ГЕОМЕТРИЯ

Учебник

11

Естественно-математическое
направление

Условные обозначения:

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— задания для самостоятельного изучения теоретического материала

— конец доказательства теоремы или свойства

A — обязательные упражнения для всех учащихся

B — упражнения средней сложности

C — упражнения повышенной сложности

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник геометрии является продолжением учебника геометрии 10-го класса и предназначен для учащихся 11-х классов естественно-математического направления общеобразовательных школ.

В нем Вы более подробно познакомитесь с основными многогранниками и их свойствами; научитесь применять аналитические методы для нахождения расстояний и углов; познакомитесь с телами вращения — цилиндром, конусом, шаром, и их свойствами; научитесь находить объемы и площади поверхностей пространственных фигур.

Весь материал учебника разбит на главы и параграфы, которые содержат теоретический материал, задания для самостоятельной работы, вопросы для повторения, задачи различного уровня трудности.

Конец доказательства теоремы помечен знаком (□).

Задачи разделены по уровням A, B и C. Задачи уровня A имеют начальный уровень трудности и отвечают за понимание основного материала. Задачи уровня B являются базовыми. Их выполнение свидетельствует об освоении учебного материала данного параграфа. Задачи уровня C имеют повышенный уровень трудности.

Дополнительный материал учебника помечен звездочкой (*).

В конце учебника приведены ответы к задачам.

Желаем успехов в изучении геометрии!

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА

Задачи

Начала стереометрии

1. Сколько прямых проходит через различные пары из: а) трех; б) четырех; в) пяти; г)* n точек в пространстве, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?
2. Сколько плоскостей может проходить через три точки пространства?
3. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из: а) четырех; б) пяти; в)* n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?
4. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство: а) две плоскости; б) три плоскости; в)* четыре плоскости.
5. Докажите, что если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости.
6. Докажите, что через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.
7. Докажите, что через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.
8. Сколько: а) вершин; б) ребер; в) граней имеет куб?
9. Сколько: а) вершин; б) ребер; в) граней имеет параллелепипед?
10. Сколько вершин имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная призма?
11. Может ли призма иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 вершин?
12. Сколько ребер имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная призма?
13. Может ли призма иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 ребер?
14. Сколько граней имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная призма?
15. Может ли призма иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 граней?
16. Какой многоугольник лежит в основании призмы, имеющей: а) 12; б) 15; в) 18 ребер?
17. Сколько вершин имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная пирамида?
18. Может ли пирамида иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 вершин?
19. Сколько ребер имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная пирамида?
20. Может ли пирамида иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 ребер?
21. Сколько граней имеет: а) треугольная; б) четырехугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д) n-угольная пирамида?
22. Может ли пирамида иметь: а) 9; б) 10; в) 12; г) 15 граней?

23. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, имеющей: а) 8; б) 10; в) 12 ребер?

Параллельность в пространстве

24. Сколько пар параллельных ребер имеет: а) куб; б) параллелепипед; в) треугольная призма; г) шестиугольная призма?
25. Докажите, что для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны прямые: а) AB и D_1C_1; б) AD_1 и BC_1.
26. Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны прямые: а) AB и E_1D_1; б) AA_1 и DD_1; в) AC_1 и FD_1.
27. Сколько пар скрещивающихся ребер имеет: а) куб; б) параллелепипед; в) треугольная пирамида; г) шестиугольная пирамида?
28. Как расположены прямые: а) AB_1 и BC_1; б) AA_1 и BD_1; в) AC_1 и BD_1, проходящие через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$?
29. Как расположены прямые: а) AB_1 и CD_1; б) AA_1 и BD_1; в) AC_1 и BF_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$?
30. Докажите, что для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые: а) AA_1 и BD; б) AC_1 и BB_1 скрещиваются.
31. Докажите, что для пирамиды $SABCDEF$ прямые SA и: а) BC; б) CD скрещиваются.
32. Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ прямые: а) AA_1 и BC; б) AC_1 и BD; в) AB и B_1C_1 скрещиваются.
33. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите грани, параллельные прямой: а) AD; б) AB_1.
34. Докажите, что для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ ребро AB параллельно грани SDE.
35. Сколько пар параллельных граней имеет: а) куб; б) параллелепипед; в) треугольная призма; г) шестиугольная призма?
36. Докажите, что у правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны плоскости: а) ABB_1 и EDD_1; б) ACC_1 и FDD_1.

Перпендикулярность в пространстве

37. Сколько пар перпендикулярных ребер имеет: а) правильный тетраэдр; б) куб?
38. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми: а) AB_1 и BC_1; б) AC и BD_1; в) AB_1 и CD_1.
39. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми: а) AA_1 и CD_1; б) AA_1 и BD_1; в) AC и BE_1.

40. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой: а) A_1D_1; б) A_1C_1.

41. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки B до прямой: а) AC_1; б) A_1C_1.

42. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости: а) ACC_1; б) ACB_1.

43. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости: а) ACC_1; б) CDD_1; в) DEE_1; г) DFF_1.

44. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между плоскостями: а) ABB_1 и DEE_1; б) ACC_1 и FDD_1.

45. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. Найдите угол между прямой SB и плоскостью ABC.

46. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2. Найдите угол между прямой SB и плоскостью ABC.

47. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между плоскостями: а) ABB_1 и BCC_1; б) ABB_1 и ACC_1; в) ACC_1 и CDD_1; г) ACC_1 и BEE_1.

48. Найдите косинус двугранного угла, образованного гранями правильного тетраэдра.

49. Найдите косинус двугранного угла, образованного соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1.

Векторы и их свойства

50. Сколько различных векторов задают ребра параллелепипеда?

51. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите длину вектора: а) $\overline{AC_1}$; б) $\overline{AD_1}$.

52. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину вектора: а) $\overline{AB} + \overline{AD_1}$; б) $\overline{AB_1} + \overline{AD_1}$.

53. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выразите вектор $\overline{AC_1}$ через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AA_1}$.

54. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Выразите вектор $\overline{AD_1}$ через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ и $\overline{AA_1}$.

55. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. Найдите угол между векторами $\overline{SA}$ и: а) $\overline{BC}$; б) $\overline{EF}$.

56. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB_1}$ и: а) $\overline{CC_1}$; б) $\overline{CD_1}$; в) $\overline{BC_1}$; г) $\overline{BD_1}$.

57. Вычислите работу, которую производит сила $\overline{F} = \overline{BD_1}$, перемещая объект из вершины C в вершину C_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Координаты

58. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещен в прямоугольную систему координат так, что началом координат является вершина D, ребра DC, DA, DD_1 лежат соответственно на осях абсцисс, ординат, аппликат. Найдите координаты всех вершин куба.

59. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, вершина A — начало координат, отрезки AB, AE, AA_1 лежат соответственно на осях абсцисс, ординат, аппликат. Найдите координаты вершин этой призмы.

60. Найдите расстояние от точки $A(1; 2; 3)$ до координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

61. Напишите уравнение сферы с центром в точке $A(1; 2; 2)$, проходящей через начало координат.

62. Докажите, что уравнение $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 4 = 0$ задает сферу в пространстве. Найдите ее радиус и координаты центра.

63. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(1; 2; 3)$ и $\vec{a}_2(3; -1; 2)$.

64. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами $(1; 0; 0)$, $(0; 2; 0)$, $(0; 0; 3)$.

§ 1. Понятие многогранника. Призма и ее элементы, виды призм. Развертка, площадь боковой и полной поверхностей призмы

Напомним, что *многогранником* называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называемых *гранями* многогранника. При этом требуется, чтобы никакие две соседние грани не лежали в одной плоскости. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно *ребрами* и *вершинами* многогранника.

Многогранники, которые мы до сих пор изучали (куб, параллелепипед, призма, пирамида и др.), были выпуклыми многогранниками.

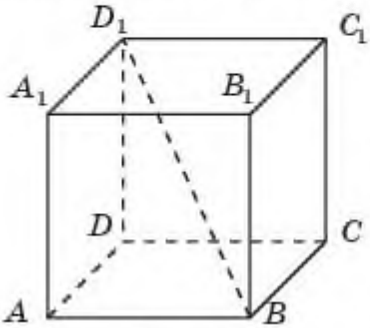
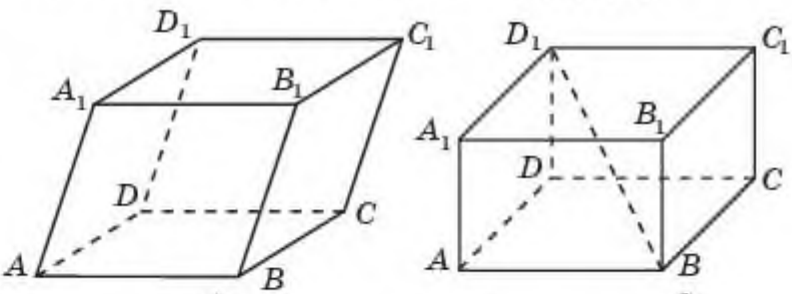


Рис. 1.1

Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис 1.1). Обычно куб обозначают указанием его вершин, например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Куб, ребра которого равны 1, называют *единичным кубом*.

Отрезок, соединяющий вершины куба, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* этого куба. На рисунке 1.1 изображена диагональ BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелепипедом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 1.2, а). Параллелепипед обозначают указанием его вершин, например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



а) б)

Рис. 1.2

Параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется *прямоугольным параллелепипедом* (рис. 1.2, б). В противном случае параллелепипед называется наклонным (рис. 1.2, а).

Отрезок, соединяющий вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* этого параллелепипеда. На рисунке 1.2, б изображена диагональ BD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам

Призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых *основаниями* призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований, называемых *боковыми гранями* призмы. Поверхность, составленная из боковых граней, называется *боковой поверхностью* призмы. Ребра, не лежащие в основаниях призмы, называют *боковыми ребрами*.

Призмы бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Призма называется n-угольной, если ее основаниями являются n-угольники.

Призма обозначается указанием ее вершин, например, треугольная призма обозначается $ABCA_1B_1C_1$, шестиугольная призма обозначается $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

На рисунке 1.3 изображены треугольная и шестиугольная призмы.

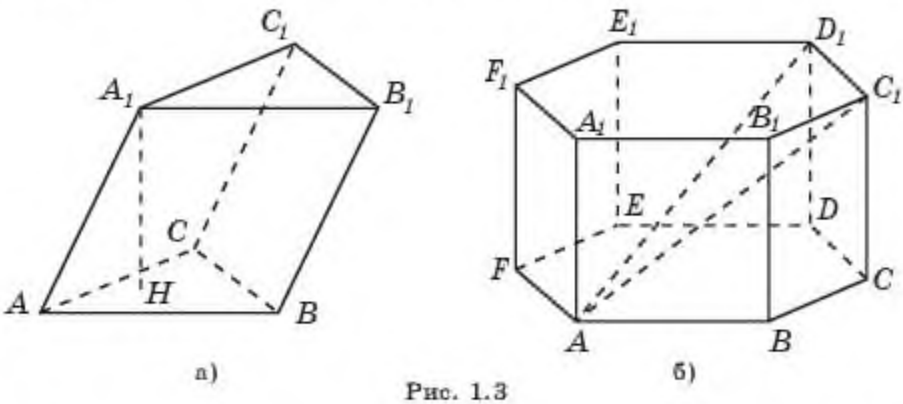


Рис. 1.3

Из определения призмы можно получить следующие ее свойства:

1) боковые ребра равны;

2) основания равны и параллельны.

Докажите эти свойства самостоятельно

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники, называется *прямой*. В противном случае призма называется *наклонной*. На рисунке 1.3, а изображена наклонная треугольная призма. На рисунке 1.3, б изображена прямая шестиугольная призма.

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется *правильной*. На рисунке 1.3, б изображена правильная шестиугольная призма.

Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания призмы на плоскость другого основания, называется *высотой* этой призмы. На рисунке 1.3, а изображена высота A_1H призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Докажите, что высота прямой призмы равна боковому ребру этой призмы.

Отрезок, соединяющий вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* этой призмы. На рисунке 1.3, б изображены диагонали AC_1 и AD_1 призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Как вы думаете, является ли параллелепипед четырехугольной призмой?

Многогранник называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 1.3 изображены выпуклые призмы. На рисунке 1.4 показаны невыпуклая шестиугольная призма (рис. 1.4, а) и невыпуклая шестиугольная пирамида (рис. 1.4, б).

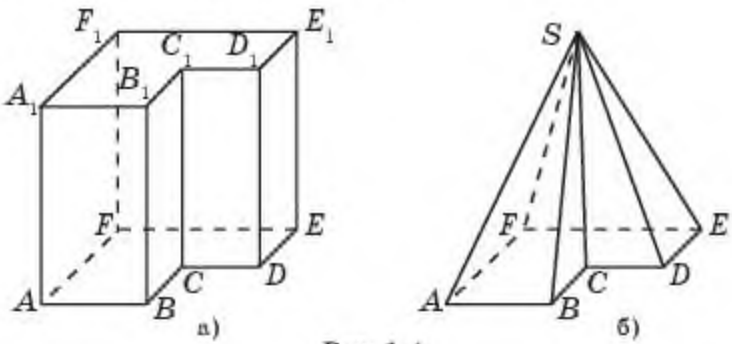


Рис. 1.4

Заметим, что понятие выпуклости может быть определено для произвольных фигур. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 1.5 показаны выпуклые (б, в) и невыпуклые (а, г) плоские фигуры.

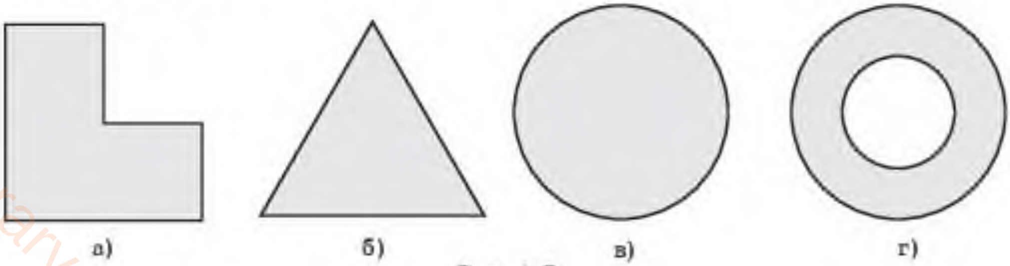


Рис. 1.5

Докажите самостоятельно, что пересечение (общая часть) двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскости так, чтобы все многоугольники, составляющие эту поверхность, лежали в данной плоскости, то получится фигура, называемая *разверткой* многогранника. Например, на рисунке 1.6 изображена развертка куба.

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра.

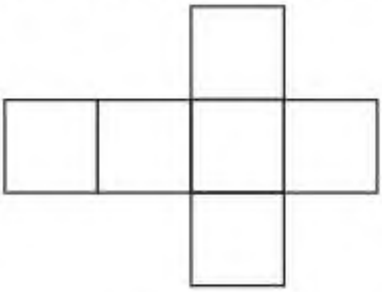


Рис. 1.6

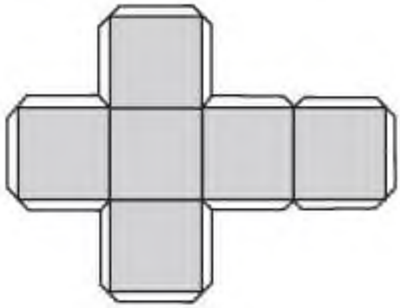


Рис. 1.7

Для удобства развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склеивание. На рисунке 1.7 изображена развертка куба с клапанами.

Для более подробного знакомства и изготовлением многогранников из их разверток рекомендуем книгу: Веннинджер М. Модели многогранников. — М.: Мир, 2004.

Площадью поверхности многогранника, по определению, считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Ясно, что площадь поверхности многогранника равна площади его развертки.

Боковой поверхностью призмы называется поверхность, образованная боковыми гранями этой призмы.

Площадь поверхности призмы равна сумме площадей боковой поверхности и оснований, т.е. имеет место формула:

$$S_{\text{призмы}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Теорема. ***Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.***

Доказательство. По определению $S_{\text{бок}} = S_1 + S_2 + ... + S_n$, где S_1, S_2, ..., S_n — площади боковых граней. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы и $S_1 = a_1h$, $S_2 = a_2h$, ... , $S_n = a_nh$, где

a_1, a_2, ..., a_n — длины сторон основания. Отсюда следует, что боковая поверхность призмы выражается формулой:

$$S_{\text{бок}} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = (a_1 + a_2 + ... + a_n)h = ph,$$

где p — периметр основания призмы.

Напишите формулу площади поверхности куба, ребра которого равны a.

Напишите формулу площади поверхности прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны a, b.

Для моделирования многогранников можно также использовать свободно распространяемую компьютерную программу GeoGebra, которую можно скачать с официального сайта http://geogebra.org.

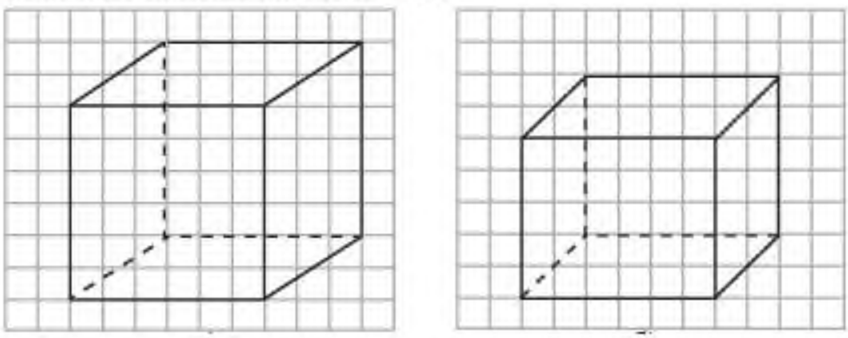
Вопросы

1. Что называется *многогранником*?
2. Какой многогранник называется *кубом*?
3. Что называется диагональю куба?
4. Какой многогранник называется *параллелепипедом*?
5. Что называется *диагональю параллелепипеда*?
6. Какой многогранник называется *призмой*?
7. Какая призма называется *правильной*?
8. Что называется *высотой призмы*?
9. Что называется *диагональю призмы*?
10. Какой многогранник называется *выпуклым*?
11. Что называется *разверткой многогранника*?
12. Что называется *площадью поверхности многогранника*?
13. Как находится площадь поверхности призмы?

Задачи

А

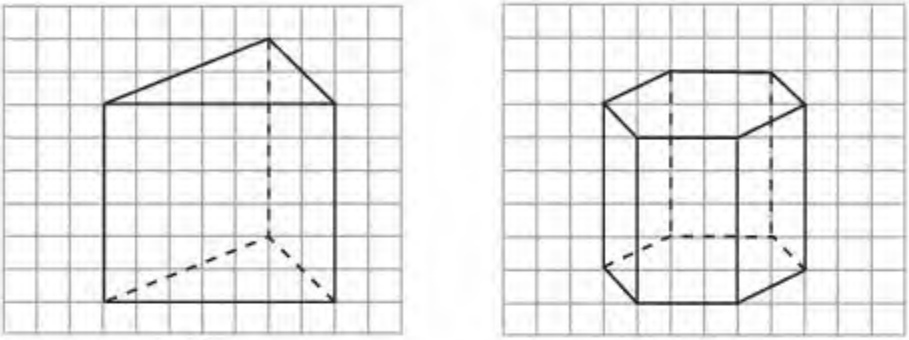
1.1. На листе бумаги в клетку изобразите куб и параллелепипед, аналогичные данным на рисунке 1.8.



а) б)

Рис. 1.8

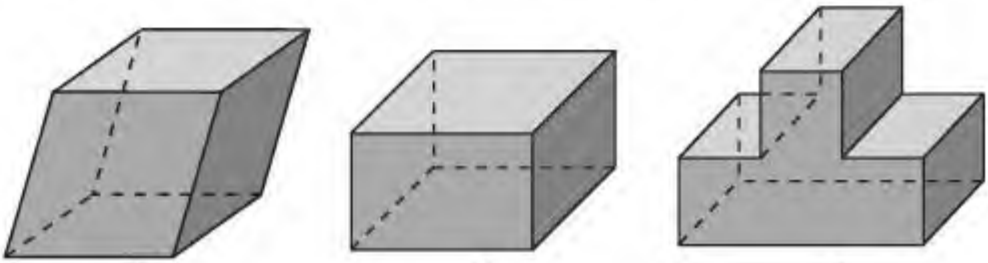
1.2. На листе бумаги в клетку изобразите призмы, аналогичные данным на рисунке 1.9.



а) б)

Рис. 1.9

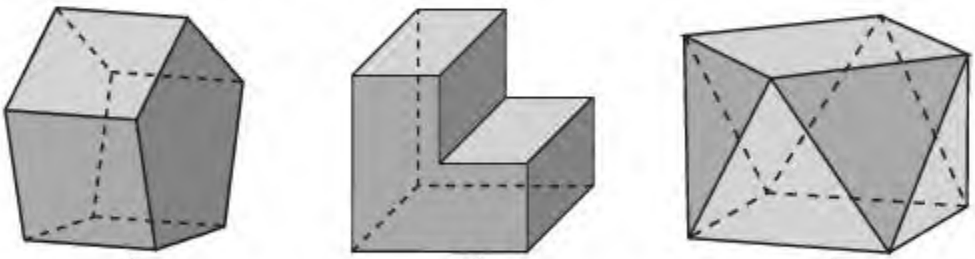
1.3. На рисунке 1.10 укажите параллелепипеды.



а) б) в)

Рис. 1.10

1.4. На рисунке 1.11 укажите призмы.



а) б) в)

Рис. 1.11

1.5. На рисунке 1.12 найдите фигуры, которые являются развертками призм. Определите вид этих призм.

1.6. Найдите диагональ куба, ребра которого равны 1.

1.7. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 2, 3, 4.

1.8. Боковое ребро призмы равно 2 и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите высоту этой призмы.

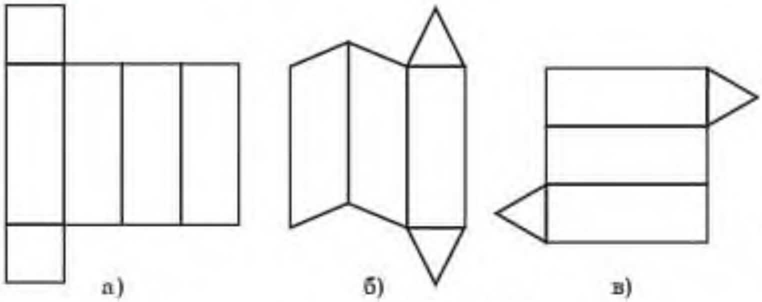


Рис. 1.12

1.9. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его ребра увеличить в 3 раза?

1.10. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если все его ребра уменьшить в 2 раза?

1.11. Во сколько раз увеличится площадь поверхности призмы, если все ее ребра увеличить в два раза?

1.12. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны 5, 4, 3.

1.13. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы, ребра которой равны 1 (рис. 1.13).

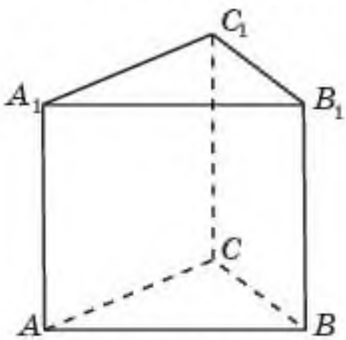


Рис. 1.13

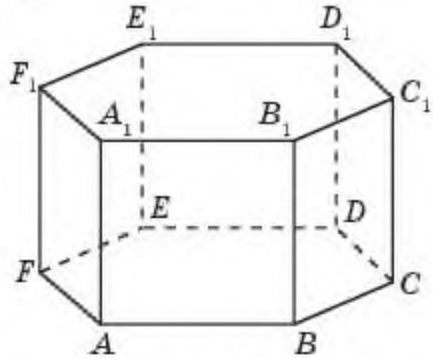


Рис. 1.14

1.14. Найдите площадь поверхности правильной шестиугольной призмы, ребра которой равны 1 (рис. 1.14).

B

1.15. Какие из изображенных на рисунке 1.15 фигур являются развертками куба?

1.16. Диагональ куба равна 1. Найдите ребра этого куба.

1.17. Нарисуйте развертку правильной шестиугольной призмы.

1.18. Найдите диагонали правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1.

1.19. Стороны основания правильной шестиугольной призмы равны 1. Ее большая диагональ равна 3. Найдите высоту этой призмы.

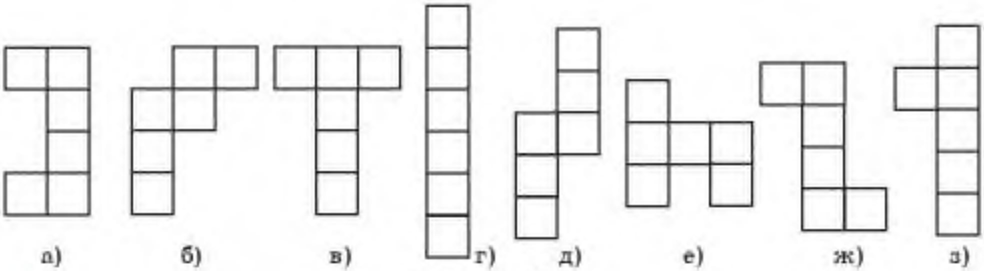


Рис. 1.15

1.20. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2. Каким должно быть третье ребро, выходящее из той же вершины, чтобы площадь поверхности этого параллелепипеда равнялась 40?

1.21. Найдите площади поверхностей деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 1.16.

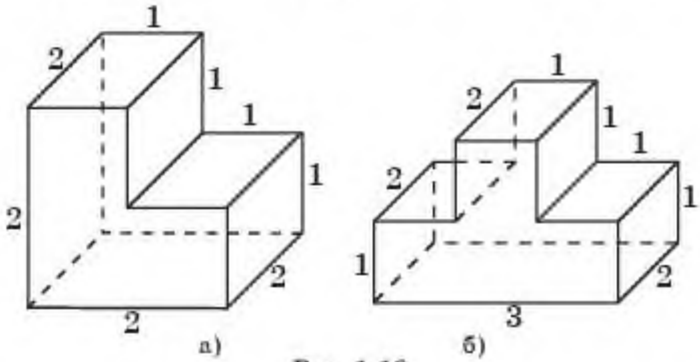


Рис. 1.16

1.22. Найдите площади поверхностей деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 1.17.

