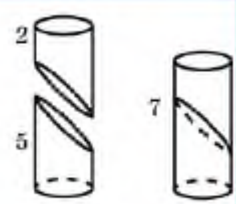
3.32. Тік призманың табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призма биіктігі 10 см болса, призмаға сырттай сызылған цилиндрдің бүйір бетінің және толық бетінің ауданын табыңдар.

3.33. Ұзындығы 5 см, диаметрі 3 см екі құбыр 3.14-суретте көрсетілгендей бұрыштап қосылған. Шыққан фигура бетінің ауданын табыңдар.



3.14-сурет

Бұл есепте бұрыштап қосылған екі құбырды суретте көрсетілгендей ұзындығы 7 см болатын бір құбыр деп түрлендірсе, есепті шешу оңай.



▲ **Берілгені:** цилиндр. $R = 1{,}5$ см, $h = 7$ см.

Т/к: $S_{б.б.}$ — ?

Шешуі: $S_{б.б.} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 7 = 21\pi$ см^2. ■

C

3.34. Тіктөртбұрыштың бір қабырғасы 6 см, диагоналі 10 см. Тіктөртбұрыштың ұзын қабырғасы бойымен айналдырғанда шығатын цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

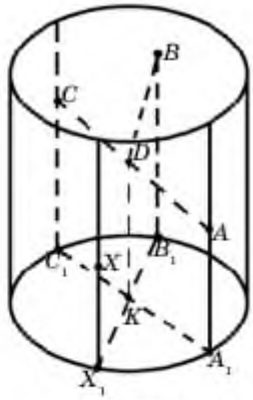
3.35. Цилиндрдің бір жасаушысы арқылы жүргізілген екі қимасының бірі цилиндрдің өсі арқылы өтеді және бұл қималар арасындағы екіжақты бұрыш φ-ге тең. Осы қима аудандарының қатынасын табыңдар.

3.36. Цилиндрден тысқары орналасқан нүктеден осы цилиндрді жанайтын жазықтықты қалай салуға болады? (Жазықтықты салу үшін оның бойында орналасқан қиылысушы екі түзуді көрсетсе жеткілікті).

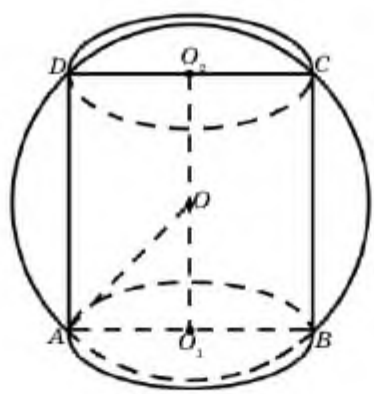
3.37. Цилиндрге сырттай сызылған төртбұрышты призманың қарама-қарсы жақтары аудандарының қосындысы тең екенін көрсетіңдер.

3.38.* Цилиндрге іштей сызылған төртбұрышты призманың қарама-қарсы бүйір қырларындағы екіжақты бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең екенін көрсетіңдер.

3.39.* Цилиндрдің бүйір бетінде кез келген екеуі бір жасаушы бойында жатпайтындай етіп үш нүкте алынған. Осы үш нүкте арқылы өтетін жазықтық пен цилиндрдің кез келген жасаушысының қиылысу нүктесін қалай табуға болады (3.15-сурет)?



3.15-сурет



3.16-сурет

3.40. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы оның өстік қимасына сырттай сызылған шеңбермен шектелген дөңгелектің ауданына тең болуы үшін цилиндрдің радиусы мен биіктігі арасындағы тәуелділік қандай болуы қажет (3.16-сурет)?

▲ **Берілгені:** цилиндр. R — радиусы, h — биіктігі, S — өстік қимаға сырттай сызылған дөңгелектің ауданы. $S_{б.б.} = S$.

Т/к: R және h арасындағы тәуелділік.

Шешуі: $S_{б.б.} = 2\pi Rh$. Екінші жағынан AOO_1 үшбұрышында $AO_1 = R$,

$$OO_1 = \frac{h}{2} \Rightarrow AO = \sqrt{AO_1^2 + OO_1^2} = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + h^2}.$$

Осыдан $S = \pi \cdot AO^2 = \frac{\pi}{4}(4R^2 + h^2) \Rightarrow 8Rh = 4R^2 + h^2$, $\frac{h}{R} = x$ деп алсақ, $x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{12}$, яғни $h = 2(2 \pm \sqrt{3})R$. ■

Қайталауға арналған жаттығулар

3.41. Теңбүйірлі үшбұрышқа радиусы 7,5 болатын іштей шеңбер сызылған және ол биіктікті 17:15 қатынасында бөледі. Үшбұрыштың периметрі мен ауданын табыңдар.

3.42. Трапецияға іштей радиусы 6-ға тең шеңбер сызылған. Жанасу нүктесі трапецияның төменгі табанын ұзындығы 9 және 12 болатын кесінділерге бөледі. Трапецияның қабырғалары мен ауданын табыңдар.

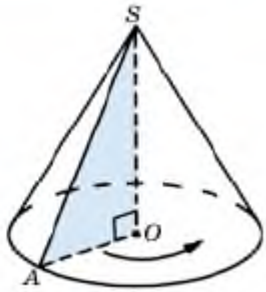
3.2. Конус. Қиық конус

Бұл тақырыпта конус, қиық конус ұғымдарымен танысып, соңында:

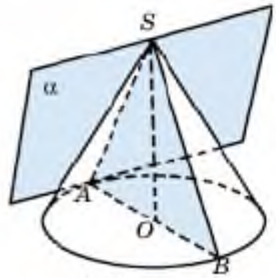
- **конустың, қиық конустың анықтамаларын, олардың элементтерін білесіңдер, конусты жазықтықта кескіндей аласыңдар;**
- **конустың элементтерін табуға есептер шығара аласыңдар;**
- **конустың бүйір және толық беті аудандары формулаларын қорытып, оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар;**
- **конустың, қиық конустың жазбаларын жасай аласыңдар;**
- **қиық конустың элементтерін табуға есептер шығара аласыңдар;**
- **қиық конустың бүйір беті және толық беті аудандары формулаларын қорытып шығарып, оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар;**
- **конустың жазықтықпен қималарын кескіндеп, оларды есеп шығарғанда қолдана аласыңдар.**

3.2.1. Конус

Тікбұрышты үшбұрышты катетінен айналдырғанда шыққан денені **конус** деп атайды.



3.17-сурет

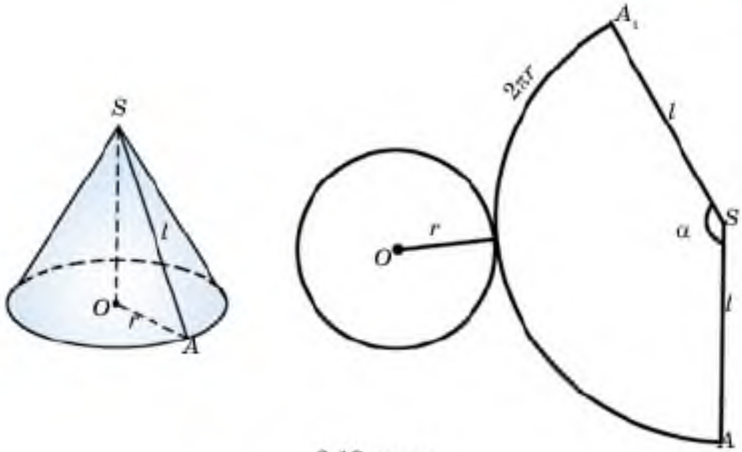


3.18-сурет

3.17-суретте AOS тікбұрышты үшбұрышының SO катетінен айналғанда шыққан конус кескінделген. Мұнда AS гипотенузасы айналғанда пайда болатын бетті конустың ***бүйір беті***, AO катетінен айналғанда шыққан дөңгелекті конустың ***табаны*** деп атайды. Конус табанының радиусы оның ***радиусы***, S нүктесі — ***төбесі***, SO кесіндісі — ***биіктігі***, SO түзуі конустың ***өсі*** деп аталады. Конустың өсі арқылы өтетін әрбір жазықтық — оның *симметрия жазықтығы*, конустың өсі — оның *симметрия өсі*. Конуста симметрия центрі болмайды. Конустың барлық өстік қималары теңбүйірлі үшбұрыштар және олар өзара тең. Конус төбесі мен оның табанындағы шеңбердің кез келген нүктесін қосатын кесінді — конустың ***жасаушысы*** деп аталады.

Конустың қайсыбір жасаушысы арқылы өтетін және конуспен өзге ортақ нүктелері болмайтын жазықтықты оның ***жанама жазықтығы*** деп атайды. 3.18-суретте конустың SA жасаушысы арқылы өтетін α жанама жазықтығы кескінделген. Мұнда α жазықтығы SA жасаушысы мен SO өсі арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр.

Егер конустың бүйір бетін табанындағы шеңбер бойымен және қайсыбір жасаушысы бойымен қиып, алынған бетті жазып жазықтық бетіне орналастырсақ, конустың жазбасын аламыз. 3.19-суретте радиусы r-ге, жасаушысы l-ге тең конустың толық жазбасы кескінделген. Оның бүйір бетінің жазбасы — радиусы l-ге және ұзындығы $2\pi r$-ге тең доғаға керілген шеңбердің секторы.



3.19-сурет

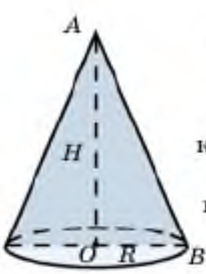
Енді конустың бүйір бетінің ауданын анықтайық. 3.19-суреттен конустың бүйір бетінің ауданы радиусы l-ге, центрлік бұрышы α-ға тең AA_1S секторының ауданына тең екенін көреміз: $S_{б.б.} = S_{сек.}$ Планиметрия курсынан AA_1 доғасының ұзындығы $l_{AA_1} = \alpha \cdot l$ (α радианмен берілген), екінші жағынан бұл доғаның ұзындығы конус табанындағы шеңбер ұзындығы $2\pi r$-е тең. $\alpha l = 2\pi r$ теңдігінен $\alpha = \dfrac{2\pi r}{l}$ шығады. Радиусы l және центрлік бұрышы α-ға тең сектордың ауданы $S_{сек.} = \dfrac{\alpha}{2} l^2$ формуласымен анықталады.

Осыдан

$$S_{б.б.} = S_{сек.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{l} \cdot l^2 = \pi r l, \; S_{б.б.} = \pi r l.$$

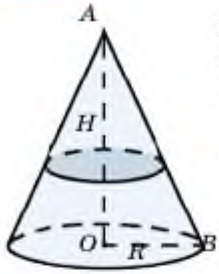
Конустың толық бетінің ауданы $S_{т.б.} = S_{б.б.} + S_{таб} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

Конустың қималары



Конустың өсі арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда шыққан қиманы конустың *өстік қимасы* деп атайды. Ол — теңбүйірлі үшбұрыш.

Конустың төбесі арқылы өтетін, өсіне параллель емес жазықтықпен қимасы теңбүйірлі үшбұрыш болады.



Конустың өсіне перпендикуляр жазықтықпен қиғанда шыққан қима дөңгелек болады.

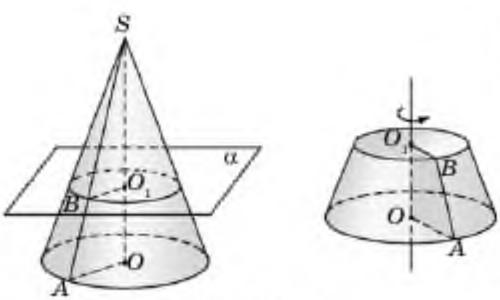
Конустың өсіне көлбеу жазықтықпен қиғанда шыққан қима эллипс болады.

3.2.2. Қиық конус

Кез келген конусты оның табанына параллель жазықтықпен қиып өтейік. Алынатын қима дөңгелек және ол конусты екі бөлікке бөледі. Бір бөлігі берілген конусқа ұқсас кіші конус, екіншісі — ***қиық конус*** (3.20-сурет). Қима арқылы алынған дөңгелек пен берілген конустың табаны қиық конустың ***табандары***, қиық конус табандарының арақашықтығы оның ***биіктігі*** деп аталады.

Биіктік ретінде қиық конус табандарының центрлерін қосатын OO_1 кесіндісін алуға болады. Жалпы, қиық конусты тікбұрышты ABO_1O трапециясын OO_1 бүйір қабырғасынан айналдырып алуға болады. OO_1 қабырғасы қиық конустың өсі, AB қабырғасы ***жасаушысы*** деп аталады. AB кесіндісінің айналуынан шыққан бетті қиық конустың ***бүйір беті*** деп атайды.

Қиық конусты архитектурада жиі кездестіруге болады. Астанамыздағы «Алтын Орда» бизнес орталығы — осының жарқын мысалы (3.21-сурет).

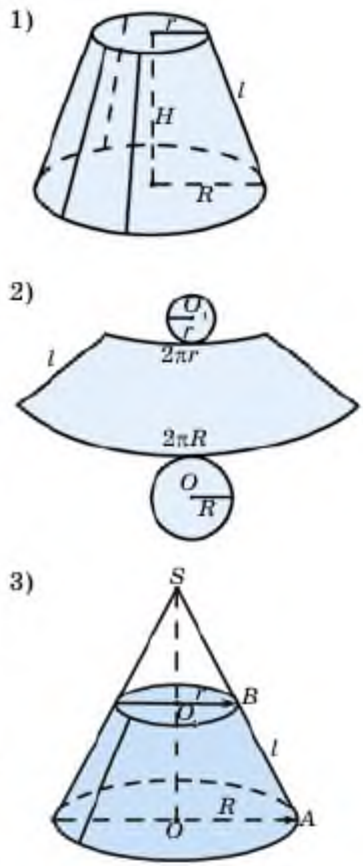


3.20-сурет

3.21-сурет

Қиық конустың қасиеттері

- Қиық конустың барлық жасаушылары өзара тең (3.22,1-сурет).
- Қиық конустың бүйір беті — оны шектеп тұрған сәйкес конустық бүйір бетінің бөлігі.
- Қиық конустың толық беті оның бүйір бетінен және табандарындағы бір-біріне тең емес екі дөңгелектен тұрады.
- Қиық конустың жазбасы шеңбер сақинасының бөлігі мен бір-біріне тең емес екі дөңгелектен тұрады (3.22,2-сурет).



3.22-сурет

Қиық конустың бүйір бетінің ауданын анықтау үшін үлкен конустың бүйір бетінің ауданынан кіші конустың бүйір бетінің ауданын азайтса, жеткілікті (3.22,3-сурет). Айталық, қиық конус табандарының радиустары сәйкесінше r және R, жасаушысы $AB = l$ болсын. Онда кіші конустың бүйір беті $S_1 = \pi r \cdot SB$ теңдігімен, үлкен конустың бүйір беті $S_2 = \pi R \cdot SA$ теңдігімен анықталады. Сонда

$$S_{б.б.} = S_2 - S_1 = \pi R \cdot SA - \pi r \cdot SB =$$
$$= \pi R(SB + AB) - \pi r \cdot SB \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{б.б.} = \pi Rl + \pi \cdot SB(R - r).$$

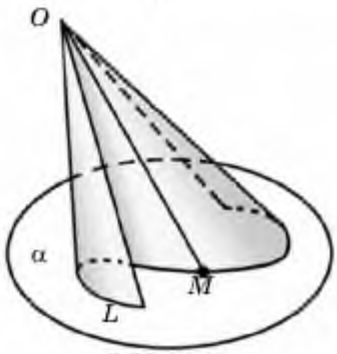
Енді SB-ны l, r және R арқылы өрнектейік. SBO_1 және SAO үшбұрыштары ұқсас, сондықтан $\frac{SB}{SA} = \frac{r}{R}$ немесе $\frac{SB}{SB + l} = \frac{r}{R}$ теңдігі орындалады. Осыдан $SB = \frac{lr}{R - r}$. Онда

$S_{б.б.} = \pi Rl + \pi \cdot SB(R - r)$ теңдігінен $S_{б.б.} = \pi Rl + \pi rl = \pi l(R + r)$ шығады. Сонымен,

$$S_{б.б.} = \pi l(R + r).$$

Жалпы, көп жағдайда біз қарастырып отырған конусты ***тік дөңгелек конус*** деп атайды. Өйткені оның табаны дөңгелек және өсі табанына перпендикуляр.

Іс жүзінде конустық беттердің өзге де түрлері қарастырылады. Айталық, α жазықтығында орналасқан L қисығы мен осы жазықтықтан тысқары орналасқан O нүктесі берілсін. L қисығына тиісті M ($M \in L$) нүктелер жиынының әрбір нүктесін O нүктесімен қосқанда шыққан OM кесінділер жиыны арқылы құрастырылған фигураны ***конустық бет*** деп атайды. Мұндағы L қисығын конустық беттің ***бағыттаушысы***, O нүктесін оның ***төбесі***, OM кесіндісін оның өсі деп атайды (3.23-сурет). Еліміздің астанасындағы «Хан Шатыр» кешені — әлемдегі **конус** түріндегі құрылыстардың бірі (3.24-сурет).

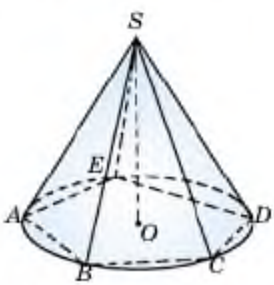


3.23-сурет

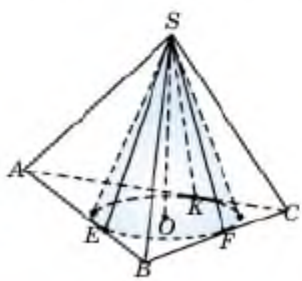

3.24-сурет

Мектеп курсында тік дөңгелек конус қана қарастырылады.

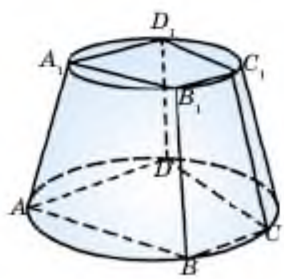
Пирамиданың табаны конус табанына іштей сызылған көпбұрыш болса және төбесі конус төбесімен беттессе, мұндай пирамиданы конусқа ***іштей сызылған пирамида*** деп атайды (3.25-сурет). Егер пирамиданың табаны конус табанына сырттай сызылған көпбұрыш және олардың төбелері ортақ болса, мұндай пирамиданы конусқа ***сырттай сызылған пирамида*** деп атайды (3.26-сурет). Осы сияқты қиық конусқа сырттай және іштей сызылған қиық пирамидаларды қарастыруға болады. Мысалы, 3.27-суретте қиық конусқа іштей сызылған төртбұрышты қиық пирамида кескінделген.



3.25-сурет

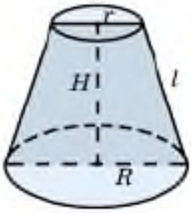


3.26-сурет



3.27-сурет

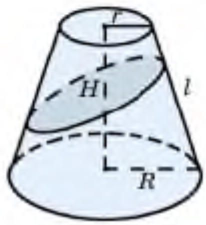
Қиық конустың кейбір қималары



Қиық конустың өсі арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда пайда болатын қиманы қиық конустың *өстік қимасы* деп атайды. Ол — теңбүйірлі трапеция.

Қиық конустың өсіне параллель жазықтықпен қимасы теңбүйірлі трапеция болады.

Қиық конусты оның өсіне перпендикуляр жазықтықпен қиғанда шығатын қима дөңгелек болады.



Қиық конусты оның өсіне көлбеу жазықтықпен қиғанда шығатын қима эллипс болады.

1. Қандай денені конус деп атайды? Конустың барлық элементтерін атап, күнделікті өмірден конусқа мысал келтіріңдер. Егер мүмкін болса, оның элементтерінің өлшемдерін анықтаңдар (табан радиусын, жасаушысын, биіктігін).
2. Конустың бүйір бетінің (толық бетінің) ауданы қандай формуламен анықталады? Оны дәлелдеңдер.
3. Қиық конус деген не? Оның қандай элементтерін білесіңдер? Оларға күнделікті өмірден мысал келтіріңдер.
4. Қиық конустың бүйір бетінің ауданы қандай формуламен анықталады? Оны дәлелдеңдер.

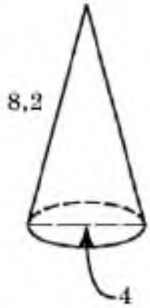
ЕСЕПТЕР

А

Практикалық тапсырма

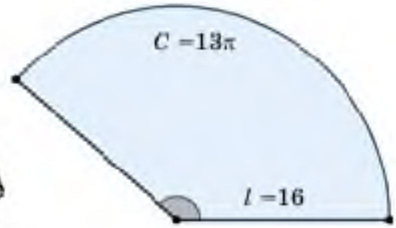
3.43. Қағаздан дөңгелек қиып алыңдар. Осы дөңгелекті қайсыбір екі радиусы бойымен қиып, екі секторға бөліңдер. Шыққан секторлардың әрқайсысынан конустық бет құрастырыңдар.

3.28-сурет



3.29-сурет

3.30-сурет



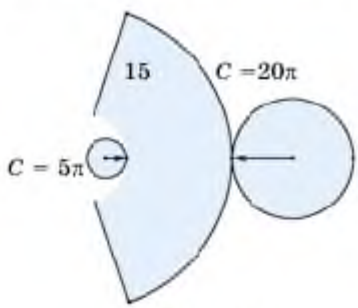
3.31-сурет

3.44. 3.28-суреттегі конустың жазбасы бойынша оның биіктігін, радиусын және толық бетінің ауданын анықтаңдар.

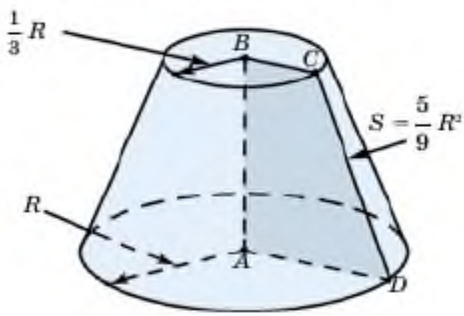
3.45. 3.29-3.30-суреттерде көрсетілген конустың жазбасын салыңдар және бүйір бетінің ауданын есептеңдер.

3.46. 3.31-суретте конустың бүйір бетінің жазбасы берілген. Конустың биіктігі мен табан радиусын анықтаңдар.

3.47. 3.32-суреттегі қиық конустың табан радиустарын, жасаушысын және жазбасының ауданын табыңдар.



3.32-сурет



3.33-сурет

3.48. Конустың биіктігі 4 см, табан радиусы 3 см. Оның бүйір бетінің жазбасы — сектор. Сектордың периметрін табыңдар.

3.49. Катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрышты кіші катетінен айналдырғанда пайда болатын конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

3.50. $ABCD$ тікбұрышты трапециясын AB қабырғасынан айналдырғанда пайда болған қиық конустың табан радиустары R және $\frac{1}{3}R$. Трапецияның ауданы $S=\frac{5}{9}R^2$ болса, қиық конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар (3.33-сурет).

3.51. Конустың биіктігі h, табанының радиусы R. Конустың өстік қимасының ауданын табыңдар: 1) $h=5$ см, $R=3$ см; 2) $h=8$ м, $R=2$ м; 3) $h=12$ мм, $R=4$ мм.

3.52. Конустың жасаушысы l, радиусы R. Бүйір бетінің ауданын табыңдар: 1) $l=3$ м, $R=1$ м; 2) $l=12$ см, $R=7$ см; 3) $l=20$ мм, $R=8$ мм.

3.53. Конустың жасаушысы l, биіктігі h. Толық бетінің ауданын табыңдар: 1) $l=13$ см, $h=12$ см; 2) $l=10$ м, $h=6$ м; 3) $l=5$ м, $h=4$ м.

3.54. Конустың радиусы R, өстік қимасының ауданы Q. Оның жасаушысын табыңдар: 1) $R=5$ см, $Q=60$ см^2; 2) $R=6$ м, $Q=48$ м^2; 3) $R=3$ м, $Q=12$ м^2.

3.55. Қиық конустың табан радиустары r және R, жасаушысы l. Оның өстік қимасының ауданын табыңдар: 1) $r=3$ см, $R=6$ см, $l=5$ см; 2) $r=4$ см, $R=10$ см, $l=10$ см; 3) $r=10$ мм, $R=15$ мм, $l=13$ мм.

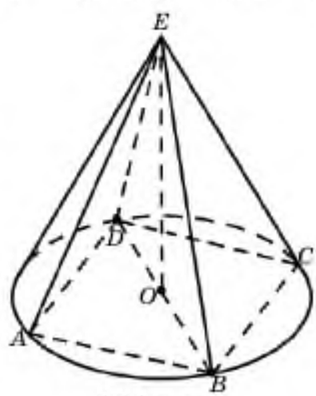
3.56. 3.55-есептің шартын пайдаланып, қиық конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

3.57. Қиық конустың өстік қимасы — табандары a, b, биіктігі h болатын теңбүйірлі трапеция. Оның бүйір бетінің ауданын табыңдар: 1) $a=2$ м, $b=10$ м,$h=3$ м; 2) $a=10$ см, $b=22$ см, $h=8$ см; 3) $a=5$ см, $b=19$ см, $h=24$ см.

3.58. Конустың жасаушысы l, биіктігі h. Оның жасаушысы табан жазықтығымен қандай бұрыш жасайды: 1) $l = 24$ см, $h = 12$ см; 2) $l = 12$ см, $h = 6\sqrt{3}$ см; 3) $h = 15$ см, $l = 5\sqrt{2}$ см?

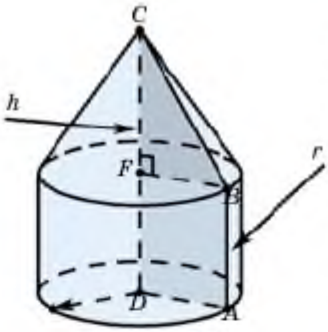
3.59. Өстік қимасы тікбұрышты үшбұрыш болатын конустың жасаушысы оның табан жазықтығымен қандай бұрыш жасайды?

3.60. Конусқа табан қабырғасы $\sqrt{2}$ см және биіктігі 5 см болатын дұрыс төртбұрышты пирамида іштей сызылған. Конустың өстік қимасының ауданын табыңдар (3.34-сурет).



3.34-сурет

В



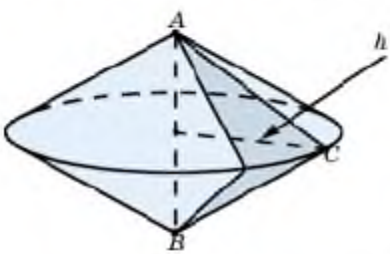
3.35-сурет

3.61. Пирамиданың табаны — қабырғасы 6 см болатын квадрат. Пирамиданың биіктігі 5 см. Пирамидаға іштей сызылған конустың бүйір бетінің ауданын есептеңдер.

3.62. $ABCD$ тікбұрышты трапециясын үлкен табаны CD бойымен айналдырғанда 3.35-суретте көрсетілген дене шыққан. $ABFD$ — қабырғасы r-ге тең квадрат. $CF = h$ деп алып дененің толық бетінің ауданы $S_{т.б.} = \pi r\left(3r + \sqrt{h^2 + r^2}\right)$ екенін дәлелдеңдер.