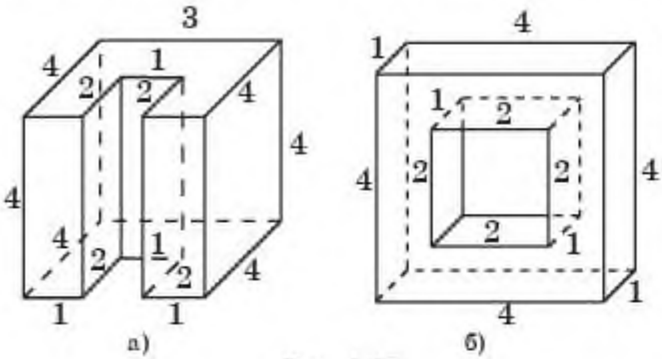
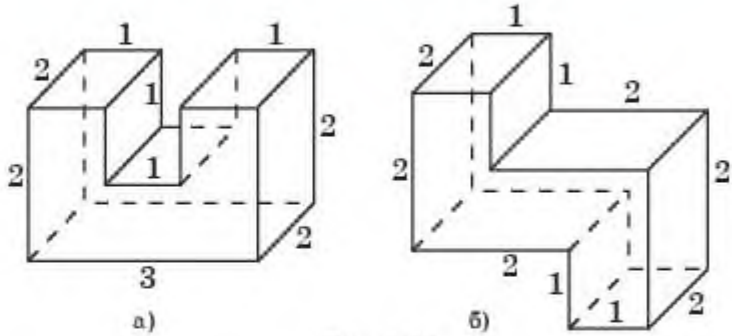


Рис. 1.17

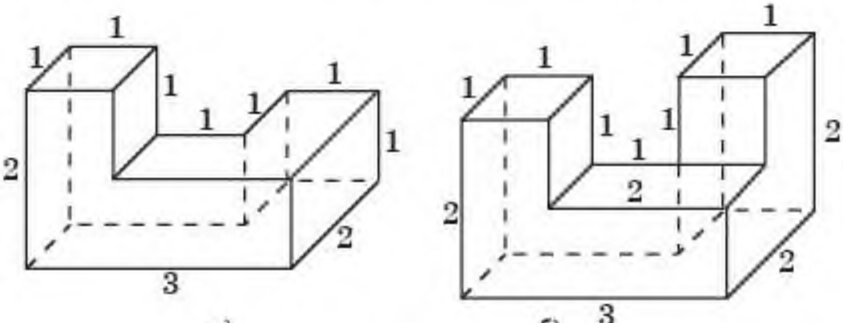
1.23. Найдите площади поверхностей деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 1.18.



а)　　б)

Рис. 1.18

1.24. Найдите площади поверхностей деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 1.19.



а)　　б)

Рис. 1.19

1.25. Чему равна площадь поверхности детали в форме пространственного креста (рис. 1.20), если ребра образующих его кубов равны единице?

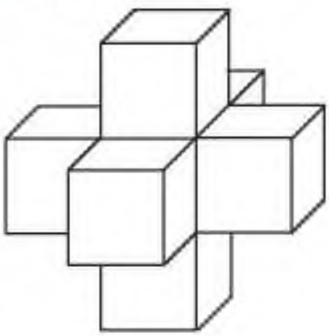


Рис. 1.20

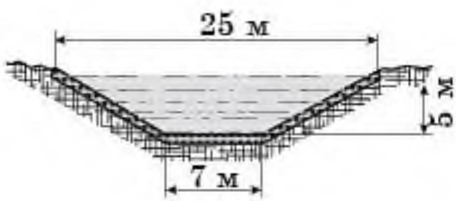


Рис. 1.21

1.26. На рисунке 1.21 изображено поперечное сечение канала. Дно и стенки канала забетонированы. Какую площадь нужно покрыть бетоном на каждый километр канала?

C

1.27. На рисунке 1.22 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.

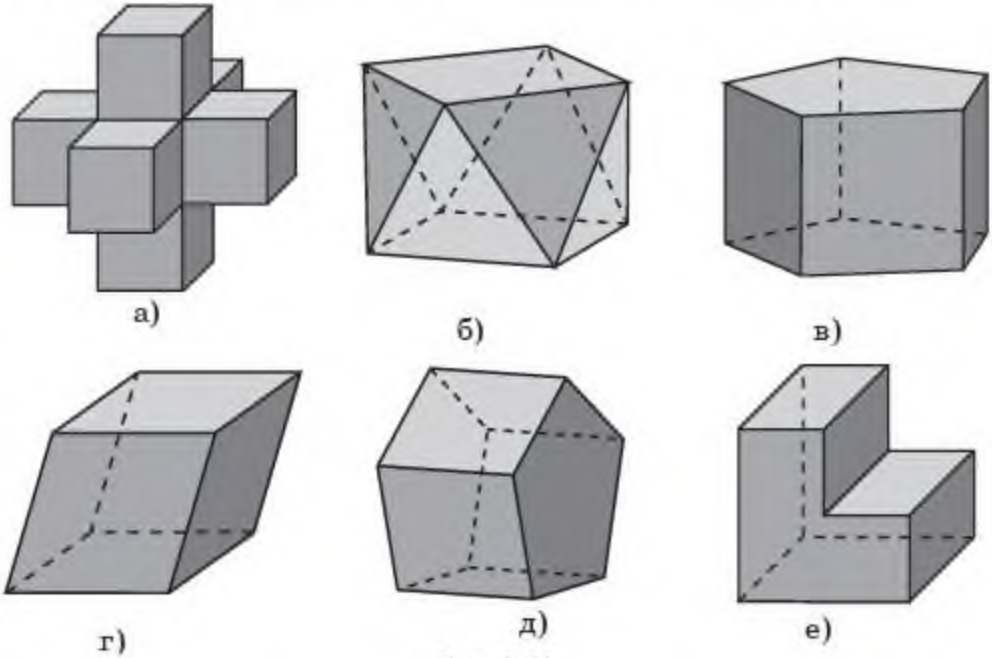


Рис. 1.22

1.28. В каждой грани куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см (рис. 1.23). Найдите площадь поверхности оставшейся части.

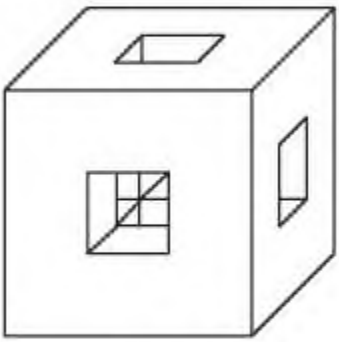


Рис. 1.23

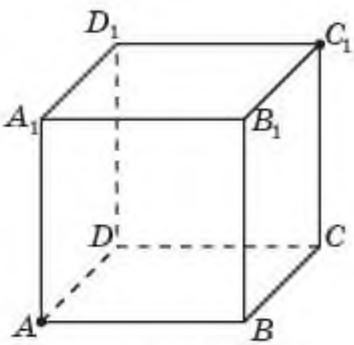


Рис. 1.24

1.29. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба (рис. 1.24) из одной его вершины в противолежащую вершину.

1.30. Может ли невыпуклый многоугольник быть гранью выпуклого многогранника?

1.31. Всегда ли объединение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

1.32. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

1.33. Докажите, что если гранями многогранника являются только треугольники, то утроенное число граней равно удвоенному числу ребер. Сколько граней у такого многогранника, если число ребер равно 6? Приведите пример такого многогранника.

1.34. Докажите, что если гранями многогранника являются только четырехугольники, то учетверенное число граней равно удвоенному числу ребер. Сколько ребер у такого многогранника, если число граней равно 6? Приведите пример такого многогранника.

1.35. Докажите, что если из каждой вершины многогранника выходит три ребра, то утроенное число вершин равно удвоенному числу ребер. Сколько вершин у такого многогранника, если число ребер равно 15? Приведите пример такого многогранника.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

1.36. Попробуйте определить понятие пирамиды. Из каких многоугольников состоит ее поверхность?

§ 2. Пирамида и усеченная пирамида. Развертка, площадь боковой и полной поверхности пирамиды и усеченной пирамиды

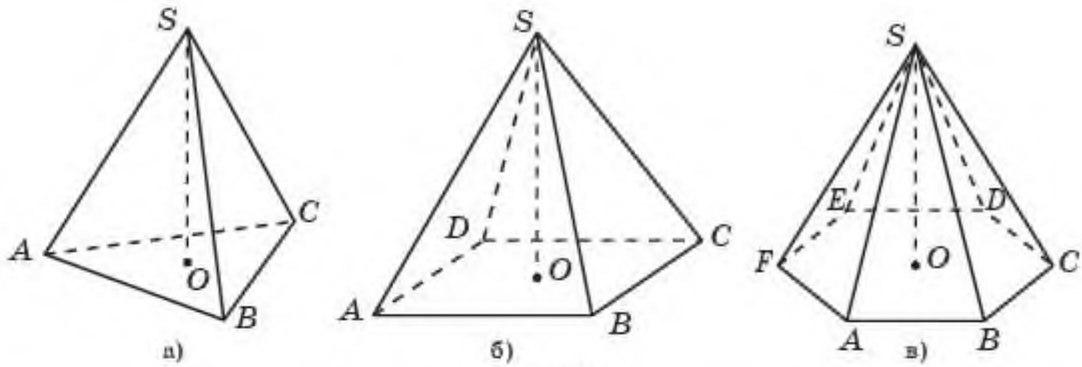
Пирамидой называется многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого *основанием* пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых *боковыми гранями* пирамиды. Общая вершина боковых граней называется *вершиной* пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называют *боковыми ребрами*. Высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, называется *апофемой*.

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Пирамида называется n-угольной, если ее основанием является n-угольник.

На рисунке 2.1 изображены треугольная $SABC$ (рис. 2.1, а), четырехугольная $SABCD$ (рис. 2.1, б) и шестиугольная $SABCDEF$ пирамиды (рис. 2.1, а).

Пирамиду обозначают указанием ее вершин, например, треугольная пирамида обозначается $SABC$, четырехугольная пирамида обозначается $SABCD$, шестиугольная пирамида обозначается $SABCDEF$. Причем, на первом месте указывается ее вершина.



а) б) в)

Рис. 2.1

Пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник и все боковые ребра которой равны, называется *правильной*.

Как вы думаете, является ли тетраэдр треугольной пирамидой?

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания, называется *высотой* этой пирамиды. На рисунке 2.1 изображена высота SO пирамиды.

На рисунке 2.2 изображена развертка правильной шестиугольной пирамиды.

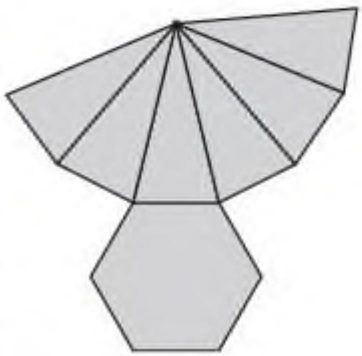


Рис. 2.2

Боковой поверхностью пирамиды называется поверхность, образованная боковыми гранями этой пирамиды.

Теорема. ***Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на длину апофемы пирамиды, т.е. имеет место формула:***

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}pl,$$

где l — апофема (высота боковой грани, опущенной из вершины пирамиды), а p — периметр основания пирамиды.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Площадь поверхности пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и основания, т.е. имеет место формула:

$$S_{\text{пирамиды}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

Для данной пирамиды рассмотрим плоскость, параллельную плоскости основания этой пирамиды и пересекающей ее боковые ребра.

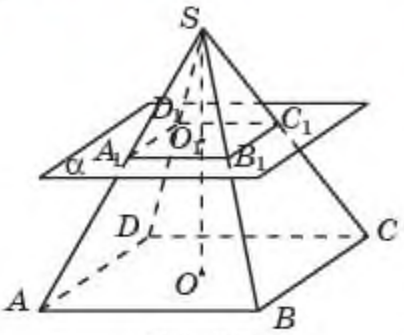


Рис. 2.3

Часть пирамиды, заключенная между этой плоскостью и плоскостью основания, называется *усеченной пирамидой* (рис. 2.3).

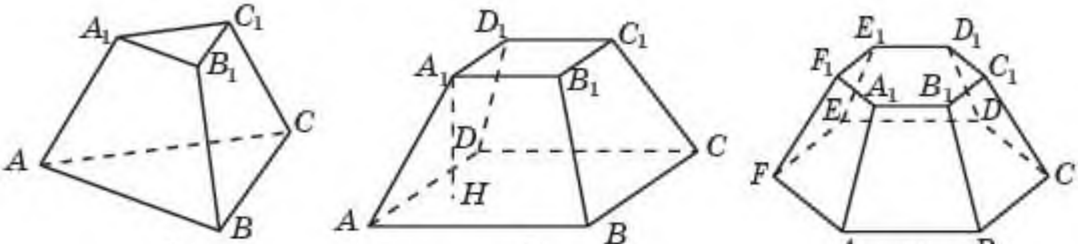
Основание исходной пирамиды и многоугольник, получающийся в сечении данной пирамиды плоскостью, называются *основаниями* усеченной пирамиды.

Усеченная пирамида обозначается указанием вершин ее оснований, например, четырехугольная усеченная пирамида, изображенная на рисунке 2.3, обозначается $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Часть боковых граней пирамиды, содержащихся в усеченной пирамиде, называются *боковыми гранями* усеченной пирамиды.

Часть боковых ребер пирамиды, содержащихся в усеченной пирамиде, называются *боковыми ребрами* усеченной пирамиды.

Усеченные пирамиды бывают треугольные (рис. 2.4, а), четырехугольные, (рис. 2.4, б), шестиугольные, (рис. 2.4, в) и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях.



а) б) в)

Рис. 2.4

Усеченная пирамида, полученная из правильной пирамиды, называется *правильной*.

Перпендикуляр, опущенный из вершины одного основания усеченной пирамиды на плоскость другого основания, называется *высотой* этой усеченной пирамиды. На рисунке 2.4, б изображена высота A_1H усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Развертка усеченной пирамиды состоит из двух подобных многоугольников — оснований усеченной пирамиды, и трапеций — боковых граней усеченной пирамиды.

Боковой поверхностью усеченной пирамиды называется поверхность, образованная боковыми гранями этой усеченной пирамиды.

Теорема. ***Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на длину апофемы, т.е. имеет место формула*:**

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(p + p_1)l,$$

где p и p_1 — периметры оснований усеченной пирамиды, а l — ее апофема. □

Докажите эту теорему самостоятельно.

Площадь поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и оснований, т.е. имеет место формула

$$S_{\text{усеченной пирамиды}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2}.$$

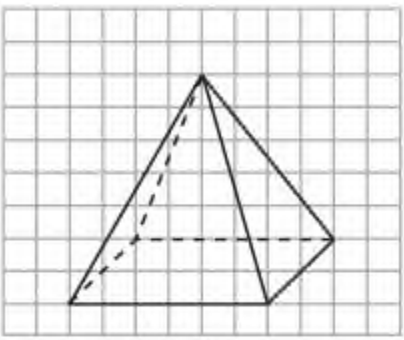
Вопросы

1. Какой многогранник называется *пирамидой*?
2. Какая пирамида называется *правильной*?
3. Что называется *высотой пирамиды*?
4. Какой многогранник называется *усеченной пирамидой*?
5. Какая усеченная пирамида называется *правильной*?
6. Что называется *высотой усеченной пирамиды*?
7. Как находится площадь поверхности пирамиды?
8. Как находится площадь поверхности усеченной пирамиды?

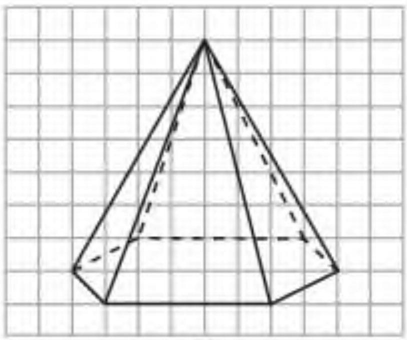
Задачи

А

2.1. На листе бумаги в клетку изобразите пирамиды, аналогичные данным на рисунке 2.5.



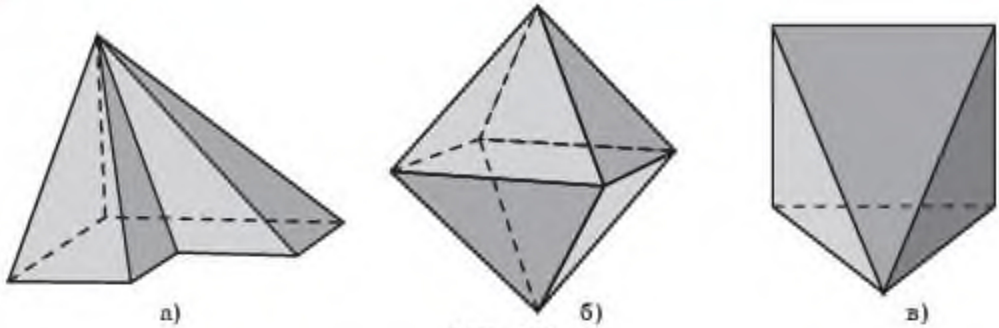
а)



б)

Рис. 2.5

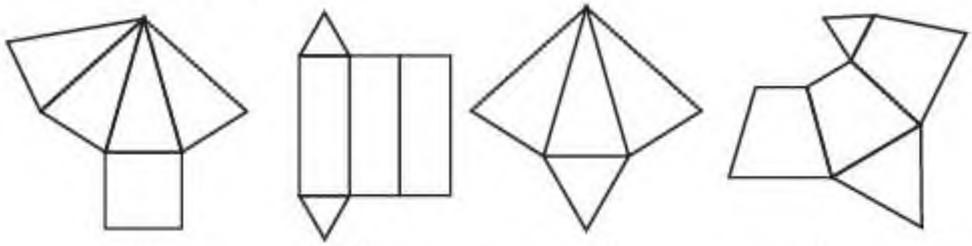
2.2. На рисунке 2.6 укажите пирамиды.



а) б) в)

Рис. 2.6

2.3. Среди данных на рисунке 2.7 разверток найдите развертки пирамид. Выясните их вид.



а) б) в) г)

Рис. 2.7

Рис. 2.8

2.4. Разверткой какого многогранника может служить фигура, изображенная на рисунке 2.8?

2.5. Нарисуйте развертку правильной четырехугольной пирамиды.

2.6. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1.

2.7. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 (рис. 2.9).

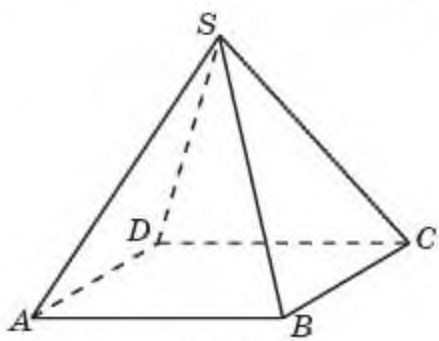


Рис. 2.9

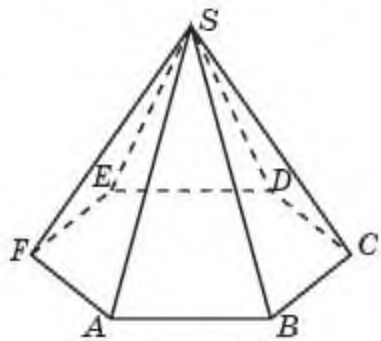


Рис. 2.10

2.8. Найдите площадь поверхности правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2 (рис. рис. 2.10).

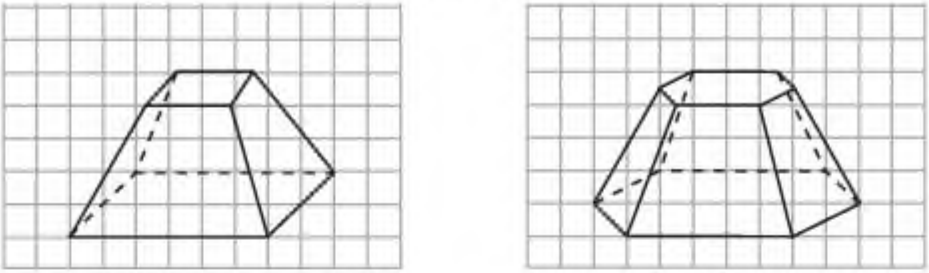
B

2.9. Найдите высоту правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2.

2.10. Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в два раза?

2.11. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра уменьшить в три раза?

2.12. На листе бумаги в клетку изобразите усеченные пирамиды, аналогичные данным на рисунке 2.11.



а) б)

Рис. 2.11

2.13. Нарисуйте развертку правильной четырехугольной усеченной пирамиды.

C

2.14. Нарисуйте развертку правильной шестиугольной усеченной пирамиды.

2.15. Найдите высоту правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 4 и 2, а боковые ребра равны 3.

2.16. Найдите боковые ребра правильной шестиугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 2 и 1, а высота равна 3.

2.17. Дворец мира и согласия в Нур-Султане (рис. 2.12) имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания и высота которой равны 62 м. Найдите площадь боковой поверхности Дворца.

Рис. 2.12

Рис. 2.13

2.18. Пирамида Хеопса в Египте — правильная четырехугольная пирамида, высота которой около 140 м, а площадь основания 5,3 га (рис. 2.13). Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

2.19. Найдите площадь поверхности детали в форме правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 1 и 2, а боковые ребра равны 1 (рис. 2.14).

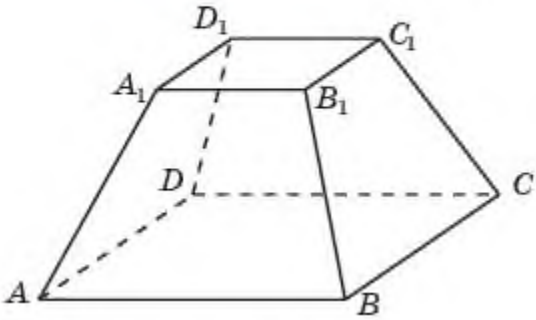


Рис. 2.14

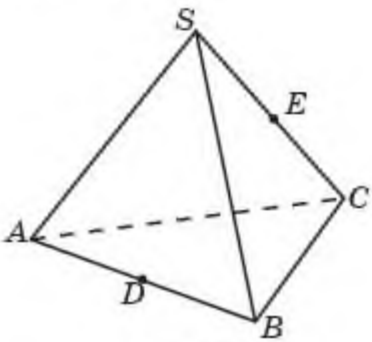


Рис. 2.15

2.20. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной пирамиды $SABC$ (рис. 2.15), соединяющего середины ребер AB и SC.

2.21. На рисунке 2.16 изображен бункер, поверхность основной части которого представляет боковую поверхность правильной четырехугольной усеченной пирамиды. По размерам, указанным на рисунке (в см), вычислите, сколько квадратных дециметров листового железа нужно для изготовления бункера (не считая рукавов A и B).

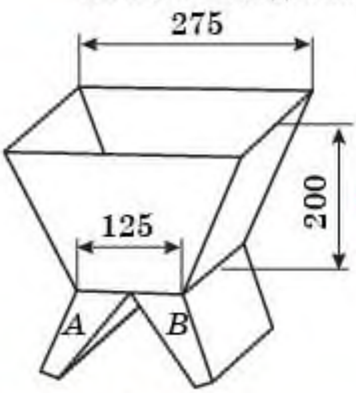


Рис. 2.16

2.22. Докажите, что если из каждой вершины многогранника выходит четыре ребра, то учетверенное число вершин равно удвоенному числу ребер. Сколько ребер у такого многогранника, если число вершин равно 6? Приведите пример такого многогранника.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

2.23. Повторите определение многоугольника на плоскости и теорему о сумме углов выпуклого многоугольника.

§ 3. Многогранные углы

По аналогии с понятием многоугольника на плоскости определим понятия многогранной поверхности и многогранного угла в пространстве.

Многогранной поверхностью будем называть поверхность, образованную конечным набором плоских углов A_1SA_2, A_2SA_3, ..., $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 с общей вершиной S, в которых соседние углы не имеют общий точек, кроме точек общей стороны, а несоседние углы не имеют общих точек, кроме общей вершины (рис. 3.1).

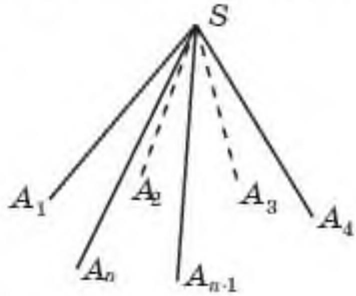
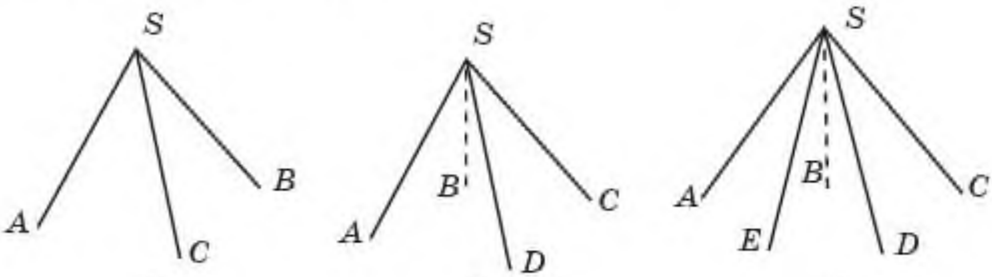


Рис. 3.1

Фигура, образованная многогранной поверхностью и одной из двух частей пространства, ею ограниченных, называется *многогранным углом*. Общая вершина S плоских углов называется *вершиной* многогранного угла. Лучи SA_1, ..., SA_n называются *ребрами* многогранного угла, а сами плоские углы A_1SA_2, A_2SA_3, ..., $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 — *гранями* многогранного угла.

Многогранный угол обозначается буквами $SA_1...A_n$, указывающими вершину и точки на его ребрах.

В зависимости от числа граней многогранные углы называются трехгранными (рис. 3.2, а), четырехгранными (рис. 3.2, б), пятигранными (рис. 3.2, в) и т. д.



а) б) в)

Рис. 3.2

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 3.3 приведены примеры выпуклого (рис. 3.3, а) и невыпуклого (рис. 3.3, б) многогранных углов.

Для плоских углов трехгранного угла имеет место неравенство, аналогичное неравенству треугольника.

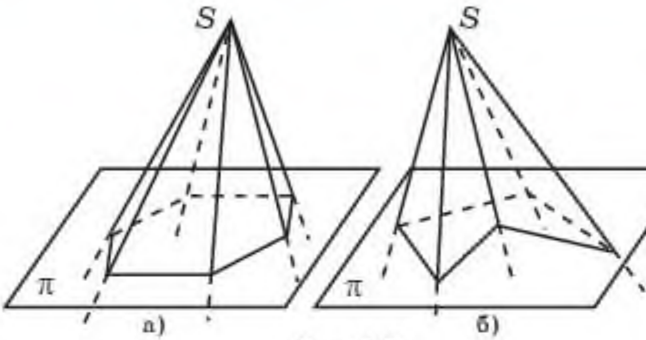


Рис. 3.3

Теорема 1. ***Всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.***

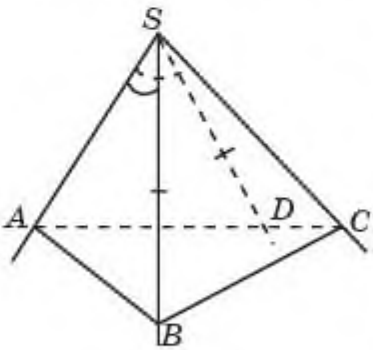


Рис. 3.4

Доказательство. Пусть в трехгранном угле $SABC$ наибольшим из плоских углов является угол ASC (рис. 3.4). Тогда выполняются неравенства:

$$\angle ASB \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC;$$
$$\angle BSC \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB.$$

Таким образом, остается доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD, равный углу ASB, и точку D выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $AB = AD$. Рассмотрим треугольник ABC и воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих частей неравенства $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$.

В треугольниках DSC и BSC сторона SC общая, $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный углу ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

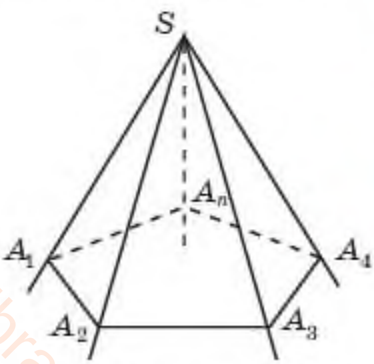


Рис. 3.5

Самостоятельно докажите, что всякий плоский угол трехгранного угла больше разности двух других его плоских углов.

Теорема 2. ***Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.***

Доказательство. Рассмотрим выпуклый многогранный угол $SA_1...A_n$ (рис. 3.5). Выберем точки $A_1, ..., A_n$ так, чтобы они принадлежали одной плоскости и применим теорему о сумме плоских углов к трехгранным углам с вершинами в этих точках. Получим неравенства

$$\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2S + \angle SA_2A_3, ..., \angle A_nA_1A_2 < \angle A_nA_1S + \angle SA_1A_2.$$

Сложим почленно эти неравенства. В левой части получим сумму углов выпуклого n-угольника $A_1...A_n$, которая равна $180^\circ(n-2)$, а в правой части — сумму углов n треугольников $A_1A_2S, ..., A_nA_1S$, кроме углов при вершине S. Обозначим сумму этих последних углов $\sum$. Тогда $180^\circ(n-2) < 180^\circ n - \sum$, Следовательно, $\sum < 180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$. □

Приведите пример многогранного угла, у которого сумма плоских углов больше 360°.

Теорема 3. ***Сумма двугранных углов трехгранного угла больше*** **180°.**

Доказательство. Пусть $SABC$ — трехгранный угол. Выберем какую-нибудь точку P внутри него и опустим из нее перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на грани данного трехгранного угла (рис. 3.6). Плоские углы B_1PC_1, A_1PC_1, A_1PB_1 дополняют соответствующие двугранные углы с ребрами SA, SB, SC до 180°. Следовательно, сумма этих двугранных углов равна $540^\circ - (\angle B_1PC_1 + \angle A_1PC_1 + \angle A_1PB_1)$. Учитывая, что сумма плоских углов трехгранного угла с вершиной P меньше 360°, получаем, что сумма двугранных углов исходного трехгранного угла больше 180°. □

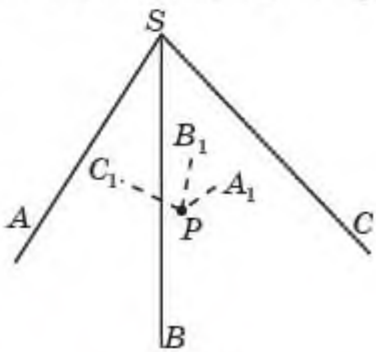


Рис. 3.6

Вопросы

1. Что называется *многогранной поверхностью*?
2. Что называется *многогранным углом*?
3. Как обозначается многогранный угол?
4. Сформулируйте теорему о плоских углах трехгранного угла.
5. Какая фигура называется *выпуклой*?
6. Какой многогранный угол называется *выпуклым*?
7. Сформулируйте теорему о плоских углах выпуклого многогранного угла.
8. Сформулируйте теорему о двугранных углах трехгранного угла.

Задачи

A

3.1. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами: а) 20°, 60°, 30°; б) 40°, 40°, 80°; в) 60°, 45°, 30°?

3.2. Приведите пример многогранника, у которого имеются только трехгранные углы.

3.3. Приведите пример многогранника, у которого есть: а) четырехгранный; б) пятигранный; в) шестигранный угол.

3.4. Определите вид многогранных углов: а) n-угольной призмы; б) n-угольной пирамиды.

B

3.5. Два плоских угла трехгранного угла равны 70° и 80°. В каких границах находится третий плоский угол?

3.6. Найдите сумму плоских углов трехгранного угла: а) правильной треугольной призмы; б) правильной четырехугольной призмы; в) правильной шестиугольной призмы (рис. 3.7).

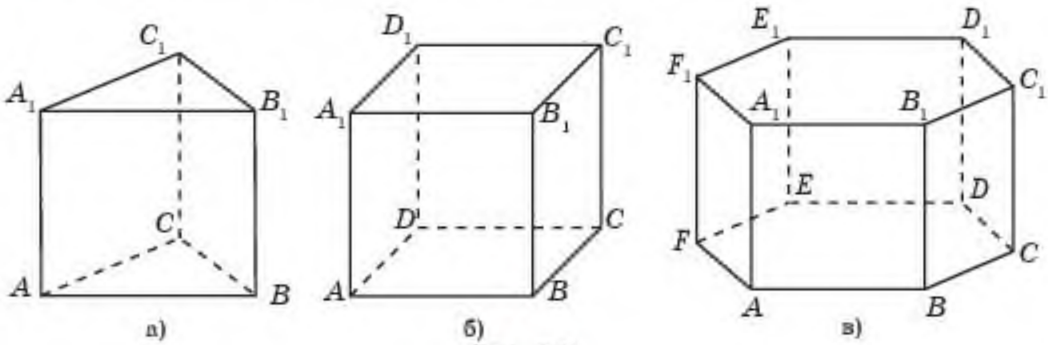


Рис. 3.7

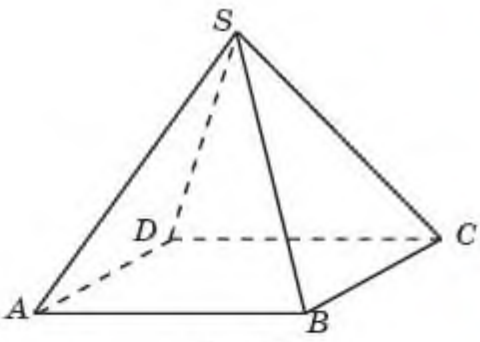


Рис. 3.8

3.7. У правильной четырехугольной пирамиды (рис. 3.8) все ребра равны 1. Найдите сумму плоских углов: а) трехгранного угла пирамиды; б) четырехгранного угла пирамиды.

C

3.8. Докажите, что если в трехгранном угле два плоских угла прямые, то и противолежащие им двугранные углы прямые.

3.9. Докажите, что всякий плоский угол четырехгранного угла меньше суммы трех других его плоских углов.

3.10. Существует ли выпуклый четырехгранный угол, имеющий плоские углы: а) 80°, 130°, 70°, 100°; б) 20°, 40°, 80°, 160°?

3.11. Докажите, что сумма двугранных углов выпуклого n-гранного угла больше $180^\circ(n-2)$.

3.12. Существует ли выпуклый четырехгранный угол, имеющий двугранные углы равные 90°, 90°, 90°, 90°?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

3.13. Проверьте, что для числа вершин (В), ребер (Р) и граней (Г): а) параллелепипеда; б) призмы; в) пирамиды выполняется равенство В − Р + Г = 2.

§ 4*. Теорема Эйлера

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В — число вершин, Р — число ребер, Г — число граней многогранника.

Таблица 1

Название многогранника	В	Р	Г
Параллелепипед	8	12	6
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В − Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. ***Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство***

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2,$$

где В — число вершин, Р — число ребер, Г — число граней данного многогранника.

Доказательство. Представим поверхность данного многогранника, сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим сетку, содержащую В вершин, Р ребер и Г областей, на которые эта сетка разбивает плоскость.

Докажем, что В − Р + Г этой сетки не изменится, если какое-нибудь ее ребро, имеющее две вершины, стянуть по этому ребру в одну из его вершин.

В качестве примера рассмотрим сетку, изображенную на рисунке 4.1, получающуюся, если указанную операцию проделать с кубом. Для нее В = 8, Р = 12, Г = 6.

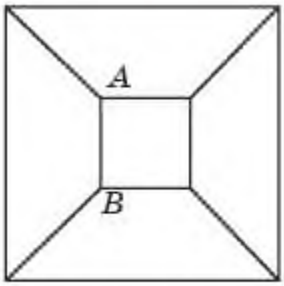


Рис. 4.1

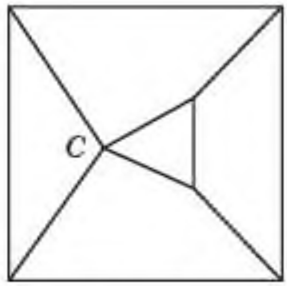
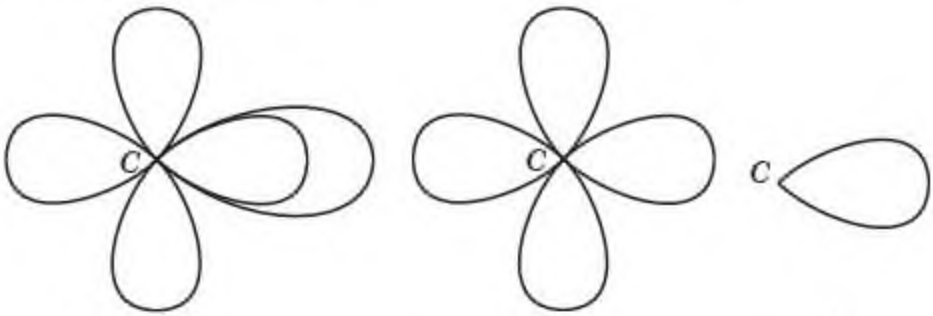


Рис. 4.2

Стягиванием ребра AB в точку получается сетка, изображенная на рисунке 4.2. В результате число вершин В уменьшится на единицу, число ребер Р уменьшится на единицу, а число областей не изменится. Следовательно, не изменится и В − Р + Г.

Пользуясь этим свойством, стянем все ребра, имеющие две вершины. Получим сетку, у которой одна вершина, а ребрами являются петли с этой вершиной (рис. 4.3, а).



а) б) в)

Рис. 4.3

Причем, для этой сетки В − Р + Г останется таким же, как и для исходной.

Докажем, что В − Р + Г не изменится, если убрать какую-нибудь петлю полученной сетки. Действительно, в этом случае число вершин В не изменится (оно равно 1), число ребер Р уменьшится на единицу, число областей уменьшится на единицу (рис. 4.3, б). Следовательно, не изменится и В − Р + Г.

Пользуясь этим свойством, уберем все петли, кроме одной. Получим сетку, у которой одна вершина и одно ребро — петля с этой вершиной (рис. 4.3, в).

Для этой сетки В = 1, Р = 1, Г = 2, т. е. В – Р + Г = 2. Значит, это равенство имеет место и для исходного многогранника.

Как вы думаете, выполняется ли равенство Эйлера для: а) невыпуклой призмы; б) невыпуклой пирамиды?

Пример. Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдется или треугольная грань, или трехгранный угол, причем число треугольных граней плюс число трехгранных углов больше или равно восьми.

Решение. Обозначим через $В_i$ число вершин выпуклого многогранника, в которых сходится i ребер. Тогда для общего числа вершин В имеет место равенство $В = В_3 + В_4 + В_5 + \dots$. Аналогично, обозначим через $Г_i$ число граней выпуклого многогранника, у которых имеется i ребер. Тогда для общего числа граней Г имеет место равенство $Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + \dots$. Имеем:

$$3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \dots = 2Р,\ 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \dots = 2Р.$$

По теореме Эйлера выполняется равенство $4В - 4Р + 4Г = 8$. Подставляя вместо В, Р и Г их выражения, получим $4В_3 + 4В_4 + 4В_5 + \dots - (3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \dots) - (3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \dots) + 4Г_3 + 4Г_4 + 4Г_5 + \dots = 8$. Следовательно, $В_3 + Г_3 = 8 + В_5 + \dots + Г_5 + \dots$. Значит, число треугольных граней плюс число трехгранных углов больше или равно восьми.

Исторические сведения

Леонард Эйлер (1707—1783) — один из величайших математиков мира, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики.

Научное наследие ученого огромно. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причем последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжелый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчеты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю.

Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский ученый П.С. Лаплас сказал: “Читайте Эйлера, он — учитель всех нас”.

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой *топологии* — раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек. Такие свойства называются топологическими.

Соотношение Эйлера В – Р + Г = 2 для выпуклых многогранников описывает как раз такое топологическое свойство. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, однако их число, следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

Заметим, что при доказательстве соотношения Эйлера мы уже использовали подобные деформации, когда поверхность многогранника с вырезанной одной гранью растягивали на плоскости. Ребра и сами многоугольники могут быть искривлены, но это не влияет на соотношение Эйлера.

Для знакомства с жизнью и творчеством Леонардо Эйлера рекомендуем книгу: Тиле Р. Леонард Эйлер. — Киев: Вища школа, 1983.

Вопросы

1. Чему равно число вершин, ребер и граней: а) n-угольной призмы; б) n-угольной пирамиды?
2. Сформулируйте теорему Эйлера.
3. Когда она была доказана?
4. Что изучает *топология*?

Задачи

А

4.1. У выпуклого многогранника 6 вершин и 12 ребер. Сколько у него граней?

4.2. У выпуклого многогранника 8 вершин и 6 граней. Сколько у него ребер?

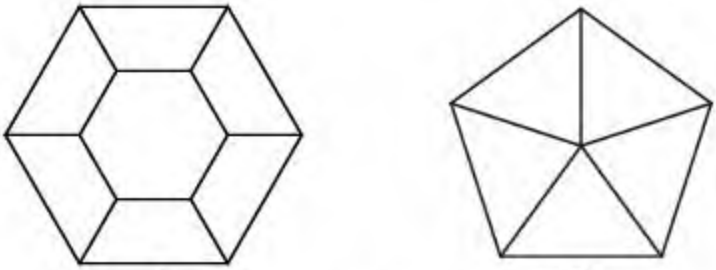
4.3. У выпуклого многогранника 9 ребер и 5 граней. Сколько у него вершин?

В

4.4. В модели треугольной призмы, сделанной из эластичного материала, вырезали одно основание, и оставшиеся грани растянули на плоскости. Сделайте рисунок получившейся сетки.

4.5. В модели четырехугольной пирамиды, сделанной из эластичного материала, вырезали основание, и оставшиеся грани растянули на плоскости. Сделайте рисунок получившейся сетки.

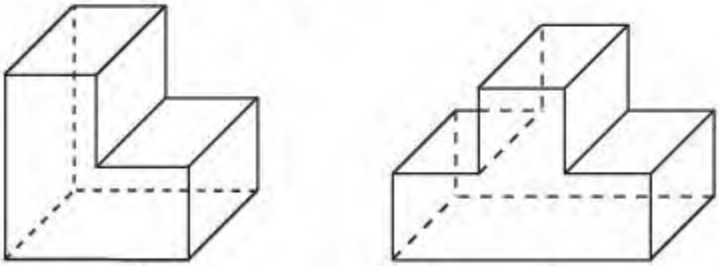
4.6. Для сеток, изображенных на рисунке 4.4, укажите соответствующий многогранник.



а) б)

Рис. 4.4

4.7. Проверьте, выполняется ли равенство Эйлера для многогранников, изображенных на рисунке 4.5.



а) б)

Рис. 4.5

С

4.8. Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой призмы?

4.9. Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой пирамиды?

4.10. Найдите число вершин, ребер и граней для многогранника, изображенного на рисунке 4.6. Выполняется ли для него соотношение Эйлера?

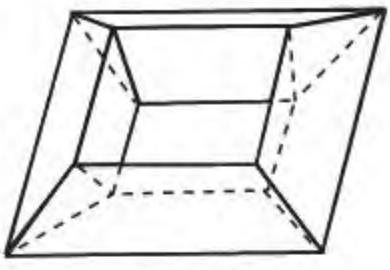


Рис. 4.6

Рис. 4.7

4.11. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится квадрат и четыре треугольника (рис. 4.7). Найдите число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) этого многогранника.

4.12. Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдется треугольная, или четырехугольная, или пятиугольная грань.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

4.13. Повторите определение правильного многоугольника. Попробуйте дать определение правильного многогранника.

§ 5. Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные между собой правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Выясним, сколько и каких правильных многоугольников может сходиться в вершинах правильного многогранника.

Наиболее простым правильным многогранником является многогранник, гранями которого являются четыре правильных треугольника (рис. 5.1, а), и в каждой его вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется *правильным тетраэдром*. Тетраэдр в переводе с греческого языка означает четырехгранник ("тетра" — четыре, "эдра" — грань).

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 5.1, б. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется *октаэдром* ("окта" — восемь).

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 5.1, в. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется *икосаэдром* ("икоси" — двадцать).

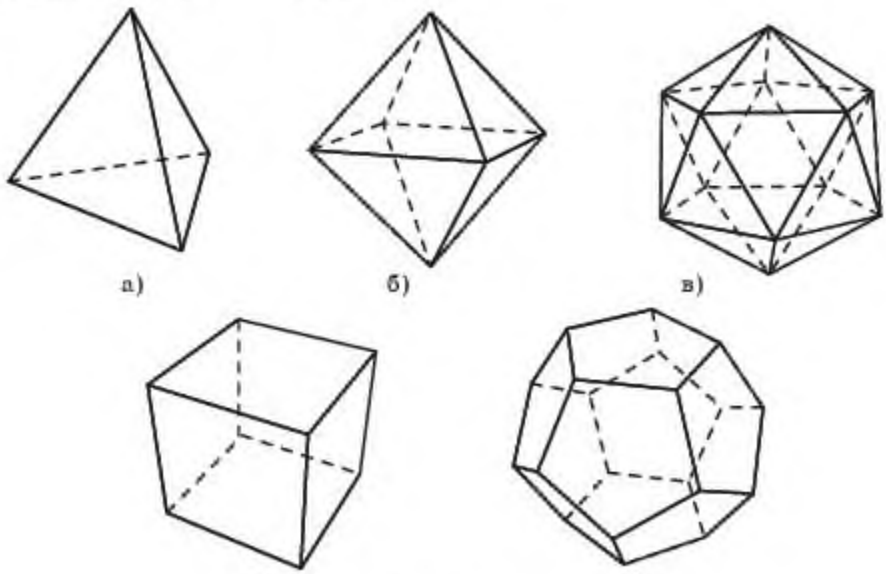


Рис. 5.1

Заметим, что в вершине выпуклого многогранника может сходиться не более пяти правильных треугольников, так как в противном случае сумма плоских углов при этой вершине будет больше или равна 360°. Поэтому других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 5.1, г), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также *гексаэдром* ("гекса" — шесть).

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 5.1, д. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется *додекаэдром* ("додека" — двенадцать).

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует. Таким образом, имеется только пять правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Как вы думаете, почему правильная треугольная призма, боковыми гранями которой являются квадраты, не является правильным многогранником?

Используя свойства выпуклых многогранных углов, самостоятельно докажите, что в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти.

Исторические сведения

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон (429—348 до н. э). Именно поэтому правильные многогранники называются также *телами Платона*. Правильным многогранникам посвящена последняя XIII книга знаменитых "Начал" Евклида.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи (1452—1519), например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445—1514) "О божественной пропорции".

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был Альбрехт Дюрер. В его известной гравюре "Меланхолия" на переднем плане изображен додекаэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Иоганн Кеплер (1571—1630) в своей работе "Тайна мироздания", изданной в 1596 году, построил модель Солнечной системы, используя правильные многогранники, описанные вокруг сфер — орбит известных в то время планет.

В центре Кеплер поместил орбиту Земли. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: "Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия". Другие планеты в то время еще не были открыты.

Такая модель Солнечной системы получила название "Космического кубка" Кеплера.

Вопросы

1. Какой выпуклый многогранник называется *правильным*?
2. Какой многогранник называется: а) *правильным тетраэдром*; б) *октаэдром*; в) *икосаэдром*; г) *гексаэдром*; д) *додекаэдром*?
3. Кто занимался изучением правильных многогранников?

Задачи

A

5.1. Сколько вершин, ребер и граней имеет: а) правильный тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

5.2. Треугольную бипирамиду сложили из двух правильных тетраэдров, совместив их грани (частица "би" означает удвоение). Будет ли получившийся многогранник правильным? Почему?

5.3. Четырехугольную бипирамиду сложили, совместив основания двух четырехугольных пирамид, боковыми гранями которых являются правильные треугольники. Будет ли получившийся многогранник правильным?

5.4. На листе бумаги в клетку изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 5.2.

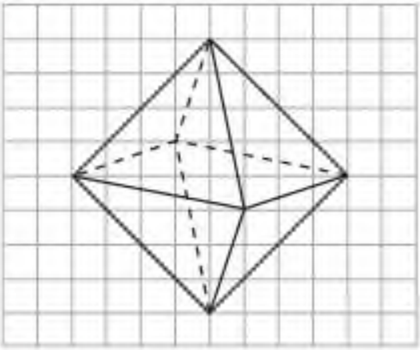


Рис. 5.2

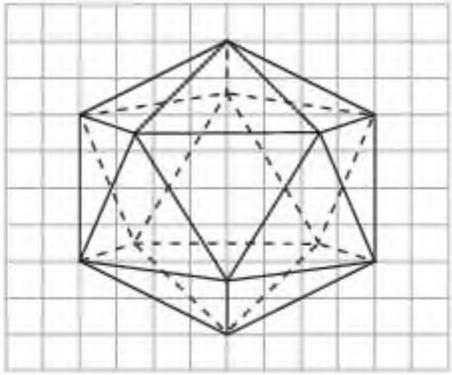


Рис. 5.3

5.5. На листе бумаги в клетку изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 5.3.

5.6. На листе бумаги в клетку изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 5.4.

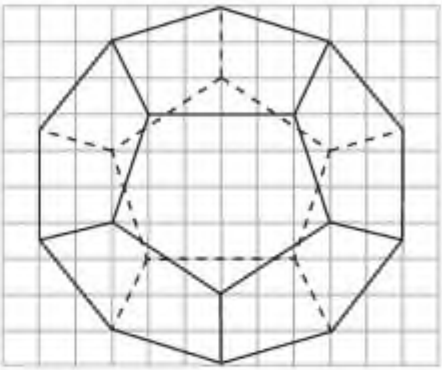


Рис. 5.4

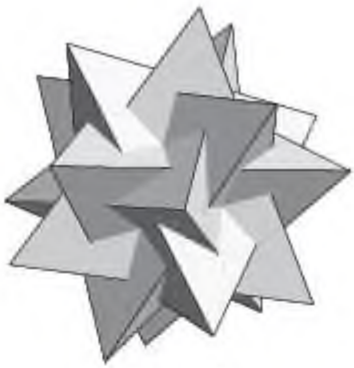


Рис. 5.5

5.7. Сколько тетраэдров изображено на рисунке 5.5?

5.8. Сколько октаэдров изображено на рисунке 5.6?

5.9. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 5.7?

5.10. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 5.8?

Рис. 5.6

Рис. 5.7

Рис. 5.8

B

5.11. Изобразите куб аналогично данному на рисунке 5.9. Вершинами какого многогранника являются вершины A, C, B_1, D_1 этого куба? Изобразите этот многогранник. Найдите его ребро, если ребра исходного куба равны 1.

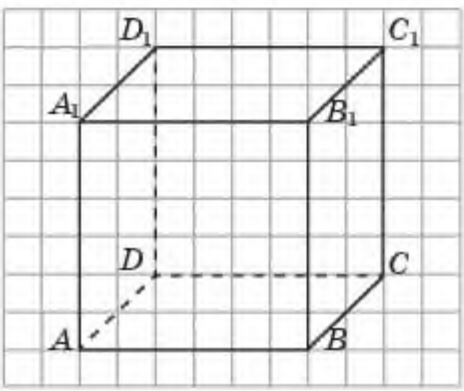


Рис. 5.9

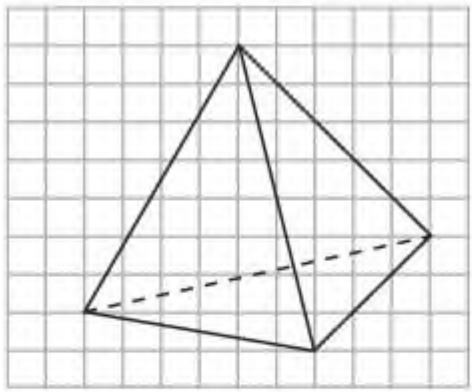


Рис. 5.10

5.12. Изобразите куб аналогично данному на рисунке 5.9. Отметьте центры граней куба. Вершинами какого многогранника они являются? Изобразите этот многогранник. Найдите его ребро, если ребра исходного куба равны 1.