3.63. Конустың жасаушысы l және ол табан жазықтығына φ бұрышпен көлбеген. Конустың 1) табан радиусын; 2) биіктігін; 3) өстік қимасының ауданын; 4) бүйір бетінің ауданын табыңдар.

3.64. Конустың биіктігі h. Оның табан жазықтығына параллель қимасының ауданы табанының ауданынан 2 есе кіші. Қима мен табан жазықтығының арақашықтығын табыңдар.



3.36-сурет

3.65. Конус табанының радиусы R. Оның биіктігін төбесінен есептегенде 1:2 қатынасында бөлетін, табанына параллель қиманың ауданын табыңдар.

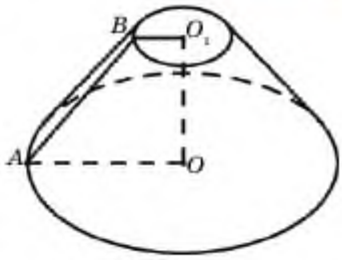
3.66. Тең қабырғалы ABC үшбұрышының биіктігі h. Осы үшбұрышты AB қабырғасынан айналдырғанда шыққан дененің толық бетінің ауданын табыңдар (3.36-сурет).

3.67. Конустың жасаушысы l және табанының радиусы r. Конустың табанында 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90° доғаға керілген хорда мен конустың төбесі арқылы өтетін қиманың ауданын табыңдар.

3.68. Конустың өстік қимасы тең қабырғалы үшбұрыш, радиусы R. Конустың өзара 30° бұрыш жасайтын екі жасаушысы арқылы өтетін қимасының ауданын табыңдар.

3.69. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 30 см. Оны биіктігінен айналдырғанда шыққан конустың толық бетінің ауданы 64π см^2. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

3.70. Қиық конус табандарының ауданы 4 см² және 25 см², оның биіктігі өзара тең үш бөлікке бөлінген. Бөлу нүктелері арқылы өтетін табандарына параллель қималардың аудандарын табыңдар.



3.37-сурет

3.71. Қиық конус табандарының радиустары r және R, жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Қиық конустың толық бетінің ауданын табыңдар (3.37-сурет).

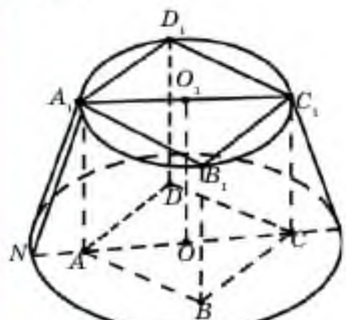
3.72. Қиық конустың жасаушысы табанына 30° бұрышпен көлбеген, өстік қимасының ауданы Q. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

3.73. Кубтың бір жағы қиық конустың кіші табанына іштей сызылған. Оның қарама-қарсы жағы қиық конустың үлкен табанында жатады. Қиық конус табандарының радиустары r және R деп алып, кубтың қырын табыңдар (3.38-сурет).

▲ **Берілгені:** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы қиық конусқа іштей сызылған. $A_1O_1 = r$, $NO = R$.

Т/к: AB — ?

Шешуі: бұл есепте кубтың қыры қиық конустың үлкен табанының радиусы R-ге тәуелсіз. r радиусы куб жағының (квадраттың) диагоналінің жартысына тең. Сондықтан $AB = r\sqrt{2}$. ■



3.38-сурет

3.74. Қиық конус табандарының радиустары мен оның жасаушысының қатынасы 1:4:5, оның биіктігі h. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

3.75. Конустың l жасаушысы мен h биіктігі арасындағы бұрыш 30°. Осы конусқа іштей сызылған дұрыс 1) үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) алтыбұрышты пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

3.76. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы m және ол табанымен φ бұрыш жасайды. Үшбұрышты табанынан айналдырғанда пайда болған дененің толық бетінің ауданын есептеңдер.

3.77. Қабырғалары 10, 17 және 21 болатын үшбұрышты үлкен қабырғасынан айналдырғанда пайда болған дененің толық бетінің ауданын табыңдар.

3.78. Үшбұрыштың екі қабырғасы 8 және 15, олардың арасындағы бұрыш 60°. Үшбұрышты үлкен қабырғасынан айналдырғанда пайда болған дененің толық бетінің ауданын табыңдар.

C

3.79. Конусқа іштей сызылған цилиндрдің толық бетінің ауданы осы конустың бүйір бетінің ауданына тең. Конустың өстік қимасы — тікбұрышты үшбұрыш. Конус төбесінен цилиндрдің жоғарғы табанына дейінгі қашықтық конус жасаушысының жартысына тең екенін дәлелдеңдер.

3.80. Конустың толық бетінің ауданы радиусы конустың биіктігіне тең дөңгелектің ауданына тең болуы үшін конустың жасаушысы мен табан радиусы арасында қандай тәуелділік болуы қажет?

3.81. Конустың бүйір бетінің жазбасы дөңгелектің ширек бөлігін құрайды, өстік қимасының ауданы Q. Конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

3.82. Конус табанының ауданы m, бүйір бетінің ауданы $3m$. Конустың жасаушысы мен табан жазықтығы арасындағы бұрыш қандай?

Практикалық тапсырма

3.83. Темір шелек қиық конус пішінді. Табан радиустары 15 см және 10 см, жасаушысы 30 см. Барлық шелекті екі жағынан да сырлап шығу қажет. Егер 1 м² бетке 200 г бояу жұмсалса, 1000 шелекті сырлауға неше килограмм бояу қажет?

Қайталауға арналған жаттығулар

3.84. а) $ABCD$ трапециясының AB табаны CD табанынан және AD бүйір қабырғасынан екі есе ұзын. AC диагоналі a, BC бүйір қабырғасы b болса, трапецияның ауданын табыңдар.

ә) $ABCD$ трапециясының CD табаны, BD диагоналі және AD бүйір қабырғасының ұзындықтары бірдей және ол p шамасына тең. BC бүйір қабырғасының ұзындығы q. AC диагоналін табыңдар.

3.3 Сфера және шар

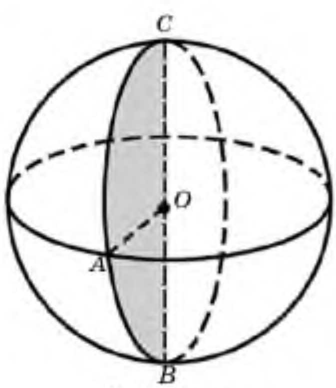
Бұл тақырыпта сфера, шар және олардың элементтерімен танысып, соңында:

- **сфера, шардың анықтамаларын білесіңдер, оларды жазықтықта кескіндей аласыңдар;**
- **сфера бетінің ауданын табуға есептер шығарасыңдар;**
- **сфера мен жазықтықтың өзара орналасуын білесіңдер;**
- **координаталық жазықтықта сфера мен жазықтықтың өзара орналасуына есептер шығарасыңдар;**
- **сфераға жанама жазықтықтың анықтамасын және қасиетін білесіңдер;**
- **шар мен сфераның жазықтықпен қималарына байланысты есептер шығаруды үйренесіңдер.**

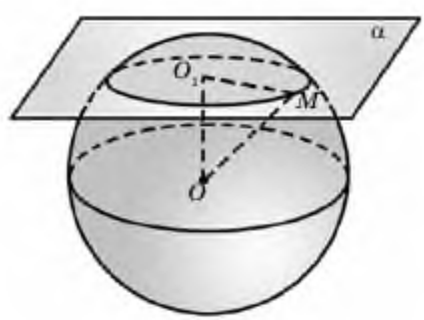
3.3.1. Шар және сфера ұғымы

Кеңістікте берілген O нүктесінен бірдей R қашықтығында орналасқан нүктелер жиынын ***сфера*** деп, кеңістіктің сферамен шектелген бөлігін ***шар*** деп атайды.

Мұнда O сфера (шар) ***центрі***, R сфера (шар) ***радиусы*** деп аталады. Жалпы, шарды радиусы R жартыдөңгелекті диаметрінен айналдырып алуға болады (3.39-сурет). Ал сфера — жарты шеңбердің айналуынан шығатын бет. Центрі O нүктесінде жататын, радиусы R-ге тең сфераны $\omega(O;\ R)$, сәйкес шарды $\Omega(O;\ R)$ арқылы белгілейтін боламыз.



3.39-сурет



3.40-сурет

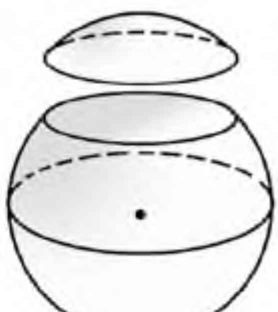
Сфера (шар) центрі арқылы өтетін кез келген жазықтық (түзу) оның симметрия жазықтығы (өсі) болады. Сфера (шар) центрі — оның симметрия центрі. Сфера центрі арқылы өтетін түзудің сферамен шектелетін кесіндісі оның ***диаметрі*** деп аталады.

Сфераның жазықтықпен қиылысуынан шеңбер шығады. Бұл шеңбердің центрі сфера центрінен қиюшы жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың табанымен беттеседі.

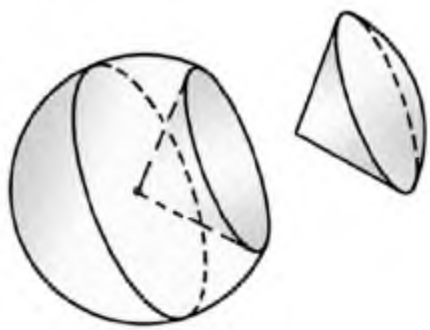
▲ $\omega(O; R)$ сферасы мен α жазықтығы қиылыссын: $\alpha \cap \omega(O; R) \neq \varnothing$. Осы қимадан кез келген M нүктесін алайық: $M \in \alpha$, $M \in \omega(O; R)$ және O нүктесінен α жазықтығына түсірілген перпендикулярдың табанын O_1 арқылы белгілейік (3.40-сурет). Мұнда $OM = R$, $OO_1 = h$, $OO_1 \perp \alpha$, $O_1 \in \alpha$ болғандықтан, OO_1M — тікбұрышты үшбұрыш. Олай болса, $O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - h^2}$, яғни O_1M кесіндісінің ұзындығы M нүктесіне тәуелсіз және тұрақты $\sqrt{R^2 - h^2}$ санына тең. Сондықтан $\alpha \cap \omega(O; R)$ — шеңбер және O_1 — оның центрі. ■

Сфераның центрі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы ***диаметрлік қима***, кейде *диаметрлік шеңбер немесе үлкен шеңбер* деп атайды.

Шар мен жазықтықтың қиылысуынан дөңгелек пайда болады және ол шарды екі бөлікке бөледі. Бұл бөліктердің әрқайсысын ***шар сегменті*** деп атайды (3.41-сурет).



3.41-сурет



3.42-сурет

Сфера мен жазықтықтың қиылысуынан пайда болған шеңбердің әрбір нүктесін сфера центрімен қосайық. Бұл кесінділер жиыны конустың бүйір бетін анықтайды және осы шарды екі бөлікке бөледі. Осы бөліктердің әрқайсысын ***шар секторы*** деп атайды (3.42-сурет).

3.3.2. Сфераның теңдеуі

$Oxyz$ тікбұрышты координаталар жүйесінде центрі $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесінде жатқан, радиусы R сфераның теңдеуін жазу керек.

$M(x;\ y;\ z)$ сфера бетіндегі кез келген нүкте болса, сфераның анықтамасы бойынша $CM=R$ (3.43-сурет). Екі нүктенің ара-қашықтығының формуласы бойынша

$$CM=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Онда M нүктесінің координаталары

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

немесе

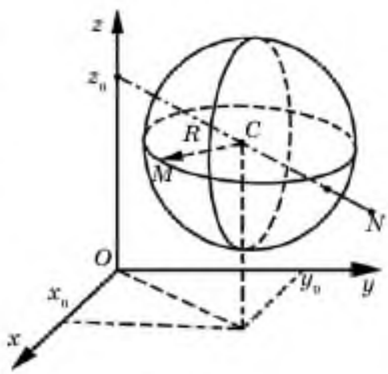
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (1)$$

Демек, сфераның кез келген нүктесі (1) теңдеуді қанағаттандырады. Енді керісінше, $\omega(C;\ R)$ сферасы бойында жатпайтын кез келген $N(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нүктесінің координаталары (1) теңдеуді қанағаттандырмайтынын көрсетейік. Шынында да, $N\notin\omega(C;\ R)$ болғандықтан, $CN\neq R$:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\neq R$$

немесе

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2\neq R^2.$$



3.43-сурет

Сонымен, сфера бетінде жатпайтын нүктенің координаталары (1) теңдеуді қанағаттандырмайды. Олай болса, (1) — сфераның теңдеуі.

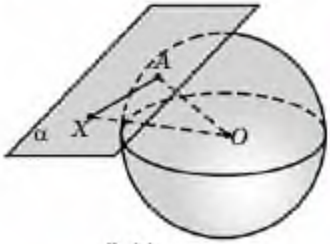
Сфераның центрі C координаталар бас нүктесімен беттессе, $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$, яғни $C(0;\ 0;\ 0)$ және сфераның теңдеуі (1)

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (2)$$

түрінде жазылады.

3.3.3. Сфераға жанама жазықтық

$\omega(O;\ R)$ сферасы мен α жазықтығының жалғыз ғана ортақ нүктесі болса, α жазықтығын осы сфераның жанама жазықтығы, олардың ортақ нүктесін ***жанасу нүктесі*** деп атайды (3.44-сурет).



3.44-сурет

Теорема

Жанасу нүктесіне жүргізілген радиус жанама жазықтыққа перпендикуляр және керісінше, сферадағы радиустың ұшы арқылы өтетін және осы радиусқа перпендикуляр жазықтық сфераның жанамасы болады.

▲ α жазықтығы $\omega(O;\ R)$ сферасын A нүктесінде жанасын. $OA \perp \alpha$ екенін көрсету керек (3.44-сурет).

Шынында да, OA мен α перпендикуляр емес, OA радиусы α жазықтығына жүргізілген көлбеу және O нүктесінен α жазықтығына түсірілген перпендикулярдың табаны A_1 делік. $OA_1 < OA = R$ болғандықтан, α жазықтығы, 3.3.1-бапта көрсеткеніміздей, сфераны шеңбер бойымен қиып өтеді. Бірақ олай болуы мүмкін емес, өйткені бұл жанама мен сфераның ортақ нүктесінің жалғыз екеніне қайшы. Сондықтан $OA \perp \alpha$ болуы қажет.

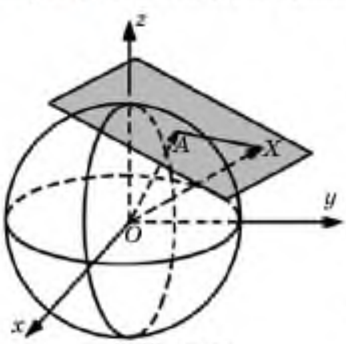
Енді керісінше, α жазықтығы OA радиусының A ұшынан өтіп, оған перпендикуляр болсын. α-ның сфераға жанама жазықтық болатынын көрсету керек.

Шынында да, X нүктесі α жазықтығының A-дан өзге кез келген нүктесі болсын. OA перпендикуляр, OX көлбеу болғандықтан, $OX > OA = R$ теңсіздігі орындалады. Олай болса, X нүктесі $\omega(O;\ R)$ сферасынан тысқары жатыр. α жазықтығы мен $\omega(O;\ R)$ сферасының жалғыз A ортақ нүктесі бар. Сондықтан α — жанама жазықтық. ■

1-мысал. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ теңдеуімен берілген сфераның $A(a;\ b;\ c)$ нүктесінде жүргізілген жанамасының теңдеуін жазу керек.

▲ А нүктесі сфера бойында жатқандықтан, оның координаталары сфера теңдеуін қанағаттандыруы қажет:

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2.$$



3.45-сурет

Екінші жағынан жанама жазықтық $A(a;\ b;\ c)$ нүктесі арқылы өтеді және $\overline{OA}\,(a,\ b,\ c)$ векторына перпендикуляр (3.45-сурет).Онда жанама жазықтықтың кез келген $X(x;\ y;\ z)$ нүктесі үшін $\overline{OA} \perp \overline{AX}$, яғни $\overline{OA} \cdot \overline{AX} = 0$ теңдігі орындалады. Мұнда $\overline{AX}(x - a;\ y - b;\ z - c;)$ болғандықтан, соңғы теңдікті

$$a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0$$

немесе

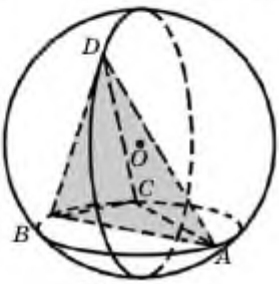
$$ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

түрінде жазамыз. $a^2 + b^2 + c^2 = R^2$ теңдігін ескерсек, жанаманың теңдеуі

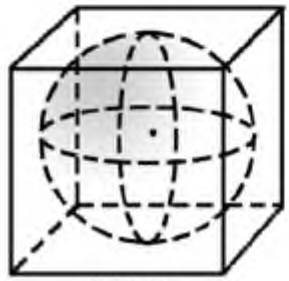
$$ax + by + cz = R^2$$

түрінде жазылады. ■

Егер көпжақтың барлық төбелері сфера бойында орналасса, мұндай көпжақты сфераға ***іштей сызылған көпжақ*** деп атайды (3.46-сурет). Көпжақтың барлық жақтары сфераны жанаса, мұндай көпжақты сфераға ***сырттай сызылған көпжақ*** деп атайды. 3.47-суретте сфераға сырттай сызылған куб кескінделген.



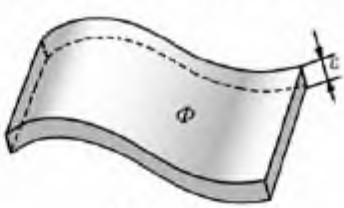
3.46-сурет



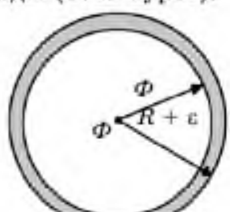
3.47-сурет

3.3.4. Сфераның ауданы

Бізге Φ беті берілсін және оның бетін бояумен біркелкі бояп шығу керек. Бояу берілген бетке қаншалықты жұқа жағылса да, оның белгілі бір ε қалыңдығы (биіктігі) бар. Демек, оны дене ретінде қарастырамыз. Осылай алынған денені Φ бетінің *қабыршағы* деп атайды. Сонымен, ***бет қабыршағы*** деп *оның әрбір нүктесіндегі жанама жазықтыққа перпендикуляр болатын ұзындығы ε-ға тең кесінділер жиынынан құралған денені* айтады (3.48-сурет).



3.48-сурет



3.49-сурет

Жалпы, сфера бетінің ауданы $S = 4\pi R^2$ формуласымен анықталатынын көрсетейік. Мұндағы R — сфераның радиусы. Шардың көлемі:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

формуласымен есептеледі.

Φ бетінің ауданы S болса, ε қалыңдықпен жағылған бояудың көлемі (қабыршақ көлемі) шамамен $V_\varepsilon \approx S \cdot \varepsilon$ теңдігімен анықталады. Мұнда ε саны неғұрлым кіші болған сайын теңдіктің дәлдігі соғұрлым жоғары. Олай болса, жуықпен $S \approx \frac{V_\varepsilon}{\varepsilon}$ теңдігі орындалады деп есептейміз. Сондықтан бет ауданына мынадай анықтама беруге болады: *V_ε шамасы қалыңдығы ε-ға тең қабыршақ көлемі болса, бұл беттің S ауданы $\varepsilon \to 0$ ұмтылғандағы $\frac{V_\varepsilon}{\varepsilon}$ қатынасының шегіне тең*. Мысалы, егер Φ беті ауданы S-ке тең жазық бет (көпбұрыш, дөңгелек және т.с.с.) болса, $V_\varepsilon \approx S \cdot \varepsilon$ және

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S \cdot \varepsilon}{\varepsilon} = S.$$

Осы формуланы пайдаланып, сфера бетінің ауданын анықтайық.

Бізге радиусы R сфера берілсін. Онда сфера қабыршағының радиустары $R + \varepsilon$ және R-ге тең концентрлі сфералармен шектелген дене болады (3.49-сурет). Оның көлемі

$$V_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\varepsilon(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Олай болса, сфераның ауданы

$$S = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\pi R^2.$$

Демек,

$$S = 4\pi R^2.$$

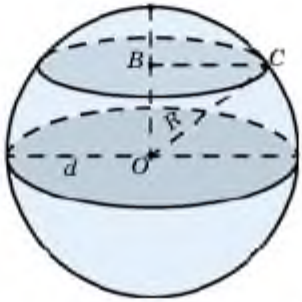
Шығармашылық есеп:

«НҰР ӘЛЕМ» — Астана ЭКСПО-2017-нің архитектуралық символы. Бұл — әлемдегі ең үлкен сфера түріндегі ғимарат. Оның диаметрі 80 м. Бұл ғимарат 8 қабаттан тұрады. Осы ғимараттың 7-қабатының ауданын есептейік (3.50-сурет).

▲Ғимарат 8 қабаттан тұрғандықтан, сфера диаметрінің қимасы оның 5-қабатына сәйкес келеді, өйткені оның астында 4 және үстінде 4 қабат орналасқан. Диаметрі 80 м болса, сфераның радиусы 40 м. Ендеше, әр қабаттың биіктігі 10 м. Олай болса, $OB = 30$ м. Пифагор теоремасы бойынша

$$BC = \sqrt{40^2 - 30^2} = 10\sqrt{7} \text{ м.}$$

Ендеше, 7-қабаттың ауданы $S = \pi \cdot \left(10\sqrt{7}\right)^2 = 700\pi \approx 2198$ м^2. ■



3.50-сурет

1. Қандай бетті сфера деп атайды? Оның қандай элементтерін білесіңдер?
2. Шар деген не? Оның сферадан қандай айырмашылығы бар?
3. Сфераның теңдеуі қалай жазылады?
4. Қандай жазықтықты сфераға жанама жазықтық деп атайды? Оның қандай қасиеттерін білесіңдер?
5. Сфера жанамасының теңдеуі қалай жазылады?
6. Қандай көпжақты сфераға іштей (сырттай) сызылған деп атайды?
7. Сфера бетінің ауданын қандай формуламен анықтайды?
8. Шар қабыршағы деп нені айтады?
9. Сфера беті ауданының формуласын дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

А

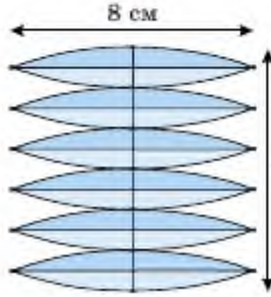
Практикалық тапсырма

3.85. Сызбада сфера мен жазықтықтың өзара орналасуын көрсетіңдер. Мұнда сфера центрінен жазықтыққа дейінгі қашықтықты сфера радиусымен салыстырыңдар.

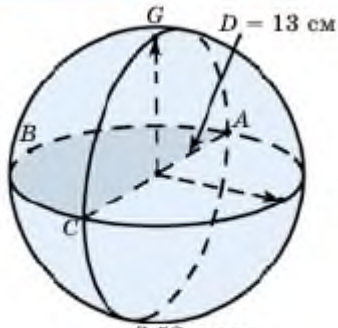
3.86. Радиусы R шардың үлкен шеңберінің ұзындығы мен диаметрлік қимасының ауданын табыңдар: 1) $R=2$ дм; 2) $R=4$ см; 3) $R=7$ м; 4) $R=12$ мм.

3.87. Радиусы R шар центрінен d-ға тең қашықтықта жүргізілген қиманың ауданын табыңдар: 1) $R=13$ см, $d=5$ см; 2) $R=5$ м, $d=3$ м; 3) $R=25$ мм, $d=24$ мм.

3.88. 3.51-суретте экваторы 16 см болатын сфераның жазбасы берілген. Сфераның ауданы $\frac{256}{\pi}$ см^2 екенін көрсетіңдер.



3.51-сурет



3.52-сурет

3.89. Сфераның диаметрі 13 см. Оның диаметрлік қимасының жартысының ауданы $\frac{169\pi}{8}$ см^2 болса, сфераның ауданы 169π см^2 екенін дәлелдеңдер (3.52-сурет).

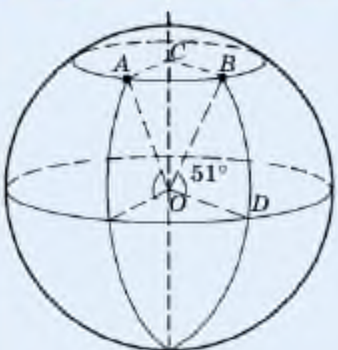
3.90. Диаметрі 16 м болатын сфераға жанама жазықтықта жататын нүктеден сфера центріне дейінгі қашықтық 10 м. Осы нүктеден жанасу нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

3.91. Центрі C нүктесі және радиусы R болатын сфераның теңдеуін жазыңдар: 1) $C(2;\ -1;\ -3)$, $R = 7$; 2) $C(0;\ 4;\ -5)$, $R = 15$; 3) $C(3;\ -2;\ 3)$, $R = \sqrt{61}$.

3.92. Сфераға көрсетілген нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін жазыңдар: 1) $x^2+y^2+z^2=14$, $A(1;\ -2;3)$; 2) $x^2+y^2+z^2=625$, $B(20;\ 0;\ -15)$; 3) $x^2+y^2+z^2=9$, $C(2;\ 2;-1)$. Алдымен көрсетілген нүкте берілген сфераның бойында жататынын тексеріп алыңдар.

3.93. Центрі C нүктесінде орналасқан сфера A нүктесі арқылы өтуі үшін оның радиусы қандай болуы қажет: 1) $A(1;\ 2;\ 3)$, $C(3;\ 4;\ 2)$; 2) $A(25;\ 6;\ -20)$, $C(-5;\ 6;\ -5)$; 3) $A(-5;\ 3;\ -4)$, $C(0;\ 5;\ 2)$?

Практикалық жұмыс



3.53-сурет

3.94. Нұр-Сұлтан қаласы 51° солтүстік ендікте орналасқан. Жердің радиусы 6400 км. Жердің өз өсінен айналу барысында Нұр-Сұлтан қаласының 3 сағ ішінде қандай жол жүретінін есептеу керек (3.53-сурет).

▲ $\angle COB = 90° - 51° = 39° \Rightarrow AC = BC = OB \cdot \sin 39° = 6400 \times \sin 39° \approx 4028$ км.

Үш сағатта Нұр-Сұлтан қаласы радиусы 4028 км болатын шеңбер доғасының $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ бөлігін жүріп өтеді. Сондықтан жүрген жол $S = 2\pi R \cdot \frac{1}{8} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4028 \cdot \frac{1}{8} \approx 3162$ км.

Жауабы: 3162 км жол жүреді. ■

Практикалық тапсырма

3.95. Өздерің тұрған елді мекеннің географиялық координатасын ғаламтор жүйесінен тауып, 45 минутта қанша жол жүретінін анықтаңдар.

3.96. Диагоналі 24 см тіктөртбұрыштың төбелері радиусы 13 см сфераның бойында орналасқан. Сфера центрінен тіктөртбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

3.97. Радиусы R-ге тең сфера бетінің ауданын табыңдар: 1) $R = 7$ см; 2) $R = 5$ м; 3) $R = 12$ мм; 4) $R = \sqrt{5}$ дм.