5.13. На листе бумаги в клетку изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 5.10. Отметьте середины ребер тетраэдра. Вершинами какого многогранника они являются? Найдите его ребро, если ребра исходного тетраэдра равны 1.

5.14. От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется? Найдите его ребро.

5.15. Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противолежащими вершинами.

5.16. Сколько имеется путей длиной 2 см по ребрам единичного октаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

5.17. Сколько имеется путей длиной 3 см по ребрам единичного октаэдра из одной его вершины в противолежащую вершину?

C

5.18. На листе бумаги в клетку изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 5.10. Отметьте центры граней тетраэдра. Вершинами какого многогранника они являются? Найдите его ребро, если ребра исходного тетраэдра равны 1.

5.19. На листе бумаги в клетку изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 5.2. Отметьте центры граней октаэдра. Вершинами какого многогранника они являются? Найдите его ребро, если ребра исходного октаэдра равны 1.

5.20. На листе бумаги в клетку изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 5.3. Отметьте центры граней икосаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

5.21. На листе бумаги в клетку изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 5.5. Отметьте центры граней додекаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

5.22. Сколько имеется путей длиной 3 см по ребрам единичного икосаэдра из одной его вершины в противолежащую вершину?

5.23. Сколько имеется путей длиной 5 см по ребрам единичного додекаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

5.24. Найдите косинус двугранного угла, образованного соседними гранями: а) правильного тетраэдра; б) октаэдра; в) икосаэдра.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

5.25. Повторите формулы площадей плоских фигур.

§ 6. Сечения многогранников плоскостью

Напомним, что *сечением многогранника* плоскостью называется многоугольник, являющийся общей частью (пересечением) многогранника и плоскости.

Верно ли, что сечением выпуклого многогранника является выпуклый многоугольник?

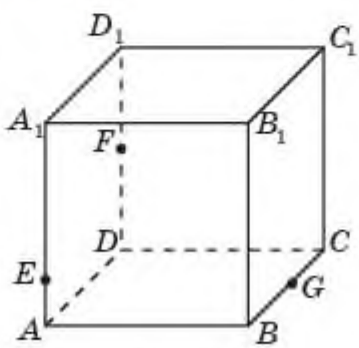


Рис. 6.1

Пример 1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E, F, G, принадлежащие ребрам куба (рис. 6.1).

Построение. Проведем прямую EF и обозначим P ее точку пересечения с AD

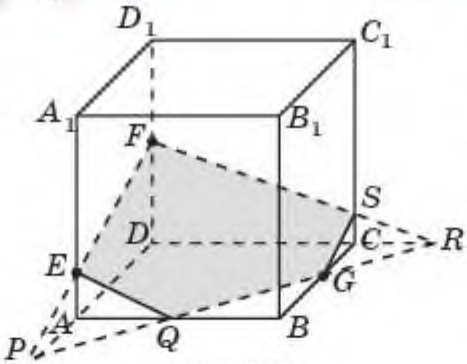


Рис. 6.2

(рис. 6.2). Проведем прямую PG и обозначим Q, R точки пересечения прямой PG с прямыми соответственно AB и DC. Проведем прямую RF и обозначим S ее точку пересечения с ребром CC_1. Соединим точки E и Q, G и S. Полученный пятиугольник $EFSGQ$ будет искомым сечением.

Пример 2. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 6.3).

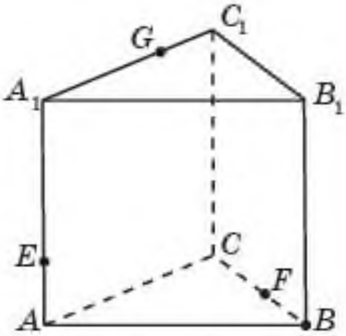


Рис. 6.3

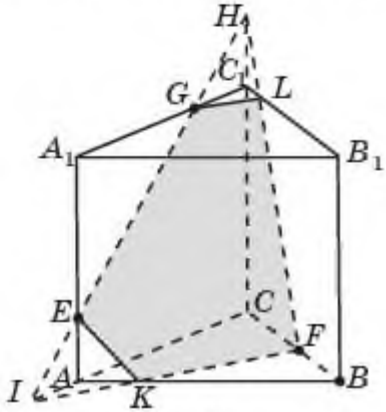


Рис. 6.4

Построение. Проведем прямую EG и обозначим H и I ее точки пересечения с прямыми соответственно CC_1 и AC (рис. 6.4) Проведем прямую IF и обозначим K ее точку пересечения с ребром AB. Проведем прямую FH и обозначим L ее точку пересечения с ребром B_1C_1. Соединим точки E и K, G и L. Полученный пятиугольник $EKFLG$ будет искомым сечением.

Для построения более сложных сечений будем использовать *метод следов*, который позволяет строить точку пересечения прямой и плоскости по двум заданным точкам этой прямой и их параллельным проекциям на плоскость. А именно, пусть прямая c проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Тогда точка C пересечения прямой c с прямой c', проходящей через точки A', B', и будет искомым пересечением прямой c с плоскостью π (рис. 6.5).

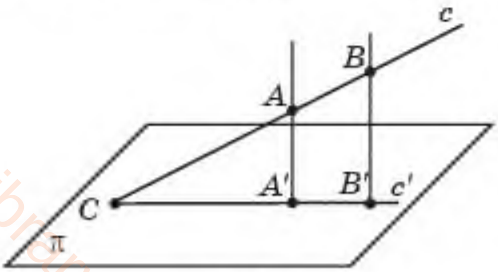


Рис. 6.5

Пример 3. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через три точки E, F, G, принадлежащие попарно скрещивающимся ребрам этого куба (рис. 6.6).

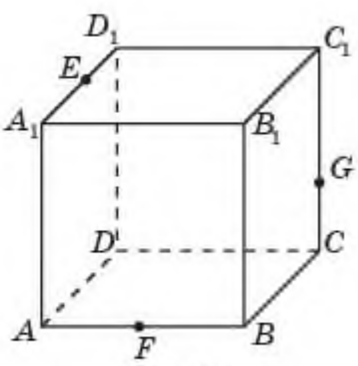


Рис. 6.6

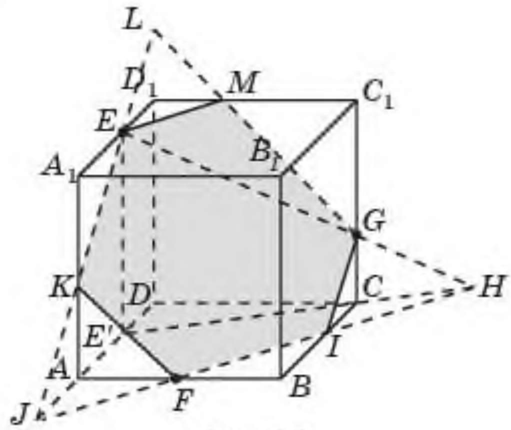


Рис. 6.7

Построение. Найдем пересечение прямой EG с плоскостью ABC. Для этого через точку E проведем прямую, параллельную прямой D_1D, и обозначим E' ее точку пересечения с ребром AD (рис. 6.7). Проведем прямые $E'C$, EG и обозначим H их точку пересечения. Проведем прямую HF и обозначим I, J ее точки пересечения с прямыми соответственно BC и AD. Проведем прямую JE и обозначим K, L ее точки пересечения с прямыми AA_1 и DD_1 соответственно. Проведем прямую LG и обозначим M ее точку пересечения с ребром C_1D_1. Соединим отрезками точки E и M, F и K, G и I. Шестиугольник $FIGMEK$ будет искомым сечением.

Вопросы

1. Что называется *сечением многогранника плоскостью*?
2. В чем заключается *метод следов*?

Задачи

А

6.1. Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки E, F и параллельной ребру BD (рис. 6.8).

6.2. Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 6.9).

6.3. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC, параллельной ребру CC_1 (рис. 6.10).

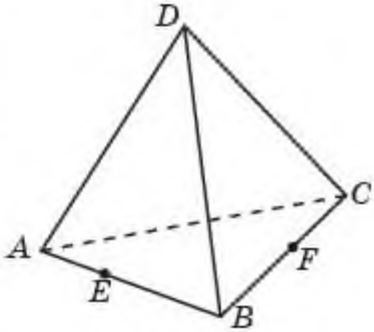


Рис. 6.8

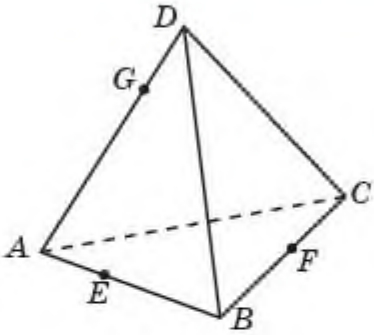


Рис. 6.9

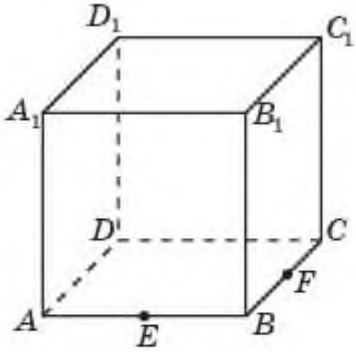


Рис. 6.10

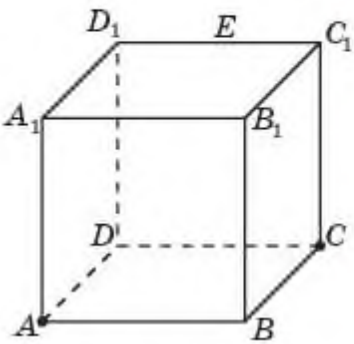


Рис. 6.11

6.4. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину E ребра C_1D_1 (рис. 6.11).

6.5. Постройте сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1, B_1C_1 (рис. 6.12).

6.6. Постройте сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через вершину B и середины ребер AA_1 и A_1C_1 (рис. 6.13).

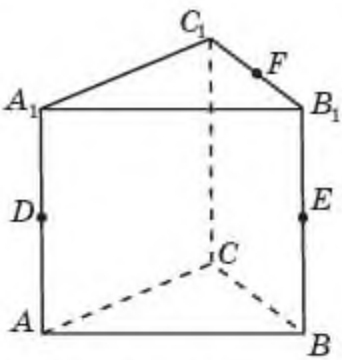


Рис. 6.12

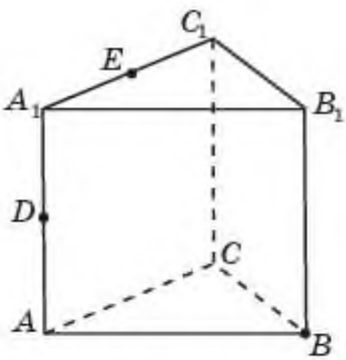


Рис. 6.13

B

6.7. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB и BC и вершину D_1 и (рис. 6.14).

6.8. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AD и SC (рис. 6.15).

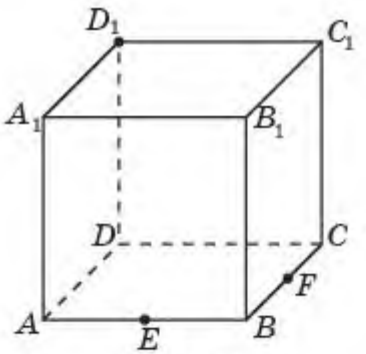


Рис. 6.14

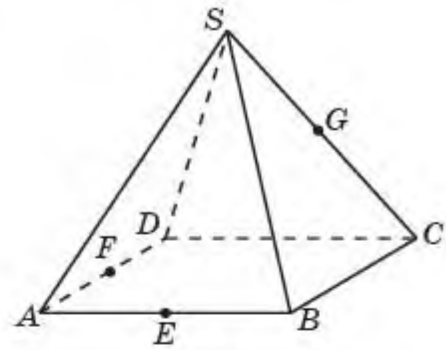


Рис. 6.15

6.9. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и D_1 (рис. 6.16).

6.10. Постройте сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершины F, C и середину G ребра SE (рис. 6.17).

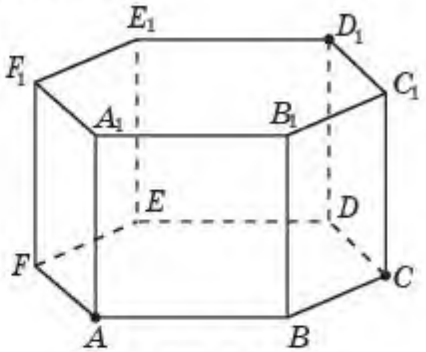


Рис. 6.16

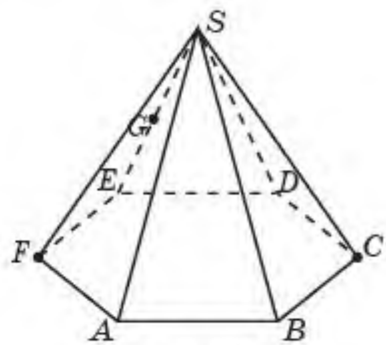


Рис. 6.17

C

6.11. Может ли в сечении тетраэдра плоскостью получиться четырехугольник $EFGH$, изображенный на рисунке 6.18?

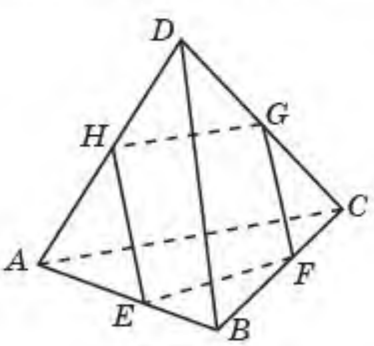


Рис. 6.18

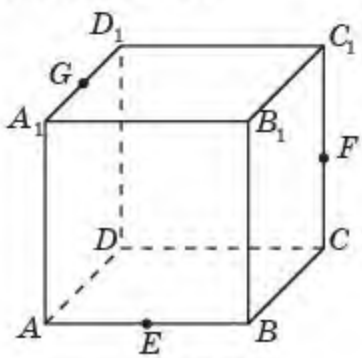


Рис. 6.19

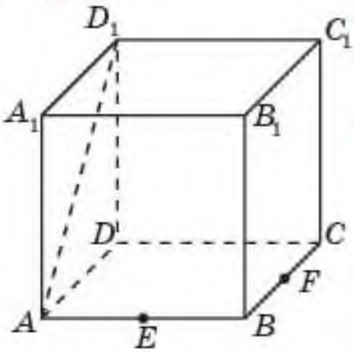


Рис. 6.20

6.12. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 6.19).

6.13. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и параллельной прямой AD_1 (рис. 6.20).

6.14. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и параллельной прямой SB (рис. 6.21).

6.15. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через вершину A, середину E ребра SC и параллельной прямой BD (рис. 6.22).

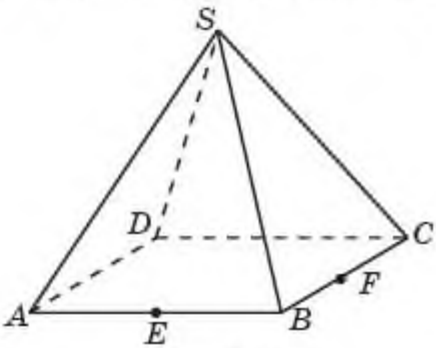


Рис. 6.21

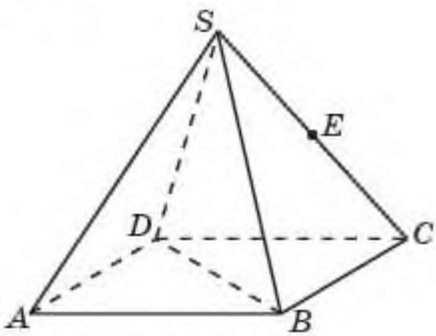


Рис. 6.22

6.16. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и E_1 (рис. 6.23).

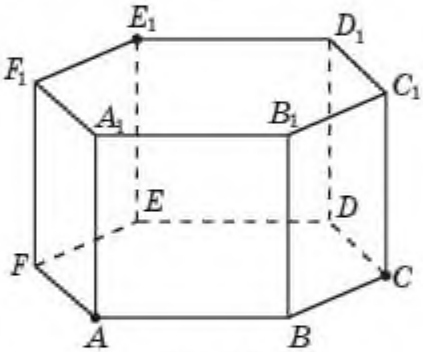


Рис. 6.23

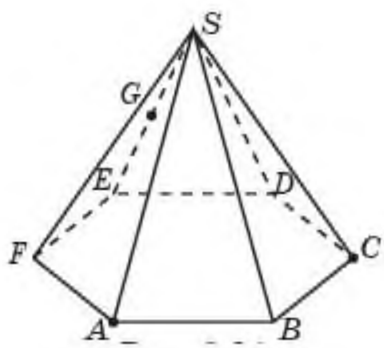


Рис. 6.24

6.17. Постройте сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину G ребра SE (рис. 6.24).

6.18. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середину E ребра BB_1 и перпендикулярной прямой AD_1 (рис. 6.25).

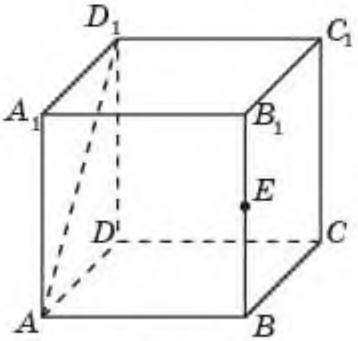


Рис. 6.25

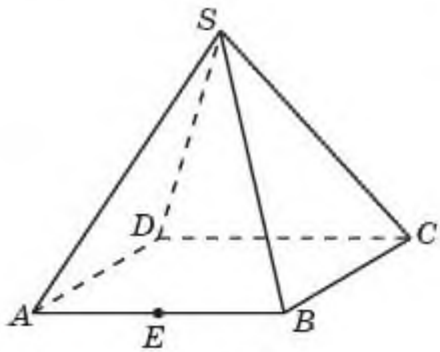


Рис. 6.26

6.19. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1, плоскостью, проходящей через середину E ребра AB и перпендикулярной прямой SD (рис. 6.26).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

6.20. Повторите определения центральной симметрии и осевой симметрии на плоскости.

§ 7*. Симметрия многогранников

Понятие симметрии фигур на плоскости рассматривалось в курсе планиметрии. В частности, определялись понятия центральной и осевой симметрий. Для пространственных фигур понятие симметрии определяется аналогичным образом.

По словам выдающегося немецкого математика Г. Вейля (1885—1955), "симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство".

Прекрасные образы симметрии демонстрируют произведения искусства: архитектуры, живописи, скульптуры и т. д. Для знакомства с ними рекомендуем книгу: Шубников А.В., Копцик В.А. Симметрия в науке и искусстве. — М.: Наука, 1972.

Две точки A и A' пространства называются *симметричными относительно точки* O, называемой *центром симметрии*, если O является серединой отрезка AA' (рис. 7.1). Точка O считается симметричной сама себе.

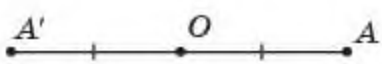


Рис. 7.1

Преобразование пространства, при котором точки A переходят в точки A', симметричные относительно заданной точки O, называется *центральной симметрией*. Точка O называется *центром симметрии*.

Две фигуры Φ и Φ' в пространстве называются *центрально-симметричными* с центром O, если каждая точка A одной фигуры симметрична относительно точки O некоторой точке A' другой фигуры (рис. 7.2).

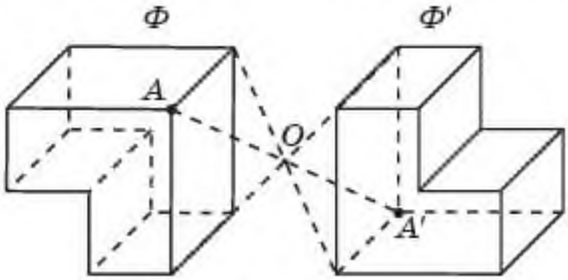


Рис. 7.2

Фигура Φ в пространстве называется *центрально-симметричной* с центром O, если она центрально-симметрична сама себе относительно точки O.

Например, параллелепипед центрально-симметричен относительно точки O пересечения его диагоналей (рис. 7.3).

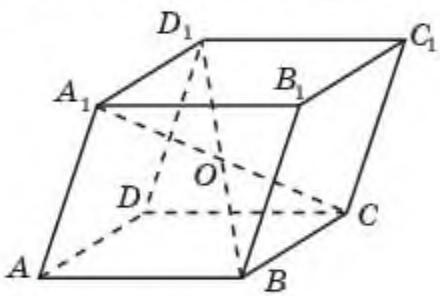


Рис. 7.3

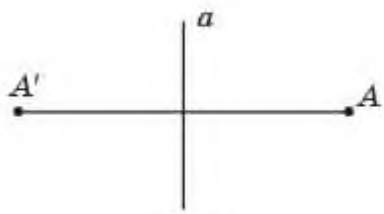


Рис. 7.4

Как Вы думаете, может ли у фигуры быть несколько центров симметрии?

Две точки A и A' пространства называются *симметричными относительно прямой* a, называемой *осью симметрии*, если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку (рис. 7.4). Точки прямой a считаются симметричными сами себе.

Преобразование пространства, при котором точки A переходят в точки A', симметричные относительно заданной прямой a, называется *осевой симметрией*. Прямая a называется *осью симметрии*.

Две фигуры Φ и Φ' в пространстве называются *симметричными* относительно оси a, если каждая точка A одной фигуры симметрична относительно оси a некоторой точке A' другой фигуры (рис. 7.5).

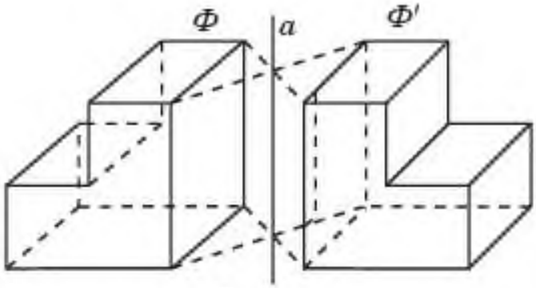


Рис. 7.5

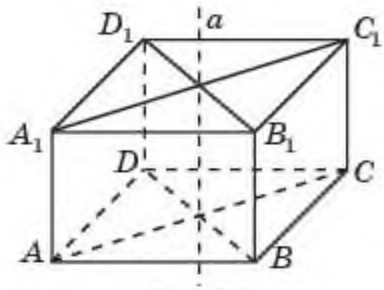


Рис. 7.6

Фигура Φ в пространстве называется *симметричной относительно оси a*, если она симметрична сама себе относительно оси a.

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через точки пересечения диагоналей противолежащих граней (рис. 7.6).

Как Вы думаете, может ли у фигуры быть несколько осей симметрии?

Две точки A и A' пространства называются *симметричными относительно плоскости* α, называемой *плоскостью симметрии*, если эта плоскость проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Точки плоскости α считаются симметричными сами себе (рис. 7.7).

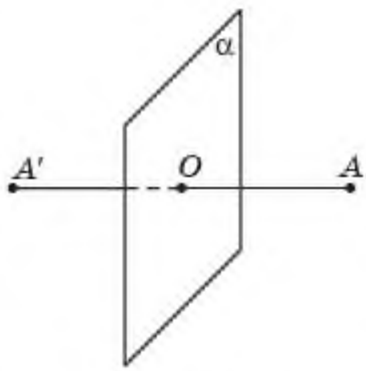


Рис. 7.7

Преобразование пространства, при котором точки A переходят в точки A', симметричные относительно заданной плоскости α, называется *симметрией относительно плоскости* α. Плоскость α, называется *плоскостью симметрии*.

Симметрия относительно плоскости называется также *зеркальной симметрией*.

Две фигуры Φ и Φ' в пространстве называются *зеркально-симметричными* относительно плоскости α, если каждая точка A одной фигуры зеркально-симметрична относительно плоскости α некоторой точке A' другой фигуры (рис. 7.8).

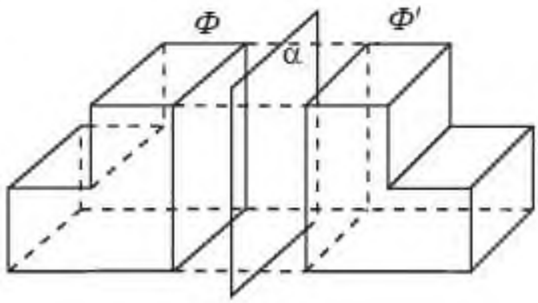


Рис. 7.8

Фигура Φ в пространстве называется *зеркально-сим-*

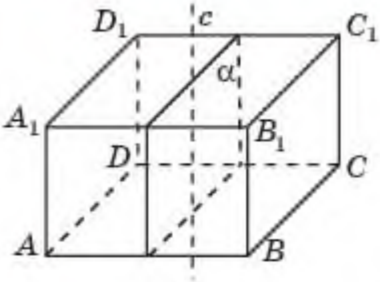


Рис. 7.9

метричной относительно плоскости α, если она зеркально-симметрична сама себе относительно плоскости α.

Например, прямоугольный параллелепипед зеркально-симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из пар противолежащих граней (рис. 7.9).

Как Вы думаете, может ли у фигуры быть несколько плоскостей симметрии?

Кристаллы — природные многогранники

Многие формы многогранников придумал не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов. Кристаллы поваренной соли имеют форму куба (рис. 7.10), кристаллы льда и горного хрусталя (кварца) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды (рис. 7.11).

Рис. 7.10

Рис. 7.11

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра (рис. 7.12). Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда (рис. 7.13).

Внешняя форма кристаллов – это лишь проявление их физических и химических свойств. Все они объясняются особенностями геометрического строения кристаллов, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Приведите примеры других кристаллов и укажите их форму.

Рис. 7.12

Рис. 7.13

Для более подробного знакомства с кристаллами рекомендуем посетить сайты геологического музея Республики Казахстан и Минералогического музея им. А.Е. Ферсмана.

Вопросы

1. Какие точки пространства называются *центрально-симметричными*?
2. Какое преобразование пространства называется *центральной симметрией*?
3. Какие две фигуры в пространстве называются *центрально-симметричными*?
4. Какая фигура в пространстве называется *центрально-симметричной*?
5. Какие точки называются *симметричными относительно оси*?
6. Какое преобразование пространства называется *осевой симметрией*?
7. Какие две фигуры в пространстве называются *симметричными относительно оси*?
8. Какая фигура в пространстве называется *симметричной относительно оси*?
9. Какие точки пространства называются *симметричными относительно плоскости*?
10. Какое преобразование пространства называется *зеркальной симметрией*?
11. Какие две фигуры в пространстве называются *зеркально-симметричными*?
12. Какая фигура в пространстве называется *зеркально-симметричной*?
13. Форму какого многогранника имеют кристаллы поваренной соли?
14. Форму какого многогранника имеют кристаллы кварца?
15. В форме какого многогранника чаще всего встречаются кристаллы алмаза?
16. Форму какого многогранника имеют кристаллы исландского шпата?

Задачи

А

7.1. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур в пространстве.

7.2. Имеет ли куб (рис. 7.14): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

7.3. Имеет ли правильный тетраэдр (рис. 7.15): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

7.4. Имеет ли правильная треугольная

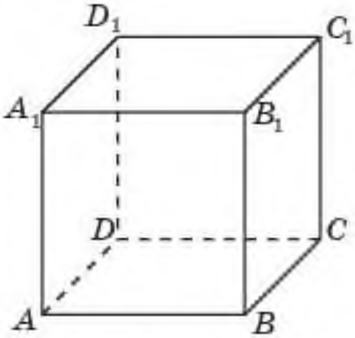


Рис. 7.14

призма (рис. 7.16): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

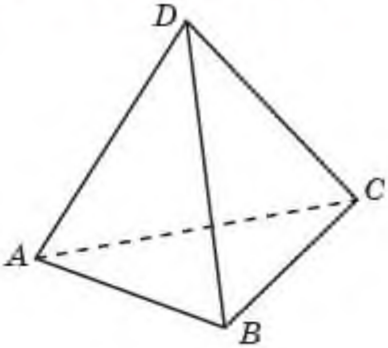


Рис. 7.15

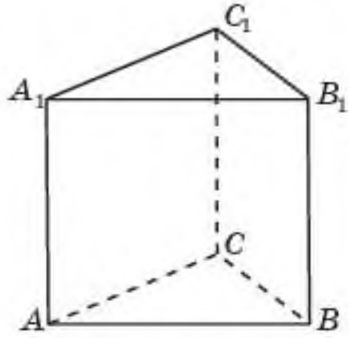


Рис. 7.16

7.5. Имеет ли правильная шестиугольная призма (рис. 7.17): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

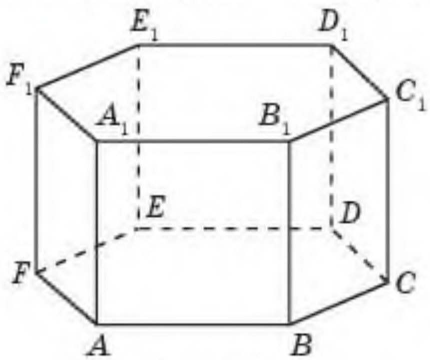


Рис. 7.17

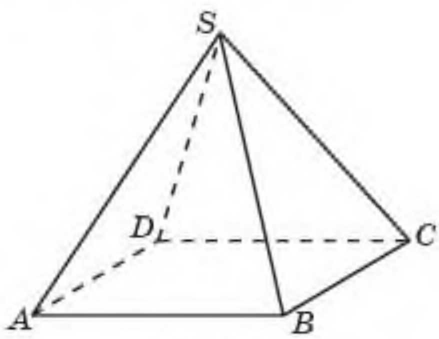


Рис. 7.18

7.6. Имеет ли правильная четырехугольная пирамида (рис. 7.18): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

7.7. Имеет ли правильная шестиугольная пирамида (рис. 7.19): а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

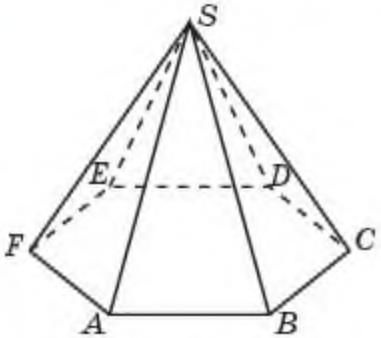


Рис. 7.19

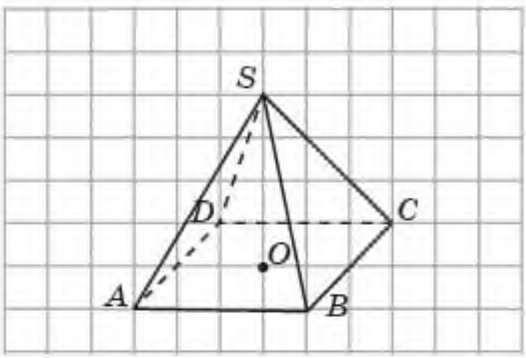


Рис. 7.20

7.8. На листе бумаги в клетку изобразите пирамиду, центрально-симметричную пирамиде $SABCD$ относительно точки O, изображенной на рисунке 7.20.

B

7.9. Укажите центры симметрии фигуры, состоящей из двух параллельных прямых.

7.10. Укажите центры симметрии фигуры, состоящей из: а) двух пересекающихся плоскостей; б) двух параллельных плоскостей.

7.11. Имеет ли центр симметрии наклонный параллелепипед (рис. 7.21)?

7.12. Имеет ли центр симметрии: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр (рис. 7.22)?

7.13. Сколько осей симметрии имеет правильная: а) треугольная призма (рис. 7.16); б) шестиугольная призма (рис. 7.17)?

7.14. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная: а) треугольная призма (рис. 7.16); б) шестиугольная призма (рис. 7.17)?

7.15. Сколько осей симметрии у правильной: а) четырехугольной пирамиды (рис. 7.18); б) шестиугольной пирамиды (рис. 7.19)?

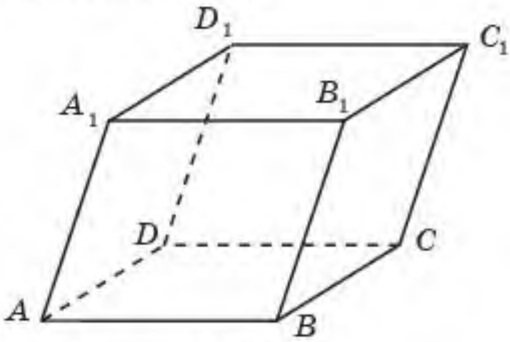


Рис. 7.21

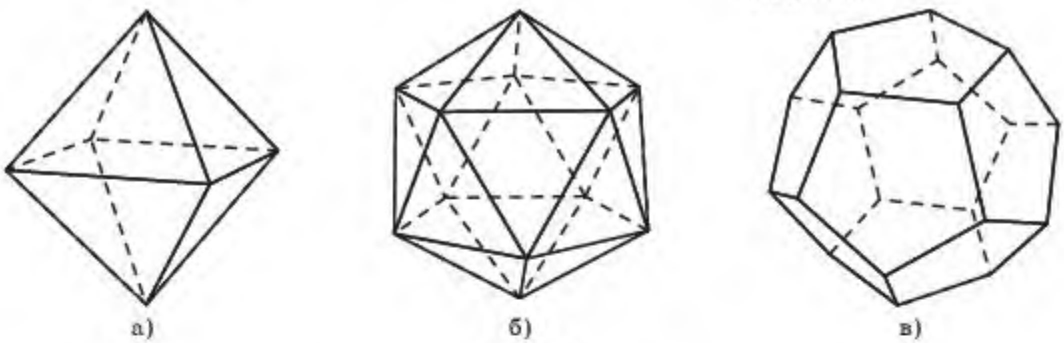


Рис. 7.22

7.16. Сколько плоскостей симметрии у правильной: а) четырехугольной пирамиды (рис. 7.18); б) шестиугольной пирамиды (рис. 7.19)?

C

7.17. Сколько осей симметрии у правильной: а) n-угольной призмы; б) n-угольной пирамиды?

7.18. Сколько плоскостей симметрии у правильной: а) n-угольной призмы; б) n-угольной пирамиды?

7.19. Сколько осей симметрии имеет: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр (рис. 7.22)?

7.20. Сколько плоскостей симметрии имеет: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр (рис. 7.22)?

7.21. Может ли центр симметрии пространственной фигуры не принадлежать ей? Приведите примеры.

7.22. Приведите примеры пространственных фигур, у которых: а) есть центр симметрии, но нет оси симметрии; б) есть ось симметрии, но нет центра симметрии.

7.23. Приведите примеры пространственных фигур, у которых: а) есть центр симметрии, но нет плоскости симметрии; б) есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии.

7.24. Приведите примеры пространственных фигур, у которых: а) есть плоскость симметрии, но нет центра симметрии; б) есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.

7.25. На листе бумаги в клетку изобразите пирамиду, центрально-симметричную пирамиде $SABCD$ относительно середины E высоты SO (рис. 7.23). Считая ребра пирамиды равными, укажите название многогранника, являющего общей частью исходной пирамиды и центрально-симметричной.

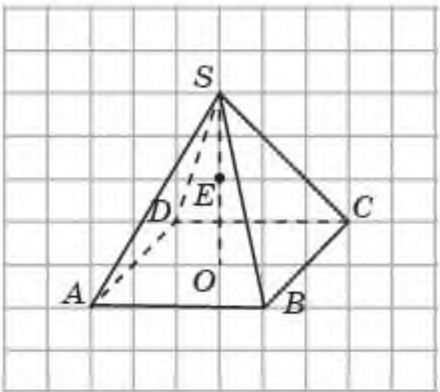


Рис. 7.23

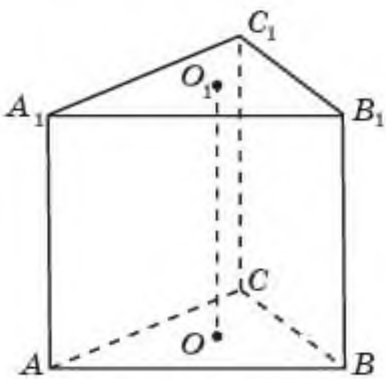


Рис. 7.24

7.26. Изобразите призму, симметричную правильной треугольной призме относительно прямой, проходящей через центры O и O_1 оснований этой призмы (рис. 7.24). Какая фигура является общей частью исходной призмы и симметричной?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

7.27. Повторите аналитические способы задания прямой на плоскости. Попробуйте указать аналитическое задание прямой в пространстве.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет ребер, если у него 12 вершин:

A) 12; B) 16; C) 18; D) 24?

2. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится три треугольных грани. Сколько он имеет вершин, если у него 4 грани:

A) 4; B) 6; C) 9; D) 12?

3. Гранями выпуклого многогранника являются треугольники. Сколько он имеет граней, если у него 12 ребер:

A) 6; B) 8; C) 9; D) 12?

4. Два плоских угла трехгранного угла равны 60° и 90°. В каких границах находится третий плоский угол:

A) больше 60° и меньше 90°;
B) больше 90° и меньше 150°;
C) больше 30° и меньше 90°;
D) больше 30° и меньше 150°?

5. Найдите сумму плоских углов трехгранного угла прямоугольного параллелепипеда:

A) 90°; B) 180°; C) 270°; D) 360°.

6. У выпуклого многогранника 10 вершин и 15 ребер. Сколько у него граней:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

7. У выпуклого многогранника 6 вершин и 5 граней. Сколько у него ребер:

A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?

8. У выпуклого многогранника 12 ребер и 8 граней. Сколько у него вершин:

A) 6; B) 7; C) 8; D) 9:

9. Сколько граней имеет икосаэдр:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

10. Сколько вершин имеет додекаэдр:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

11. Вершинами какого многогранника являются центры граней правильного тетраэдра:

A) тетраэдра; B) куба; C) октаэдра; D) икосаэдра?

12. Вершинами какого многогранника являются центры граней куба:

A) тетраэдра; B) куба; C) октаэдра; D) икосаэдра?

13. Сколько пятиугольников входит в развертку додекаэдра:

A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

14. Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра, ребра которого равны 2:

A) $\sqrt{3}$; B) $2\sqrt{3}$; C) $3\sqrt{3}$; D) $4\sqrt{3}$?

15. Каким многоугольником является сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и AA_1:

A) треугольником; B) четырехугольником;
C) пятиугольником; D) шестиугольником?

16. Каким многоугольником является сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и SD:

A) треугольником; B) четырехугольником;
C) пятиугольником; D) шестиугольником?

17. Сколько осей симметрии имеет куб:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

18. Сколько осей симметрии имеет правильная пятиугольная призма:

A) 5; B) 6; C) 8; D) 9?

19. Сколько плоскостей симметрии имеет правильный тетраэдр:

A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?

20. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная шестиугольная призма:

A) 3; B) 5; C) 7; D) 9?

Глава II ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 8. Нахождение угла между двумя прямыми

Напомним, что прямую в пространстве можно задать *параметрическими уравнениями*:

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt, \end{cases}$$

где $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $A(x;\ y;\ z)$ — точки, принадлежащие этой прямой, $(k;\ l;\ m)$ — координаты направляющего вектора $\bar{c}$, т. е. вектора, параллельного этой прямой или лежащего на ней (рис. 8.1).

Если прямая задана двумя точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{A_1A_2}$ с координатами $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, а в качестве точки A_0 точку A_1. В результате получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases}$$

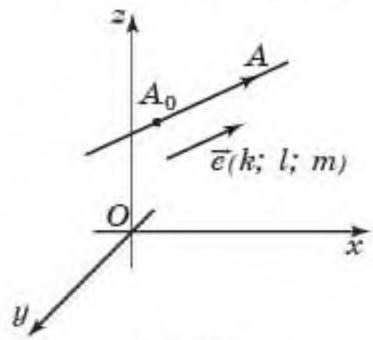


Рис. 8.1

Угол φ между двумя прямыми в пространстве можно находить, используя формулу скалярного произведения их направляющих векторов $\bar{c}_1(k_1;\ l_1;\ m_1)$, $\bar{c}_2(k_2;\ l_2;\ m_2)$. А именно,

$$\cos\varphi = \frac{|\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2|}{|\bar{e}_1| \cdot |\bar{e}_2|} = \frac{|k_1 \cdot k_2 + l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2|}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}}.$$

В частности, две прямые перпендикулярны, если для их направляющих векторов $\bar{c}_1(k_1;\ l_1;\ m_1)$, $\bar{c}_2(k_2;\ l_2;\ m_2)$ выполняется равенство

$$k_1 \cdot k_2 + l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0.$$

В каком случае две прямые, заданные параметрическими уравнениями будут $\begin{cases} x = x_1 + k_1t, \\ y = y_1 + l_1t, \\ z = z_1 + m_1t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_2 + k_2t, \\ y = y_2 + l_2t, \\ z = z_2 + m_2t, \end{cases}$ параллельны?

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $D(a;\ b;\ c)$ и параллельной оси: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

Рассмотрим примеры нахождения углов между двумя прямыми.

Пример 1. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, а ребра DC, DA, DD_1 лежащими на осях координат соответственно абсцисс, ординат, аппликат (рис. 8.2).

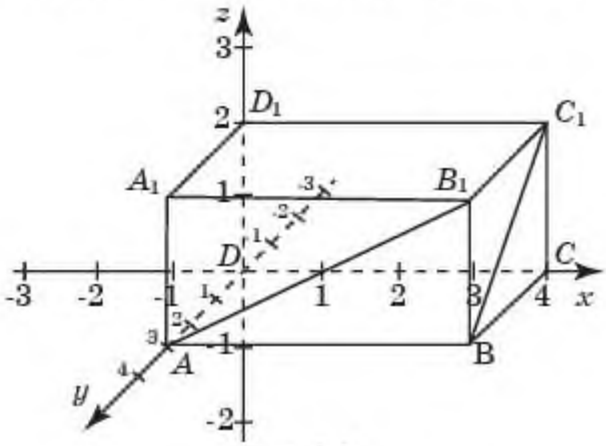


Рис. 8.2

Точка A имеет координаты (0; 3; 0). Точка B_1 имеет координаты (4; 3; 2). Следовательно, направляющий вектор прямой AB_1 имеет координаты (4; 0; 2). Аналогично, точка B имеет координаты (4; 3; 0). Точка C_1 имеет координаты (4; 0; 2). Следовательно, направляющий вектор прямой BC_1 имеет координаты (0; –3; 2). Подставляя эти значения координат в формулу для нахождения косинуса угла между двумя прямыми, находим косинус искомого угла φ:

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{65}}{65}.$$

Пример 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 4 см. Точки E и F — середины ребер соответственно SB и SC. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

Решение. Введем систему координат, считая началом координат центр O основания пирамиды, а оси абсцисс и ординат — параллельными сторонам основания пирамиды (рис. 8.3).

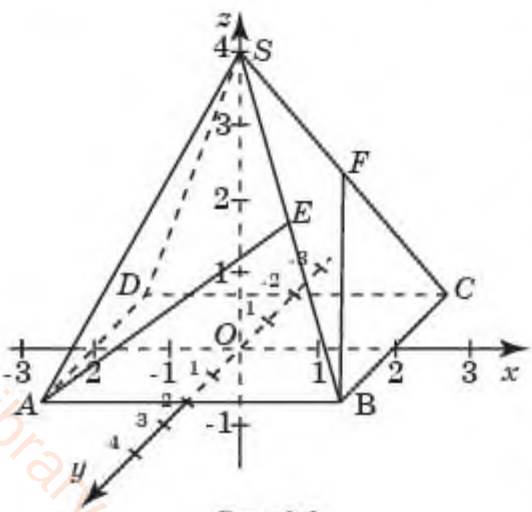


Рис. 8.3

Точка A имеет координаты $(-2;\ 2;\ 0)$. Точка E имеет координаты $(1;\ 1;\ 2)$. Следовательно, направляющий вектор прямой AE имеет координаты $(3;\ -1;\ 2)$. Аналогично, точка B имеет координаты $(2;\ 2;\ 0)$. Точка F имеет координаты $(1;\ -1;\ 2)$. Следовательно, направляющий вектор прямой BF имеет координаты $(-1;\ -3;\ 2)$. Подставляя эти значения координат в формулу для нахождения косинуса угла между двумя прямыми, находим косинус искомого угла φ:

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{2}{7}.$$

Вопросы

1. Как можно задавать прямую в пространстве?
2. Какой вектор называется *направляющим вектором прямой*?
3. Какими параметрическими уравнениями задается прямая, проходящая через две данные точки?
4. Как найти косинус угла между двумя прямыми, заданными параметрическими уравнениями?
5. В каком случае две прямые, заданные параметрическими уравнениями, перпендикулярны?

Задачи

A

8.1. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;\ 2;\ -3)$ с направляющим вектором $\vec{c}(-2;\ 3;\ 1)$.

8.2. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2;\ 1;\ 3)$, $A_2(3;\ 4;\ -1)$.

8.3. Определите взаимное расположение прямых l и m, задаваемых уравнениями:

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases} \quad m: \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = t, \\ z = 4 - 3t. \end{cases}$$

8.4. Найдите косинус угла между прямыми l и m, заданными параметрическими уравнениями:

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 - t; \end{cases} \quad m: \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -2t, \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$$

B

8.5. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$, найдите косинус угла между прямыми DB_1 и AC.

8.6. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$, найдите косинус угла между прямыми BD и AB_1.

8.7. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

8.8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 4 см. Точка E — середина ребра SB. Найдите косинус угла между прямыми AE и SC.

8.9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 4 см. Точка E — середина ребра SB. Найдите косинус угла между прямыми AE и SD.

C

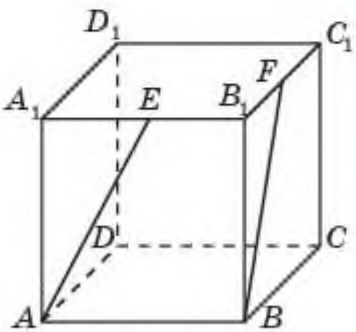


Рис. 8.4

8.10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 2, точка E — середина ребра A_1B_1, точка F — середина ребра B_1C_1 (рис. 8.4). Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

8.11. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 2 см, точка E — середина ребра SC (рис. 8.5). Найдите косинус угла между прямыми SA и BE.

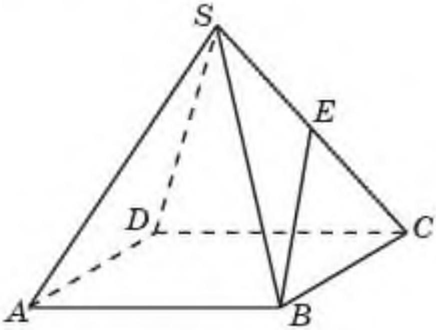


Рис. 8.5

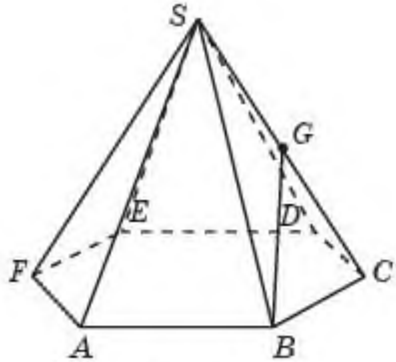


Рис. 8.6

8.12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 2 см, а высота равна 4 см. Точка G — середина ребра SC (рис. 8.6). Найдите косинус угла между прямыми SA и BG.

8.13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 2 см (рис. 8.7). Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

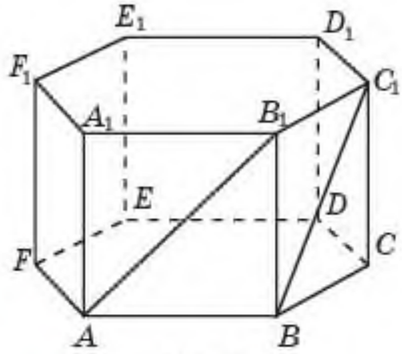


Рис. 8.7

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

8.14. Повторите определение угла между плоскостями.

8.15. Повторите способы задания уравнения плоскости в пространстве.

§ 9. Нахождение угла между двумя плоскостями

Напомним, что плоскость в пространстве задается уравнением:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c, d — действительные числа, причем, a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\bar{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого *вектором нормали*.

Плоскость, проходящая через точку $A_0(x_0; y_0; z_0)$ и с вектором нормали $\bar{n}(a; b; c)$, задается уравнением: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ (рис. 9.1).

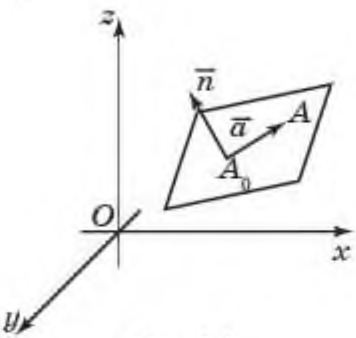


Рис. 9.1

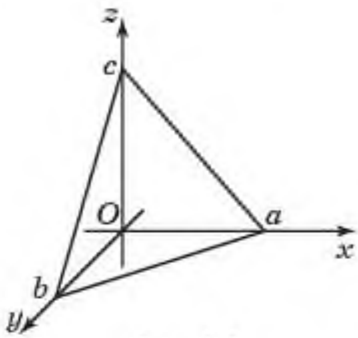


Рис. 9.2

Плоскость, проходящая через точки $A_0(a; 0; 0)$, $B_0(0; b; 0)$, $C_0(0; 0; c)$, где a, b, c — числа, отличные от нуля (рис. 9.2), задается уравнением:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A_0(a; 0; 0)$, $B_0(0; b; 0)$ и параллельной оси Oz, где a, b — числа, отличные от нуля.

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A_0(a;\ 0;\ 0)$, $C_0(0;\ 0;\ c)$ и параллельной оси Oy, где a, c – числа, отличные от нуля.

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $B_0(0;\ b;\ 0)$, $C_0(0;\ 0;\ c)$ и параллельной оси Ox, где b, c – числа, отличные от нуля.

Две плоскости в пространстве параллельны, если их векторы нормали $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ коллинеарны, следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство:

$$\bar{n}_2 = t\bar{n}_1.$$

Две плоскости, заданные уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,\ (*)$$

параллельны, если для некоторого числа t выполняются равенства: $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$.

При этом, если $d_2 = td_1$, то уравнения (*) определяют одну и ту же плоскость.

Если же $d_2 \neq td_1$, то эти уравнения определяют две параллельные плоскости.

Если плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой, и угол φ между ними можно вычислить через угол между их нормалями.

А именно, имеет место формула:

$$\cos\varphi = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

В частности, плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняются равенства:

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Какой угол между двумя координатными плоскостями?

Рассмотрим примеры нахождения углов между двумя плоскостями.

Пример 1. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$, найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и BCD_1.

Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, а ребра DC, DA, DD_1 лежащими на осях координат соответственно абсцисс, ординат, аппликат (рис. 9.3).

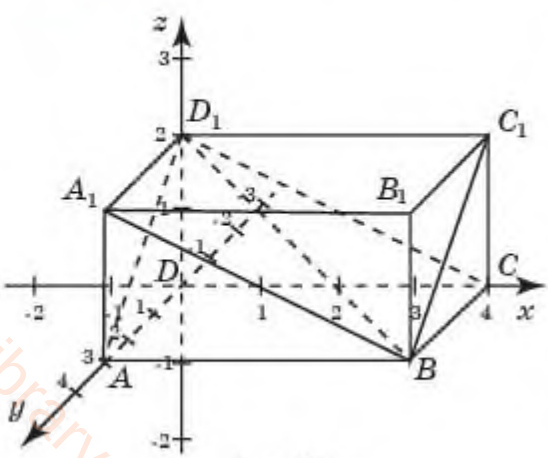


Рис. 9.3

Плоскость ABC_1 задается уравнением $\frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$, которое равносильно уравнению $2y + 3z = 6$. Вектор нормали $\bar{n}_1$ имеет координаты (0; 2; 3).

Плоскость BCD_1 задается уравнением $\frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1$, которое равносильно уравнению $x + 2z = 4$. Вектор нормали $\bar{n}_2$ имеет координаты (1; 0; 2).

Подставляя эти значения координат в формулу для косинуса угла между двумя плоскостями, находим косинус искомого угла φ:

$$\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{65}}{65}.$$

Пример 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 4 см. Точка F — середина ребра SC. Найдите косинус угла между плоскостями ABF и ADF.