3.98. Радиусы R-ге тең сфераның ауданын табыңдар: 1) $R=12$ см; 2) $R=6$ м; 3) $R=9$ мм.

B

3.99. Радиусы 1-ге тең сфераға іштей сызылған кубтың толық бетін табыңдар.

3.100. Конус табанының радиусы 1, жасаушысы 2. Конусқа іштей сызылған сфераның радиусын анықтаңдар.

3.101. Радиусы 41 см болатын шарды оның центрінен 9 см қашықтықта жазықтық қиып өткен. Қиманың ауданын табыңдар.

▲ **Берілгені:** радиусы $OA = 41$ см болатын сфера. Сфераның центрінен оны қиятын жазықтыққа дейінгі арақашықтық

$$OB = 9 \text{ см}.$$

Т/к: центрі B нүктесінде болатын $S_{\text{Қима}}$ — ?

Шешуі: $S_{\text{Қима}} = \pi R^2 = \pi \cdot AB^2$.

1) Сфераны және оны қиюшы жазықтықты салғанда біз AB-ның қиюшы жазықтықтың радиусына тең екенін көреміз және оны Пифагор теоремасы арқылы табамыз:

$AB^2 = AO^2 - OB^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$ см.

2) Онда центрі B нүктесінде жатқан қиманың ауданы мынаған тең:

$S_{\text{Қима}} = \pi \cdot AB^2 = 1600\ \pi$ см^2.

3) 3D суретке сілтеме:

https://www.geogebra.org/classic/pvfegncza ■

3.102. Шар қимасы оған перпендикуляр радиустың ортасы арқылы өтеді. Қима ауданының шардың үлкен дөңгелегі ауданына қатынасын табыңдар.

3.103. Сфера бетіндегі нүкте арқылы өзара φ бұрышын жасайтын қима мен диаметр жүргізілген. Сфераның радиусын R-ге тең деп алып, қима шеңберінің ұзындығын табыңдар.

3.104. ABC үшбұрышының төбелері радиусы 13-ке тең сфераның бойында жатыр. $AB = 6$, $BC = 8$ және $AC = 10$. Сфераның центрінен үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

3.105. Тіктөртбұрыштың төбелері радиусы 5-ке тең сфераның бойында жатыр. Тіктөртбұрыштың диагоналі 16. Сфера центрінен тіктөртбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

3.106. Центрі O нүктесі болатын сфера бетінен A және B нүктелері алынған және AB диаметр емес. $C \in AB$ нүктесі AB-ның ортасы болуы үшін $OC \perp AB$ шарты қажетті және жеткілікті екенін дәлелдеңдер.

3.107. Берілген теңдеумен сфераның анықталатынын көрсетіп, оның центрі мен радиусын табыңдар: 1) $x^2+y^2+z^2-6z=0$; 2) $x^2+y^2+z^2-4x+2y=0$; 3) $x^2+y^2+z^2+10x+4y-8z+3=0$.

Практикалық тапсырма

3.108. Жер шарының радиусы 6400 км деп алып, Жер бетінен 1 км биіктіктегі ұшақтан көрінетін көкжиектің ең шеткі нүктесінен осы ұшаққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

3.109. Бірінің центрі екіншісінің бетінде орналасатын өзара тең екі сфераның ортақ шеңберлерінің радиусы r-ге тең. Осы сфералардың радиусын табыңдар.

3.110. Диагональдары 15 см және 20 см болатын ромбының барлық қабырғалары радиусы 10 см болатын сфераны жанайды. Сфераның центрінен ромб жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

3.111. Радиусы $\sqrt{2}$ -ге тең сфераға 1) іштей; 2) сырттай сызылған кубтың толық бетінің ауданын табыңдар.

3.112. Радиусы R-ге тең сфераға 1) іштей; 2) сырттай сызылған дұрыс тетраэдрдің қырын табыңдар.

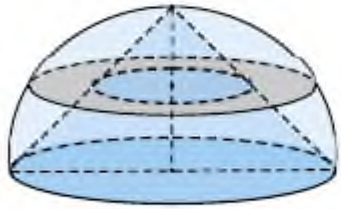
3.113. Радиустары R_1-ге және R_2-ге тең екі сфераның жалғыз ортақ нүктесі бар. Олардың центрлерінің арақашықтығы қандай болуы мүмкін?

3.114. Радиустары 25 см және 29 см болатын екі сфера центрлерінің арақашықтығы 36 см. Сфералардың ортақ шеңберлерінің ұзындығын табыңдар.

3.115. Дене концентрлі екі сферамен шектелген (қуыс шар). Дененің диаметрлік қимасының ауданы кіші сфераға жүргізілген жанама жазықтықпен қиғандағы қиманың ауданына тең екенін дәлелдеңдер.

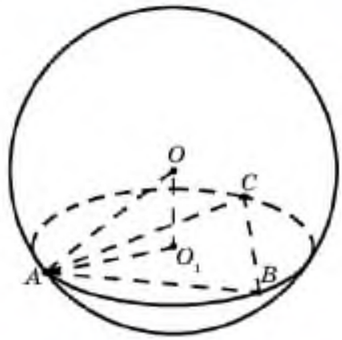
C

3.116. Жартышарға оның үлкен диаметрі мен табаны ортақ конус іштей сызылған. Конус биіктігінің ортасы арқылы табанына параллель қима жазықтық жүргізілген. Қиманың жартышардың беті және конустың бүйір бетімен шектелген бөлігінің (сақинаның) ауданы табан ауданының жартысына тең екенін дәлелдеңдер (3.54-сурет).



3.54-сурет

3.117. Қабырғалары 12 см, 16 см және 20 см болатын үшбұрыштың төбелері радиусы 26 см болатын сфераның бетінде жатыр. Сфера центрінен үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар (3.55-сурет).



3.55-сурет

▲ **Берілгені:** сфера және оның бетінде жатқан A, B, C нүктелері. $OA = 26$ см; $AB = 12$ см, $AC = 20$ см, $BC = 16$ см. O_1 нүктесі — ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі.

Т/к: OO_1 — ?

Шешуі: $p = \dfrac{16+12+20}{2} = 24$ см.

$S_{ABC} = \sqrt{24 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 4} = 96$ см².

$AO_1 = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{ABC}} = \dfrac{16 \cdot 20 \cdot 12}{4 \cdot 96} = 10$ см.

AOO_1 үшбұрышынан $OO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ см.

Жауабы: 24 см. ■

3.118. Өстік қимасы квадрат болатын цилиндр сфераға іштей сызылған. Сфера ауданының цилиндрдің толық бетінің ауданына қатынасын табыңдар.

3.119. $A(2; 0; 1)$, $B(2; 0; 3)$, $C(1; 4; 0)$ және $D(1; 2; 2)$ нүктелері арқылы өтетін сфераның центрі мен радиусын табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

3.120.* 1) Ауданы 18-ге тең ABC үшбұрышының AB қабырғасынан $AM:MN:NB=1:2:3$ қатынастары орындалатындай N және M нүктелері алынған. M және N нүктелерінен BC қабырғасына параллель түзулер жүргізілген. Осы түзулермен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

2) A_1, B_1, C_1 нүктелері ABC үшбұрышының BC, AC және AB қабырғаларын мына қатынастарда бөледі: $BA_1:A_1C = 3:7$, $AB_1:B_1C = 1:3$, $AC_1:C_1B = 1$. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының аудандарының қатынастарын табыңдар.

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Конус	Конус	Cone
2	Қиық конус	Усеченный конус	Truncated cone
3	Өстік қима	Осевое сечение	Axial section
4	Сырттай сызылған	Описанный	Outscribed
5	Сфера	Сфера	Sphere
6	Цилиндр	Цилиндр	Cylinder
7	Шар	Шар	Ball
8	Іштей сызылған	Вписанный	Inscribed

«АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ» бөлімінің қорытындысы

1) Айналу денесінің өсі арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда пайда болған қима оның **өстік қимасы** деп аталады.
2) **Цилиндр** деп тіктөртбұрыштың бір қабырғасынан айналғанда шыққан денені айтады.
3) Егер цилиндрді табан шеңберлері және бір жасаушысы бойымен қиып, шыққан фигураны бір жазықтыққа жазып орналастырсақ, цилиндрдің **жазбасын** аламыз.
4) Цилиндрдің табан радиусы r, биіктігі h болса, оның бүйір бетінің жазбасы өлшемдері h және $2\pi r$-ге (цилиндр табанындағы

шеңбердың ұзындығы) тең тіктөртбұрыш болады. Демек, бұл цилиндрдің бүйір бетінің ауданы

$$S_{б.б.} = 2\pi rh,$$

ал толық бетінің ауданы

$$S_{т.б.} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h).$$

5) Цилиндрдің жасаушысы арқылы өтетін және цилиндрмен өзге ортақ нүктелері болмайтын жазықтықты цилиндрге **жанама жазықтық** деп атайды.
6) Тікбұрышты үшбұрышты бір катетінен айналдырғанда шыққан денені **конус** деп атайды.
7) Конустың төбесі мен оның табанындағы шеңбердің кез келген нүктесін қосатын кесінді конустың **жасаушысы** деп аталады.
8) Конустың қайсыбір жасаушысы арқылы өтетін және конуспен өзге ортақ нүктелері болмайтын жазықтықты оның **жанама жазықтығы** деп атайды.
9) Конустың толық бетінің ауданы былай анықталады:

$$S_{т.б.} = S_{б.б.} + S_{таб} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

10) Қиық конустың бүйір бетінің ауданы былай анықталады:

$$S_{б.б.} = \pi l(R + r).$$

11) Кеңістікте берілген O нүктесінен бірдей R қашықтықта жатқан нүктелер жиынын **сфера** деп, ал кеңістіктің сферамен шектелген бөлігін **шар** деп атайды.
12) Сфера центрі арқылы өтетін түзудің сферамен шектелетін кесіндісі оның **диаметрі** деп аталады.
13) Сфераның кез келген жазықтықпен қимасы шеңбер болады, ал бұл шеңбердің центрі сфера центрінен қиюшы жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың табанымен беттеседі.
14) Сфера мен оның центрі арқылы өтетін жазықтықтың қимасын **диаметрлік қима**, ал кейде сфераның **диаметрлік шеңбері немесе үлкен шеңбері** деп те атайды. Осы сияқты, шар мен жазықтықтың қиылысуы дөңгелек болады және бұл қима шарды екі бөлікке бөледі. Бұл бөліктердің әрқайсысын **шар сегменті** деп атайды.
15) Егер $M(x; y; z)$ сфера бетіндегі кез келген нүкте болса, сфераның анықтамасы бойынша $CM=R$ теңдеуі орындалуы тиіс. Сонда сфераның теңдеуі мына түрге енеді:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

16) Жанасу нүктесіне жүргізілген радиус жанамаға перпендикуляр және керісінше, сферадағы радиустың ұшы арқылы өтетін және осы радиусқа перпендикуляр жазықтық сфераның жанамасы болады.
17) Сфераның ауданы мына формуламен анықталады:

$$S = 4\pi R^2.$$

IV бөлім. ДЕНЕЛЕРДІҢ КӨЛЕМДЕРІ

Бұл бөлімде дене көлемдерінің жалпы қасиеттері, кеңістік фигураларының ұқсастығы, көпжақтар мен айналу денелерінің көлемдерімен танысып, көлемді есептеу формулаларын практикада қолдануды үйренесіңдер.

Бөлімде қарастырылатын тақырыптар:

4.1. Көлем ұғымы. Дене көлемінің жалпы қасиеттері. Кеңістік фигураларының ұқсастығы. Көпжақтар көлемі

4.2. Айналу денелерінің көлемі

4.3. Геометриялық денелердің комбинацияларының көлемдері

«Мәңгілік ел» триумфалды аркасы Нұр-Сұлтан қаласында 2011 жылғы 16 желтоқсанда мемлекеттің 20 жылдық тәуелсіздігінің символы ретінде ашылды. Арканың биіктігі 20 м, ені 13 м. Арканың төбесінде қаланың көрінісін тамашалай алатын арнайы алаң ойластырылған. Триумфалды арканың қасбетінде «Мәңгілік ел» жазуы бар. Арка қазақ оюларымен безендірілген. Фасадтардың түбінде ойшыл ақсақалдың, әйел ананың, орта ғасырлардағы батырдың және заманауи жауынгердің қола мүсіндері орнатылған. Олардың биіктігі 4,4 м. Арканың бүйір қуысында Қожа Ахмет Ясауи мавзолейіндегі «Тайқазанның» көшірмесі орнатылған. Арканың қасбеті гранит пен мәрмәрдан жасалған. Геометриялық денелердің комбинацияларының көлемдері арқылы осы триумфалды арканың көлемін есептеуді үйренесіңдер.

4.1. Көлем ұғымы. Денелер көлемдерінің жалпы қасиеттері. Көпжақтар көлемі. Кеңістік фигураларының ұқсастығы

Бұл тақырыпта денелердің көлемдерін табуды үйреніп, соңында:

- **денелердің көлемдерінің қасиеттерін білесіңдер және қолданасыңдар;**
- **кеңістіктегі ұқсас фигуралардың көлемдерінің қасиетін біліп, оны есептер шығарғанда қолданасыңдар;**
- **призма көлемін есептеу формуласын біліп, оны есептер шығарғанда қолданасыңдар;**
- **пирамида және қиық пирамиданың көлемдерін есептеу формулаларын білесіңдер және оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар.**

4.1.1. Көлем ұғымы. Денелердің көлемдерінің жалпы қасиеттері

Әрбір кеңістік денесінің жазықтықтағы фигураның ауданы сияқты, белгілі бір сан мәндерімен өрнектелетін өлшемі бар. Оны ***дененің көлемі*** деп атайды. Жалпы, мектеп математикасында дене көлемі ұғымын қатаң математикалық тұрғыдан қарастыру көзделмеген. Бұл ұғым жоғары математиканың өлшемдер теориясы бөлімінде негізделеді. Десек те, біз дене көлемі ұғымының төмендегі қасиеттерін қолданамыз:

1°. Әрбір дененің теріс емес санмен өрнектелетін көлемі бар;

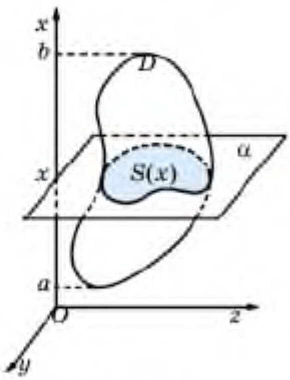
2°. Тең денелердің көлемдері де тең болады;

3°. Егер дене бірнеше бөлікке бөлінсе, онда оның көлемі осы бөліктер көлемдерінің қосындысына тең.

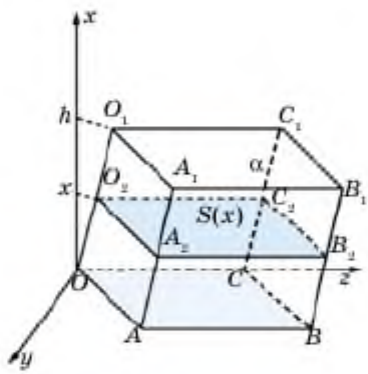
Дене көлемінің сан мәні алынған сызықтық өлшем бірлігіне, яғни алынған бірлік масштабқа тәуелді. Мысалы, 1000 см^3 көлемі 1 дм^3 немесе 0,001 м^3 көлеміне тең. Жазықтықта қабырғасы бірлік масштабтық кесіндіге тең квадраттың ауданын **аудан бірлігі** ретінде алғанбыз. Осы сияқты, қыры бірлік кесіндіге тең куб көлемі **көлем бірлігі** ретінде алынады. Алдын ала қандай көлем бірлігі алынатыны белгілі болса, көлемдерді анықтау барысында өлшем бірліктерін жазбаса да болады. Жалпы, көлемі анықталмайтын денелер де кездеседі. Мектеп курсында мұндай денелерді қарастырмайды. Дәлірек айтсақ, мектеп курсында қарастырылатын денелердің белгілі бір көлемі бар.

Енді алгебра және анализ курсында қарастырылған дене көлемдерін интеграл көмегімен анықтау тәсілін еске түсірейік. D денесінің орналасу жағдайына байланысты $Oxyz$ координаталар жүйесін 4.1-суретте көрсетілгендей етіп таңдайық. Сонымен, D денесі Ox өсі бойынша $[a; b]$ аралығында жатқан және оның әрбір $x \in [a; b]$ нүктесінде Ox өсіне перпендикуляр α жазықтығымен жасайтын қимасының ауданы тек x-ке тәуелді $S(x)$ функциясымен өрнектелсін. Онда D денесінің көлемі

$$V(D) = \int_a^b S(x)\, dx. \quad (1)$$



4.1-сурет



4.2-сурет

4.1.2. Параллелепипедтің және призманың көлемі

(1) формуланың қолданылуына мысал ретінде $OABCO_1A_1B_1C_1$ параллелепипедінің көлемін анықтайық. Ол үшін $Oxyz$ координаталар жүйесін 4.2-суретте көрсетілгендей етіп орналастырып, параллелепипедтің Ox өсіне перпендикуляр қималарының ауданын анықтайық. $OABCO_1A_1B_1C_1$ параллелепипедінің биіктігі h болса, бұл дене Ox өсі бойынша $[0; h]$ аралығында орналасады, ал әрбір Ox өсіне перпендикуляр қималары табан жазықтығына параллель және өзара тең. Сондықтан $S_{O_2A_2B_2C_2} = S_{OABC} = S$ — тұрақты сан. Олай болса, (1) формула бойынша

$$V_{OABCO_1A_1B_1C_1} = \int_0^h S \cdot dx = S \cdot x\Big|_0^h = S \cdot h.$$

Сонымен, параллелепипедтің көлемі табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең:

$$V = S_{\text{таб}} \cdot h. \quad (2)$$

Мұндағы h — параллелепипедтің биіктігі, $S_{\text{таб}}$ — табанының ауданы.

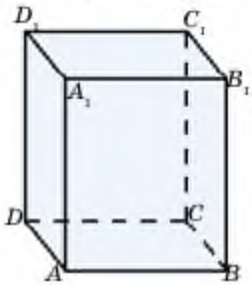
Егер $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипед және оның өлшемдері $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ десек, оның табан ауданы

$$S_{\text{таб}} = AB \cdot AD = a \cdot b,$$

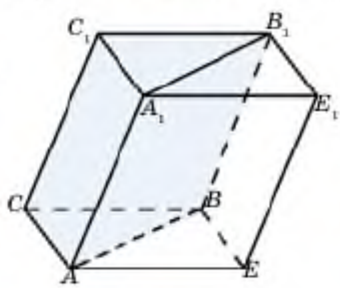
биіктігі $h = AA_1 = c$ (4.3-сурет). Бұл тікбұрышты параллелепипедтің көлемі (2) формула бойынша

$$V = a \cdot b \cdot c \tag{3}$$

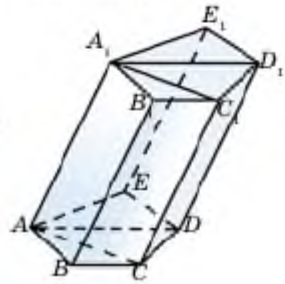
формуласымен анықталады. Демек, ***тікбұрышты параллелепипедтің көлемі оның үш өлшемінің көбейтіндісіне тең.***



4.3-сурет



4.4-сурет



4.5-сурет

Енді үшбұрышты призманың көлемін анықтайық. Ол үшін $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмасын $AEBCA_1E_1B_1C_1$ параллелепипедіне дейін толықтырамыз (4.4-сурет). Онда бұл параллелепипед өзара тең $ABCA_1B_1C_1$ және $AEBA_1E_1B_1$ үшбұрышты призмалардың бірігуінен құралған. Сондықтан үшбұрышты призманың көлемі $AEBCA_1E_1B_1C_1$ параллелепипеді көлемінің жартысына тең:

$$V = V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{2}V_{AEBCA_1E_1B_1C_1} = \frac{1}{2}S_T \cdot h.$$

Мұндағы $S_{\text{таб}} = S_{AEBC} = 2S_{ABC}$ және призма мен параллелепипедтің биіктіктері ортақ болғандықтан,

$$V = \frac{1}{2} \cdot 2S_{ABC} \cdot h = S_{ABC} \cdot h.$$

Үшбұрышты призманың көлемі табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең.

Осы сияқты, кез келген *призманың көлемі табан ауданын оның биіктігіне көбейткенге тең:*

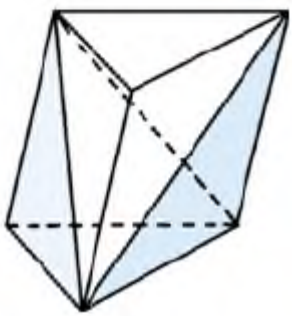
$$V = S_{\text{таб}} \cdot h. \tag{4}$$

Бұл деректі 4.5-суретте көрсетілгендей, призманы бірнеше үшбұрышты призмаларға бөліп негіздеу қиын емес.

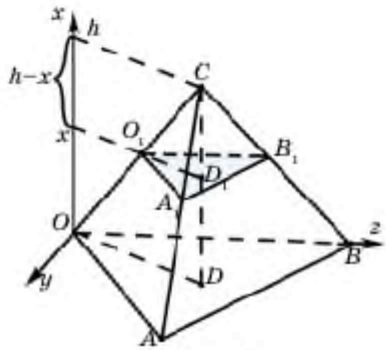
4.1.3. Пирамиданың көлемі

Үшбұрышты призманы бүйір жақтарының диагональдары арқылы 4.6-суретте көрсетілгендей етіп көлемдері бірдей үш пирамидаға бөлуге болады. Онда пирамиданың көлемі *табан ауданы мен биіктігі көбейтіндісінің* $\frac{1}{3}$ *бөлігіне тең:*

$$V_T = \frac{1}{3} S \cdot h. \qquad (5)$$



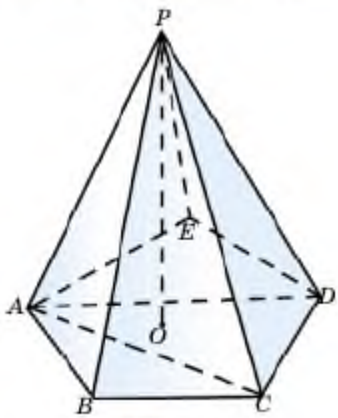
4.6-сурет



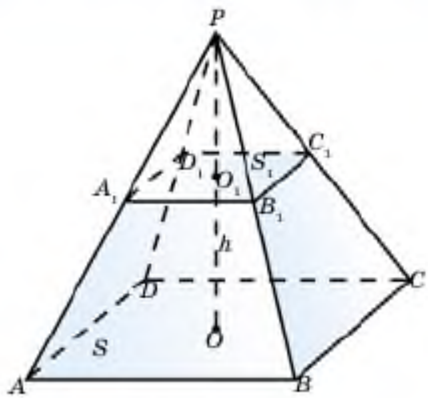
4.7-сурет

Практикалық жұмыс

(5) формуланы анықталған интеграл көмегімен өздерің дәлелдеңдер (4.7-сурет).



4.8-сурет



4.9-сурет

Кез келген пирамиданың көлемін, 4.8-суреттен көріп отырғанымыздай, (5) формула арқылы есептеуге болады.

Табан аудандары S_1 және S, биіктігі h-қа тең қиық пирамиданың көлемі

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{S \cdot S_1} + S_1\right) \qquad (6)$$

формуласымен анықталатынын көрсетейік (4.9-сурет).

$S_{ABCD} = S$, $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_1$ және $OO_1 = h$ болсын (4.9-сурет). Онда қиық пирамиданың көлемі $PABCD$ және $PA_1B_1C_1D_1$ пирамидалары көлемдерінің айырымына тең:

$$V = V_{PABCD} - V_{PA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}S \cdot PO - \frac{1}{3}S_1 \cdot PO_1. \qquad (7)$$

$OO_1 = h$, $PO_1 = x$ деп алсақ, $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ фигураларының ұқсастығынан

$$\frac{S}{S_1} = \frac{PO^2}{PO_1^2} = \frac{(h+x)^2}{x^2}$$

теңдігі орындалады. Осыдан $x = \dfrac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$. (7) теңдіктен

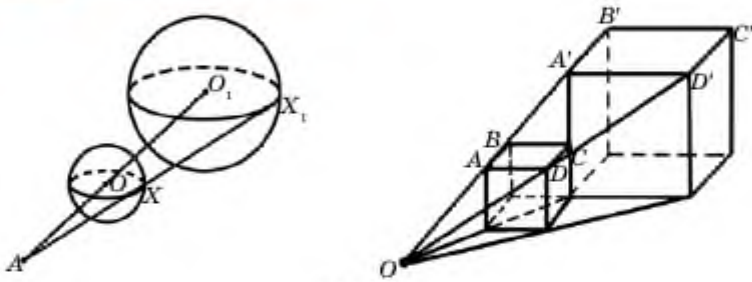
$$V = \frac{1}{3}S \cdot (h + x) - \frac{1}{3}S_1 \cdot x = \frac{1}{3}(hS + x(S - S_1)) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(hS + \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}\left(S - S_1\right)\right) = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{S \cdot S_1} + S_1\right).$$

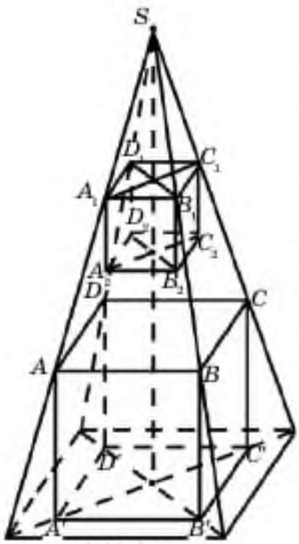
(6) формула толық дәлелденді.

4.1.4. Кеңістік фигураларының ұқсастығы. Ұқсас фигуралардың көлемдері

Кеңістікте екі дене берілсін. Олардың бірінің сызықтық өлшемдерін бірдей шамаға кішірейту (немесе ұлғайту) арқылы екіншісі алынса, олар *ұқсас денелер* деп аталады (4.10, 1 – 4.10,2-суреттер). Ұқсас денелердің сәйкес сызықтық және көпжақты бұрыштары өзара тең болады. Кез келген екі шар бір-біріне ұқсас, сол сияқты кез келген екі куб бір-біріне ұқсас.



4.10.1-сурет



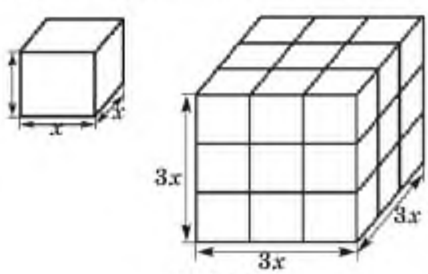
4.10.2-сурет

Екі тетраэдрдің сәйкес қырлары өзара пропорционал болса, олар ұқсас тетраэдрлер. Мысалы, бізге өзара ұқсас екі тетраэдр берілсе және бірінші тетраэдрдің қырлары оған ұқсас екінші тетраэдрдің сәйкес қырларынан екі есе ұзын болса, оның биіктігі, апофемасы, сырттай сызылған сфераның радиусы да екінші тетраэдрдің сәйкес элементтерінен 2 есе ұзын болады.

Бүйір жақтарының саны өзара тең екі дұрыс призманың немесе пирамиданың табан қыры мен биіктіктері өзара пропорционал болса, бұл фигуралар ұқсас. Екі цилиндр немесе екі конустың табан радиустары мен биіктіктері пропорционал болса, олар ұқсас.