Решение. Введем систему координат, считая началом координат центр O основания пирамиды, а оси абсцисс и ординат параллельными сторонам основания пирамиды (рис. 9.4).

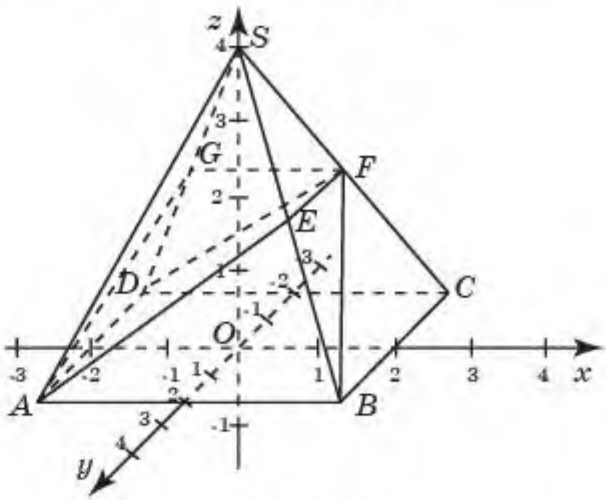


Рис. 9.4

Точка F имеет координаты (1; −1; 2). Плоскость ABF пересекает ось Oz в точке H пересечения медиан SO и AF треугольника ACS. Следовательно, точка H имеет координаты $(0;\ 0;\ \frac{4}{3})$. Эта плоскость задается уравнением $\frac{y}{2} + \frac{3z}{4} = 1$, которое равносильно уравнению $2y + 3z = 4$. Вектор нормали $\bar{n}_1$ имеет координаты (0; 2; 3).

Плоскость ADF также пересекает ось Oz в точке с координатами $(0;\ 0;\ \frac{4}{3})$. Она задается уравнением $\frac{x}{-2} + \frac{3z}{4} = 1$, которое равносильно уравнению $2x - 3z = -4$. Вектор нормали $\bar{n}_2$ имеет координаты (2; 0; −3).

Подставляя эти значения координат в формулу для косинуса угла между двумя плоскостями, находим косинус искомого угла φ:

$$\cos\varphi = \frac{9}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{9}{13}.$$

Вопросы

1. Каким уравнением задается плоскость в пространстве?
2. Какой вектор называется *вектором нормали плоскости*?
3. В каком случае два уравнения определяют параллельные плоскости?
4. Как найти косинус угла между двумя плоскостями, заданными уравнениями?
5. В каком случае две плоскости, заданные уравнениями, перпендикулярны?
6. В каком случае два уравнения определяют одну и ту же плоскость?

Задачи

A

9.1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(-1: 2; 3)$, с вектором нормали $\overline{n}$, имеющим координаты $(0; -3; 2)$.

9.2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A_0(-1; 0; 0)$, $B_0(0; 2; 0)$, $C_0(0; 0; 3)$,

9.3. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $A_0(1; -2; 3)$ и параллельна координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

9.4. Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:

а) $x + 2y + z - 1 = 0$, $x + 2y + z + 1 = 0$;

б) $x + y + 3z - 2 = 0$, $x + y - 3z - 2 = 0$;

в) $-3x + y + 2z = 0$, $3x - y - 2z - 1 = 0$;

г) $2x + 4y + 6z - 10 = 0$, $-x - 2y - 3z + 5 = 0$.

9.5. Перпендикулярны ли плоскости:

а) $y + z + 2 = 0$ и $y - z + 3 = 0$;

б) $2x - 5y - z + 4 = 0$ и $3x + 2y - 4z - 5 = 0$;

в) $x - y + 3 = 0$ и $y + z - 3 = 0$?

9.6. Найдите косинус угла между плоскостями, заданными уравнениями:

а) $x + y + z - 1 = 0$, $x - y + z + 1 = 0$;

б) $2x - 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z + 7 = 0$.

9.7. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 3$, найдите косинус угла между плоскостями ABC и: а) ABC_1; б) ADC_1.

B

9.8. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 3$, найдите косинус угла между плоскостями BCD_1 и ADC_1.

9.9. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите косинус угла между плоскостями ACD_1 и: а) ABC; б) ADD_1; в) CDD_1.

9.10. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 4 см. Найдите косинус угла между плоскостями SAB и: а) ABC; б) SBC; в) SCD.

C

9.11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1 см (рис. 9.5). Найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и BCD_1.

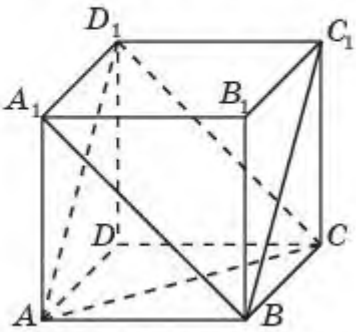


Рис. 9.5

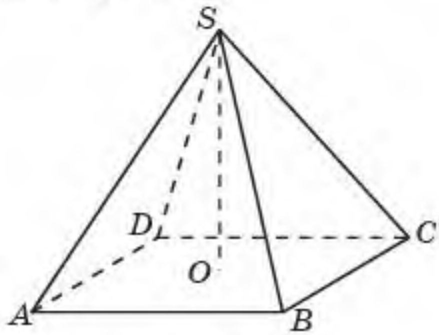


Рис. 9.6

9.12. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1 см (рис. 9.5). Найдите косинус угла между плоскостями ACD_1 и ABC_1.

9.13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 2 см (рис. 9.6). Найдите косинус угла между плоскостями SAD и SBC.

9.14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 2 см, а высота равна 4 см (рис. 9.7). Найдите косинус угла между плоскостями SAB и SDE.

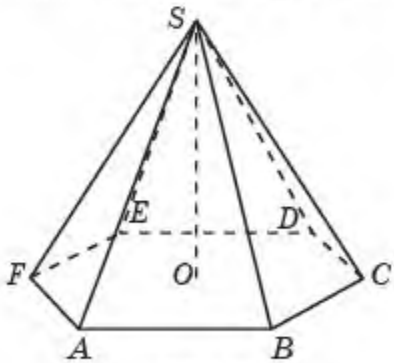


Рис. 9.7

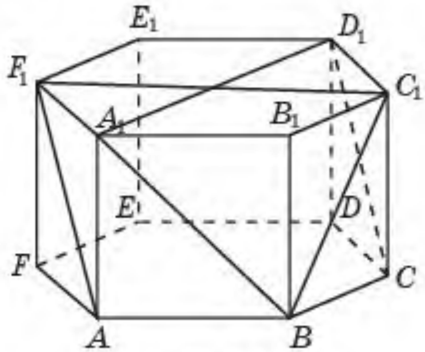


Рис. 9.8

9.15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 2 см (рис. 9.8). Найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и BCD_1.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

9.16. Повторите определение угла между прямой и плоскостью.

§ 10. Нахождение угла между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью можно находить, используя формулу скалярного произведения направляющего вектора прямой и вектора нормали плоскости, а также то, что косинус угла между этими векторами равен синусу угла между этими прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{e}\cdot\vec{n}|}{|\vec{e}|\cdot|\vec{n}|},$$

где $\vec{c}$ — направляющий вектор данной прямой, $\vec{n}$ — вектор нормали данной плоскости (рис. 10.1).

Если направляющий вектор $\vec{c}$ прямой имеет координаты $(k;\ l;\ m)$, а вектор нормали $\vec{n}$ плоскости имеет координаты $(a;\ b;\ c)$, то эту формулу можно переписать в виде:

$$\sin\varphi = \frac{|k\cdot a + l\cdot b + m\cdot c|}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

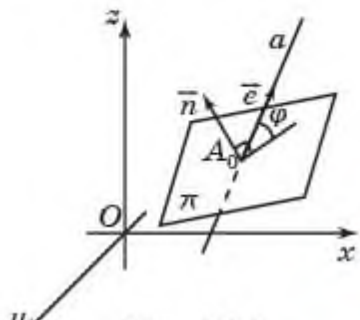


Рис. 10.1
Рис. 10.1

Прямая перпендикулярна плоскости, если направляющий вектор $\vec{c}$ прямой коллинеарен вектору нормали $\vec{n}$ плоскости, т. е. для некоторого числа t выполняются равенства: $a = tk$, $b = tl$, $c = tm$.

Какой угол образует ось Ox и плоскость yOz?

Найдите условие, при котором прямая параллельна плоскости или лежит в ней.

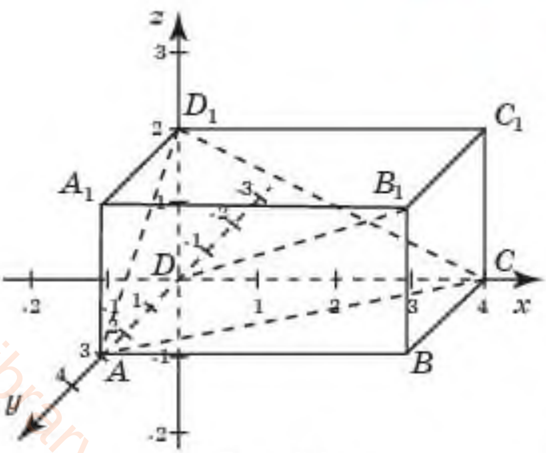


Рис. 10.2

Рассмотрим примеры нахождения угла между прямой и плоскостью.

Пример 1. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$, найдите синус угла между прямой DB_1 и плоскостью ACD_1.

Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, а ребра DC, DA, DD_1, лежащими на осях координат, соответственно абсцисс, ординат, аппликат (рис. 10.2).

Направляющий вектор прямой DB_1 имеет координаты (4; 3; 2). Плоскость ACD_1 задается уравнением $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$, которое равносильно уравнению $3x + 4y + 6z = 12$. Вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты (3; 4; 6).

Подставляя эти значения координат в формулу для синуса угла между двумя плоскостями, находим косинус искомого угла φ:

$$\sin\varphi = \frac{36}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{61}} = \frac{36\sqrt{1769}}{1769}.$$

Пример 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 4 см. Найдите синус угла между прямой SA и плоскостью SBC.

Решение. Введем систему координат, считая началом координат центр O основания пирамиды, а оси абсцисс и ординат параллельными сторонам основания пирамиды (рис. 10.3).

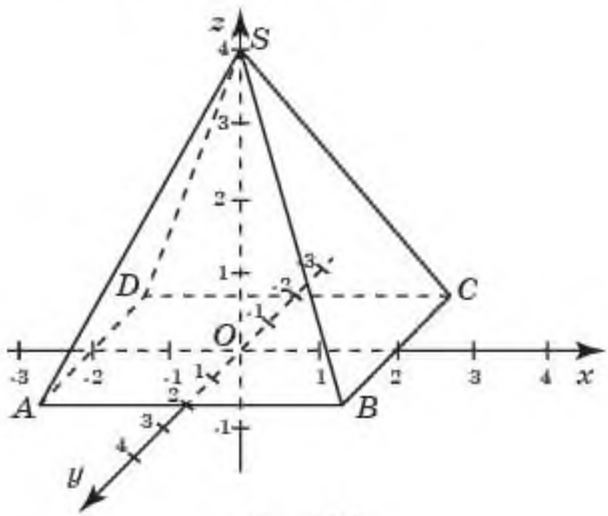


Рис. 10.3

Направляющий вектор прямой SA имеет координаты (−2; 2; −4). Плоскость SBC задается уравнением $\frac{x}{2} + \frac{z}{4} = 1$, которое равносильно уравнению $2x + z = 4$. Вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты (2; 0; 1).

Подставляя эти значения координат в формулу для синуса угла между двумя плоскостями, находим косинус искомого угла φ:

$$\sin\varphi = \frac{8}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

Вопросы

1. Как найти синус угла между прямой и плоскостью, заданными уравнениями?
2. В каком случае прямая и плоскость, заданные уравнениями, перпендикулярны?

Задачи

A

10.1. Найдите синус угла между прямой, направляющий вектор которой имеет координаты (1; 2; 2), и плоскостью, вектор нормали которой имеет координаты (−2; 1; 2).

10.2. Найдите синус угла между прямой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 - t \end{cases}$ и плоскостью, заданной уравнением $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

10.3. Выясните взаимное расположение прямой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - 6t, \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

и плоскости, заданной уравнением:

а) $x + 3y - 2z + 4 = 0$;

б) $3x - y + 1 = 0$;

в) $2x + z - 3 = 0$.

B

10.4. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите синус угла между прямой DB_1 и плоскостью: а) ABC; б) ADD_1; в) CDD_1.

10.5. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите синус угла между плоскостью ACD_1 и прямой: а) DB; б) DA_1; в) DC_1.

10.6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, стороны основания и высота которой равны 4 см, найдите синус угла между плоскостью SAB и прямой: а) BC; б) AC; в) SC.

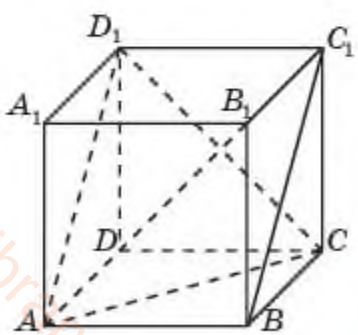


Рис. 10.4

C

10.7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1 см (рис. 10.4). Найдите синус угла между прямой DB_1 и плоскостью: а) ABC_1; б) ACD_1.

10.8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 2 см (рис. 10.5). Найдите синус угла между плоскостью SAB и прямой: а) BD; б) SC.

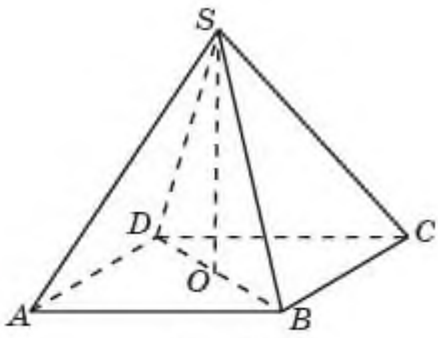


Рис. 10.5

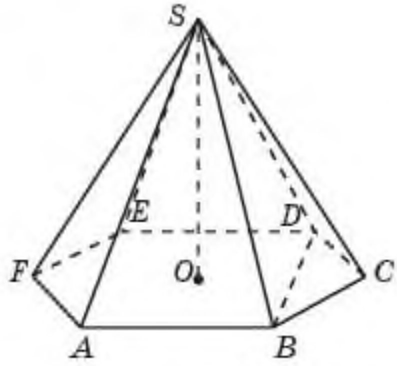


Рис. 10.6

10.9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 2 см, а высота равна 4 см (рис. 10.6). Найдите синус угла между плоскостью SAB и прямой: а) BD; б) SC.

10.10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 2 см (рис. 10.7). Найдите синус угла между прямой EB_1 и плоскостью ABD_1.

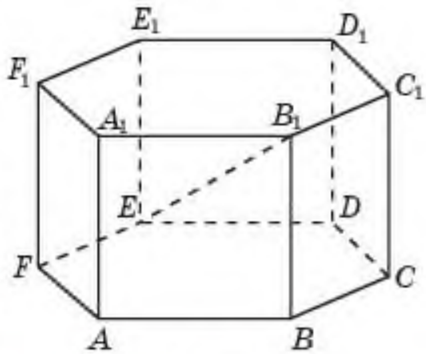


Рис. 10.7

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

10.11. Повторите определение расстояния от точки до плоскости.

§ 11. Нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве

Выведем формулу для нахождения расстояния h от точки $B_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

Напомним, что расстоянием от точки B_0 до плоскости называется длина перпендикуляра B_0A_0, опущенного из данной точки на данную плоскость. Заметим, что вектор $\overline{A_0B_0}$ коллинеарен вектору нормали $\bar{n}(a;\ b;\ c)$ данной плоскости (рис. 11.1).

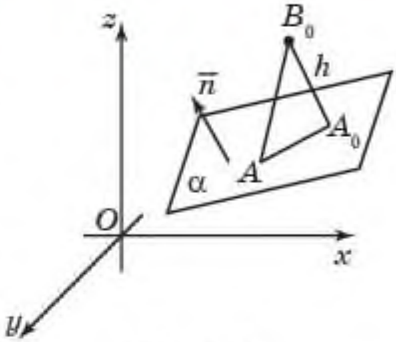


Рис. 11.1

Пусть $A(x; y; z)$ — какая-нибудь точка плоскости α. Тогда

$$\cos\angle AB_0A_0 = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{B_0A}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{B_0A}|} = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot |\overrightarrow{B_0A}|}.$$

Учитывая, что $-ax - by - cz = d$ и искомое расстояние h равно $|\overrightarrow{B_0A}| \cdot \cos\angle AB_0A_0$, получаем:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Рассмотрим примеры нахождения расстояния от точки до плоскости.

Пример 1. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$, найдите расстояние от точки B_1 до плоскости ACD_1.

Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, а ребра DC, DA, DD_1, лежащими на осях координат, соответственно абсцисс, ординат, аппликат (рис. 11.2).

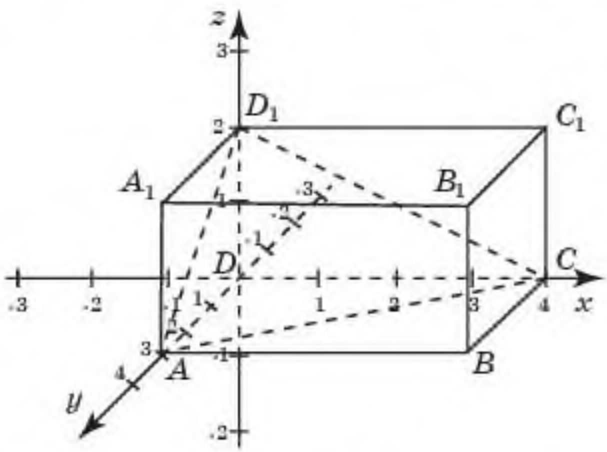


Рис. 11.2

Точка B_1 имеет координаты (4; 3; 2). Плоскость ACD_1 задается уравнением $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$, которое равносильно уравнению $3x + 4y + 6z - 12 = 0$.

Подставляя эти значения координат в формулу для расстояния от точки до плоскости, находим искомое расстояние h:

$$h = \frac{24\sqrt{61}}{61}.$$

Пример 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 4. Найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.

Решение. Введем систему координат, считая началом координат центр O основания пирамиды, а оси абсцисс и ординат параллельными сторонам основания пирамиды (рис. 11.3).

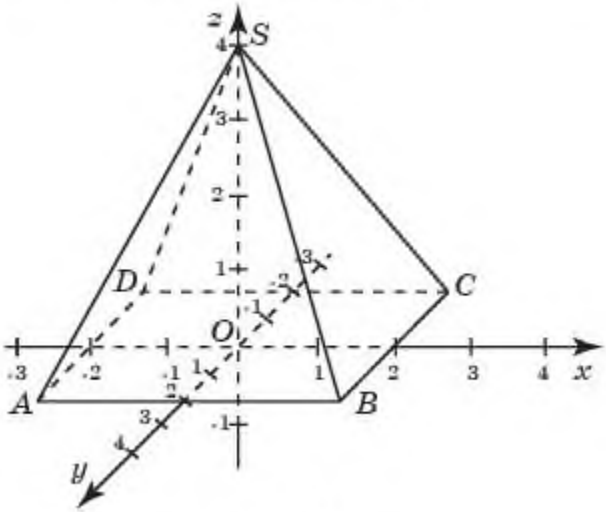


Рис. 11.3

Точка A имеет координаты $(-2;\ 2;\ 0)$. Плоскость SBC задается уравнением $\frac{x}{2} + \frac{z}{4} = 1$, которое равносильно уравнению $2x + z = 4$.

Подставляя эти значения координат в формулу для расстояния от точки до плоскости, находим искомое расстояние h:

$$h = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Вопросы

1. Что называется *расстоянием от точки до плоскости*?
2. Как можно вычислить расстояние от точки с заданными координатами до плоскости, заданной уравнением?

Задачи

А

11.1. Найдите расстояние от точки $B_0(1;\ 1;\ 1)$ до плоскости, заданной уравнением: а) $x + y = 1$; б) $x + y + z = 1$.

11.2. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABC_1.

11.3. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ стороны основания и высота которой равны 1 см, найдите расстояние от точки B до плоскости SAC.

11.4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания равны 2 см, высота равна 1 см. Найдите расстояние от центра O основания этой пирамиды до плоскости SBC.

B

11.5. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABC_1.

11.6. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCD_1.

11.7. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите расстояние от точки: а) B; б) A_1; в) C_1 до плоскости ACD_1.

11.8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания и высота равны 4 см. Точка E — середина ребра SA (рис. 11.4). Найдите расстояние от точки E до плоскости SBC.

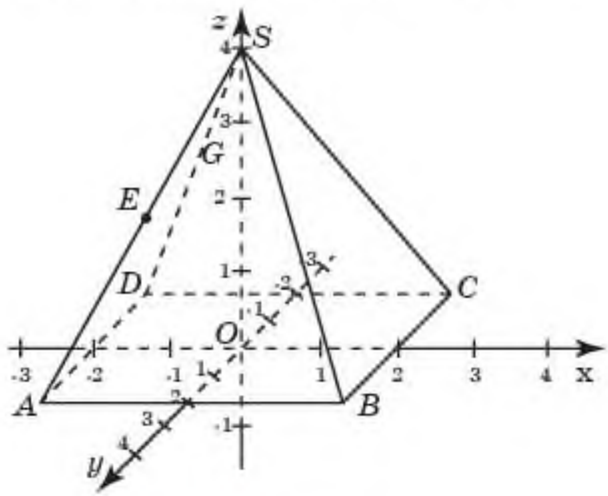


Рис. 11.4

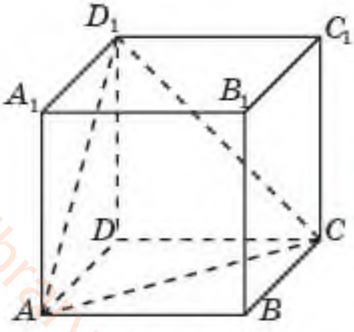


Рис. 11.5

C

11.9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1 см (рис. 11.5). Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости ACD_1.

11.10. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все стороны основания и высота равны 2 см (рис. 11.6). Найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.

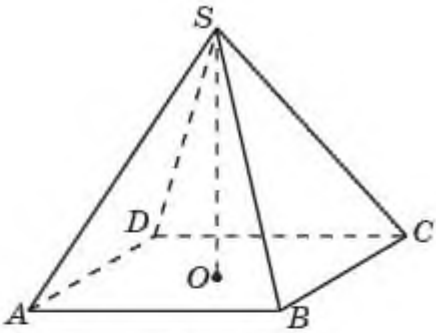


Рис. 11.6

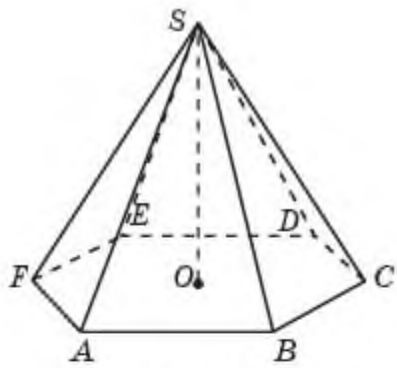


Рис. 11.7

11.11. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 2 см, а высота равна 4 см (рис. 11.7). Найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.

11.12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 2 см (рис. 11.8). Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BCE_1.

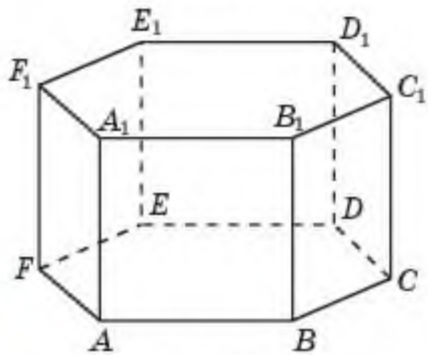


Рис. 11.8

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

11.13. Повторите определение поворота на плоскости.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите угол между прямыми DB_1 и AC:

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°.

2. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите косинус угла между прямыми BB_1 и DB_1:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{6}$.

3. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{6}$.

4. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см, найдите угол между прямыми SA и BD:

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°.

5. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см, найдите косинус угла между прямыми SA и BC:

A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; C) $\frac{1}{6}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см, найдите косинус угла между прямыми SA и BC:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

7. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и BCD_1:

A) $\frac{1}{5}$; B) $\frac{2}{5}$; C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{4}{5}$.

8. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и ACD_1:

A) $\frac{\sqrt{30}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{20}}{6}$; C) $\frac{\sqrt{10}}{6}$; D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

9. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см, найдите косинус угла между плоскостями SAB и ABC:

A) $\frac{\sqrt{15}}{15}$; B) $\frac{\sqrt{17}}{17}$; C) $\frac{\sqrt{19}}{19}$; D) $\frac{\sqrt{21}}{21}$.

10. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см, найдите косинус угла между плоскостями SAB и SBC:

A) $\frac{1}{11}$; B) $\frac{1}{13}$; C) $\frac{1}{15}$; D) $\frac{1}{17}$.

11. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите синус угла между прямой DB_1 и плоскостью ABC:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{6}$.

12. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите синус угла между прямой DB_1 и плоскостью ABC_1:

A) $\frac{\sqrt{5}}{15}$; B) $\frac{2\sqrt{5}}{15}$; C) $\frac{3\sqrt{5}}{15}$; D) $\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

13. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите синус угла между прямой DB_1 и плоскостью ACD_1:

A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

14. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см, найдите синус угла между прямой SA и плоскостью ABC:

A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

15. Для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см, найдите синус угла между прямой SC и плоскостью ABC:

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости ABC_1:

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости ACD_1:

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

18. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдите расстояние от вершины B_1 до плоскости ACD_1:

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

19. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см, найдите расстояние от центра O ее основания до плоскости SBC:

A) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ см; B) $\frac{\sqrt{17}}{17}$ см; C) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ см; D) $\frac{\sqrt{15}}{15}$ см.

20. Для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см, найдите расстояние от вершины C до плоскости SAB:

A) $\sqrt{\frac{6}{11}}$ см; B) $\sqrt{\frac{6}{13}}$ см; C) $\sqrt{\frac{6}{19}}$ см; D) $\sqrt{\frac{12}{19}}$ см.

Глава III ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ

§ 12. Цилиндр и его элементы. Развертка, площадь боковой и полной поверхности цилиндра

Важным классом фигур в пространстве, помимо многогранников, является класс фигур, называемых фигурами вращения.

Напомним, что точка A' на плоскости получается из точки A этой плоскости поворотом вокруг центра O на угол φ, если $OA' = OA$ и угол $A'OA$ равен φ (рис. 12.1).

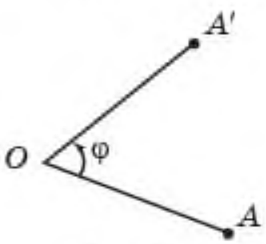


Рис. 12.1

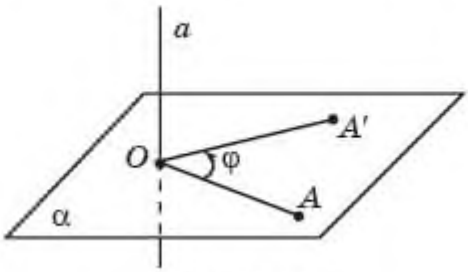


Рис. 12.2

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой (рис. 12.2). Через точку A проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a, и точку пересечения a и α обозначим O. Говорят, что точка A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ, если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг центра O на угол φ.

Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол φ называется *поворотом*, или *вращением* вокруг прямой a. Прямая a называется *осью поворота*, или *осью вращения*.

Говорят, что фигура Φ в пространстве получена вращением фигуры F вокруг оси a, если все точки фигуры Φ получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг оси a (в одном и том же направлении). Фигура Φ при этом называется *фигурой вращения*.

Например, при вращении точки A, не принадлежащей прямой a, вокруг этой прямой (рис. 12.3) получается окружность с центром в точке O, являющейся пересечением прямой a с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a.

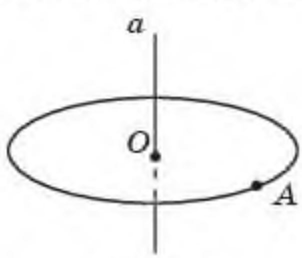


Рис. 12.3

При вращении отрезка вокруг прямой, проходящей через один из концов этого отрезка и перпендикулярной этому отрезку, получается круг, для которого данный отрезок является радиусом (рис. 12.4).

Цилиндром называется фигура, которая получается вращением прямоугольника вокруг прямой, содержащей одну из его сторон (рис. 12.5).

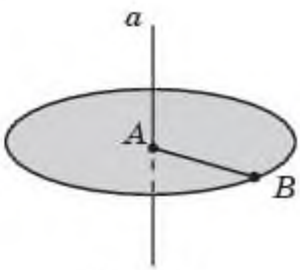


Рис. 12.4

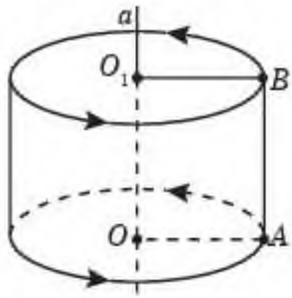


Рис. 12.5

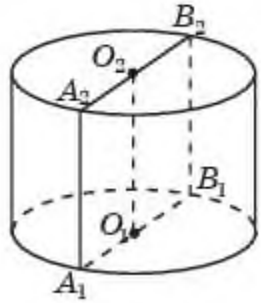


Рис. 12.6

Ось вращения прямоугольника называется также *осью цилиндра*.

Круги, которые получаются вращением сторон прямоугольника, перпендикулярных оси вращения, называются *основаниями цилиндра*.

Поверхность, которая получается вращением стороны прямоугольника, параллельной оси вращения, называется *боковой поверхностью цилиндра*.

Вся поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности.

Отрезки, которые получаются всевозможными поворотами стороны прямоугольника, параллельной оси вращения, вокруг этой оси, называются *образующими* цилиндра.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований цилиндра.

Докажите, что высота цилиндра равна длинам образующих боковой поверхности цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением* цилиндра (рис. 12.6).

Докажите, что осевым сечением цилиндра является прямоугольник.

Цилиндр может быть получен вращением этого прямоугольника вокруг прямой, проходящей через середины двух его противоположных сторон.

Можно ли получить цилиндр вращением плоских фигур, отличных от прямоугольника?

Если боковую поверхность цилиндра разрезать по образующей, развернуть ее на плоскость и добавить к ней основания, то получится фигура, называемая *разверткой цилиндра* (рис. 12.7).

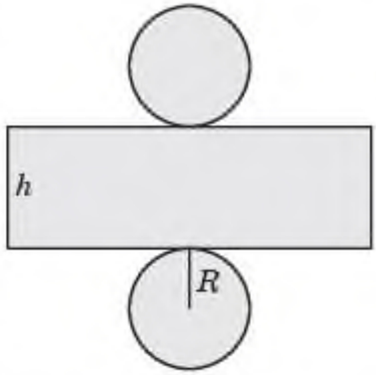


Рис. 12.7

Площадью полной поверхности, или просто площадью поверхности цилиндра называется площадь его развертки. *Площадью боковой поверхности* цилиндра называется площадь развертки его боковой поверхности.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра, т.е. имеет место формула:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh,$$

где R — радиус основания, h — высота цилиндра.

Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площадей боковой поверхности и двух оснований, т.е. имеет место формула:

$$S_{\text{полн}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R),$$

где R — радиус основания, h — высота цилиндра.

Попробуйте определить понятие наклонного цилиндра.

Вопросы

1. Какое преобразование пространства называется *поворотом вокруг прямой*?
2. Какая фигура называется *фигурой вращения*?
3. Какая фигура называется *цилиндром*?
4. Что называется *осью цилиндра*?
5. Что называется *основаниями цилиндра*?
6. Какая фигура называется *боковой поверхностью цилиндра*?
7. Какие отрезки называются *образующими цилиндра*?
8. Что называется *высотой цилиндра*?
9. Что называется *осевым сечением цилиндра*?
10. Что называется *разверткой цилиндра*?
11. Что называется *площадью поверхности цилиндра*?
12. Что называется *площадью боковой поверхности цилиндра*?
13. Выведите формулу площади боковой поверхности цилиндра.
14. Выведите формулу площади полной поверхности цилиндра.

Задачи

А

12.1. На листе бумаги в клетку изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 12.8. Изобразите его осевое сечение.

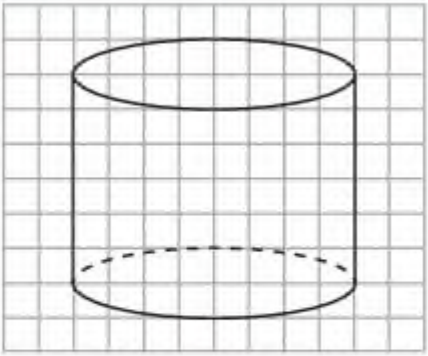


Рис. 12.8

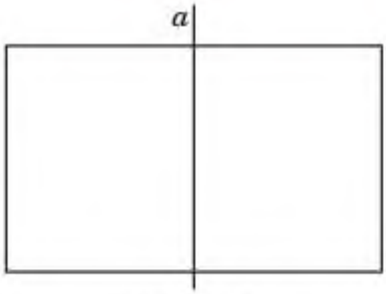


Рис. 12.9

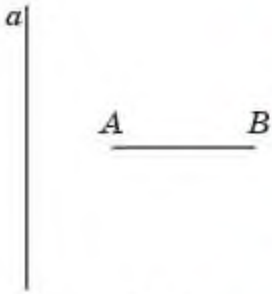


Рис. 12.10

12.2. Сколько образующих имеет цилиндр?

12.3. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям?

12.4. Какая фигура получается вращением прямоугольника вокруг прямой, проходящей через середины двух противолежащих сторон этого прямоугольника (рис. 12.9)?

12.5. Какая фигура получается при вращении отрезка AB вокруг прямой, лежащей в одной плоскости с этим отрезком, перпендикулярной ему и не имеющей с отрезком общих точек (рис. 12.10)?

12.6. Радиус основания цилиндра равен 2 см, высота — 3 см. Найдите диагональ осевого сечения.

12.7. Найдите радиус основания цилиндра, разверткой боковой поверхности которого является квадрат со стороной 1 см.

12.8. Найдите площадь: а) боковой; б) полной поверхности цилиндра, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см.

В

12.9. На листе бумаги в клетку изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 12.8. Изобразите его сечение плоскостью, параллельной плоскости основания этого цилиндра.

12.10. На листе бумаги в клетку изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 12.8. Изобразите его сечение плоскостью, параллельной оси этого цилиндра. Какой фигурой оно является?

12.11. Имеет ли цилиндр: а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

12.12. Какая фигура получится при вращении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой: а) AA_1; б) соединяющей центры его противолежащих граней (рис. 12.11)?

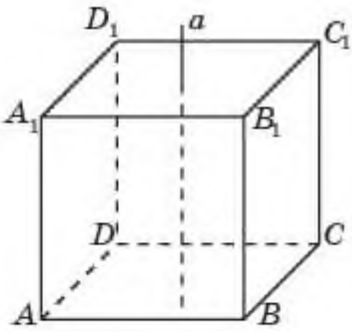


Рис. 12.11

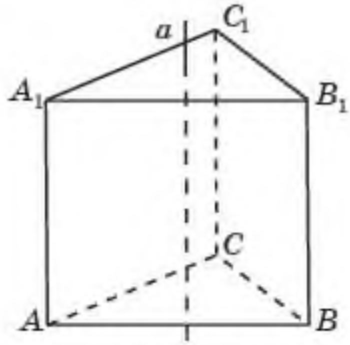


Рис. 12.12

12.13. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, получающегося вращением единичного куба вокруг прямой: а) AA_1; б) соединяющей центры его противолежащих граней (рис. 12.11).

12.14. Какая фигура получится при вращении правильной треугольной призмы вокруг прямой: а) содержащей боковое ребро; б) проходящей через центры ее оснований (рис. 12.12)?

12.15. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, получающегося вращением правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой: а) содержащей боковое ребро; б) проходящей через центры ее оснований (рис. 12.12).

12.16. Какая фигура получится при вращении правильной шестиугольной призмы вокруг прямой: а) содержащей боковое ребро; б) проходящей через центры ее оснований (рис. 12.13)?

12.17. Найдите площадь поверхности цилиндра, получающегося вращением правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой: а) содержащей боковое ребро; б) проходящей через центры ее оснований (рис. 12.13).

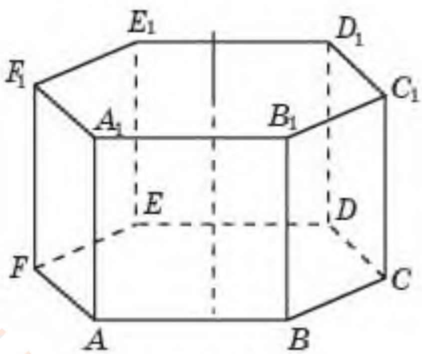


Рис. 12.13

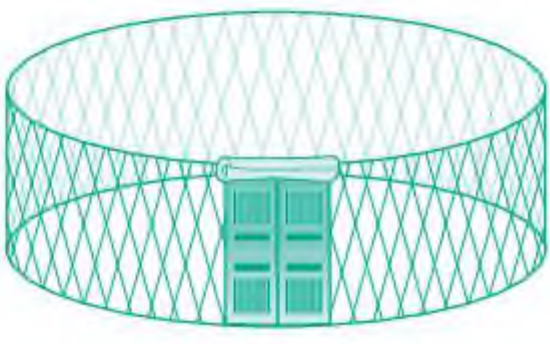


Рис. 12.14

12.18. Юрта — древнейшее и в то же время современное жилище кочевников (рис. 12.14). Найдите площадь поверхности кереге (круглая вертикальная стена в форме боковой поверхности цилиндра), если ее диаметр 5 м, а высота равна 2 м.

C

12.19. Высота цилиндра равна 8 дм, радиус основания — 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат (рис. 12.15). Найдите расстояние от оси цилиндра до этого сечения.

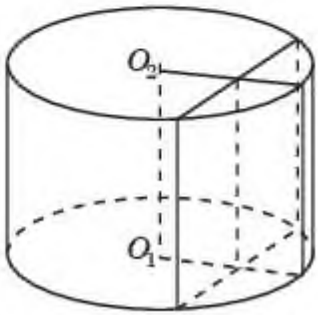


Рис. 12.15

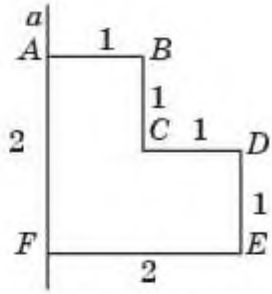


Рис. 12.16

12.20. Какая фигура получается вращением многоугольника $ABCDEF$, изображенного на рисунке 12.16, соседние стороны которого образуют прямые углы, вокруг прямой AF? Найдите площадь поверхности этой фигуры.

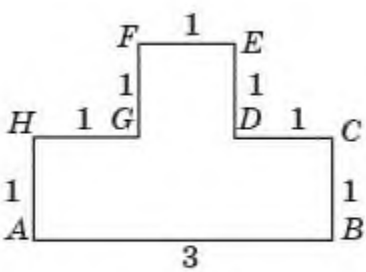


Рис. 12.17

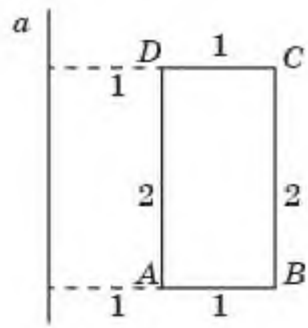


Рис. 12.18

12.21. Какая фигура получается вращением многоугольника $ABCDEFGH$, изображенного на рисунке 12.17, соседние стороны которого образуют прямые углы, вокруг прямой AB? Найдите площадь поверхности этой фигуры.

12.22. Какая фигура получается вращением прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке 12.18, вокруг прямой a, параллельной стороне этого прямоугольника? Найдите площадь поверхности этой фигуры.

12.23. Какая фигура получится при вращении многогранника, изображенного на рисунке 12.19, все двугранные углы которого прямые, вокруг прямой AA_2? Найдите площадь поверхности этой фигуры.

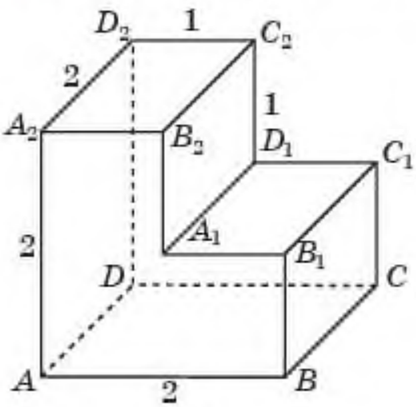


Рис. 12.19

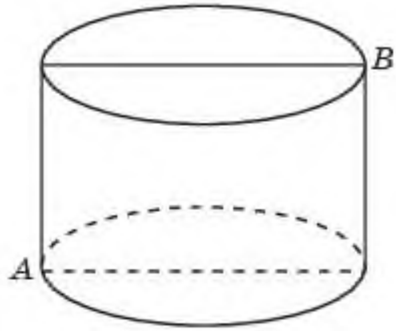


Рис. 12.20

12.24. Радиус основания цилиндра равен 2 см, образующая равна 3 см. Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности этого цилиндра из одной вершины A осевого сечения в противолежащую вершину B (рис. 12.20).

12.25. На внутренней стенке цилиндрической банки, длина окружности основания которой равна 24 см, в двух с половиной сантиметрах от верхнего края висит капля меда, а на наружной стенке, в диаметрально противоположной точке, сидит муха (рис. 12.21). Найдите длину кратчайшего пути, по которому муха может доползти до меда.

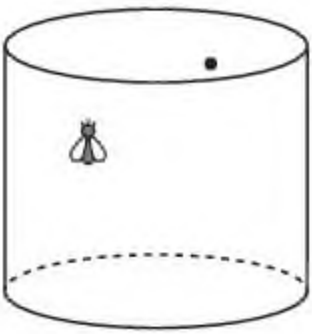


Рис. 12.21

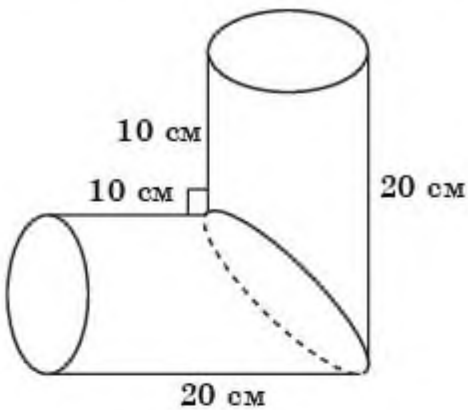


Рис. 12.22

12.26. Найдите площадь полной поверхности детали, изображенной на рисунке 12.22, составленной из двух равных частей цилиндров, составленных под углом 90°.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

12.27. Повторите определения равнобедренного треугольника и кругового сектора.

§ 13. Конус и его элементы. Развертка, площадь боковой и полной поверхности конуса

Конусом называется фигура, которая получается вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей один из его катетов (рис. 13.1).

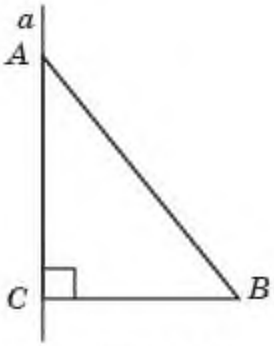


Рис. 13.1

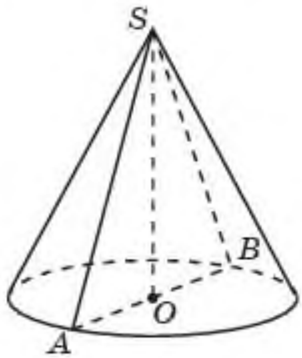


Рис. 13.2

Ось вращения называется также *осью конуса*.

Круг, который получаются вращением стороны прямоугольного треугольника, перпендикулярной оси вращения, называется *основанием конуса*.

Поверхность, которая получается вращением гипотенузы прямоугольного треугольника, называется *боковой поверхностью конуса*.

Вся поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Отрезки, которые получаются всевозможными поворотами гипотенузы прямоугольного треугольника, называются *образующими* конуса.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется *осевым сечением* конуса (рис. 13.2).

Докажите, что осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основанием которого служит диаметр основания конуса.

Конус может быть получен вращением равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей высоту, опущенную на основание этого треугольника.

Вершина этого равнобедренного треугольника, противолежащая основанию, называется *вершиной конуса*.

Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость его основания, а также его длина, называется *высотой конуса*.

Как Вы думаете, можно ли получить конус вращением не прямоугольного и не равнобедренного треугольника?

Если боковую поверхность конуса разрезать по образующей, развернуть ее на плоскость и добавить к ней основание, то получится фигура, называемая *разверткой конуса* (рис. 13.3).

Площадью поверхности конуса называется площадь его развертки. *Площадью боковой поверхности* конуса называется площадь развертки его боковой поверхности.

Если радиус основания конуса равен R, а образующая равна l, то для площади $S_{бок}$ его боковой поверхности имеет место формула:

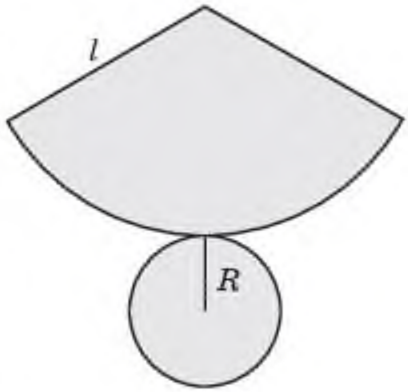


Рис. 13.3

$$S_{бок} = \pi Rl.$$

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей его боковой поверхности и основания, т.е. имеет место формула:

$$S_{полн} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$$

Вопросы

1. Какая фигура называется *конусом*?
2. Что называется *осью конуса*?
3. Что называется *основанием конуса*?
4. Какая фигура называется *боковой поверхностью конуса*?
5. Какие отрезки называются *образующими конуса*?
6. Что называется *осевым сечением конуса*?
7. Что называется *вершиной конуса*?
8. Что называется *высотой конуса*?
9. Какая фигура называется *разверткой конуса*?
10. Что называется *площадью поверхности конуса*?
11. Что называется *площадью боковой поверхности конуса*?
12. Выведите формулу площади боковой поверхности конуса.
13. Выведите формулу площади полной поверхности конуса.

Задачи

А

13.1. На листе бумаги в клетку изобразите конус, аналогичный данному на рисунке 13.4. Изобразите его осевое сечение.

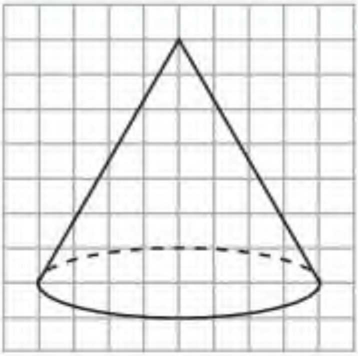


Рис. 13.4

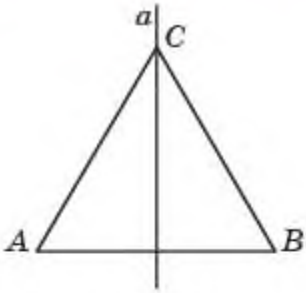


Рис. 13.5

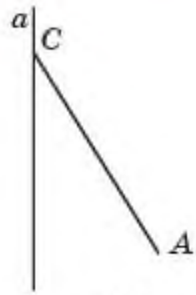


Рис. 13.6

13.2. Сколько образующих имеет конус?

13.3. Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, параллельной основанию?

13.4. Какая фигура получается вращением равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей высоту, опущенную на основание этого треугольника (рис. 13.5)?

13.5. Какая фигура получается при вращении отрезка AC вокруг прямой, лежащей в одной плоскости с этим отрезком, проходящей через его конец C и не перпендикулярной этому отрезку (рис. 13.6)?

13.6. Радиус основания конуса равен 3 см, высота равна 4 см. Найдите образующую конуса.

13.7. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите: а) радиус основания; б) высоту конуса.

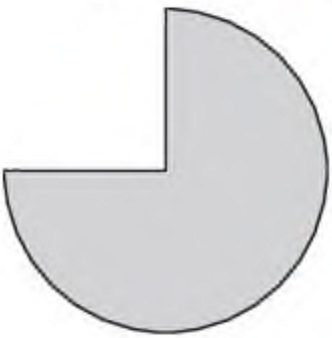


Рис. 13.7

13.8. Образующая конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту этого конуса.

13.9. Образующая конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите радиус основания этого конуса.

13.10. Найдите площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см.

13.11. Является ли разверткой боковой поверхности конуса часть круга, изображенная на рисунке 13.7?

B

13.12. На листе бумаги в клетку изобразите конус, аналогичный данному на рисунке 13.4. Изобразите его сечение плоскостью, параллельной оси этого конуса.

13.13. Радиус основания конуса равен 1 см. Через середину высоты этого цилиндра проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь получившегося сечения.

13.14. Радиус основания цилиндра равен 1 см, образующая равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого является одно основание цилиндра, а вершиной — центр другого основания этого цилиндра (рис. 13.8).

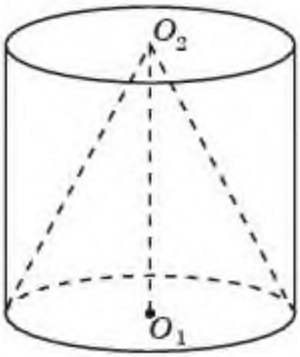


Рис. 13.8

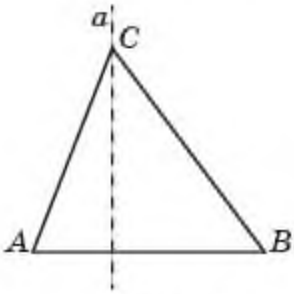


Рис. 13.9

13.15. Имеет ли конус: а) центр симметрии; б) оси симметрии; в) плоскости симметрии?

13.16. Какая фигура получается при вращении остроугольного неравнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей его высоту (рис. 13.9)?

13.17. Какая фигура получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его гипотенузу (рис. 13.10)?

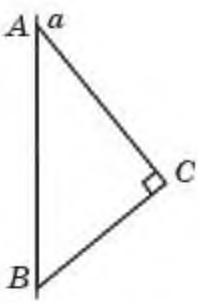


Рис. 13.10

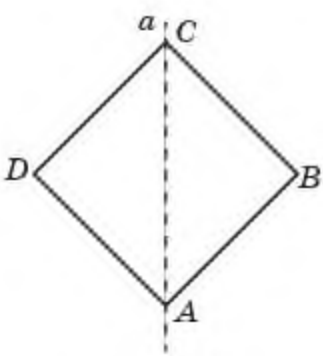


Рис. 13.11

13.18. Какая фигура получается при вращении единичного квадрата вокруг прямой, содержащей его диагональ (рис. 13.11)? Найдите площадь ее поверхности.

13.19. Какая фигура получится при вращении правильной четырехугольной пирамиды вокруг прямой, содержащей ее высоту (рис. 13.12)?

13.20. Найдите площадь поверхности конуса, получающегося вращением правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой, содержащей ее высоту (рис. 13.12).

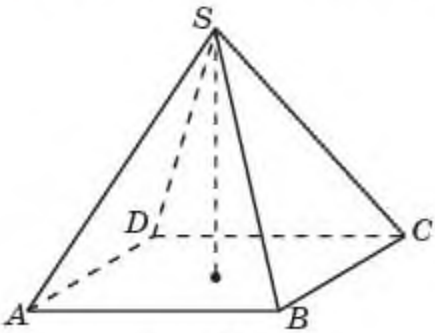


Рис. 13.12

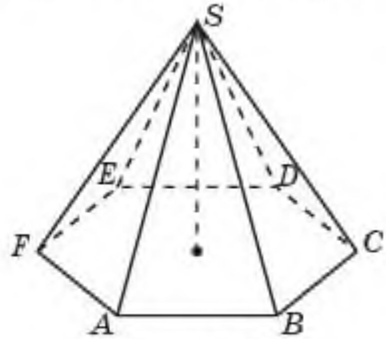


Рис. 13.13

13.21. Какая фигура получится при вращении правильной шестиугольной пирамиды вокруг прямой, содержащей ее высоту (рис. 13.13)?