Ұқсас жазық фигуралардың аудандарының қатынасы олардың сызықтық өлшемдері (қабырғалары) қатынасының квадратына тең екенін білеміз. Өзара ұқсас кеңістік фигуралары көлемдерінің қатынасын қарастырайық.

4.11-суретте екі куб көрсетілген. Екінші кубтың қыры бірінші кубтың қырынан үш есе ұзын. Онда бірінші кубтың көлемі



4.11-сурет

$$V_1 = x \cdot x \cdot x = x^3.$$

Екінші кубтың көлемі

$$V_2 = 3x \cdot 3x \cdot 3x = 27x^3.$$

Екінші кубтың көлемі бірінші кубтың көлемінен $3^3 = 27$ есе үлкен.

Денені кеңістікте үлкейткенде (немесе кішірейткенде) оның сызықтық өлшемдерінің барлығы да (мысалы, тікбұрышты параллелепипед үшін ұзындығы, ені, биіктігі) үлкейеді (немесе кішірейеді). Сонымен, егер дененің барлық сызықтық өлшемдері n есе өзгерсе (өссе не кемісе), онда сәйкес дененің көлемі n^3 есе өзгереді (өседі не кемиді). Сондықтан ***ұқсас денелердің көлемдері олардың сызықтық өлшемдерінің кубтарына пропорционал.*** Ұқсас денелер көлемдерінің қатынасы олардың сәйкес сызықтық өлшемдері қатынасының кубына тең. Мысалы, қандай да бір бұйымның биіктігі бойынша 6 есе кішірейтілген моделінің көлемі сол бұйым көлемінен $6^3 = 216$ есе аз. Қорыта айтқанда, V_1 және V_2 — ұқсас денелердің көлемдері және h_1 мен h_2 олардың сәйкес сызықтық өлшемдерінің бірі (мысалы, биіктігі) болса, мына теңдік орындалады:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3.$$

1-мысал. Биіктігі 55 см самаурынға 42 кесе шай сыяды. Осы самаурынға ұқсас ұзындығы 44 см самаурынға неше кесе шай сыяды?

▲ Ұқсас денелердің көлемдерінің қатынасы олардың сәйкес сызықтық өлшемдерінің қатынасының кубына тең болғандықтан,

$$\frac{V_{\text{үлкен}}}{V_{\text{кіші}}} = \left(\frac{55}{44}\right)^3 \Rightarrow \frac{42_{\text{кесе}}}{V_{\text{кіші}}} = \frac{125}{64} \Rightarrow V_{\text{кіші}} = \frac{42 \cdot 64}{125} = 21{,}504 \approx 21{,}5.$$

Жауабы: 21,5 кесе шай сыяды. ■

2-мысал. Дүкенде екі сұрыпты жұмыртқа сатылады. Бірінші сұрыпты жұмыртқаның биіктігі 60 мм, бағасы 400 теңге (10 данасы). Екінші сұрыпты жұмыртқаның биіктігі 55 мм, бағасы 300 теңге. Қандай сұрыпты жұмыртқаны алған тиімді?

▲ Жұмыртқалардың көлемдерін салыстырамыз:

$$\frac{V_{\text{1-сұрып}}}{V_{\text{2-сұрып}}} = \left(\frac{60}{55}\right)^3 \approx 1{,}3.$$

Енді бағаларының қатынасы:

$$\frac{\text{баға}_{\text{1-сұрып}}}{\text{баға}_{\text{2-сұрып}}} = \frac{400}{300} \approx 1{,}33.$$

Бағаларының қатынасы олардың көлемдерінің қатынасынан үлкен және

$$\text{Баға}_{\text{1-сұрып}} = 1{,}3 \cdot 300 = 390 < 400.$$

Сондықтан 2-сұрыпты жұмыртқаны алған тиімді. ■

1. Геометриялық дененің көлемі дегенді қалай түсінесіңдер? Оның қандай қасиеттері бар?
2. Дененің көлемін анықталған интеграл арқылы қалай есептейді?
3. Параллелепипедтің көлемі қандай формуламен анықталады? Оны қорытып шығарыңдар.
4. Тікбұрышты параллелепипедтің, призманың көлемі қандай формуламен анықталады?
5. Пирамиданың көлемі қандай формуламен анықталады? Оны қорытып шығарыңдар.
6. Қиық пирамиданың көлемін анықтайтын формуланы қорытып шығарыңдар.
7. 1 л сұйықтың көлемі қандай?

ЕСЕПТЕР

А

Практикалық тапсырма (4.1 – 4.3):

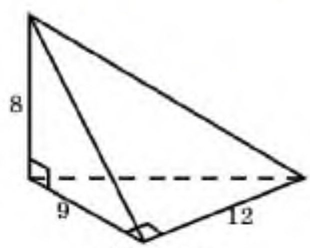
4.1. Сынып бөлмесінің көлемін есептеңдер.

4.2. Өздерің отырған партаның бетін дайындауға жұмсалған материалдың көлемі қандай?

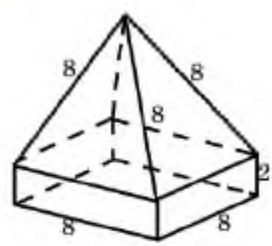
4.3. Тоңазытқыш сипаттамаларының бірі — оның ішінің көлемі болып саналады. Үйлеріңде тұрған тоңазытқыштың ішкі көлемін есептеңдер. Теледидардың көлемін есептеңдер.

4.4. 4.12, 4.13-суреттегі өлшемдері берілген көпжақтардың көлемдерін анықтаңдар:

4.12-сурет



4.13-сурет



4.14-сурет

4.5. Төменгі жағында өлшемдері 8 × 8 × 2 болатын тікбұрышты параллелепипед, үстінде дұрыс төртбұрышты пирамидадан құралған көпжақтың көлемін анықтаңдар (4.14-сурет):

4.6. Өлшемдері a, b және c-ға тең тікбұрышты параллелепипедтің көлемін табыңдар: 1) a=2 м, b=4 м, c=7 м; 2) a=5 см, b=12 см, c=11 см; 3) a=3 дм, b=5 дм, c=6 дм.

4.7. Кубтың диагоналі 12 см. Кубтың көлемін табыңдар.

4.8. Кубтың толық беті 96 см^2. Осы кубтың көлемі неге тең?

4.9. Егер кубтың әр қырын 1 см-ге арттырса, оның көлемі 91 см^3-ге артады. Кубтың қыры неге тең?

4.10. Биіктігі h-қа тең параллелепипедтің табанындағы параллелограмның қабырғалары a және b, сүйір бұрышы φ. Параллелепипедтің көлемін табыңдар: 1) h = 7 см, a = 4 см, b = 8 см, φ = 30°; 2) $h = \sqrt{2}$ м, a = 5 м, b = 10 м, φ = 45°; 3) h = 10 мм, a = 7 мм, $b = 7\sqrt{3}$ мм, φ = 60°.

4.11. Алдыңғы есепті үшбұрышты призма үшін шығарыңдар. Мұндағы h — призманың биіктігі, a және b — табанындағы үшбұрыштың қабырғалары, φ — олардың арасындағы бұрышы.

4.12. Үшбұрышты призманың биіктігі h, табан қабырғалары a, b және c. Призманың көлемін табыңдар: 1) a=15 см, b=14 см, c=13 см, h=12 см; 2) a=17 дм, b=65 дм, c=80 дм, h=100 дм.

4.13. Диагоналі d-ға тең кубтың көлемін табыңдар: 1) $d = 5\sqrt{3}$ мм; 2) $2\sqrt{3}$ м; 3) d = 12 см.

4.14. Биіктігі h және табаны қабырғасы a-ға тең квадрат болып келген пирамиданың көлемін табыңдар: 1) h=12 см, a=5 см; 2) h=15 м, a=7 м.

4.15. Биіктігі h-қа тең пирамида табанындағы параллелограмның қабырғалары a және b, сүйір бұрышы φ. Пирамиданың көлемін табыңдар: 1) h = 7 см, a = 4 см, b = 8 см, φ = 30°; 2) $h = \sqrt{2}$ м, a = 5 м, b = 10 м, φ = 45°; 3) h = 10 мм, a = 7 мм, $b = 7\sqrt{3}$ мм, φ = 60°.

4.16. Үшбұрышты пирамиданың биіктігі h, табан қабырғалары a, b және c. Пирамиданың көлемін табыңдар: 1) a=15 см, b=14 см, c=13 см, h=12 см; 2) a=17 дм, b=65 дм, c=80 дм, h=100 дм.

4.17. Қиық пирамиданың табандары — қабырғалары a-ға және a_1-ге тең квадраттар, биіктігі h. Оның көлемін табыңдар: 1) a=2 м, a_1=5 м, h=6 м; 2) a=15 см, a_1=20 см, h=10 см.

4.18. Қырларының әрқайсысы *a*-ға тең дұрыс 1) төртбұрышты; 2) үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

4.19. b бүйір қыры биіктігімен φ бұрыш жасайтын дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар: 1) $b = 6$ м, $\varphi = 30°$; 2) $b = 12$ см, $\varphi = 60°$; 3) $b = \sqrt{2}$ дм, $\varphi = 45°$.

4.20. Кубтың диагональдық қимасының ауданы $9\sqrt{2}$ см². Көлемін табыңдар.

4.21. Қыры *a*-ға тең дұрыс тетраэдрдің көлемін табыңдар.

4.22. Параллелепипедтің бүйір жақтарының әрқайсысы — қабырғасы 6 см болатын квадрат, табанындағы ромбының сүйір бұрышы 60°. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

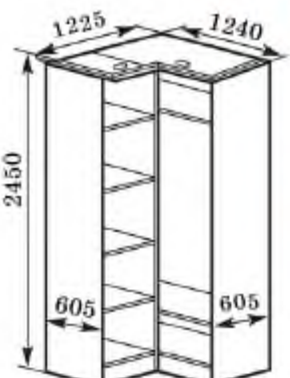
4.23. Қыры 10 см болатын октаэдрдің көлемін табыңдар.

4.24. Үшбұрышты тік призманың табан қабырғалары 10 см, 17 см және 21 см, призманың биіктігі 20 см. Призма көлемінің 1680 см³ болатынын көрсетіңдер.

4.25. Кубтың диагональдық қимасының ауданы $25\sqrt{2}$ см². Кубтың көлемі 125 см³ болатынын көрсетіңдер.

4.26. Үшбұрышты тік призманың барлық қырлары $2\sqrt{3}$. Оның көлемін табыңдар.

4.27. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі $6\sqrt{3}$, табан қабырғасы 4. Пирамиданың көлемін табыңдар.



4.15-сурет

Практикалық тапсырма

4.28. 4.15-суретте көрсетілген бұрыштық жиһаз өлшемдері миллиметрмен берілген. Жиһазды жасауға кететін материалдың ауданын және жиһаздың көлемін анықтаңдар.

B

4.29. Дұрыс үшбұрышты призманың табан ауданы $12\sqrt{3}$. Егер призманың биіктігі табаны қабырғасынан 2 есе үлкен болса, призманың көлемін табыңдар.

4.30. Кубтың көлемі $16\sqrt{2}$ см³. Кубтың жағына сырттай сызылған шеңбердің радиусы 2 см болатынын көрсетіңдер.

4.31. Дұрыс үшбұрышты призманың көлемі $27\sqrt{3}$ см^3. Оның табанына сырттай сызылған шеңберінің радиусы 2-ге тең. Призманың биіктігін табыңдар.

4.32. Тік призманың табанында жатқан үшбұрыштың бір қабырғасы 2 м, қалғандары 3 м. Призманың бүйір қыры 4 м. Көлемі осы призма көлеміне тең кубтың қыры $2\sqrt[6]{2}$ болатынын дәлелдеңдер.

4.33. Призманың табаны — радиусы 6 болатын дөңгелекке іштей сызылған дұрыс үшбұрыш, бүйір жақтары — квадраттар. Призманың көлемі неге тең?

4.34. Дұрыс үшбұрышты призманың бүйір қыры табанындағы үшбұрыштың биіктігіне тең. Ортақ төбеден шығатын табан биіктігі мен призманың бүйір қыры арқылы өтетін қиманың ауданы 75 см^2. Призманың көлемін табыңдар.

4.35. Кубтың қырын 2 есе арттырса, көлемі неше есе артады?

4.36. Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір жақтарының бірі — ромб және ол табан жазықтығына перпендикуляр, ромбының диагональдары 3 және 4 см. Егер призманың табаны теңқабырғалы үшбұрыш болса, призманың көлемі қандай?

4.37. Екі кубтың қырларының қатынасы 2:5. Олардың көлемдерінің қатынасы қандай?

4.38. Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі d және ол табан жазықтығына φ бұрышымен көлбеген. Параллелепипед табанының кіші қабырғасын a деп алып, оның көлемін табыңдар.

4.39. Табаны квадрат болатын тік призманың көлемі V, табан ауданы S. Оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

4.40. Көлбеу төртбұрышты призманың табаны — квадрат және бүйір қырларының бірі табан қабырғаларымен өзара тең сүйір бұрыштар жасайды және табан жазықтығына φ бұрышымен көлбеген. Призманың табан қабырғасы a, бүйір қыры b деп алып, көлемін табыңдар.

4.41. Үшбұрышты призманың табан қабырғалары 5 см, 6 см және 9 см, бүйір қыры 10 см және ол табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Призманың көлемін табыңдар.

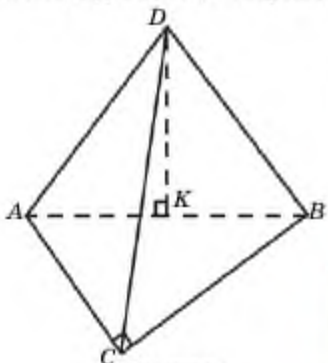
4.42. Көлбеу үшбұрышты призманың бүйір қыры 15 см, бүйір қырларының арақашықтықтары 26 см, 25 см және 17 см. Призманың көлемін табыңдар.

4.43. Дұрыс үшбұрышты призманың табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусы R және барлық бүйір жақтары — квадрат. Призманың көлемін табыңдар.

4.44. Дұрыс алтыбұрышты призманың табан қабырғасы a, үлкен диагональдық қимасының ауданы S. Призманың көлемін табыңдар.

4.45. Пирамида биіктігінің ортасы арқылы өтетін табанына параллель жазықтық оның көлемін қандай қатынаста бөледі?

4.46. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың 1) биіктігі h, табанындағы екіжақты бұрышы φ; 2) табан қабырғасы a және төбесіндегі жазық бұрышы φ. Пирамиданың көлемін табыңдар.



4.16-сурет

4.47. Үшбұрышты пирамиданың биіктігі табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі арқылы өтеді, табаны — катеттері 8 см, 6 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Пирамиданың бүйір қырын 13 см деп алып көлемін табыңдар (4.16-сурет).

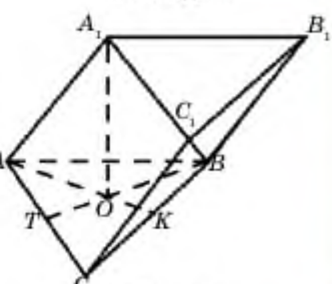
▲ **Берілгені:** $DABC$ пирамидасы. $\angle ACB = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. $AD = BD = CD = 13$ см, DK — пирамида биіктігі.

Т/к: V_{DABC} — ?

Шешуі: $AB = 10$ см, $AK = 5$ см, $\Delta ADK: DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} =$ $= 12$ см.

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 =$$

$= 96$ см^3. ■



4.17-сурет

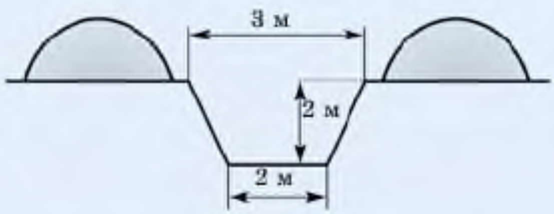
4.48. Үшбұрышты призманың табаны — дұрыс үшбұрыш. Оның жоғарғы табанының төбесінен түсірілген биіктік төменгі табанының центрінен өтеді. Призманың бүйір қырлары табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Призманың биіктігін 4 см деп алып, көлемін табыңдар (4.17-сурет).

4.49. Пирамиданың табаны — сүйір бұрышы 30° және қабырғасы *a*-ға тең ромб. Оның бір сүйір бұрышының төбесі арқылы өтетін бүйір жақтары табан жазықтығына перпендикуляр, өзге екі бүйір жағы табанымен 60° бұрыш жасайды. Пирамиданың көлемін табыңдар.

4.50. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары сәйкесінше 1 см және 2 см, бүйір қырлары табанына 45° бұрышпен көлбеген. Қиық пирамиданың көлемін табыңдар.

Практикалық тапсырма

4.51. Бірнеше шаруа қожалықтары бірігіп 4.18-суретте берілген өлшемдері бойынша ұзындығы 1 км канал қазуды ұйғарды. Егер олар жалдаған экскаватор сағатына 10 м³ жер қазып, тәулігіне 10 сағ жұмыс істеуге келісім берсе, канал неше күнде қазылып бітеді?



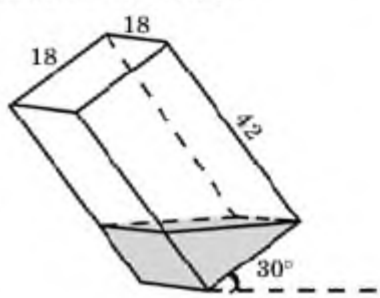
4.18-сурет

4.52. Дұрыс төртбұрышты призманың диагоналі мен бүйір жағының арасындағы бұрыш 30°, табанының қабырғасы *a*. Призманың көлемін табыңдар.

4.53. Тік призманың табаны — теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш. Оның катеті 3 см. Төменгі табанының катеті және жоғарғы табанының осы катетке қарсы жатқан төбесі арқылы жүргізілген қиманың ауданы 7,5 см². Призманың көлемін табыңдар.

4.54. Алтыбұрышты дұрыс призманың көлемі 6 см³. Призманың ең үлкен диагоналі арқылы жүргізілген қиманың ауданы 4 см². Призманың табан қабырғасының және бүйір қырының ұзындықтарын табыңдар.

4.55. Табаны квадрат болып келген тік параллелепипед пішінді



4.19-сурет

бакты табан қыры бойымен 30° бұрышқа еңкейткенде оның ішіндегі су 4.19-суретте көрсетілген пішінге ие болады. Табан қабырғасы 18-ге, бүйір қыры 42-ге тең деп алып, бактағы су көлемін анықтаңдар.

C

4.56.* Тік призманың табаны — төбесіндегі бұрышы α болатын теңбүйірлі үшбұрыш. Осы бұрышқа қарсы жатқан жағының диагоналі l және ол табан жазықтығымен β бұрыш жасайды. Призманың көлемі $\frac{1}{8}l^3 \sin 2\beta \cos\beta \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ болатынын дәлелдеңдер.

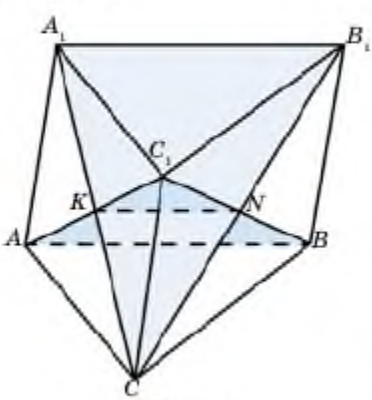
4.57. Тікбұрышты параллелепипедтің өзара перпендикуляр үш жағының аудандары S_1, S_2 және S_3. Оның көлемі $V = \sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$ формуласымен анықталатынын дәлелдеңдер.

4.58. Көлемі V, табан аудандары S_1 және S_2-ге тең қиық пирамида берілген. Толық пирамиданың көлемін табыңдар.

4.59. Төртбұрышты пирамиданың табаны — бір қабырғасы a-ға тең тіктөртбұрыш, бүйір қырлары b. Пирамида көлемдерінің мүмкін болатын ең үлкен мәнін табыңдар.

4.60. Қиық пирамиданың биіктігі h, орта қимасының ауданы S. Қиық пирамиданың көлемі қай аралықта өзгереді?

4.61. Биіктігі h және табан радиусы R-ге тең конусқа іштей сызылған үшбұрышты пирамида көлемінің ең үлкен мәнін табыңдар.



4.20-сурет

4.62. Биіктігі h-қа тең пирамиданың табаны — квадрат, пирамиданың барлық бес жағының аудандары өзара тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

4.63.* $ABCA_1B_1C_1$ призмасында A, B, C_1 және A_1, B_1, C нүктелері арқылы өтетін екі қима жүргізілген. Бұл қималар призманы төрт бөлікке бөледі және олардың кіші бөлігінің көлемі V. Призманың көлемін табыңдар (4.20-сурет).

Қайталауға арналған жаттығулар

4.64. 1) $ABCD$ трапециясында ұштары AB және CD бүйір қабырғаларында жататын MN кесіндісі диагональдарының қиылысу нүктесінен өтеді және трапеция табандарына параллель. $AD = a$, $BC = b$ болса, MN кесіндісін табыңдар.

2) PQ кесіндісі $ABCD$ трапециясының табандарына параллель. Кесіндінің ұштары AB және CD бүйір қабырғаларында жатыр. Кесінді AC диагоналін L нүктесінде, BD диагоналін R нүктесінде қиып өтеді $AD = a$, $BC = b$ және $PL = LR$ болса, PQ кесіндісін табыңдар.

4.2. Айналу денелерінің көлемі

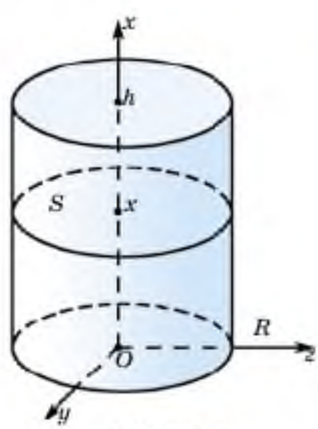
Бұл тақырыпта айналу денелерінің көлемімен танысып, соңында:

- **цилиндр көлемін анықтау формуласын білесіңдер және оны есептер шығарғанда қолданасыңдар;**
- **конус және қиық конус көлемдерін анықтау формулаларын білесіңдер және оларды есептер шығарғанда қолданасыңдар;**
- **шар және оның бөліктері көлемдерін анықтау формулаларын білесіңдер және оларды есеп шығарғанда қолданасыңдар;**
- **айналу денелерінің көлемдерін практикалық есептерді шығарғанда қолданасыңдар.**

4.2.1. Цилиндрдің көлемі

Радиусы R және биіктігі h цилиндрдің көлемін анықтау үшін $Oxyz$ тікбұрышты координаталар жүйесін 4.21-суретте көрсетілгендей етіп аламыз. Цилиндрдің $[0;\ h]$ аралығындағы көлденең қимасының ауданы $x \in [0;h]$ нүктесін таңдап алуымызға тәуелсіз тұрақты шама. Цилиндрдің табан ауданы πR^2. Сондықтан цилиндрдің көлемі (1) формула бойынша былай анықталады:

$$V = \int_0^h S \cdot dx = \pi R^2 \cdot x\Big|_0^h = \pi R^2 h.$$



4.21-сурет

Цилиндрдің көлемі табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең:

$$V = \pi R^2 h. \qquad (1)$$

4.2.2. Конустың көлемі

Биіктігі h және радиусы R конусты 4.22-суретте көрсетілгендей етіп орналастырамыз. $x \in [0; h]$ нүктесінде жүргізілген табанына параллель қимасының ауданы $S(x)$-ті R, h және x арқылы өрнектейік. $OA = R$, $OP = h$, $OO_1 = x$ болғандықтан, PO_1B және POA тікбұрышты үшбұрыштарының ұқсастығынан

$$\frac{O_1B}{PO_1} = \frac{OA}{PO} \Rightarrow \frac{O_1B}{h-x} = \frac{R}{h} \Rightarrow O_1B = \frac{R}{h}(h-x)$$

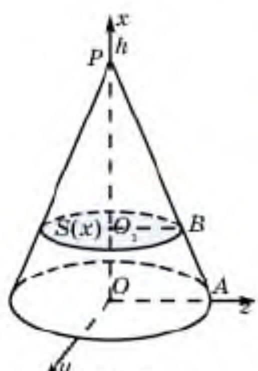
теңдігін аламыз. Онда $S(x) = \pi \cdot (O_1B)^2 = \dfrac{\pi R^2}{h^2}(h - x)^2$.

Сондықтан

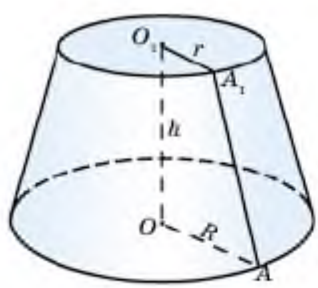
$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h (h-x)^2 dx = -\frac{\pi R^2}{3h^2}(h-x)^3\Big|_0^h = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Конустың көлемі табан ауданы мен биіктіктің $\dfrac{1}{3}$ бөлігінің көбейтіндісіне тең:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{3}S \cdot h. \qquad (2)$$



4.22-сурет



4.23-сурет

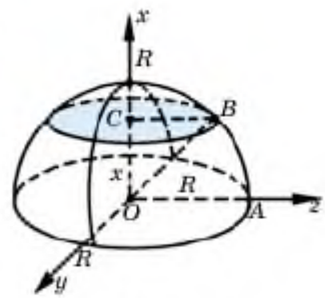
Табан радиустары R және r, биіктігі h-қа тең қиық конустың көлемі (4.23-сурет)

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2). \qquad (3)$$

Өздерің дәлелдеңдер!

3-формула қиық пирамида көлемінің формуласы сияқты дәлелденеді. Оны өздерің орындаңдар.

4.2.3. Шардың және оның бөліктерінің көлемі



4.24-сурет

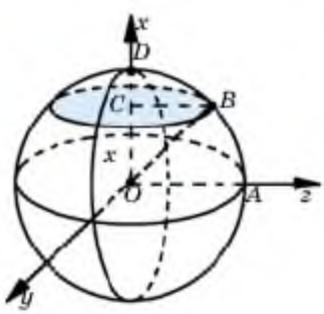
Шардың центрі арқылы өтетін жазықтық оның симметрия жазықтығы болғандықтан, шардың көлемін табу үшін жартышардың көлемін анықтап, оны екі еселесек, жеткілікті.Радиусы R-ге тең жартышарды 4.24-суретте көрсетілгендей етіп орналастырамыз.

Жартышардың табанына параллель қимасының $S(x)$ ауданы — x-ке $x \in [0; R]$ тәуелді функция. Осы функцияны анықтайық. $OA = R = OB$, $OC = x$ болғандықтан, қиманың радиусы $CB = \sqrt{OB^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$ теңдігімен анықталады. Осыдан қиманың ауданы $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Олай болса, жартышардың көлемі

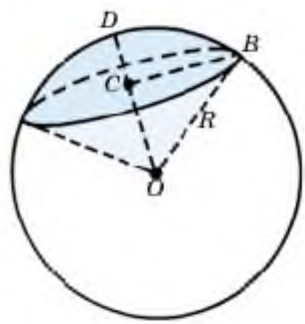
$$\frac{1}{2}V = \int_0^R \pi\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}. \qquad (4)$$

Шардың көлемі

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (5)$$



4.25-сурет



4.26-сурет

Шар қимасының әрқайсысы оны екі бөлікке бөледі. Осы бөліктерді ***шар сегменті*** деп атайды (4.25-сурет). Енді кіші шар сегментінің көлемін анықтайық. $Oxyz$ тікбұрышты координаталар жүйесін 4.25-суретте көрсетілгендей алайық. Мұндағы CD кесіндісін шар сегментінің *биіктігі* деп атайды. Биіктігі $CD = h$ және радиусы R сегменттің көлемін табайық.

$OC = R - h$ болғандықтан, (4) интегралдың шектері $(R - h)$-тан R-ге дейін өзгереді:

$$V = \int_{R-h}^{R} \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Шар секторының көлемі шар сегменті мен конус көлемдерінің қосындысына тең (4.26-сурет). $CD = h$ болса, $OC = R - h$ және

$CB = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$.

Олай болса,

$$V_{сек} = V_{сег} + V_{к} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{1}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot OC = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{\pi}{3} \times$$
$$\times (2Rh - h^2) \cdot (Rh - h) = \frac{2\pi}{3}\pi R^2 h.$$

1. Цилиндр көлемі қандай формуламен анықталады?
2. Конус көлемінің формуласын жазып, оны қорытып шығарыңдар. Қиық конустың көлемі қандай формуламен анықталады?
3. Шар көлемінің формуласын жазып, оны қорытып шығарыңдар.
4. Шар сегменті (секторы) қандай формуламен анықталады? Оны дәлелдеңдер.

ЕСЕПТЕР

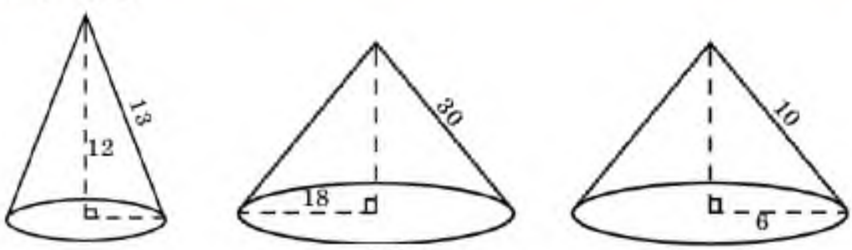
А

Практикалық тапсырма

4.27-сурет

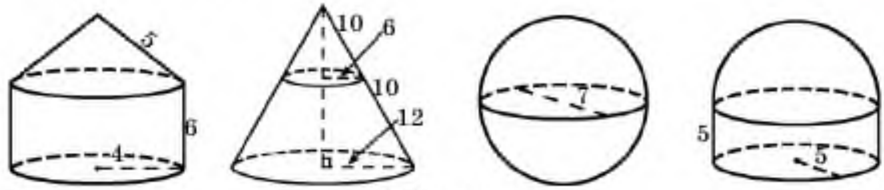
4.65. Торттың биіктігі 5 см, диаметрі 30 см (4.27-сурет). Төбесіндегі бұрышы 30^0 болатын және дөңгелек секторын құрайтындай торттың бір бөлігі кесіп алынды. Осы бөліктің көлемін анықтаңдар.

4.66. 4.28-суреттегі өлшемдері бойынша конустардың көлемін анықтаңдар:



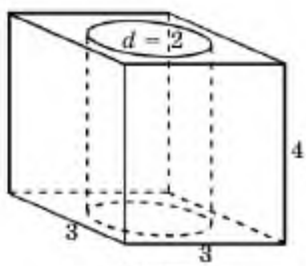
4.28-сурет

4.67. 4.29-суреттегі өлшемдері бойынша айналу денелерінің көлемін анықтаңдар:

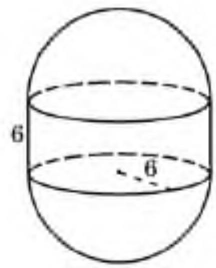


4.29-сурет

4.68. Табан қабырғасы 3-ке тең квадрат болатын биіктігі 4-ке тең тік параллелепипедтен диаметрі 2-ге тең цилиндр қиып алынған (4.30-сурет). Пайда болған дененің көлемін табыңдар:



4.30-сурет



4.31-сурет

4.69. Радиусы 6, биіктігі 6 болатын цилиндрдің табан жақтарына жартышарлар қойып толықтырғанда шыққан дененің көлемін есептеңдер (4.31-сурет).

4.70. Радиусы R және биіктігі h-қа тең цилиндрдің көлемін табыңдар: 1) R=3 м, h=5 м; 2) R=10 мм, h=12 мм; 3) R=4 дм, h=7 дм; 4) R=6 см, h=14 см.

4.71. 4.70-есепте радиусы R және биіктігі h-қа тең конус берілді деп алып, есепті шығарыңдар.

4.72. Радиусы R-ге тең шардың көлемі мен сферасының ауданын табыңдар: 1) R=12 см; 2) R=6 м; 3) R=9 мм.

4.73. Цилиндрдің өстік қимасының ауданы S, радиусы R. Оның көлемін табыңдар: 1) S=24 см^2, R=4 см; 2) S=70 м^2, R=5 м; 3) S=144 дм^2, R=6 дм.

4.74. Алдыңғы есепті өстік қимасының ауданы S, радиусы R-ге тең конус үшін шешіңдер.

Практикалық тапсырма

4.32-сурет

4.75. Саяси қуғын-сүргін және тоталитаризм құрбандарының «АЛЖИР» мемориалды-мұражай кешені қиық конус тәріздес (4.32-сурет). Оның биіктігі 8 м, табандарының диаметрлері 20 м және 15 м. Көлемін есептеңдер.

4.76. Табан радиустары r және R, биіктігі h-қа тең қиық конустың көлемін табыңдар: 1) $r = 3$ см, $R = 5$ см, $h = 4$ см; 2) $r = 7$ мм, $R = 12$ мм, $h = 10$ мм; 3) $r = 1$ м, $R = 8$ м, $h = 3$ м.

4.77. Цилиндрдің өстік қимасының d диагоналі жасаушымен φ бұрыш жасайды. Цилиндрдің көлемін табыңдар: 1) $d = 12$ см, $\varphi = 30°$; 2) $d = 2\sqrt{2}$ м, $\varphi = 45°$; 3) $d = 18$ дм, $\varphi = 60°$.

4.78. Конустың жасаушысы l, өстік қимасының төбесіндегі бұрыш φ. Конустың көлемін табыңдар: 1) $l = 20$ см, $\varphi = 60°$; 2) $l = 5\sqrt{2}$ м, $\varphi = 90°$; 3) $l = 12$ дм, $\varphi = 120°$.

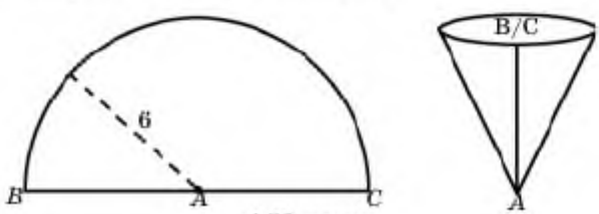
4.79. Қиық конустың өстік қимасы — қабырғалары 5 см, 10 см, 17 см, 10 см болатын теңбүйірлі трапеция. Оның көлемін табыңдар.

4.80. Радиусы R-ге тең шар сегментінің биіктігі h. Осы шар сегментінің көлемі мен сәйкес шар секторының көлемін табыңдар: 1) R=10 см, h=5 см; 2) R=6 м, h=1 м.

B

4.81. Цилиндр өсіне параллель жазықтық өстен 15 см қашықтықта өтеді және пайда болған қиманың диагоналі 20 см, цилиндр табанының радиусы 17 см. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

4.82. Радиусы 6 см жартыдөңгелекті орап конус жасалды (4.33-сурет). Конустың көлемін табыңдар.



4.33-сурет

4.83. Радиусы 20 см дөңгелек қаңылтырдан центрлік бұрышы 240° сектор қиып алынып, одан конус жасалды. Осы конустың көлемін табыңдар.

4.84. Цилиндрің радиусын 40 % -ға ұзартып, биіктігінің жартысы азайтылса, оның көлемі қалай өзгереді?

A. 2% -ға азаяды; B. 30 % -ға азаяды; C. 30% -ға ұлғаяды; D. 2% -ға ұлғаяды.

4.85. Көлемі V-ға тең конустың биіктігі тең үш бөлікке бөлінген. Бөлу нүктелері арқылы табанына жүргізілген параллель жазықтықтар конусты үш бөлікке бөледі. Ортаңғы бөліктің көлемін табыңдар.

4.86. Қиық конустың өстік қимасының ауданы оның табандары аудандарының қосындысына тең, табандарының радиусы r және R. Қиық конустың көлемін табыңдар.

▲ **Шешуі:** $V_{\text{Қиық кон.}} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

1) Қиық конустың осьтік қимасының ауданы:

$$S_{\text{Сек.}} = \frac{2R+2r}{2} \cdot h = (R+r) \cdot h.$$

2) Қиық конустың табан аудандарының қосындысы:

$S_{\text{Үст.таб.}} + S_{\text{Аст.таб.}} = \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(R^2 + r^2)$.

3) Қиық конустың биіктігін табайық:

$$(R + r) \cdot h = \pi(R^2 + r^2),$$

$$h = \frac{\pi\left(R^2 + r^2\right)}{(R+r)}.$$

4) Ал енді қиық конустың көлемін табайық:

$$V_{\text{Қиық.кон.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\pi\left(R^2 + r^2\right)}{(R+r)} \cdot \left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{\pi^2\left(R^2 + r^2\right)\left(R^2 + Rr + r^2\right)}{3(R+r)}.$$ ■

4.87. Бүйір бетінің жазбасы радиусы 15 см жартыдөңгелек болатын конустың көлемін табыңдар.

4.88. Конусқа іштей сызылған радиусы r-ге тең сфера бетінің ауданы конус табанының ауданына тең. Конустың көлемін табыңдар.

Практикалық тапсырма (4.89 – 4.93):

4.89. Диаметрі 6 мм болат сым орамының массасы 30 кг. Болаттың тығыздығы 7600 кг/м^3 деп алып, орамдағы сымның ұзындығын табыңдар.

4.90. Болаттан жасалған құбырдың сыртқы диаметрі 1,42 м, қалыңдығы 2,2 см. Болаттың тығыздығы 7600 кг/м^3 деп алып, ұзындығы 1 км құбырға неше тонна болат жұмсалатынын анықтаңдар.

4.91. Диаметрі 3 мм болатын шар пішінді үш қорғасын оқты аңшы қайта балқытып, шар пішінді бір оқ жасады. Осы оқтың диаметрін табыңдар.

4.92. Шар диаметріне перпендикуляр жазықтық шар диаметрін 4 см және 10 см бөліктерге бөледі. Сонда шар көлемі қандай бөліктерге бөлінеді?

4.93. Табанының диаметрі 4 см және биіктігі 4 см болатын металл цилиндр қайта балқытылып, одан шар жасалды. Шардың радиусын табыңдар.

4.94. Радиустары өзара тең шар мен цилиндрдің көлемдері де тең. Цилиндр биіктігінің шар радиусына қатынасын табыңдар.

C

4.95. Қыры 1-ге тең кубтың төбелері радиустары өзара тең шарлардың центрлері болып табылады. Кубтың осы шарлардан тысқары жатқан бөлігінің көлемі $\frac{1}{2}$. Куб қырының қандай бөлігі шарлардан тысқары жатыр?

4.96.* Радиусы R шардың биіктігі h-қа тең сегменті бетінің ауданы $S = 2\pi Rh$ формуласымен анықталатынын дәлелдеңдер.

Практикалық тапсырма

4.97. Антарктидадағы мұз көлемі 30 млн км^3. Жер шары радиусы шамамен 6 мың км, ал Жер бетінің 70,8%-ы су деп алып, Антарктида мұздары түгел ерігенде су деңгейі неше метрге көтерілетінін анықтаңдар.

4.98.* Конус төбесі арқылы ауданы ең үлкен қима жүргізілген. Бұл аудан конустың остік қимасы ауданынан екі есе үлкен. Конустың радиусын R деп алып, оның көлемін табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

4.99. 1) ABC үшбұрышының B төбесінен жүргізілген биссектрисасы AC қабырғасын ұзындықтары 28 және 12-ге тең кесінділерге бөледі. $AB-BC=18$. ABC үшбұрышының периметрін табыңдар.

2) ABC үшбұрышының AB, BC, AC қабырғаларының қатынасы 2:4:5-ке тең. Оның биссектрисалары қиылысу нүктелерінде қандай қатынастарға бөлінеді?

4.3. Геометриялық денелердің комбинацияларының көлемдері

Бұл тақырыпта көпжақтар және айналу денелерінің комбинациясынан құралған денелердің көлемдері ұғымымен танысып, соңында:

- **көпжақтар мен айналу денелерінің комбинацияларын жазықтықта кескіндей аласыңдар;**
- **көпжақтар мен айналу денелерінің комбинацияларының көлемін есептеуді үйренесіңдер;**
- **геометриялық денелердің комбинациясына берілген практикалық мазмұнды есептер шығара аласыңдар.**

Сендер көпжақтар мен айналу денелерінің қасиеттерін оқып-үйрендіңдер. Енді осы денелердің комбинацияларын қарастырамыз. Күнделікті өмірде геометриялық денелер комбинацияларының мына түрлері жиі кездеседі:

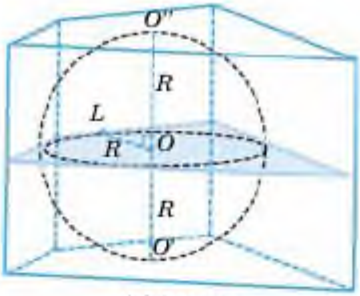
1) шар және пирамида;
2) шар және призма;
3) шар және конус;
4) шар және цилиндр;
5) конус және пирамида;
6) конус және призма;
7) конус және цилиндр;
8) цилиндр және пирамида;
9) цилиндр және призма.

3.1-бапта цилиндр мен призманың және 3.2-бапта конус пен пирамиданың комбинацияларын меңгердіңдер. Комбинациялардың бір фигурасы шар болатын жағдайды қарастырайық.

Шар мен призманың комбинациялары

Егер шар призмаға іштей сызылса (4.34-сурет):

1) призманың биіктігі шар диаметріне тең;



4.34-сурет

2) призманың бүйір жақтарымен жанасатын шар нүктелері призма биіктігінің центрі арқылы өтетін және бүйір қырларына перпендикуляр қимада жатады;

3) шар радиусы призма табанына іштей сызылған шеңбердің радиусына тең.

Топтық жұмыс

Кез келген призмаға сырттай (іштей) сфера сызыла бермейді. Тік призмаға сырттай сфера сызу үшін оның табандарындағы көпбұрыштарға сырттай шеңбердің сызылу мүмкіндігінің болуы қажетті және жеткілікті. Тік призмаға іштей шар сызылу үшін оның табандарындағы көпбұрышқа іштей шеңбердің сызылу мүмкіндігінің болуы және бұл шеңбердің диаметрі призма биіктігіне тең болуы қажетті және жеткілікті.

Топпен бірге жоғарыдағы тұжырымдарды негіздеңдер (сәйкес келетін дайын суреттерді қолданыңдар).

1-мысал. Табаны бір катеті 15 см және гипотенузасы 17 см тікбұрышты үшбұрыш болатын тік призмаға іштей шар сызылған. Призманың көлемін анықтау керек.

▲ Пифагор теоремасын қолданып екінші катетін есептейік:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ см.}$$

Шар радиусы тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусына тең:

$$r = \frac{2S}{p} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8}{8 + 15 + 17} = \frac{120}{40} = 3 \text{ см.}$$

Сондықтан шар диаметрі $d = 2r = 6$ см. Призманың биіктігі шар диаметріне тең болғандықтан,

$$V = S \cdot h = 60 \cdot 6 = 360 \text{ см}^3.$$

Жауабы: 360 см^3. ■

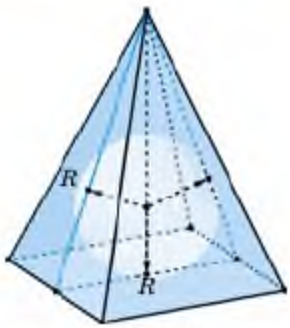
Шар мен пирамиданың комбинациялары

Пирамидаға іштей сызылған шардың центрі пирамиданың екіжақты бұрыштарының биссектриса жазықтықтарының қиылысу нүктесі болып табылады. Пирамиданың табанындағы екіжақты бұрыштары өзара тең болса, яғни бүйір жақтары табанымен өзара тең бұрыштар жасаса, пирамиданың биіктігі табанындағы көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центріне түседі және пирамиданың бүйір жақтарының биіктіктері өзара тең болады (4.35-сурет).

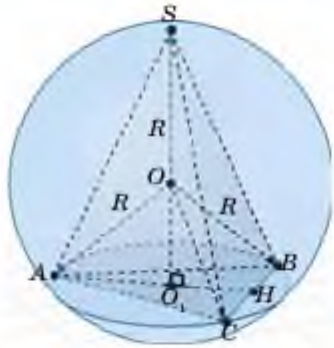
Топтық жұмыс

Пирамидаға сырттай сфера сызу үшін оның табанындағы көпбұрышқа сырттай шеңбер сызылуы қажетті және жеткілікті (4.36-сурет).

Осы тұжырымды өздерің негіздеңдер (сәйкес келетін дайын суреттерді қолданыңдар).



4.35-сурет



4.36-сурет

2-мысал. Дұрыс төртбұрышты пирамидаға көлемі $\frac{32\pi}{3}$-ке тең шар іштей сызылған. Пирамиданың биіктігі 6. Пирамиданың көлемін анықтаңдар (4.37-сурет).

▲ Шардың радиусын табамыз:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3} \Rightarrow R = 2.$$

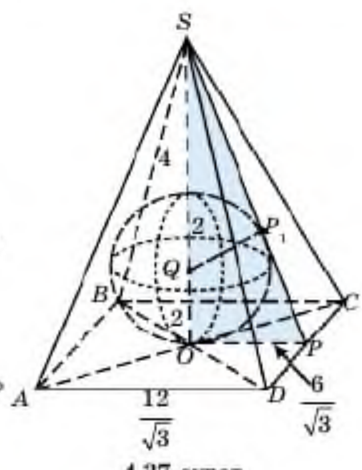
$$SQ = SO - OQ = 6 - 2 = 4.$$

$$SP_1 = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}.$$

ΔSP_1Q және ΔSOP ұқсас үшбұрыштар болғандықтан, $\frac{QP_1}{OP} = \frac{SP_1}{SO}$,

$$OP = \frac{QP_1 \cdot SO}{SP_1} = \frac{2\cdot 6}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot 6 = 96.$$



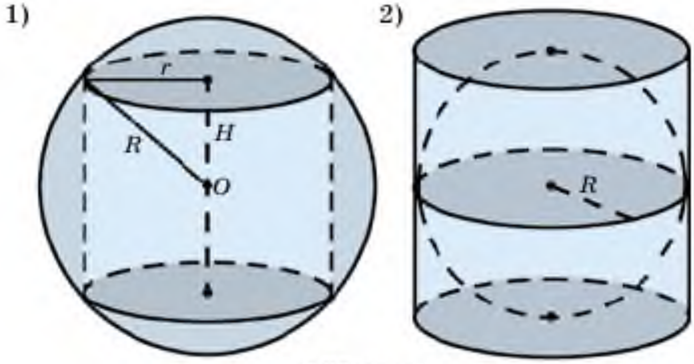
4.37-сурет

Жауабы: 96. ■

Шар мен цилиндрдің комбинациялары

Кез келген цилиндрге сырттай сфера сызуға болады (4.38,1-сурет). Сфераның центрі цилиндр өсі арқылы өтетін биіктігінің ортасында орналасады. Сфераның радиусы R, цилиндрдің радиусы r, цилиндрдің биіктігі H болса, Пифагор теоремасы бойынша:

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2 .$$



4.38-сурет

Диаметрі мен биіктігі тең болатын цилиндрге ғана іштей шар сызылады және іштей сызылған шар цилиндрдің табанындағы шеңберлерді олардың центрінде жанайды (4.38,2-сурет). Цилиндрдің бүйір бетін диаметрлік шеңбер бойымен жанайды. Шардың радиусы R, цилиндрдің радиусы r, цилиндрдің биіктігі H болса, $R = r$ және $H = 2R$.

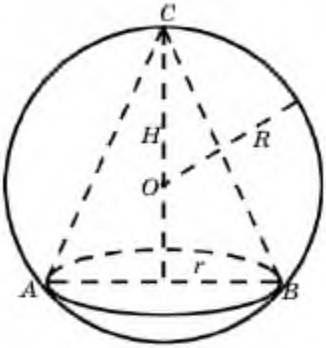
Шар мен конустың комбинациялары

Кез келген конусқа сырттай және іштей шар сызуға болады (4.39, 4.40-суреттер).

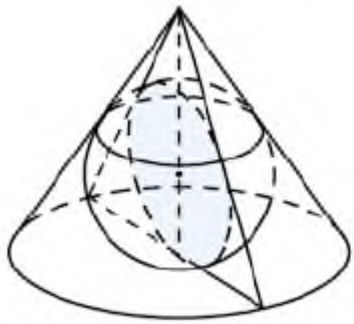
Сфераға іштей сызылған конустың (4.39-сурет) төбесі мен табаны сфераның бойында, ал сфераның центрі конустың өсінде жатады және конустың өстік қимасы болатын үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрімен беттеседі. Сфераның радиусы R, конустың радиусы r, биіктігі H болса, Пифагор теоремасы бойынша $R^2 = (H - R)^2 + r^2$.

Жұптық жұмыс

Бұл теңдікті жұппен бірге талдап, өздерің дәлелдеңдер.



4.39-сурет



4.40-сурет

Конусқа іштей сызылған шар (4.40-сурет) конустың табанын оның центрінде, бүйір жағын конустың табанына параллель болатын шеңбер бойымен жанайды. Шардың центрі конустың өсінде жатады және конустың өстік қимасы болатын үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрімен беттеседі.

Шардың радиусы R, конустың радиусы r, биіктігі H болса, мына теңдік орындалады: $\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}}$.

Жұптық жұмыс

Бұл теңдікті жұппен бірге талдап, өздерің дәлелдеңдер.

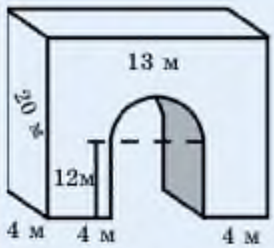
Шығармашылық есеп

«Мәңгілік ел» триумфалды арканың биіктігі 20 м, ені 13 м. 4.41-суретте көрсетілген өлшемдері бойынша арканың көлемін есептеу керек.

▲ Ол үшін арканы құрайтын тікбұрышты параллелепипедтің көлемінен кіші параллелепипедтің және жарты цилиндрдің көлемін азайтамыз:

Үлкен параллелепипедтің өлшемдері 20 м, 4 м, 13 м.

$V_{\text{үлкен парал.}} = 20 \cdot 13 \cdot 4 = 1040$ м^3,



4.41-сурет

$V_{\text{ішкі паралл.}} = 12 \cdot 4 \cdot (13 - 4 - 4) = 240$ м^3.

Жарты цилиндрдің радиусы

$$R = \frac{13-4-4}{2} = \frac{5}{2} \text{ м}.$$

$$V_{\text{жарты цил}} = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 4 = \frac{25\pi}{2} \text{ м}^3,$$

$$V_{\text{арка}} = 1040 - 240 - \frac{25\pi}{2} \approx 761 \text{ м}^3.$$ ■

1. Призмаға іштей сызылған шардың қандай қасиеттерін білесіңдер? Мысал келтіріңдер.
2. Шар мен цилиндрдің комбинациялары туралы не білесіңдер?
3. Шар мен конус комбинациялары туралы не білесіңдер? Мысал келтіріңдер.
4. Пирамида мен шар комбинациясының қасиеттерін айтыңдар.

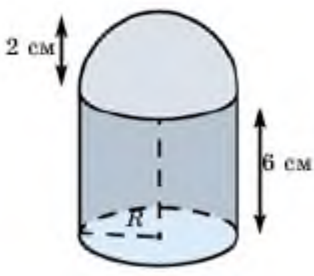
ЕСЕПТЕР

А

4.100. Цилиндрге барлық төбелері оның табандарындағы шеңбер бойында орналасатындай, көлемі 343 см^3 болатын куб іштей сызылған. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

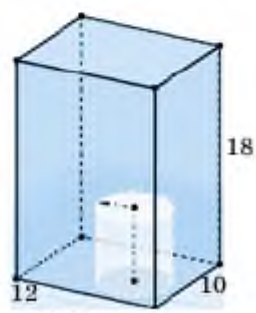
4.101. Дене цилиндр мен жартышардан құрастырыған (4.42-сурет). Цилиндрдің биіктігі 6 см, жартышар радиусы 2 см. Дененің көлемін анықтаңдар.

4.102. Көлемі 216 м^3 болатын кубқа іштей сызылған 1) цилиндрдің; 2) төбесі жоғарғы табанының центрінде орналасатын конустың көлемін табыңдар.



4.42-сурет

4.43-сурет



4.44-сурет

4.103. Радиусы 5 см шарға биіктігі 6 см цилиндр іштей сызылған. Цилиндрдің көлемін анықтаңдар (4.43-сурет).

4.104. Табан қабырғалары 2 м және 6 м, биіктігі 5 м болатын дұрыс төртбұрышты қиық пирамидаға 1) іштей; 2) сырттай сызылған қиық конустың көлемін табыңдар.

4.105. Биіктігі 6, радиусы 3 цилиндр өлшемдері 10, 12 және 18 болатын тікбұрышты параллелепипедтің ішіне орналасқан. Тік параллелепипедтің ішінен кездейсоқ алынған нүктенің цилиндрдің ішінде жату ықтималдылығын есептеңдер (4.44-сурет).

4.106. 4.104-есепті дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың орнына дұрыс үшбұрышты қиық пирамида берілді деп шығарыңдар.

4.107. Радиусы 12 см шарға 1) іштей; 2) сырттай сызылған кубтың және дұрыс тетраэдрдің көлемдерін табыңдар.

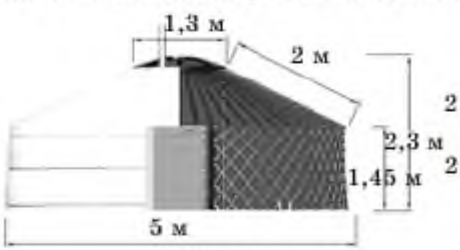
4.108. Балғаны цилиндр мен параллелепипедтен құралған деп қарастыруға болады. Суретте көрсетілген өлшемдері бойынша оның көлемін есептеңдер (4.45-сурет).

4.45-сурет

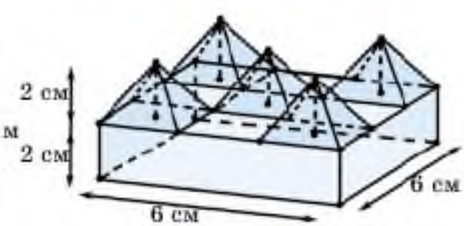
4.46-сурет

4.109. Диаметрі 6 см болатын үш теннис шары сондай диаметрлі цилиндрге салынды (4.46-сурет). Цилиндрдің биіктігі үш шармен шектелсе, оның шарлардан басқа бөлігінің көлемін анықтаңдар.

4.110. Киіз үйдің геометриялық моделі цилиндр мен қиық конустан тұрады (4.47-сурет). Суретте көрсетілген өлшемдері бойынша киіз үйдің бүйір бетінің ауданы мен көлемін анықтаңдар.



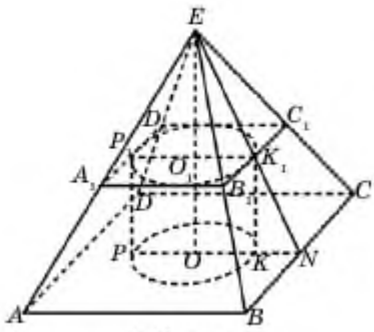
4.47-сурет



4.48-сурет

4.111. Бес пирамида және бір тікбұрышты параллелепипедтің комбинациясынан құралған дене 4.48-суретте көрсетілген. Параллелепипедтің табаны — қабырғасы 6 см болатын квадрат. Параллелепипедтің және пирамиданың биіктіктері 2 см. Осы дененің көлемін анықтаңдар.

B



4.49-сурет

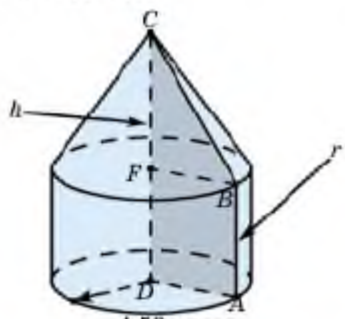
4.112. Дұрыс төртбұрышты пирамидаға өстік қимасы квадрат болатын, жоғарғы табанындағы шеңбер пирамида жақтарын жанайтын, төменгі табаны пирамида табанында жатқан цилиндр іштей сызылған (4.49-сурет). Пирамида табанының қабырғасы 10 см, бүйір жақтары табанымен 60° бұрыш жасайды. Цилиндрдің көле-мін табыңдар.

4.113. Алдыңғы есептің шартын пайдаланып пирамидаға іштей сызылған 1) конустың; 2) шардың көлемін табыңдар.

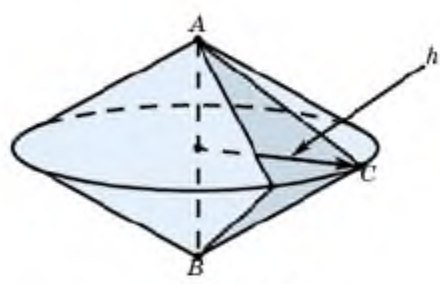
4.114. Конус табанына қабырғасы a-ға тең квадрат іштей сызылған. Квадраттың бір қабырғасы мен конустың төбесі арқылы өтетін үшбұрышты қиманың төбесіндегі бұрышы φ. Конустың көлемін табыңдар.

4.115. $ABCD$ тікбұрышты трапециясын CD табанынан айналдырғанда 4.50-суретте көрсетілген дене шыққан. $ABFD$ — қабырғасы r-ге тең квадрат, $CF=h$. Дененің көлемін анықтаңдар.

4.116. Теңқабырғалы ABC үшбұрышының биіктігі h. AB қабырғасынан айналдырғанда шыққан дененің көлемін анықтаңдар (4.51-сурет).



4.50-сурет



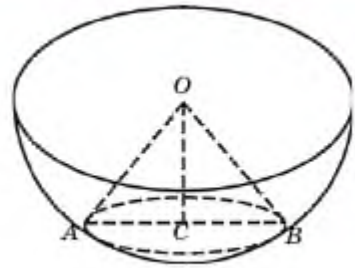
4.51-сурет

4.117. Конустың төбесі жартышар табанындағы үлкен шеңбердің центрімен беттеседі. Табаны жартышардың бетімен жанасады және жартышардың табанына параллель. Конустың жасаушысы мен оның өсі арасындағы бұрыш φ. Жартышар мен конустың көлемдерінің қатынасын табыңдар (4.52-сурет).

Берілгені: жартышарға өстік қимасы ΔOAB болатын конус іштей сызылған. $\angle AOC = \varphi$.

Т/к: $V_{жш} : V_{конус}$ — ?

▲ Айталық, $AO = R$ болсын. Онда AOC үшбұрышынан
$OC = AO \cdot \cos\varphi = R \cdot \cos\varphi$,
$AC = AO \cdot \sin\varphi = R \cdot \sin\varphi$,



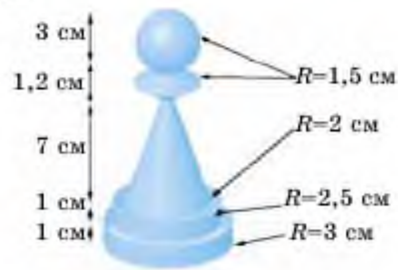
4.52-сурет

$$V_{конус} = \frac{1}{3}\pi \cdot OC \cdot AC^2 = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi,$$

$$V_{жш} = \frac{2}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_{жш} : V_{конус} = \frac{2}{3}\pi R^3 : \left(\frac{\pi R^3}{3} \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi\right) = \frac{2}{\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi}. \blacksquare$$

4.118. Шахматтың «сарбаз» фигурасының өлшемдері 4.53-суретте көрсетілген. Көлемін есептеңдер.

4.119. Радиусы R-ге тең конус жасаушысы табанына φ бұрышымен көлбеген. Осы конусқа табаны сүйір бұрышы γ-ға тең тікбұрышты үшбұрыш болатын үшбұрышты пирамида сырттай сызылған. Пирамиданың көлемін табыңдар.

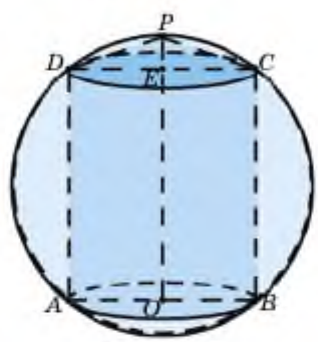


4.53-сурет

4.120. Конус биіктігінің оған сырттай сызылған шардың радиусына қа-тынасы k. Осы денелер көлемдерінің қатынасын табыңдар.

C

4.121. Шарға ортақ табандарының екі жақ бөлігінде жатқан цилиндр мен конус іштей сызылған. Цилиндрдің өстік қимасының ауданы 75 м², цилиндр көлемінің конус көлеміне қатынасы 9:1 қатынасына тең. Шардың радиусын табыңдар (4.54-сурет).



4.54-сурет

4.122. Конусқа іштей сызылған цилиндрдің радиусы конус радиусынан 2 есе кіші. Конус көлемінің цилиндр көлеміне қатынасын табыңдар.

4.123. Радиусы R-ге тең шарға конус іштей сызылған. Шар центрінен конустың жасаушысы φ бұрышымен көрінеді. Конустың көлемін табыңдар.

4.124. Биіктігі 5-ке тең үшбұрышты пирамиданың табан қабырғалары 7-ге, 8-ге және 9-ға тең. Қайсыбір шар пирамиданың бүйір жақтарын оның табан қабырғаларында жатқан нүктелерде жанайды. Шардың көлемін табыңдар.

4.125. Радиусы R және биіктігі h-қа тең цилиндрге іштей сызылған үшбұрышты пирамида көлемінің ең үлкен мәнін табыңдар. Мұнда пирамиданың қарама-қарсы орналасқан екі қыры цилиндрдің табандарында орналасқан.

4.126. Радиусы R-ге тең шар дұрыс тетраэдрдің барлық қырларын жанайды. Шар мен дұрыс тетраэдрден құрастырылған құрама дене бетінің ауданын табыңдар.

Қайталауға арналған жаттығулар

4.127. 1) ABC үшбұрышының AC қабырғасынан $AN=\frac{2}{5}AC$ теңдігі орындалатындай етіп N нүктесі алынған. AE медианасы мен BN өзара перпендикуляр және $AE=m$, $BN=n$. ABC үшбұрышының ауданын табыңдар.

2) ABC үшбұрышының AC қабырғасынан $AK=\frac{3}{5}AC$ теңдігі орындалатындай етіп K нүктесі алынған. AP медианасы мен BK өзара перпендикуляр және $AP=a$, $BK=b$. ABC үшбұрышының ауданын табыңдар.

Терминдер атауының сөздігі

№	Қазақ тілінде	Орыс тілінде	Ағылшын тілінде
1	Көлем	Объём	Volume
2	Сырттай сызылған	Описанный	outscribed
3	Шар сегменті	Сегмент шара	segment
4	Шар секторы	Сектор шара	sector
5	Шар бетінің ауданы	Площадь поверхности шара	Surface area
6	Іштей сызылған	Вписанный	inscribed

«ДЕНЕЛЕРДІҢ КӨЛЕМДЕРІ» бөлімінің қорытындысы

1) Параллелепипедтің көлемі табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең:

$$V = S_{\text{таб}} \cdot h.$$

2) Пирамиданың көлемі табан ауданы мен биіктігі көбейтіндісінің $\frac{1}{3}$ бөлігіне тең:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{таб}} \cdot h.$$

3) Табан аудандары S_1 және S_2, биіктігі h-қа тең қиық пирамиданың көлемі мына формуламен анықталады:

$$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right).$$

4) Ұқсас денелердің көлемдері олардың сәйкес сызықтық өлшемдерінің кубтарына пропорционал.

5) Цилиндрдің көлемі табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең:

$$V = \pi R^2 h.$$

6) Конустың көлемі табан ауданы мен биіктіктің $\frac{1}{3}$ бөлігінің көбейтіндісіне тең:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{3} S_{\text{таб}} \cdot h.$$

7) Табан радиустары R және r, биіктігі h-қа тең қиық конустың көлемі мына формуламен анықталады:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right).$$

8) Шардың көлемі мына формуламен анықталады:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

9) Шар сегментінің көлемі мына формуламен анықталады:

$$V_{\text{сег}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

10) Шар секторының көлемі шар сегменті мен конус көлемдерінің қосындысына тең:

$$V_{\text{сек}} = V_{\text{сег}} + V_{\text{кон}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\left(2Rh - h^2\right) \cdot (R - h) = \frac{2\pi}{3} R^2 h.$$

V бөлім. МЕКТЕП ГЕОМЕТРИЯСЫ КУРСЫ

7-сынып

1. Геометрия деген не? Планиметрия деген не?

2. «*B* нүктесі *A* және *C* нүктелерінің арасында жатыр» дегенді қалай түсінесіңдер?

3. Сәуле, толықтауыш сәуле дегеніміз не?

4. Кесінді, кесіндінің ұштары, кесіндінің ішкі нүктелері деген не?

5. Кесіндінің ұзындығын қандай құралмен өлшейді? Қандай өлшем бірліктерін білесіңдер?

6. Қандай фигураны бұрыш деп атайды? Бұрыштың қандай элементтері бар және оны қалай белгілейді?

7. Жазыңқы, тік, сүйір және доғал бұрыш дегеніміз не?

8. Бұрыш шамасын қандай құралмен және қандай бірліктермен өлшейді?

9. Сыбайлас бұрыштар деген не және сыбайлас бұрыштардың қосындысы неге тең?

10. Вертикаль бұрыштар деген не және олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

11. Қандай түзулерді өзара перпендикуляр түзулер деп атайды?

12. Айқыш, сәйкес және ішкі тұстас бұрыштар дегеніміз не?

13. Қандай түзулерді параллель түзулер деп атаймыз?

14. Түзулердің параллельдік белгілерін атап, дәлелдеңдер.

15. Параллель түзулердің қандай қасиетін (үшінші түзуге параллель екі түзу жайында) білесіңдер?

16. Үшбұрыш дегеніміз не? Үшбұрыштың қандай түрлерін білесіңдер? Олардың қандай элементтері бар?

17. Үшбұрыштың медианасы, биссектрисасы, биіктігі дегеніміз не?

18. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теореманы дәлелдеңдер.

19. Үшбұрыштар теңдігінің белгілерін атап, дәлелдеп беріңдер.

20. Тікбұрышты үшбұрыш дегеніміз не? Оның қандай қасиеттерін білесіңдер?

21. Тікбұрышты үшбұрыштар теңдігінің белгілерін дәлелдеп беріңдер.

22. Перпендикуляр, көлбеу, проекция деген не және олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

23. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық ретінде қандай кесіндінің ұзындығын алады?

24. Үшбұрышты үш қабырғасы, екі қабырғасы арқылы және олардың арасындағы бұрышы, бір қабырғасы және оған іргелес екі бұрышы арқылы қалай салады?

25. Берілген бұрышқа тең бұрышты қалай салады?

26. Бұрыштың биссектрисасын қалай салады?

27. Кесіндінің ортасын қалай табады?

28. Берілген нүктеден түзуге түсірілген перпендикулярды қалай салады?

29. Кесіндінің орта перпендикуляры дегеніміз не? Оны қалай салады?

30. Шеңбер дегеніміз не? Оның қандай элементтерін білесіңдер?

8-сынып

1. Қандай фигураны көпбұрыш деп атайды? Дөңес көпбұрыш деген не?

2. Дөңес көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең? Сыртқы бұрыштарының қосындысы неге тең?

3. Қандай фигураны төртбұрыш деп атайды? Ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең?

4. Параллелограмм деген не?

5. Параллелограмның қасиеттерін дәлелдеңдер.

6. Параллелограмның белгілерін дәлелдеңдер.

7. Тіктөртбұрыш деген не? Оның қасиеттерін атаңдар.

8. Ромб, квадрат деген не? Олардың қандай қасиеттері бар?

9. Фалес теоремасын дәлелдеңдер.

10. Үшбұрыштың орта сызығы деген не? Оның қасиеттерін дәлелдеңдер.

11. Трапеция, теңбүйірлі трапеция, тікбұрышты трапеция деген не?

12. Трапецияның орта сызығы жөніндегі теореманы дәлелдеңдер.

13. Үшбұрыштың тамаша нүктелері деген не?

14. Үшбұрышқа сырттай және іштей шеңберлер сызуға болатынын дәлелдеңдер.

15. Іштей және сырттай сызылған төртбұрыштардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

16. Сүйір бұрыштың косинусы қалай анықталады?

17. Пифагор теоремасын дәлелдеңдер.

18. Сүйір бұрыштың косинусы, синусы және тангенсі деген не?

19. Тікбұрышты үшбұрыштардағы тригонометриялық функциялар арасындағы байланысты анықтаңдар.

20. Кейбір бұрыштар үшін (30°; 45°; 60°) синус, косинус және тангенстің мәндерін кесте бойынша қалай анықтайды?

21. Тікбұрышты үшбұрыштың катеті гипотенуза мен осы катеттің гипотенузадағы проекциясының геометриялық ортасы болатынын дәлелдеңдер.

22. Тікбұрыш төбесінен гипотенузаға түсірілген биіктіктің қандай қасиеттерін білесіңдер? Оны дәлелдеңдер.

23. Қандай фигураларды тең шамалы, тең құрамды деп атайды?

24. Тіктөртбұрыштың ауданы қалай анықталады?

25. Параллелограмм, үшбұрыш және трапеция аудандары қандай формулалармен анықталады? Оларды қорытып шығарыңдар.

26. Тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі деген не? Нүктенің координатасы деген не?

27. Екі нүктенің арақашықтығы қалай анықталады?

28. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын қорытып жазыңдар. Кесіндінің ортасы қалай анықталады?

29. Түзу мен шеңбердің теңдеулерін жазыңдар.

30. Түзудің, шеңбердің координаталар өстеріне қатысты орналасу ерекшеліктері қандай?

31. 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың синусы, косинусы және тангенсі қалай анықталады?

32. Келтіру формулаларын жазыңдар.

9-сынып

1. Скалярлық және векторлық шамалар деген не? Коллинеар векторлар деген не? Вектор мен параллель көшіру арасында қандай байланыс бар?

2. Вектордың модулі деген не? Қандай векторларды тең деп атаймыз?

3. Векторлардың қосындысы деген не? Векторларды қосудың үшбұрыш және параллелограмм ережелерін айтып беріңдер.

4. Векторлардың айырымы деген не? Векторды санға көбейту амалын анықтаңдар. Бұл амалдардың қандай қасиеттері бар?

5. Векторлардың арасындағы бұрышы, вектордың өстегі проекциясы деген не? Олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

6. Вектордың базис бойынша жіктелуінің жалғыз болатынын дәлелдеңдер.

7. Вектордың координаталары деген не? Координаталарымен берілген векторларды қосу және санға көбейту амалдары қалай орындалады? Оның модулі қалай анықталады?

8. Векторлардың скаляр көбейтіндісі деген не?

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ формуласын дәлелдеңдер. Скалярлық көбейтіндіні координаталары бойынша анықтаңдар.

9. Векторлық алгебра элементтерін қолданып, үшбұрыштың ауырлық центрінің координаталарын анықтаңдар.

10. Үшбұрыштарды шешу деген не?

11. Косинустар теоремасын дәлелдеңдер.

12. Синустар теоремасын дәлелдеңдер.

13. Үшбұрышты екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша, бір қабырғасы мен екі бұрышы бойынша қалай шешуге болады?

14. Сынық сызықтар деген не? Қандай қасиеттері бар?

15. Дөңес көпбұрыштар деген не? Дұрыс көпбұрыштар деген не?

16. Түзудің бағыттаушы векторы деп нені айтады? Түзудің сәйкес теңдеулерін жазыңдар.

17. Жазықтықты түрлендіру деп нені түсінесіңдер?

18. Өстік және центрлік симметрия деген не?

19. Бұру және параллель көшіру деген не?

20. Қозғалыс деген не? Оның беттестірулермен қандай байланысы бар?

21. Ұқсастық түрлендіруі деген не? Ұқсастық коэффициенті деген не?

22. Гомотетия деген не? Оның қандай қасиеттері бар? Гомотетия центрі, ұқсастық коэффициенті деген не?

23. Үшбұрыштардың ұқсастық белгілерін дәлелдеңдер.

24. Тікбұрышты үшбұрыштың ұқсастық белгілерін атаңдар.

25. Үшбұрыш биссектрисасының қандай қасиеті бар?

26. Шеңбердегі пропорционал кесінділер деген не? Олардың қандай қасиеті бар?

27. Шеңбер деген не? Шеңбердің негізгі элементтерін атаңдар.

28. Жанаманың қандай қасиеттерін білесіңдер?

29. Шеңбер мен түзудің орналасуының неше жағдайы бар?

30. Шеңбердің хордалары мен оларға керілген доғалардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

31. Шеңбердің неше симметрия өсі, симметрия центрі бар?

32. Шеңберге іштей сызылған бұрыш, центрлік бұрыш дегеніміз не? Қандай қасиеттерін білесіңдер?

33. Екі шеңбер өзара қалай орналасады? Шеңберлер центрлерінің арақашықтығын қалай табады?

34. Жанама мен хорданың арасындағы бұрыш неге тең?

35. Шеңбердің екі қиюшысының арасындағы бұрышты қалай анықтайды?

36. Дөңес көпбұрыштардың ішкі бұрыштарының қосындысы, сыртқы бұрыштарының қосындысы неге тең?

37. Дұрыс көпбұрыштың центрі, апофемасы деген не? Дұрыс көпбұрыштың неше симметрия өсі бар?

38. Шеңбер ұзындығының диаметріне қатынасы жөніндегі теореманы дәлелдеңдер. Шеңбер ұзындығы қандай формуламен есептеледі?

39. Ұқсас үшбұрыштардың аудандарының қатынасы неге тең? Ұқсас көпбұрыштардың ше?

40. Дөңгелек дегеніміз не? Оның қандай элементтерін білесіңдер?

41. Дөңгелектің ауданы қалай есептелінеді? Оның формуласын жазыңдар.

42. Сектор, сегмент аудандары қалай анықталады?

43. Дұрыс көпбұрыштың ауданын қалай табады?

44. Дөңгелектегі пропорционал кесінділер дегеніміз не? Олардың қандай қасиеттерін білесіңдер?

45. Тікбұрышты үшбұрыштағы қандай метрикалық қатынастарды білесіңдер?

46. Үшбұрыштың сүйір, доғал, тікбұрышты болатынын қалай анықтауға болады?

47. Үшбұрыш биссектрисаларының қандай қасиеттерін білесіңдер?

48. Іштей сызылған төртбұрыштардың қабырғалары мен диагональдарының арасында қандай байланыс бар?

49. Геометрияның негізгі даму кезеңдерін атаңдар.

ЕСЕПТЕР

5.1. Ортақ қабырғалары бар $\angle AOB = \alpha$ және $\angle BOC = \beta$ бұрыштары берілген. Осы бұрыштардың биссектрисалары арасындағы бұрышты анықтаңдар. Бұл бұрыштар сыбайлас болған жағдайды да қарастырыңдар.

5.2. $\angle AOB = \alpha$ және $\angle BOC = \beta$, $\angle COD = \gamma$ бұрыштары тізбектес орналасқан. AOB және COD бұрыштары биссектрисаларының арасындағы бұрышты табыңдар.

5.3. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 18,3 м, бүйір қабырғасы табанынан 3 м қысқа. Үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

5.4. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына жүргізілген медианасы m және ол тікбұрышты 1:2 қатынасында бөледі. Үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

5.5. Табандарының ұзындығы a және b бойынша трапеция диагональдары орталарының арақашықтығын табыңдар.

5.6. Шеңберге іштей сызылған үшбұрыштың бұрыштары бойынша осы үшбұрыштың төбелерінен шеңберге жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрыштарды табыңдар.

5.7. Қандай шарттар орындалғанда үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі үшбұрыштың ішінде, қабырғасында, сыртында жатады?

5.8. Теңбүйірлі ABC үшбұрышының BC табаны a-ға тең. D, E нүктелері сәйкесінше AB және AC қабырғаларын $m:n$ қатынасында бөледі. DE-нің ұзындығын табыңдар.

5.9. Тікбұрышты трапецияның бір диагоналі оның бүйір қабырғасына тең және олардың ұзындығы 4 см. Трапецияның биіктігін 2 см деп алып, оның орта сызығын табыңдар.

5.10. Трапецияның үлкен табаны 24 см, оның диагональдары орталарының арақашықтығы 4 см. Оның кіші табанын табыңдар.

5.11. Ромбының биіктігі оның қабырғасын ұзындықтары a-ға және b-ға тең кесінділерге бөледі. Ромбының диагональдарын табыңдар.

5.12. Параллелограмды тіктөртбұрыш құрастыруға болатындай етіп, екі бөлікке бөліңдер.

5.13. Үшбұрышты тіктөртбұрыш құрастыруға болатындай етіп, үш бөлікке бөліңдер.

5.14. Трапеция өзінің диагональдарымен төрт үшбұрышқа бөлінеді. Оның бүйір қабырғалары табандары болатын үшбұрыштар теңшамалы болатынын дәлелдеңдер.

5.15. Радиустары R және r болатын және өзара сырттай жанасқан шеңберлердің ортақ жанамасын табыңдар.

5.16. Ауданы берілген үшбұрышпен бірдей болатын квадрат салыңдар.

5.17. Қабырғасы $10\sqrt{3}$ см болатын дұрыс алтыбұрыш шеңберге сырттай сызылған. Осы шеңберге іштей сызылған квадраттың қабырғасын табыңдар.

5.18. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасы 4 см, ал бүйір қабырғасына жүргізілген медиана 3 см. Үшбұрыштың табанын табыңдар.

5.19. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны $4\sqrt{2}$ м, бүйір қабырғасына жүргізілген медиана 5 см. Үшбұрыштың бүйір қабырғасын табыңдар.

5.20. a, b, c үшбұрыштың қабырғалары, R оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы болса, $S = \dfrac{abc}{4R}$ екенін дәлелдеңдер.

5.21. h_1, h_2, h_3 — үшбұрыш биіктіктері, r — оған іштей сызылған шеңбердің радиусы болса, $\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} = \dfrac{1}{r}$.

5.22. Үшбұрыштың a, b, c қабырғалары бойынша h_a биіктігі мен үшбұрыштың ауданын табыңдар.

5.23. Төртбұрыштың диагональдары өзара перпендикуляр болу үшін оның қарама-қарсы қабырғалары квадраттарының қосындысының тең болуы қажетті және жеткілікті екенін дәлелдеңдер.

5.24. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары диаметрлері болатындай етіп, үшбұрышқа сырттай жарты дөңгелектер салынған. Осы жарты дөңгелектердің үлкенінің ауданы қалған екі жарты дөңгелектің аудандарының қосындысына тең болатынын көрсетіңдер.

5.25. Периметрі $2p$, диагональдарының қосындысы m-ге тең ромбының ауданын табыңдар.

5.26. Егер үшбұрыштың екі қабырғасы a және b, ауданы $S = \dfrac{3}{10}ab$ болса, оның үшінші қабырғасын табыңдар.

5.27. Үшбұрыштың 4 см-ге тең биіктігі оның табанын 1:8 қатынасында бөледі. Үшбұрышты екі теңшамалы бөліктерге бөлетін және берілген биіктігіне параллель кесіндінің ұзындығын табыңдар.

5.28. Радиусы R-ге тең шеңберге кіші қабырғасы $1,5R$-ге тең теңбүйірлі трапеция сырттай сызылған. Осы трапецияның ауданын табыңдар.

5.29. Периметрі $2p$, ал биіктіктері h_1-ге және h_2-ге тең параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

5.30. Тікбұрышты трапецияның табандары мен кіші бүйір қабырғасы сәйкесінше a, b және c. Диагональдарының қиылысу нүктесінен табандарына дейінгі және кіші бүйір қабырғасына дейінгі қашықтықтарды табыңдар.

5.31. Үшбұрыштың табаны мен оған түсірілген биіктігі, сәйкесінше a және h. Бүйір қабырғаларының арасындағы бұрышты φ деп алып, осы қабырғаларының қосындысын табыңдар.

5.32. Теңбүйірлі трапецияның биіктігі h, диагональдары арасындағы сүйір бұрыш 2φ. Трапецияның орта сызығын табыңдар.

5.33. Катеттері a және b-ға тең тікбұрышты үшбұрышқа онымен бір тік бұрышы ортақ болатын квадрат іштей сызылған. Квадраттың қабырғасын табыңдар.

5.34. Сүйір бұрышы φ, қабырғалары a және b-ға тең параллелограмның сүйір бұрышынан жүргізілген диагоналі мен қабырғалары арасындағы бұрыштардың тангенсін табыңдар.

5.35. Центрлік бұрышы $140°$-ға тең сектордың ауданы $31,5\pi$ см^2. Оған сәйкес дөңгелектің радиусын табыңдар.

5.36. Төбелері $A(-5;\ 2;\ \sqrt{3}\ )$, $B(-4;\ 2)$, $C(-2;\ \sqrt{3}\ )$, $D(0;\ 2)$ нүктелерінде орналасқан төртбұрыш диагональдары арасындағы бұрышты табыңдар.

5.37. ABC үшбұрышының төбелері берілген: $A(2;\ 0)$; $B(-3;\ 4)$; $C(0;\ 1)$. A бұрышының биссектрисасына коллинеар векторды табыңдар.

5.38. $y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$ теңдеулерімен берілген түзулер арасындағы бұрыш $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$ формуласымен анықталатынын көрсетіңдер.

5.39. a мен b-ның қандай мәндерінде $ax+8y+b=0$ және $2x+ay-1=0$ түзулері 1) беттеседі; 2) параллель; 3) перпендикуляр болады?

5.40. Үшбұрыштың екі қабырғасының ұзындықтары a-ға және b-ға тең, ал осы қабырғалар арасындағы бұрыштың биссектрисасы l. Үшбұрыштың осы бұрышын табыңдар.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

10-сынып

1. Стереометрия деген не? Оның негізгі үш аксиомасын тұжырымдаңдар.

2. III аксиома бойынша қиылысушы екі түзу жазықтықты толық анықтайды, яғни бұл екі түзу арқылы жалғыз ғана жазықтық өтеді. Тағы қандай жағдайларда жазықтық бірмәнді анықталады?

3. Егер түзу мен жазықтықтың 1) бір ғана ортақ нүктесі бар; 2) екі ортақ нүктесі бар; 3) ортақ нүктелері жоқ болса, бұл түзу мен жазықтық өзара қалай орналасады?

4. Кеңістікте қиылыспайтын екі түзудің параллель болуы міндетті ме? Олар параллель болуы үшін қосымша қандай шарт орындалуы қажет?

5. Айқас түзулер деген не? Мысал келтіріңдер.

6. Егер екі жазықтықтың ортақ нүктелері 1) бар; 2) жоқ болса, бұл жазықтықтар өзара қалай орналасады?

7. 1) Түзу мен жазықтықтың; 2) екі жазықтықтың параллельдігінің белгісін дәлелдеңдер.

8. Кеңістікте екі түзу арасындағы бұрыш деп нені түсінесіңдер? Қандай түзулерді өзара перпендикуляр деп атайды?

9. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш деген не? Қандай түзуді жазықтыққа перпендикуляр деп атайды?

10. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының белгісін дәлелдеңдер.

11. Бір жазықтыққа перпендикуляр екі түзудің параллель болатынын көрсетіңдер.

12. Нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикуляр деп нені айтады? Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық қалай анықталады?

13. Нүктеден жазықтыққа жүргізілген көлбеу, оның проекциясы, табаны деп нені айтады?

14. Үш перпендикуляр жөніндегі теореманы дәлелдеңдер.

15. Қандай жазықтықтар өзара перпендикуляр деп аталады?

16. Екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін дәлелдеңдер.

17. Айқас түзулердің арақашықтығы қалай анықталады?

18. Параллель проекциялаудың қандай қасиеттерін білесіңдер?

19. Кеңістік фигураларын жазықтықта бейнелеу принциптерін атаңдар. Мысал келтіріңдер.

20. Ортогональ проекциялау деген не? Көпбұрыштың ортогональ проекциясының ауданы қалай анықталады?

21. Кеңістіктегі вектор деген не? Оларға қандай амалдар қолданылады? Үш векторды қосудың параллелепипед ережесін атаңдар.

22. Кеңістікте нүкте мен вектордың координаталары қалай анықталады? Ұштарының координаталары бойынша вектордың координаталарын анықтаңдар.

23. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі деген не? Векторлардың арасындағы бұрыш қалай анықталады?

24. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын жазып, оның мағынасын түсіндіріңдер.

11-сынып

1. Екіжақты, үшжақты (көпжақты) бұрыштар деген не?

2. Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы деген не?

3. Көпжақты бұрыштардың қандай элементтері бар? Оның жазық бұрыштарының қосындысы қандай болуы қажет?

4. Геометриялық дене деп нені түсінесіңдер? Дөңес дене деген не?

5. Қандай денелерді көпжақтар деп атайды? Көпжақтың беті деген не? Оның қандай элементтері бар?

6. Көпжақтың жазбасы деген не? Көпжақтың толық бетінің ауданы қалай анықталады?

7. Қандай көпжақты призма деп атайды? Оның қандай элементтері бар? Призманың қандай түрлері бар?

8. Қандай призманы параллелепипед деп атайды? Оның қандай түрлері бар?

9. Параллелепипед диагональдарының қандай қасиеті бар? Пифагор теоремасының жалпылама түрі қандай параллелепипед үшін орындалады?

10. Қандай көпжақты пирамида деп атайды? Оның қандай элементтері және түрлері бар?

11. Қиық пирамида деген не? Оның элементтерін атап көрсетіңдер.

12. Призманың (пирамиданың) бүйір бетінің, толық бетінің ауданы қалай анықталады?

13. Көпжақтың қимасы деп, қиюшы жазықтық деп нені айтады? Қиюшы жазықтықтың ізі деген не?

14. Қандай көпжақтарды дұрыс көпжақтар деп атайды? Олардың түрлерін атаңдар.

15. Кеңістіктегі қозғалыс түрлендіруі деген не? Параллель көшіру, жазықтыққа қатысты симметрия деген не?

16. Кеңістікте қандай фигураларды ұқсас деп атайды? Ұқсастық түрлендіруі деген не?

17. Кеңістікте түзу мен жазықтық теңдеулері қалай жазылады?

18. Екі түзудің (түзу мен жазықтықтың, екі жазықтықтың) параллельдік шартын жазыңдар.

19. Екі түзудің (түзу мен жазықтықтың, екі жазықтықтың) перпендикулярлық шартын жазыңдар.

20. Кеңістіктегі бұрыштар қалай анықталады? Олардың ерекшеліктері қандай?

21. Қандай денелерді (беттерді) айналу денелері (беттері) деп атайды? Айналу денесінің өсі, өстік қимасы деген не? Жасаушысы деп нені айтады?

22. Цилиндр деп, конус деп қандай денелерді атайды? Олардың қандай элементтерін білесіңдер?

23. Цилиндр мен конустың бүйір бетінің және толық бетінің аудандары қалай анықталады?

24. Қиық конус деген қандай дене? Оның қандай элементтерін білесіңдер? Қиық конустың бүйір және толық беттерінің ауданы қалай анықталады?

25. Қандай бетті (денені) сфера (шар) деп атайды? Сфераның ауданы қалай анықталады?

26. Сфераның теңдеуі мен оның жанама жазықтығының теңдеуін жазыңдар.

27. Айналу денелеріне іштей және сырттай сызылған көпжақ деп нені түсінесіңдер? Мысал келтіріңдер.

28. Геометриялық дененің көлемі деп нені түсінесіңдер? Көлем ұғымының қандай қасиеттерін білесіңдер?

29. Призманың көлемі қалай анықталады? Тікбұрышты параллелепипедтің көлемін қандай формуламен анықтайды?

30. Пирамида мен қиық пирамиданың көлемдері қандай формуламен анықталады?

31. Цилиндрдің, конустың және қиық конустың көлемдері қандай формуламен анықталады?

32. Шардың көлемі қалай анықталады?

33. Шар сегментінің (секторының) көлемі қандай формуламен анықталады?

ЕСЕПТЕР

5.41. α жазықтығы ABC үшбұрышының AB қабырғасына параллель және оның өзге қабырғаларын A_1, B_1 нүктелерінде қиып өтеді. $AC=15$ см, $A_1B_1=4$ см, $AB=20$ см деп алып, A_1C-ны табыңдар.

5.42. Қабырғасы 4 см болатын квадраттың жазықтығынан 3 см қашықтықтағы нүктеден квадраттың қабырғаларына дейінгі қашықтықтар бірдей. Осы нүктеден квадраттың төбелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысын табыңдар.

5.43. α жазықтығын қиып өтетін AB кесіндісінің ортасынан α-ға дейінгі қашықтық 6 см, B нүктесінен α-ға дейінгі қашықтық 24 см. A нүктесінен α-ға дейінгі қашықтықты табыңдар. Мұнда кесіндінің ортасы мен A нүктесі α-ның екі жақ бөлігінде жатыр.

5.44. m-нің қандай мәнінде $\left|\overline{AB}\right| = 4\sqrt{3}$ теңдігі орындалады? Мұнда $A(4;\ m;\ 1)$, $B(8;\ 5;\ 5)$.

5.45. ABC және ABD тең бүйірлі үшбұрыштарының табандары ортақ және олар әртүрлі жазықтықтарда жатыр. $AB=2$ м, $AC=2$ м, $AD=4$ м, $CD=3$ м деп алып, ABC және ABD жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

5.46. R нүктесі PQ кесіндісін 3:2 қатынасында бөледі. $P(4;\ -4;\ 1)$, $Q(8;\ -2;\ 7)$ деп алып, R-дің координаталарын табыңдар.

5.47. Үшжақты бұрыштың екі жазық бұрышы $45°$. Осы жақтарының арасындағы екіжақты бұрыш — тік. Үшінші жазық бұрыштың шамасын табыңдар.

5.48. Нүктеден жазықтыққа ұзындықтары 10 м және 17 м болатын екі көлбеу жүргізілген, проекцияларының айырымы 9 м. Проекцияларды табыңдар.

5.49. Ұзындығы 10 дм кесінді жазықтықты қиып өтеді және оның ұштарынан жазықтыққа дейінгі қашықтықтар 5 дм, 3 дм. Кесіндінің жазықтықтағы проекциясын табыңдар.

5.50. $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=60°$, $|\vec{a}|=2$ және $|\vec{b}|=1$ деп алып, $3\vec{a}-2\vec{b}$ векторының модулін табыңдар.

5.51. $A(-2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ 3;\ 2)$, $C(1;\ 1;\ 4)$ нүктелері берілген. ABC үшбұрышы медианаларының қиылысу нүктесін табыңдар.

5.52. $ABCA_1B_1C_1$ тік призмасында $ABC = 90°$, $CAB = 60°$, $AB = 2$ см, $AA_1 = 2\sqrt{3}$ см. 1) Призманың толық бетінің ауданын; 2) A_1BC жазықтығымен жасаған қимасының ауданын табыңдар.

5.53. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$ және $|\vec{c}|=5$ шартын қанағаттандыратын $\vec{a}$, $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары берілген. $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

5.54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінің өлшемдері m, $2m$ және $3m$-ге тең. BD және AB_1 түзулері арасындағы бұрышты табыңдар.

5.55. Призманың табаны — дұрыс үшбұрыш және осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы 6 см, призманың бүйір жақтарының әрқайсысы — квадрат. Призманың көлемін табыңдар.

5.56. Үшбұрышты тік призманың барлық қырлары өзара тең және бүйір бетінің ауданы 48 $дм^2$. Призманың биіктігін табыңдар.

5.57. Тік параллелепипедтің табаны — қабырғалары 6 см және 8 см, сүйір бұрышы $30°$ болатын параллелограмм. Параллелепипедтің бүйір қырын 5 см деп алып, көлемін табыңдар.

5.58. Өлшемдері 14 см, 48 см және 8 см болатын тікбұрышты параллелепипедтің диагональдық қимасының ауданын табыңдар.

5.59. Толық бетінің ауданы 150 $м^2$ болатын кубтың көлемі қандай?

5.60. Өлшемдері 15 см, 50 см, 36 см болатын тікбұрышты параллелепипедке тең шамалас кубтың қырын табыңдар.

5.61. Табан қабырғасы a, бүйір қыры b-ға тең дұрыс үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

5.62. Қыры a-ға тең кубқа сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар.

5.63. Конустың жасаушысы мен табаны арасындағы бұрыш φ. Конусқа іштей сызылған шар көлемінің конустың көлеміне қатынасын табыңдар.

5.64. Цилиндрдің өстік қимасы ауданының табан ауданына қатынасы $4:\pi$. Өстік қима диагоналі мен табаны арасындағы бұрышты табыңдар.

5.65. Көлемі радиустары 3 м, 4 м, 5 м болатын шарлар көлемдерінің арифметикалық ортасына тең шардың радиусын табыңдар.

5.66. Катеттері 4 см және 3 см болатын тікбұрышты үшбұрышты кіші катетінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңдар.

5.67. Қиық конус табандарының радиустары 3 м, 6 м, биіктігі 4 м. Жасаушысын табыңдар.

5.68. Конустың жасаушысы мен табанының диаметрі өзара тең. Конустың бүйір бетінің ауданының оған іштей сызылған дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір бетінің ауданына қатынасын табыңдар.

5.69. Табанының радиустары r және R-ге тең қиық конустың бүйір бетінің ауданы S. Толық конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

5.70. Қиық конустың табандарының радиустары мен жасаушысының қатынасы 1:4:5, оның биіктігі 8 м. Қиық конустың көлемін табыңдар.

5.71. Қиық конустың табандарының ауданы Q_1 мен Q_2, бүйір бетінің ауданы Q_3 болса, оның өстік қимасының ауданын табыңдар.

5.72. Цилиндрге дұрыс үшбұрышты призма іштей сызылған, ал призмаға цилиндр іштей сызылған. Осы екі цилиндрдің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

5.73. Қырларының әрқайсысы a-ға тең дұрыс алтыбұрышты призмаға іштей сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

5.74. Куб жақтарының центрлері октаэдрдің төбелері болып табылады. Куб және октаэдр көлемдерінің қатынасын табыңдар.

5.75. Пирамиданың табаны — параллель қабырғалары 3 м және 5 м, бүйір қабырғасы 7 м болатын теңбүйірлі трапеция. Пирамиданың биіктігі табанындағы трапеция диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтеді. Пирамиданың үлкен бүйір қыры 10 м. Пирамиданың көлемін табыңдар.

5.76. Конустың көлемі V, оның биіктігі тең үш бөлікке бөлініп, бөліктеу нүктелері арқылы табанына параллель жазықтықтар жүргізілген. Ортаңғы бөліктің көлемін табыңдар.

5.77. Шарға дұрыс үшбұрышты призма сырттай сызылған және осы призмаға сырттай шар сызылған. Екі шардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

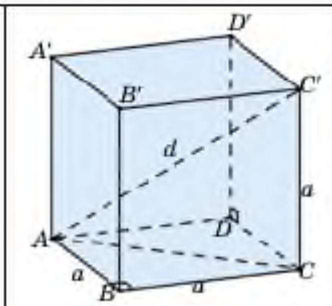
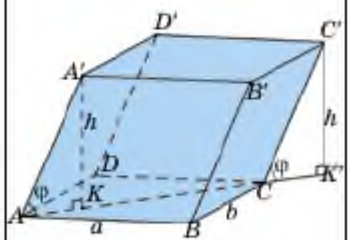
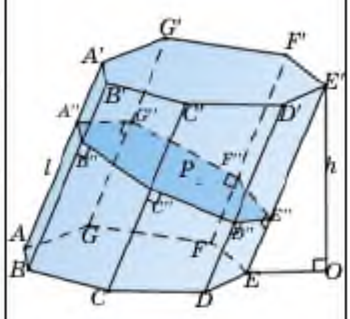
5.78. Берілген кубтың барлық жақтарын, барлық қырларын жанайтын және барлық төбелері арқылы өтетін үш шардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

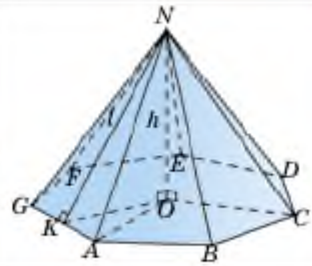
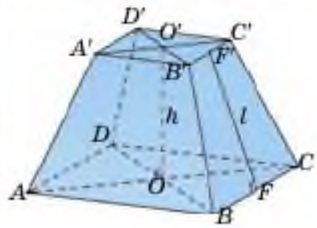
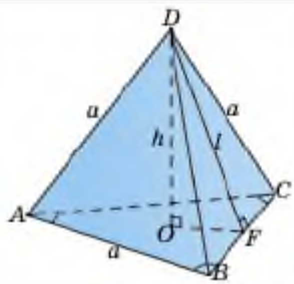
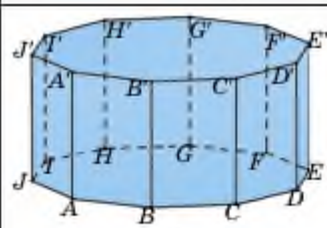
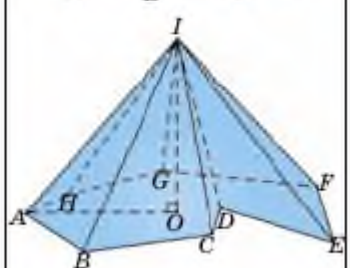
5.79. Жартышардың табанына қабырғалары a және b-ға тең тіктөртбұрыш іштей сызылған және тіктөртбұрыштың қабырғалары арқылы табанына перпендикуляр жазықтықтар жарты шардан төрт жарты сегмент бөліп алады. Жартышардың қалған бөлігінің көлемін табыңдар.

5.80. Биіктігі 8 см, табан радиусы 6 см-ге тең конусқа бірнеше шар іштей сызылған. Бірінші шар конустың бүйір беті мен табанын жанайды, келесі шарлар конустың бүйір беті мен алдыңғы шарды жанайды. Егер осы іштей сызылған шарлардың санын шексіз өсірсек, олардың көлемдерінің қосындысының шегі қандай болады?

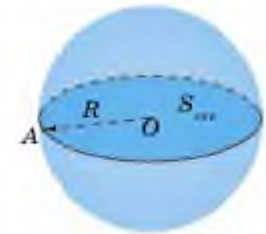
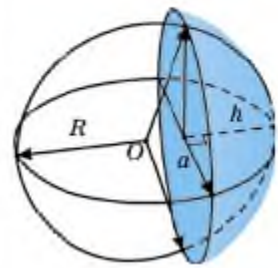
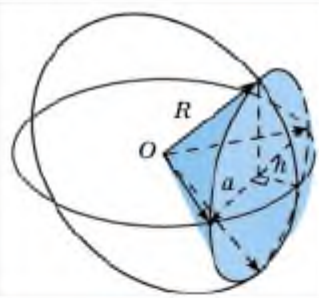
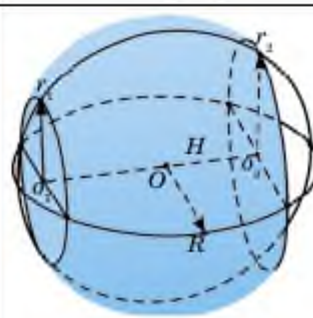
НЕГІЗГІ ФОРМУЛАЛАР ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ФИГУРАЛАРДЫҢ КЕҢІСТІКТЕГІ 3D ИЛЛЮСТРАЦИЯСЫ

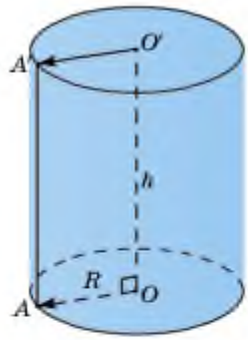
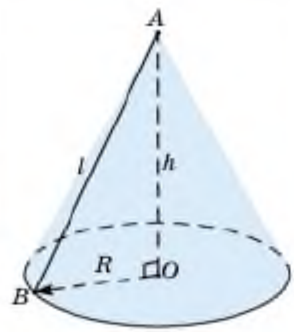
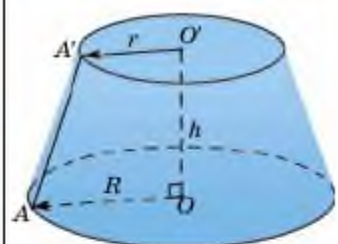
1. Көпжақтар мен олардың 3D иллюстрациясы

Формулалар мен иллюстрациялар		
1	**Куб** **Кубтың диагоналі:** $d = a\sqrt{3}$ **Табан ауданы:** $S_{таб} = a^2$ **Толық бетінің ауданы:** $S_{т.б.} = 6a^2$ **Кубтың көлемі:** $V_{куб} = a^3$	
2	**Параллелепипед** **Табан периметрі:** $P_{таб} = 2\ (a + h)$ **Табан ауданы:** $S_{таб} = ab\sin\alpha$ **Бүйір бетінің ауданы:** $S_{б.б.} = P_{таб}h$ **Толық бетінің ауданы:** $S_{т.б.} = S_{б.б.} + 2S_{таб}$ **Тік параллелепипедтің көлемі:** $V_{паралл} = S_{таб}h$ **Көлбеу параллелепипедтің көлемі:** $V = a \cdot b \cdot c \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$	
3	**Призма** **Бүйір бетінің ауданы:** $S_{б.б.} = P_{таб}h$ **Кез келген призманың бүйір бетінің ауданы:** $S_{б.б.} = P_{\perp}l$ ($P_{\perp}$ — перпендикуляр қиманың периметрі, l — бүйір қырының ұзындығы) **Толық бетінің ауданы:** $S_{т.б.} = S_{б.б.} + 2S_{таб}$ **Призманың көлемі:** $V_{призма} = S_{таб}h$	

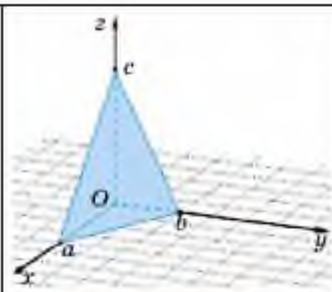
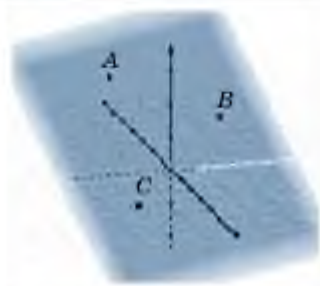
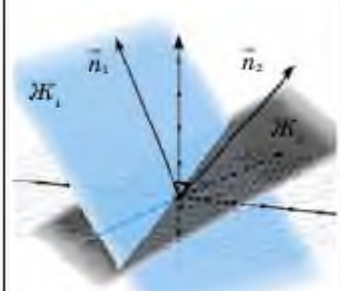
4	**Пирамида** **Бүйір бетінің ауданы:** $S_{б.б} = \frac{1}{2} P_{таб} l$ (l — апофема). **Толық бетінің ауданы:** $S_{т.б} = S_{б.б} + S_{таб}$ **Пирамиданың көлемі:** $V_{Пирамида} = \frac{1}{3} S_{таб} h$	
5	**Қиық пирамида** **Бүйір бетінің ауданы:** $S_{б.б} = \frac{P_1 + P_2}{2} l$ **Толық бетінің ауданы:** $S_{т.б} = S_{б.б} + S_{таб}$ **Қиық пирамиданың көлемі:** $S_{қиық.пир} = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$	
6	**Тетраэдр** **Табан ауданы:** $S_{таб} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **Толық бетінің ауданы:** $S_{т.б} = 4S_{таб} = a^2\sqrt{3}$. **Тетраэдр көлемі:** $V = \frac{1}{3} S_{таб} h = \frac{a^2 h\sqrt{3}}{12}$.	
7	**Дөңес көпжақ** **Көпжақтарға арналған Эйлер теоремасы:** $(Т + Ж - Қ) = 2$, мұндағы $Т$ — төбелер саны, $Қ$ — қырларының саны, $Ж$ — жақтарының саны, Қырлары: $3n$ Төбелері: $2n$ Жақтары: $n + 2$ Диагональдары: $n \cdot (n - 3)$ **Пирамида үшін Эйлер теоремасы:** $(Т + Ж - Қ) = 2$ Қырлары: $2n$ Төбелері: $n + 1$ Жақтары: $n + 1$	

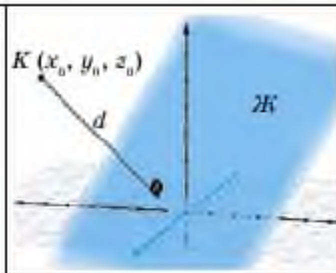
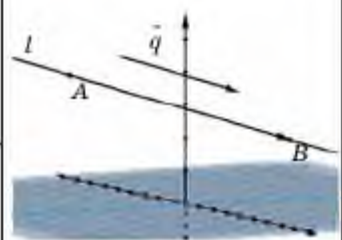
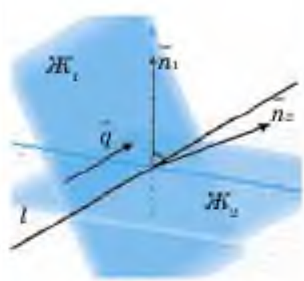
Айналу денелері мен олардың элементтері, 3D иллюстрациясы

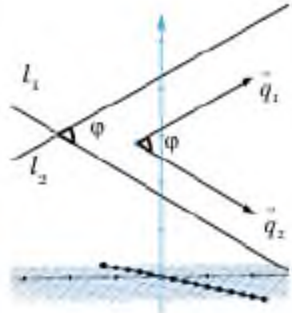
	Формулалар мен иллюстрациялар	
1	**Сфера. Шар** **Экваторлық қиманың көлемі:** $S_{\text{экв. қима}} = \pi R^2$ **Сфераның ауданы:** $S_{\text{сфера}} = 4\pi R^2$ **Шардың көлемі:** $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$	
2	**Шар сегменті** **Сегмент табанының радиусы:** $a^2 = h(2R - h)$ **Шар бетінің ауданы:** $S_{\text{ш.б}} = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$ **Толық бетінің ауданы:** $S_{\text{т.б.}} = \pi(h^2 + 2a^2)$ **Шар сегментінің көлемі:** $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$	
3	**Шар секторы** **Толық бетінің ауданы:** $S_{\text{т.б.}} = \pi R(2h + a)$ **Шар секторының көлемі:** $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$	
4	**Шар қабаты** **Бүйір бетінің ауданы:** $S_{\text{б.б}} = 2\pi RH$ **Толық бетінің ауданы:** $S_{\text{т.б}} = \pi(r_1^2 + r_2^2 + 2RH)$ **Шар қабатының көлемі:** $V = \frac{\pi}{6}H(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$	

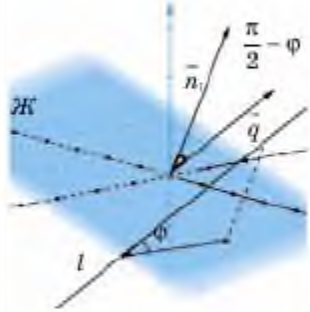
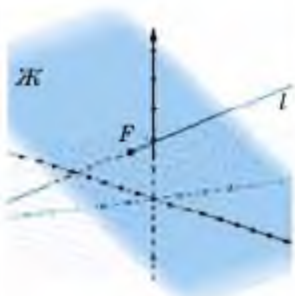
5	**Цилиндр** **Табан ауданы:** $S_{таб} = 2\pi R^2$ **Бүйір бетінің ауданы:** $S_{б.б} = 2\pi Rh$ **Толық бетінің ауданы:** $S_{т.б} = 2\pi R(h + R)$ **Цилиндрдің көлемі:** $V_{цилиндр} = S\pi R^2 h$	
6	**Конус** **Табан ауданы :** $S_{таб} = \pi R^2$ **Бүйір бетінің ауданы:** $S_{б.б.} = \pi Rl$ **Толық бетінің ауданы:** $S_{т.б} = \pi R(l + R)$ **Конус көлемі:** $V_{конус} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$	
7	**Қиық конус** **Табан ауданы:** $S_{таб} = \pi(R^2 + r^2)$ **Бүйір бетінің ауданы:** $S_{б.б.} = \pi l(R + r)$ **Толық бетінің ауданы:** $S_{т.б} = \pi(R^2 + l(R + r) + r^2)$ **Қиық конустың көлемі:** $V_{қ.к} = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r \cdot R + r^2)$	

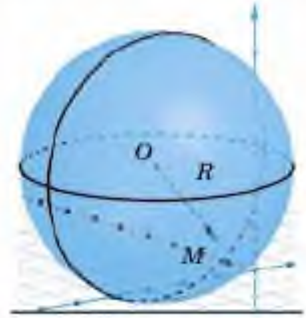
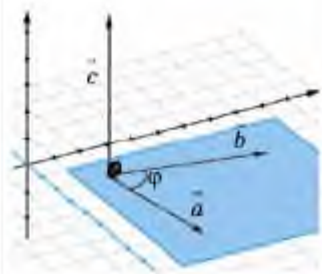
Түзу мен жазықтықтың теңдеуі, кеңістіктегі сфераның теңдеуі және олардың 3D иллюстрациялары

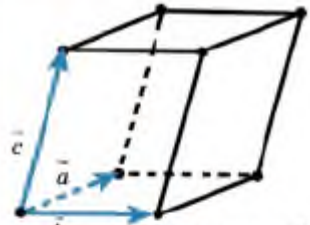
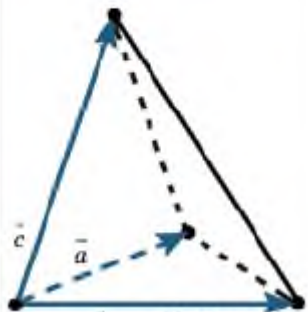
Формулалар мен иллюстрациялар		
1	**Жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі:** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ **Жазықтықтың жалпы теңдеуі:** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	
2	**Үш нүкте арқылы берілген жазықтықтың теңдеуі:** $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ **Кеңістіктегі нүктелер:** $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$	
3	**Екі жазықтық арасындағы бұрыш:** $\cos\varphi=\frac{\lvert\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\cdot\lvert\vec{n}_2\rvert}=$ $=\frac{\lvert A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ **Жазықтықтардың теңдеулері:** $Ж_1$: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $Ж_2$: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ **Нормаль векторлар:** $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ және $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ **Жазықтықтардың параллельдік және перпендикулярлық шарттары:** $Ж_1 \parallel Ж_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, $Ж_1 \perp Ж_2 \Rightarrow$ $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$	

4	**Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық:** $d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ **Жазықтықта жатпайтын нүкте:** $K\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$	
5	**Екі нүкте арқылы берілген түзудің теңдеуі:** $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ **Кеңістіктегі нүктелер:** $A\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ және $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ **Бағыттаушы вектор:** $\vec{q}\,(m; k; p)$	
6	**Түзудің параметрлік теңдеуі:** $l = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ k \\ p \end{pmatrix}$ **Кеңістіктегі нүкте:** $A\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ **Бағыттаушы вектор:** $\vec{q}\,(m; k; p)$	
7	**Қиылысқан екі жазықтыққа ортақ түзудің теңдеуі:** $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} \vec{q} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{q} \perp \vec{n}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ **Жазықтықтардың теңдеуі:** $Ж_1$: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $Ж_2$: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ **Нормаль векторлар:** $\vec{n}_1\,(A_1;\ B_1;\ C_1)$ және $\vec{n}_2\,(A_2;\ B_2;\ C_2)$ **Бағыттаушы вектор:** $\vec{q}\,(m; k; p)$	

8	**Түзулер арасындағы бұрыш:** $\cos\varphi = \dfrac{\left\|\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right\|}{\left\|\vec{q}_1\right\| \cdot \left\|\vec{q}_2\right\|} =$ $= \dfrac{\left\|m_1 \cdot m_2 + k_1 \cdot k_2 + p_1 \cdot p_2\right\|}{\sqrt{m_1^2 + k_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + k_2^2 + p_2^2}}$ **Түзулердің теңдеуі:** $l_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_1 \\ k_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ және $l_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$ **Бағыттаушы векторлар:** $\vec{q}_1\,(m_1; k_1; p_1)$ және $\vec{q}_2\,(m_2; k_2; p_2)$ **Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары:** $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$, $l_1 \perp l_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow m_1 \cdot m_2 + k_1 \cdot k_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$	
9	**Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш:** $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \dfrac{\left\|\vec{q} \cdot \vec{n}\right\|}{\left\|\vec{q}\right\| \cdot \left\|\vec{n}\right\|} =$ $= \dfrac{\left\|m \cdot A + k \cdot B + p \cdot C\right\|}{\sqrt{m^2 + k^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ **Жазықтықтың теңдеуі:** Ж: $Ax + By + Cz + D = 0$	

	Түзудің теңдеуі: $l = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ k \\ p \end{pmatrix}$ **Нормаль вектор:** $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ **Бағыттаушы вектор:** $\vec{q}\,(m; k; p)$ **Түзу мен жазықтықтың параллельдік және перпендикулярлық шарттары:** $l \perp Ж \Rightarrow \dfrac{m}{A} = \dfrac{k}{B} = \dfrac{p}{C}$, $l \parallel Ж \Rightarrow$ $\Rightarrow m \cdot A + kB + p \cdot C = 0$	
10	**Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін анықтау алгоритмі:** 1. $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{k} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \begin{cases} x = m\lambda + x_0, \\ y = k\lambda + y_0, \\ z = p\lambda + z_0. \end{cases} \end{cases}$ 2. $A(m\lambda + x_0) + B(k\lambda + y_0) + C(p\lambda + z_0) + D = 0$ 3. $\lambda_0 = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0}{Am + Bk + Cp}$ 4. $\begin{cases} x_F = m\lambda_0 + x_0 \\ y_F = k\lambda_0 + y_0 \\ z_F = p\lambda_0 + z_0 \end{cases} \Rightarrow F\left(x_F; y_F; z_F\right)$	

11	**Сфераның теңдеуі:** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ **Шар центрінің координатасы:** $O\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$	
12	**Векторлардың векторлық көбейтіндісі** **Орт-вектордың координатасы:** $\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ **Параллелограмның ауданы:** $S = \lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert = \left\lVert \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\rVert$ **Үшбұрыштың ауданы:** $S = \frac{1}{2}\lvert\vec{c}\rvert = \frac{1}{2}\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert = \frac{1}{2}\left\lVert \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\rVert$	

13	**Векторлардың аралас көбейтіндісі** **Параллелепипедтің көлемі:** $V_{\text{паралл.}} = \left\|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right\| = \left\|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right\|$ **Үшбұрышты пирамиданың көлемі:** $V_T = \frac{1}{6}\left\|\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right\|$	 *Параллелепипед*  *Үшбұрышты пирамида*

0.1. 1) 6 см. **0.2.** 2) 20 см. **0.7.** 1) 4 см. **0.9.** 1) 5 см. **0.11.** 1) 8 м; 2) 26 см. **0.15.** 48 см. **0.16.** 16 см. **0.17.** 1) 5 м; 2) $a + c - b$. **0.18.** 2 см. **0.19.** $8\sqrt{3}$ см. **0.20.** 10 см және $2,5\sqrt{3}$ см. **0.22.** 1. **0.23.** $-\frac{69}{2}$. **0.24.** $6a^2$. **0.30.** $x = 0$.

I бөлім.

п.1.1. **1.5.** 1) мүмкін емес; 2) мүмкін; 3) мүмкін емес; 4) мүмкін емес. **1.6.** 1) мүмкін емес; 2) мүмкін; 3) мүмкін емес; 4) мүмкін емес. **1.7.** 12. **1.8.** 1) $k = 4$. **1.9.** 3) 864 м². **1.11.** 4) 7 мм. **1.12.** 3) $25\sqrt{3}$ дм². **1.13.** 60°. **1.14.** 4) $\mathrm{tg}\alpha = 0,5$. **1.15.** [40°; 100°] аралығында жатады. **1.16.** 2) 760 см². **1.17.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 2) 45°. **1.19.** $\sqrt{155}$ см. **1.20.** 4 см. **1.22.** 1) өлшемдері a, a, $\sqrt{2}\,a$; 2) $2\left(2\sqrt{2}+1\right)a^2$. **1.24.** 17 см. **1.25.** 90°. **1.26.** $n \le 3$. **1.27.** $2S_1 + 2S_2 + \frac{2S_1S_2}{a^2}$; $\frac{1}{a}\sqrt{a^4 + S_1^2 + S_2^2}$. **1.29.** $\sqrt{\frac{S_1S_2}{S_3}}$; $\sqrt{\frac{S_1S_3}{S_2}}$; $\sqrt{\frac{S_2S_3}{S_1}}$.

п.1.2. **1.48.** 1) 3 м; 3) 26 дм. **1.49.** 2) $S_{бок} = 180$ см²; $S_{толық} = 220$ см²; $S_{қима} = 10\sqrt{41}$ см². **1.50.** 2) 3 м, 7 м, 11 м. **1.51.** 3) 260 мм² және 300 мм². **1.53.** 520 см² және 858 см². **1.54.** 1) $\frac{240+25\sqrt{3}}{2}$ м². **1.55.** 120°. **1.56.** 1) мүмкін, 30 қыры және 12 жағы бар; 3) мүмкін емес. **1.57.** $d = a\sqrt{3}$. **1.60.** $d = \frac{\sqrt{6}}{2}d_1$. **1.61.** 490 см². **1.64.** 14 см, 48 см. **1.65.** 6 см, 14 см, 16 см. **1.66.** $S_{толық} = 3\sqrt{105} + 2\sqrt{81-6\sqrt{35}} + \sqrt{81+6\sqrt{35}}$ (м²). **1.67.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}a^2$. **1.70.** $6\left(6+\sqrt{3}\right)r^2$. **1.71.** 906 см². **1.72.** 42 см².

п.1.3. **1.84.** 2) табылмайды. **1.86.** 2) 84 м². **1.87.** 1) $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ см². **1.88.** 1) 24 см². **1.89.** 2) 32 м². **1.92.** 1) 64 см². **1.93.** 2) 150 м². **1.94.** 1) 16 м; 2) $96\sqrt{15}$ м². **1.101.** 1) 5 см; 2) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{5}$; 3) $\sqrt{34}$ см; 4) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{102}}{17}$. **1.106.** $S_{толық} = 48 + 27\sqrt{3} + 9\sqrt{91}$(см²); екі жақты бұрышы 90°-қа тең. **1.107.** 1) 5 см; 6 см; 2) $8\sqrt{5} + 12\sqrt{6} + 4\sqrt{14}$ (см²). **1.108.** 1) $b\sin\varphi$; 2) $2b\cos\varphi$; 3) $b\cos\varphi$; 4) $\frac{b}{2}\sqrt{4-\cos^2\varphi}$; 5) $\frac{3b^2}{2}\sqrt{4-\cos^2\varphi}$. **1.109.** $2a^2$. **1.110.** 6 см. **1.112.** 51 см, 39 см. **1.117.** $3\sqrt{5}\,a^2$. **1.118.** $(n-1)360°$. **1.119.** $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}\varphi\cos\frac{\pi}{n}$. **1.120.** $\left(\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}\right)^2$. **1.121.** $\frac{a^2}{\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}-1}}$.

1.122. $\frac{a^2}{2}\left(2+\sqrt{7}\right)$. **1.129.** 1) $25\sqrt{2}$ см². **1.130.** 60°. **1.134.** 2) 144 см².

1.137. $3\sqrt{11}$ см². **1.142.** 10 см². **1.143.** $\frac{h\sqrt{b^2-h^2}}{4}$. **1.144.** $32\sqrt{5}$ см².

1.145. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **1.148.** $\cos\varphi=\frac{1}{3}$. **1.149.** $\cos\varphi=-\frac{1}{3}$. **1.150.** 8 см², 18 см².

1.153. $\frac{h^2\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\varphi}{\cos(\gamma-\varphi)}$. **1.154.** Пирамиданың жазбасын алу қажет.

1.155. $\frac{b^2\sqrt{5}}{6}$. **1.156.** $\sqrt{-2\cos 2\varphi}\cdot ab$.

II бөлім.

п.2.1. **2.2.** 2) $\vec{p}(4;\ -2;\ 7)$; 3) $\vec{p}(4;\ 1;\ -1)$. **2.4.** 1) $\vec{n}(1;\ 2;\ -1)$; 4) $\vec{n}(0;\ 2;\ 1)$. **2.5.** 2) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ коллинеар емес, себебі $\frac{0}{2}\neq\frac{3}{5}\neq\frac{-4}{4}$. $\vec{n}(32;\ -8;\ -6)$ немесе $\vec{n}(16;\ -4;\ -3)$. **2.7.** 2) $16x-4y-3z+44=0$; 4) $11x+10y+3z-8=0$. **2.8.** 1) $\frac{x-6}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$; 3) $\frac{x-4}{-1}=\frac{y}{6}=\frac{z-3}{4}$. **2.9.** 1) $3x-2y-5z+16=0$; 4) $x+y-3=0$. **2.11.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{5}$ немесе $\begin{cases}x-2y-5=0,\\5x-4z+15=0.\end{cases}$ **2.13.** 2) $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-2}=1$, $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ -2)$. **2.14.** 1) $\frac{x-5}{4}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-7}{3}$; 3) $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-7}{4}$. **2.15.** $x+5y-7z+1=0$. **2.16.** $x+z-1=0$. **2.17.** $x+y+z-6=0$. **2.20.** $x+y-5=0$.

п.2.2. **2.21.** $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ болуы керек. A және C нүктелері берілген түзудің бойында жатады, өзгелері жатпайды. **2.22.** $\frac{x_1-x_0}{m}=\frac{y_1-y_0}{n}=\frac{z_1-z_0}{k}$ болуы керек. **2.23.** 2) қиылысады; 3) параллель. **2.24.** 2) өзара параллель. **2.25.** 1) айқас түзулер. **2.26.** 2) $A(1{,}2;\ 1{,}6;\ 0{,}2)$. **2.27.** 4) $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$. **2.28.** 1) $z=0$; 2) $y=0$; 3) $x=0$. **2.29.** 2) $\begin{cases}x=0,\\z=0.\end{cases}$ **2.30.** 4) $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ -2)$. **2.31.** 3) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{3}$. **2.32.** 2) $x-y-2z-1=0$. **2.33.** 1) $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$. **2.35.** 4) $d=-3$. **2.36.** 2) $A(-15{,}8;\ -6{,}2;\ -6{,}8)$

нүктесінде қиылысады; 3) $B(2;\ 3;\ 1)$ нүктесінде қиылысады. **2.37.** $13x - 8y + 2z + 37 = 0$. **2.38.** 1) $M_1\left(-\frac{25}{77};\ \frac{90}{77};\ \frac{289}{77}\right)$. **2.39.** $2x + 3y - 8 = 0$. **2.40.** 1) $3x - 2z - 3 = 0$, $3x - 2z + 9 = 0$. **2.41.** $-y + z = 2$. **2.42.** 2) $O(2;\ -1{,}5;\ 2)$. **2.43.** 2) $A(-1;\ 1;\ -2)$. **2.44.** 1) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{5}{7}$. **2.45.** 3) $\cos C = -\frac{1}{3}$, $\angle C$ доғал бұрыш, ΔABC — доғал бұрышты үшбұрыш.

п.2.3. **2.46.** 2) $\frac{3\sqrt{14}}{7}$. **2.47.** 4) $\frac{\sqrt{14}}{7}$. **2.48.** 1) $\frac{2}{7}\sqrt{42}$. **2.49.** 3) $\frac{1}{7}\sqrt{2730}$. **2.50.** $5\frac{\sqrt{205}}{41}$. **2.51.** $m = -\frac{14}{3}$; $d = \frac{6\sqrt{29}}{29}$. **2.52.** 1) $\frac{\sqrt{714}}{17}$. **2.53.** 1) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$; 2) $\frac{13\sqrt{11}}{11}$. **2.56.** 2) $2x + z - 1 = 0$ және $2x + z - 14 = 0$; 3) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$. **2.57.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **2.58.** $\cos A = \cos C = \frac{9\sqrt{130}}{130}$; $\cos B = \frac{8\sqrt{65}}{65}$. **2.59.** $80°$; $100°$. **2.60.** 9 см.

п.2.4. **2.63.** 1) $\cos\varphi = \frac{5\sqrt{646}}{646}$. **2.64.** 4) $\sin\varphi = \frac{6\sqrt{39}}{39}$. **2.65.** 3) $\cos\varphi = \frac{3\sqrt{14}}{14}$. **2.67.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{21}}{6}$. **2.68.** 1) $\begin{cases} x = 2, \\ z = -2 \end{cases}$; 2) $\left[\begin{array}{l} x = -z, \\ y = 0. \end{array}\right.$ **2.69.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2227}}{2227}$. **2.70.** $4x + 4y + z - 6 = 0$. **2.71.** 1) $M\left(-\frac{2}{3};\ -3;\ -\frac{8}{3}\right)$; 2) $\sin\varphi = \frac{17\sqrt{1162}}{581}$. **2.72.** 1) $\cos(\angle ABC) = -\frac{\sqrt{6}}{9}$; 2) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{10}}{30}$; 3) $\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{298}}$. **2.73.** $x + z = 0$ немесе $x - z = 0$. **2.74.** $x + y + z = 0$. **2.75.** 3) $\cos(\angle ABC) = -\frac{\sqrt{6}}{9}$.

III бөлім.

п.3.1. **3.7.** 1) 12π см². **3.8.** 2) $181{,}5\pi$ м². **3.11.** 16 см², 16π см². **3.12.** 13 см. **3.13.** 2) 6 см; 3) 27π см². **3.14.** $16\left(1 + \sqrt{2}\right)\pi$ см². **3.15.** $\frac{5}{\pi}$ см. **3.23.** 48 см². **3.24.** 2) $\pi : 2\sqrt{3}$. **3.26.** $2a^2\pi$. **3.27.** $h = R$. **3.28.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}ah$. **3.31.** $S_{б.б.} = \pi \cdot S$. **3.35.** $1 : \cos\varphi$. **3.42.** 21, 13, 7, 15 және $S = 168$.

п.3.2. **3.51.** 2) 16 м². **3.52.** 1) 3π м². **3.53.** 3) 24π м². **3.54.** 2) 10 м. **3.55.** 1) 36 см². **3.56.** 2) 256π см². **3.57.** 3) 300π см². **3.58.** 1) $30°$. **3.59.** $45°$. **3.60.** 5 см². **3.63.** 1) $l\cos\varphi$; 2) $l\sin\varphi$. **3.64.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}h$. **3.67.** 3) $\frac{r\sqrt{4l^2 - r^2}}{4}$. **3.68.** R^2. **3.69.** $\frac{128}{15}$; $\frac{161}{15}$; $\frac{161}{15}$. **3.70.** 9 см², 16 см².

3.71. $\pi\left[\left(1+\sqrt{2}\right)R^2+\left(1-\sqrt{2}\right)r^2\right]$. **3.72.** $2\pi Q$. **3.73.** $\sqrt{2}\cdot r$. **3.74.** $\frac{25}{16}\pi h^2$.
3.75. 1) $\frac{3\sqrt{39}}{16}l^2$; 2) $\frac{l^2\sqrt{7}}{2}$. **3.81.** $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi Q$. **3.82.** $\cos\varphi=\frac{1}{3}$.

п.3.3. **3.86.** 2) 8π см, 16 см². **3.87.** 3) 49π мм². **3.90.** 6 м. **3.91.** 1) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=49$. **3.92.** 2) $4x-3z-125=0$. **3.93.** 3) $\sqrt{65}$. **3.96.** 5 см. **3.97.** 2) 100π м². **3.101.** 1600π см². **3.102.** 3 : 4. **3.103.** $2\pi R\cos\varphi$. **3.107.** 3) $C(-5; -2; 4)$ — центрі, $R=\sqrt{42}$. **3.108.** ≈113,14 км. **3.109.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$. **3.110.** 8 см. **3.111.** 1) 16; 2) 48. **3.112.** 2) $a=2\sqrt{6}R$. **3.117.** 24 см. **3.118.** 3 : 4.

IV бөлім.

п.4.1. **4.6.** 1) 56 м³. **4.10.** 2) 50 м³. **4.11.** 2) 25 м³. **4.12.** 2) 28800 дм³. **4.13.** 1) 125 мм³. **4.14.** 2) 245 м³. **4.15.** 1) $\frac{112}{3}$ см³. **4.16.** 1) 336 см³. **4.17.** 2) $\frac{9250}{3}$ см³. **4.18.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **4.19.** 3) $\frac{b^3}{3}\sin2\varphi\sin\varphi$. **4.20.** 27 см³. **4.21.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **4.23.** $\frac{\sqrt{2}\cdot10^3}{3}$ см³. **4.37.** 8 : 125. **4.38.** $ad\sin\varphi\sqrt{d^2\cos^2\varphi-a^2}$. **4.39.** $\frac{4V}{\sqrt{S}}$. **4.40.** $a^2b\sin\varphi$. **4.41.** 100 см³. **4.42.** 3060 см³. **4.43.** $\frac{9}{4}R^3$. **4.44.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a\cdot S$. **4.46.** $\frac{4}{3}h^3\mathrm{ctg}^2\varphi$. **4.48.** $48\sqrt{3}$ см³. **4.49.** $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$. **4.51.** 50 күн. **4.58.** $\frac{V\sqrt{S_2^3}}{\sqrt{S_2^3}-\sqrt{S_1^3}}$, $S_2>S_1$. **4.59.** $\frac{a\left(4b^2-a^2\right)}{12}$. **4.60.** $\left(\frac{1}{3}Sh; \frac{4}{3}Sh\right)$. **4.61.** $\frac{2}{3}R^2h$. **4.62.** $\frac{4h^3}{45}$. **4.63.** $15V$.

п.4.2. **4.70.** 1) 45π м³. **4.71.** 2) 400π мм³. **4.72.** 3) 324π мм³, 972π мм³. **4.73.** 2) 175π м³. **4.74.** 1) 32π см³. **4.76.** 3) 73π м³. **4.78.** 2) $\frac{125}{3}\pi$ м³. **4.79.** 266π см³. **4.80.** 2) $\frac{17}{3}\pi$ м³. **4.81.** 3468π см³. **4.83.** $\frac{32000\pi\sqrt{5}}{81}$ см³. **4.85.** $\frac{7}{27}V$. **4.86.** $\frac{\pi^2\left(R^2+r^2\right)\left(R^2+rR+r^2\right)}{3(r+R)}$. **4.87.** $\frac{1125\pi\sqrt{3}}{8}$ см³. **4.88.** $\frac{32\pi r^3}{9}$. **4.89.** ≈140 м. **4.90.** 148 т. **4.91.** $3\sqrt[3]{3}$ мм. **4.92.** $\frac{272\pi}{3}$ см³ және $\frac{1100\pi}{3}$ см³. **4.94.** 4 : 3. **4.95.** $1-\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$. **4.97.** ≈94 м. **4.98.** $\frac{\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{3}R^3$.

п.4.3. **4.100.** $171{,}5\pi$ см³. **4.102.** 1) 54π м³. **4.104.** 2) $\frac{130}{3}\pi$ м³. **4.107.** 2) 13824 см³, $13824\sqrt{3}$ см³. **4.114.** $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\varphi}}{12\sin\frac{\varphi}{2}}$. **4.119.** $\frac{1}{6}R^3\left(1+\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 \mathrm{tg}\varphi\cdot\mathrm{tg}\gamma$. **4.120.** $4:((2-k)k^2)$. **4.121.** 6,25 м. **4.122.** 8 : 3. **4.124.** $8\sqrt{6}\cdot\pi$. **4.125.** $\frac{2}{3}\pi R^2h$.

V бөлім.

5.3. 5,1 м; 8,1 м; 5,1 м. **5.4.** m, $m\sqrt{3}$. **5.5.** $\frac{a-b}{2}$. **5.8.** $\frac{ma}{m+n}$. **5.9.** $3\sqrt{3}$ см. **5.10.** 16 см. **5.11.** $\sqrt{2b(a+b)}$, $\sqrt{2(a+b)(2a+b)}$. **5.18.** $\sqrt{10}$ см. **5.19.** 6 см. **5.30.** $\frac{ac}{a+b}$, $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{bc}{a+b}$. **5.31.** $\frac{\sqrt{a^2\sin\varphi+2ah\cos\varphi+2ah}}{\sqrt{\sin\varphi}}$. **5.32.** $h\cdot\mathrm{ctg}\varphi$. **5.33.** $\frac{ab}{a+b}$. **5.34.** $\frac{a\sin\varphi}{b+a\cos\varphi}$; $\frac{b\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}$. **5.40.** $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{(a+b)l}{2ab}$. **5.41.** 3 см. **5.42.** $4\sqrt{17}$ см. **5.43.** 12 см. **5.44.** 1; 9. **5.45.** $0{,}3\sqrt{5}$. **5.46.** $R(6{,}4;\ -2{,}8;\ 4{,}6)$. **5.47.** 60°. **5.48.** 6 м, 15 м. **5.49.** 6 дм. **5.50.** $\sqrt{28}$. **5.51.** $E(0;\ 1;\ 3)$. **5.52.** 1) $12+16\sqrt{3}$ см². **5.53.** –21. **5.54.** Үштүрлі жағдай үшін жауаптары: $\cos\alpha=-\frac{4}{\sqrt{65}}$; $\cos\alpha=-\frac{9}{\sqrt{130}}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{50}}$; **5.55.** 486 см³. **5.56.** 4 дм. **5.57.** 120 см³. **5.58.** Өлшемдердің үш жағдайы үшін: 400 см²; $96\sqrt{65}$ см²; $112\sqrt{37}$ см². **5.59.** 125 м³. **5.60.** 30 см. **5.61.** $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$. **5.62.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **5.64.** 45°. **5.65.** $2\sqrt[3]{9}$ м. **5.66.** 16π см³. **5.67.** 5 м. **5.68.** $\pi:\sqrt{7}$. **5.69.** $\frac{SR^2}{R^2-r^2}$. **5.70.** 224π м³. **5.71.** $\frac{1}{\pi}\sqrt{Q_3^2-(Q_2-Q_1)^2}$. **5.72.** 4 : 1. **5.73.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **5.74.** 6 : 1. **5.75.** 80 м³. **5.77.** $1:5\sqrt{5}$. **5.79.** $\frac{\pi}{24}\left[(a+b)^2+a^2+b^2-(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}\right]$. **5.80.** $\frac{48\pi}{5}$.

МАЗМҰНЫ

О қ у б а с ы л ы м ы

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Жұмабаев Ринат Нұрланұлы
Мәделханов Сержан Сұңқарұлы

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық

Редакторы ***Ж. Баданова***
Көркемдеуші редакторы ***А. Лукманов***
Техникалық редакторы ***Ү. Рысалиева***
Корректоры ***Е. Аманкелді***
Компьютерде беттеген ***А. Якубова***

ИБ 074

Теруге 25.04.2019 берілді. Басуға 07.07.2020 қол қойылды. Пішімі 60×90 1/16. Офсеттік қағаз. Әріп түрі «мектептік». Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 12,0. Есептік баспа табағы 10,19. Таралымы 13000 дана. Тапсырыс 5173.

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы, Абылай хан даңғылы, 75.

Қазақстан Республикасы «Атамұра» корпорациясы» ЖШС-нің Полиграфкомбинаты. 050002, Алматы қаласы, М. Мақатаев көшесі, 41.

Оглавление

page35
page36
page37
page38
page39
page40
page41
page42
page43
page44
page45
page46
page47
page48
page49
page50
page51
page52
page53
page54
page55
page56
page57
page58
page59
page60
page61
page62
page63

page70
page71
page72
page73
page74
page75
page76
page77
page78
page79
page80
page81
page82
page83
page84
page85
page86
page87
page88
page89
page90
page91
page92
page93
page94
page95
page96
page97
page98

page105
page106
page107
page108
page109
page110
page111
page112
page113
page114
page115
page116
page117
page118
page119
page120
page121
page122
page123
page124
page125
page126
page127
page128
page129
page130
page131
page132
page133

page140
page141
page142
page143
page144
page145
page146
page147
page148
page149
page150
page151
page152
page153
page154
page155
page156
page157
page158
page159
page160
page161
page162
page163
page164
page165
page166
page167
page168

page175
page176
page177
page178
page179
page180
page181
page182
page183
page184
page185
page186
page187
page188
page189
page190
page191
page192