13.22. Найдите площадь поверхности конуса, получающегося вращением правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, вокруг прямой, содержащей ее высоту (рис. 13.13).

C

13.23. Какая фигура получается вращением тупоугольного треугольника ABC (рис. 13.14) вокруг прямой, содержащей высоту AH? Найдите площадь поверхности этой фигуры.

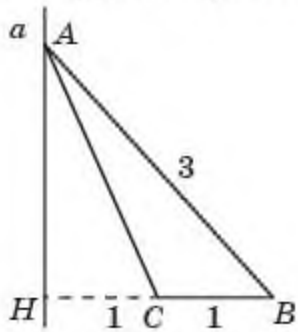


Рис. 13.14

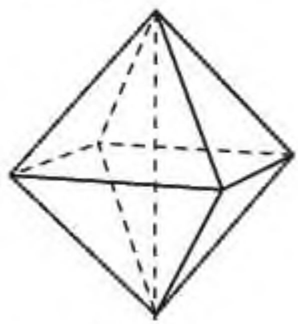


Рис. 13.15

13.24. Какая фигура получится при вращении октаэдра вокруг прямой, соединяющей его противолежащие вершины (рис. 13.15). Найдите площадь ее поверхности, считая ребро октаэдра равным 1 см.

13.25. Изобразите конус и центрально-симметричный ему конус относительно середины высоты. Какая фигура будет общей частью этих конусов. Найдите площадь ее поверхности, если радиус основания исходного конуса равен 1 см, а образующая равна 2 см.

13.26. Найдите радиус основания конуса, разверткой боковой поверхности которого является полукруг радиусом 1 см.

13.27. Радиус основания конуса равен 1 см, образующая равна 3 см. Найдите центральный угол развертки боковой поверхности этого конуса.

13.28. Осевое сечение конуса — правильный треугольник ABC со стороной 1 см. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки A в точку D — середину стороны BC (рис. 13.16).

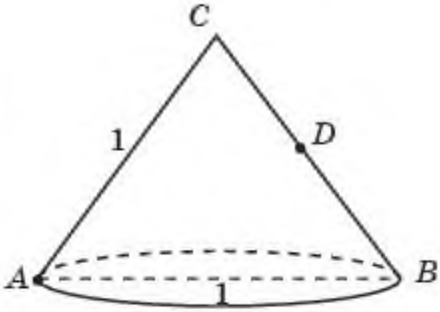


Рис. 13.16

13.29. Крыша силосной башни имеет форму конуса. Высота крыши — 2 м. Диаметр основания башни — 6 м. Сколько листов кровельного железа потребовалось для покрытия крыши, если лист имеет размеры $0{,}7 \times 1{,}4$, а на швы идет 10% требующегося железа? (Примите $\pi \approx 3$).

13.30. Найдите площадь поверхности кучи песка на строительной площадке, имеющей форму конуса (рис.13.17). Измерив мягкой метровой лентой длину окружности основания кучи песка, получили 21,6 м. Перекинув метровую ленту через вершину кучи, определили длину двух образующих — 7,8 м. (Примите $\pi \approx 3$).

Рис. 13.17

13.31. Меруерт хотела на день рождения изготовить из бумаги 8 головных уборов, имеющих форму конуса, высота которого 8 см, а радиус основания — 6 см. Сколько бумаги (в см^2) ей потребуется для изготовления этих головных уборов? (Примите $\pi \approx 3$).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

13.32. Повторите определение кругового кольца и формулу его площади.

§ 14. Усеченный конус и его элементы. Развертка, площадь боковой и полной поверхности усеченного конуса

Если конус пересечен плоскостью, параллельной плоскости основания, то его часть, заключенная между этой плоскостью и плоскостью основания, называется *усеченным конусом* (рис. 14.1).

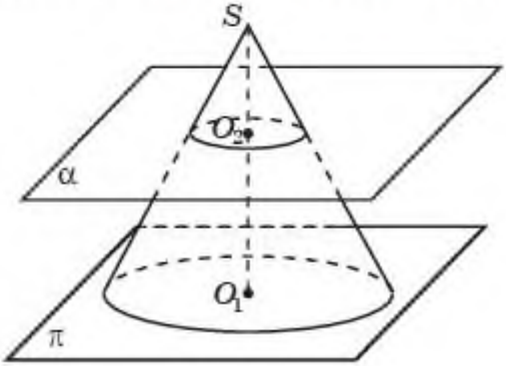


Рис. 14.1

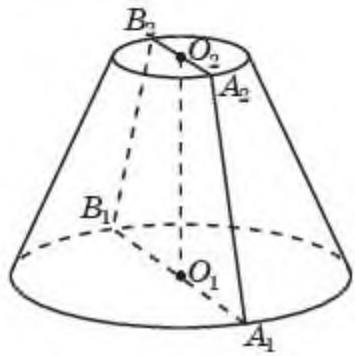


Рис. 14.2

Само сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, называется также *основанием усеченного конуса*.

Ось конуса, называется *осью усеченного конуса*.

Часть боковой поверхности конуса, заключенная между основаниями усеченного конуса, называется *боковой поверхностью усеченного конуса*.

Отрезки образующих конуса, заключенные между основаниями усеченного конуса, называются *образующими усеченного конуса*.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между плоскостями его оснований.

Сечение усеченного конуса плоскостью, проходящей через ось усеченного конуса, называется *осевым сечением* (рис. 14.2).

Докажите, что осевым сечением усеченного конуса является равнобедренная трапеция.

Усеченный конус может быть получен вращением этой трапеции вокруг прямой, проходящей через середины ее оснований.

Можно ли получить усеченный конус вращением неравнобедренной трапеции?

Если боковую поверхность усеченного конуса разрезать по образующей, развернуть ее на плоскость и добавить к ней основания, то получится фигура, называемая *разверткой усеченного конуса* (рис. 14.3).

Площадью поверхности усеченного конуса называется площадь его развертки. Площадью боковой поверхности усеченного конуса называется площадь развертки его боковой поверхности.

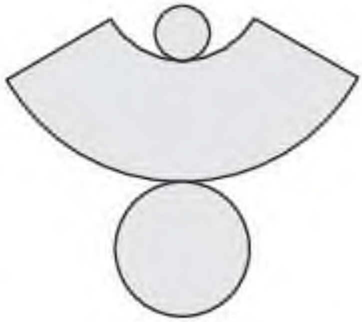


Рис. 14.3

Если радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, а образующая равна l, то для площади $S_{бок}$ его боковой поверхности имеет место формула

$$S_{бок} = \pi(R + r)l.$$

Для площади $S_{полн}$ его полной поверхности имеет место формула

$$S_{полн} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Вопросы

1. Какая фигура называется *усеченным конусом*?
2. Что называется *основаниями усеченного конуса*?
3. Что называется *высотой усеченного конуса*?
4. Что называется *осью усеченного конуса*?
5. Что называется *осевым сечением усеченного конуса*?
6. Какая фигура называется *разверткой усеченного конуса*?
7. Что называется *площадью поверхности усеченного конуса*?
8. Что называется *площадью боковой поверхности усеченного конуса*?
9. Выведите формулу площади боковой поверхности усеченного конуса.
10. Выведите формулу площади полной поверхности усеченного конуса.

Задачи

A

14.1. На листе бумаги в клетку изобразите усеченный конус, аналогичный данному на рисунке 14.4. Изобразите его осевое сечение.

14.2. Сколько образующих имеет усеченный конус?

14.3. Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, параллельной основанию?

14.4. Какая фигура получается вращением равнобедренной трапеции вокруг прямой, проходящей через середины ее оснований (рис. 14.5)?

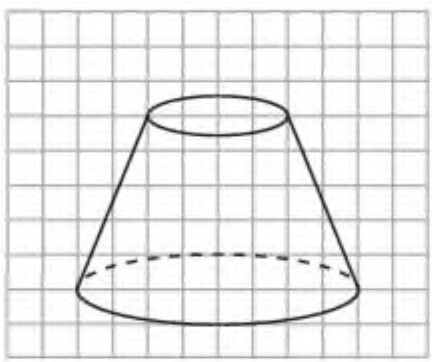


Рис. 14.4

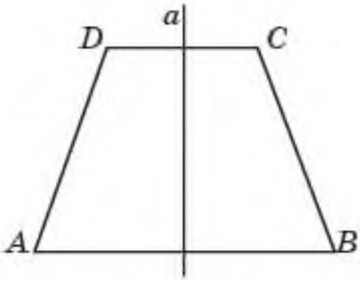


Рис. 14.5

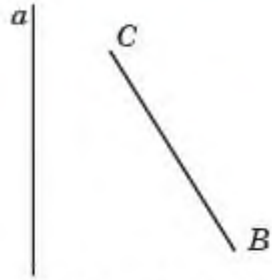


Рис. 14.6

14.5. Какая фигура получается при вращении отрезка BC вокруг прямой, лежащей в одной плоскости с этим отрезком, не имеющей общих точек, не параллельной и не перпендикулярной этому отрезку (рис. 14.6)?

Рис. 14.7

14.6. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 2 см, высота равна 3 см. Найдите образующую усеченного конуса.

14.7. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 2 см, образующая равна 5 см. Найдите площадь поверхности этого усеченного конуса.

14.8. Является ли разверткой боковой поверхности усеченного конуса часть круга, изображенная на рисунке 14.7?

B

14.9. На листе бумаги в клетку изобразите конус, аналогичный данному на рисунке 14.4. Изобразите его сечение плоскостью, параллельной оси и пересекающей основания этого усеченного конуса.

14.10. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 4 см. Через середину высоты этого усеченного конуса проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь получившегося сечения.

14.11. Имеет ли усеченный конус: а) центр симметрии; б) оси симметрии; б) плоскости симметрии?

14.12. Образующая усеченного конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту этого усеченного конуса.

14.13. Образующая усеченного конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 1 см. Найдите радиус большего основания этого усеченного конуса.

14.14. Основания равнобедренной трапеции равны 1 см и 2 см, боковые стороны равны 2 см. Найдите площадь поверхности вращения этой трапеции, вокруг прямой, проходящей через середины оснований.

14.15. Какая фигура получится при вращении правильной четырехугольной усеченной пирамиды вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований (рис. 14.8)?

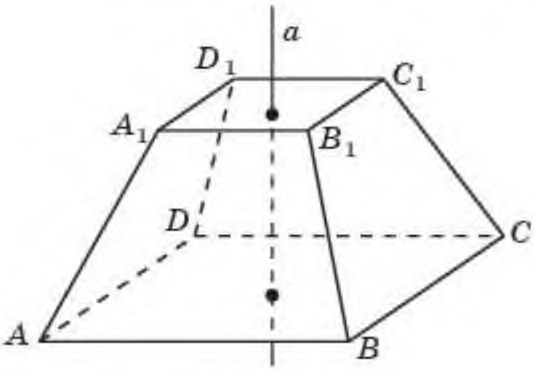


Рис. 14.8

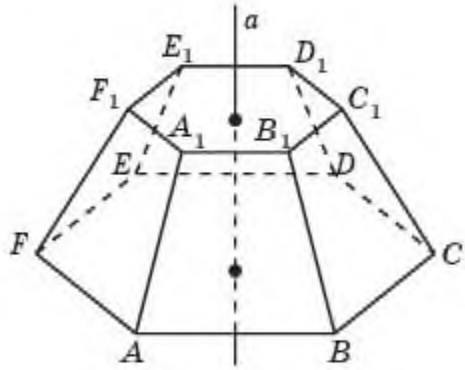


Рис. 14.9

14.16. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 4 см и 2 см, а боковые ребра равны 3 см. Найдите площадь поверхности вращения этой пирамиды вокруг прямой, проходящей через центры оснований (рис. 14.8).

14.17. Какая фигура получится при вращении правильной шестиугольной усеченной пирамиды вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований (рис. 14.9)?

14.18. В правильной шестиугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 2 см и 1 см, боковые ребра равны 3 см. Найдите площадь поверхности вращения этой пирамиды вокруг прямой, проходящей через центры оснований (рис. 14.9).

14.19. Найдите площадь боковой поверхности купола юрты (рис. 14.10) в форме усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 5 м и 1 м, а высота равна 2 м.

Рис. 14.10

C

14.20. Какая фигура получится при вращении правильного шестиугольника вокруг прямой, проходящей через середины его противолежащих сторон (рис. 14.11)? Найдите площадь поверхности этой фигуры, если стороны шестиугольника равны 1 см.

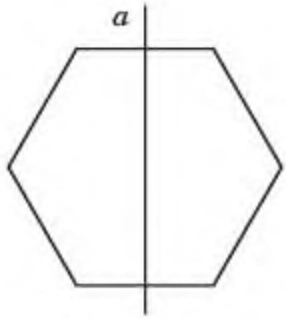


Рис. 14.11

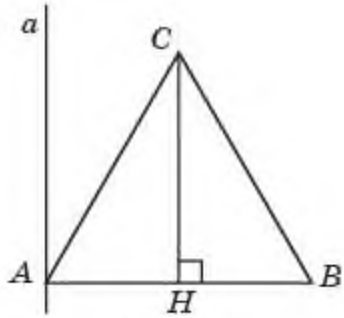


Рис. 14.12

14.21. Какая фигура получится при вращении равностороннего треугольника ABC вокруг прямой, проходящей через вершину A и параллельной высоте CH (рис. 14.12)? Найдите площадь поверхности этой фигуры, если стороны треугольника ABC равны 1 см.

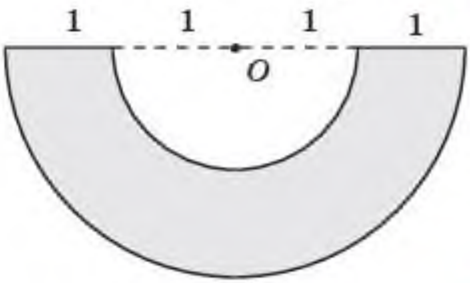


Рис. 14.13

14.22. Найдите радиусы оснований усеченного конуса, разверткой боковой поверхности которого является половина кругового кольца, изображенного на рисунке 14.13, радиусы окружностей которого равны 1 см и 2 см.

14.23. Вращением графика какой функции можно получить поверхность, изображенную на рисунке 14.14?

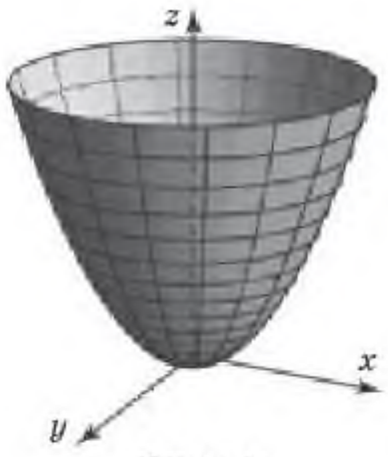


Рис. 14.14

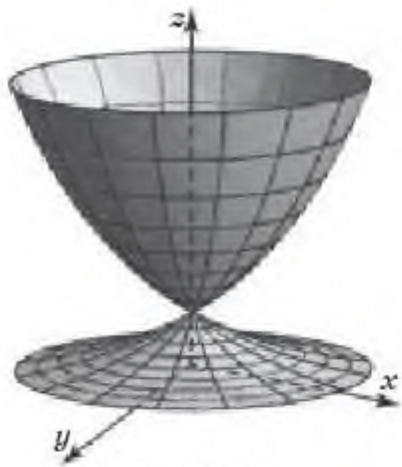


Рис. 14.15

14.24. Вращением графика какой функции можно получить поверхность, изображенную на рисунке 14.15?

14.25. Вращением графика какой функции можно получить поверхность, изображенную на рисунке 14.16?

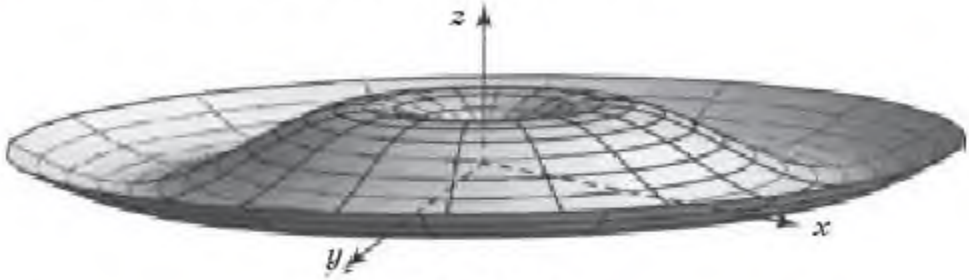


Рис. 14.16

14.26. Ведро имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого 30 см и 20 см, а образующая 30 см. Сколько краски нужно для покраски с обеих сторон такого ведра, если на 1 м^2 поверхности требуется 300 г краски?

14.27. Жестяная воронка имеет размеры (в миллиметрах), указанные на рисунке 14.17. Сколько квадратных дециметров жести затрачено на изготовление воронки (на швы уходит 10% площади поверхности воронки)?

14.28. Какие размеры имеет развертка боковой поверхности ведра, если диаметры его оснований 28 см и 20 см, а высота 24 см? Сколько квадратных дециметров материала нужно затратить на изготовление этого ведра (без учета расхода на швы)?

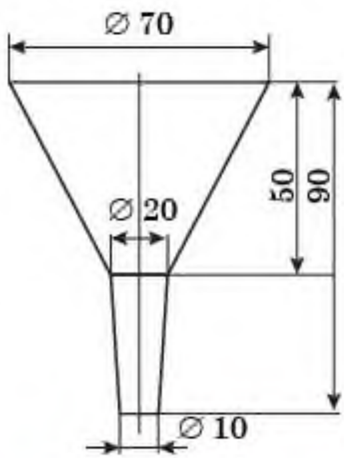


Рис. 14.17

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

14.29. Повторите определения окружности, круга и их элементов, определение касательной прямой к окружности и случаи взаимного расположения окружности и прямой.

§ 15. Сфера, шар и их элементы

Сфера и шар являются пространственными аналогами соответственно окружности и круга на плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на данное расстояние (рис. 15.1).

Данная точка называется *центром* сферы. Данное расстояние называется *радиусом* сферы.

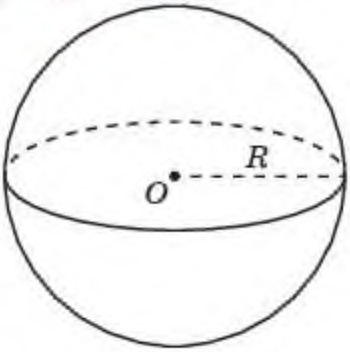


Рис. 15.1

Радиусом сферы называется также отрезок, соединяющий центр сферы и какую-нибудь ее точку.

Отрезок, соединяющий произвольные две точки сферы, называется *хордой* этой сферы. Хорда, проходящая через центр сферы, называется *диаметром* этой сферы. Окружность, являющаяся сечением сферы плоскостью, проходящей через ее центр, называется *большой окружностью*.

Сферу можно получить вращением окружности вокруг прямой, содержащей ее диаметр (рис. 15.2).

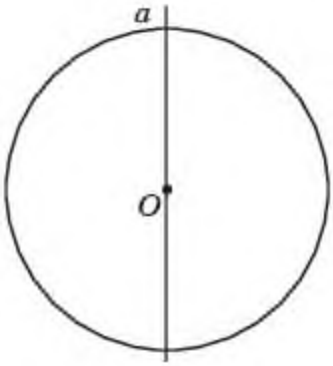


Рис. 15.2

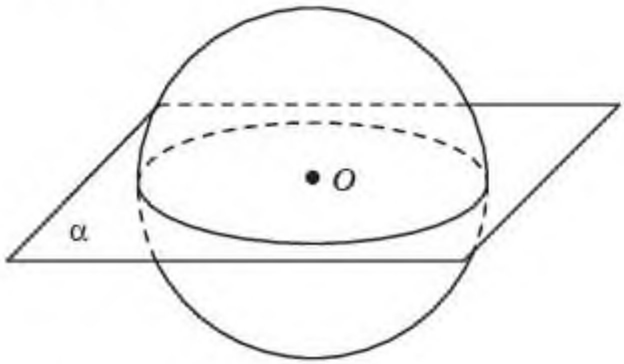


Рис. 15.3

Шаром называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное расстояние.

Данная точка называется *центром шара*. Данное расстояние называется *радиусом шара*.

Радиусом шара называется также отрезок, соединяющий центр шара и какую-нибудь точку его поверхности.

Отрезок, соединяющий произвольные две точки на *поверхности шара*, называется *хордой* этого шара. Хорда, проходящая через центр шара, называется *диаметром* этого шара.

Шар можно получить вращением круга вокруг прямой, содержащей его диаметр.

Сфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный шар, называется *поверхностью шара*.

Рассмотрим случаи взаимного расположения сферы и плоскости.

Если плоскость α проходит через центр сферы, то в сечении сферы этой плоскостью получается окружность (рис. 15.3).

Если плоскость α не проходит через центр O сферы, то опустим из него на плоскость α перпендикуляр OO_1. При этом возможны следующие случаи.

Случай 1. Длина этого перпендикуляра больше радиуса R сферы. В этом случае расстояние от точки O до любой другой точки плоскости α тем более больше R. Следовательно, в этом случае сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 15.4, а).

Случай 2. Расстояние от точки O до плоскости α равно R. В этом случае сфера и плоскость имеют единственную общую точку — O_1 (рис. 15.4, б).

Плоскость, имеющая со сферой одну общую точку, называется *касательной плоскостью*.

Докажите, что касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

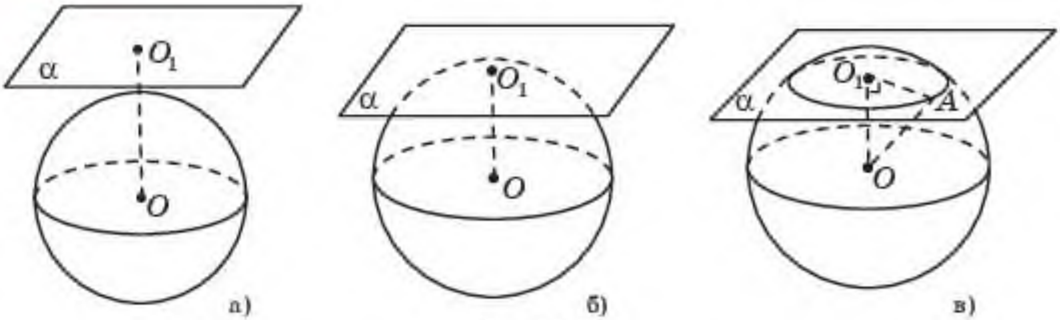


Рис. 15.4

Случай 3. Расстояние d от точки O до плоскости α меньше R. Докажем, что в этом случае сфера и плоскость пересекаются и их пересечением является окружность с центром в точке O_1 и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 15.4, в).

Действительно, для произвольной точки A, принадлежащей пересечению сферы и плоскости α, из прямоугольного треугольника OO_1A, в котором $OO_1 = d$, $OA = R$, следует равенство $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$. Обратно, если для точки A плоскости α выполняется это равенство, то расстояние от точки O до точки A равно R, т. е. точка A принадлежит сфере.

Обычно сфера изображается так, как показано на рисунке 15.5. На нем, помимо окружности, изображены:

а) сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы, которое называется большой окружностью или *экватором*;

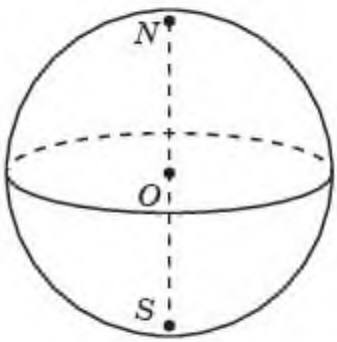


Рис. 15.5

б) прямая, проходящая через центр сферы и перпендикулярная плоскости экватора, которая называется *осью сферы*;

в) точки пересечения оси со сферой, которые называются *полюсами* сферы.

Иногда, кроме экватора, на изображении сферы рисуют *параллели* — сечения сферы плоскостями, параллельными плоскости экватора, и *меридианы* — сечения сферы плоскостями, проходящими через ось сферы (рис. 15.6). Именно так обычно изображается глобус земного шара.

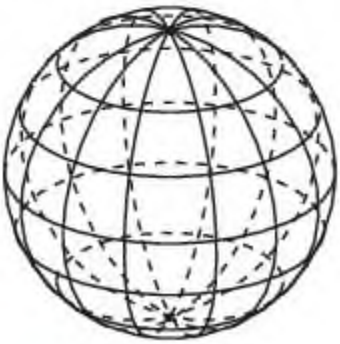


Рис. 15.6

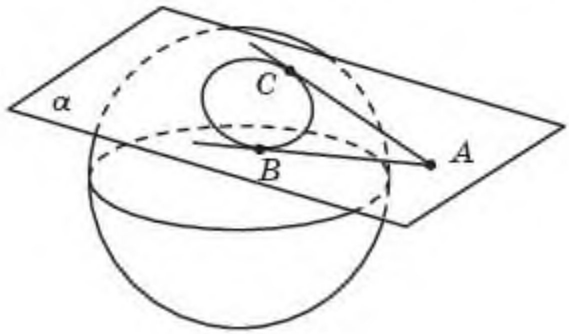


Рис. 15.7

Какая фигура получается в сечении шара плоскостью?

По аналогии с рассмотреными случаями расположения сферы и плоскости самостоятельно рассмотрите случаи взаимного расположения сферы и прямой.

Прямая, имеющая со сферой одну общую точку, называется касательной прямой.

Теорема. ***Отрезки касательных прямых к сфере, проведенных из одной точки, расположенной вне этой сферы, равны между собой.***

Доказательство. Пусть AB и AC — отрезки касательных к сфере, проведенных из точки A (рис. 15.7), где B и C — точки касания.

Рассмотрим плоскость α, проходящую через точки A, B и C. Она пересекает сферу по окружности, касающейся прямых AB и AC в точках B и C соответственно. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности, имеем $AB = AC$. ☐

Вопросы

1. Какая фигура называется *сферой*?
2. Что называется *радиусом сферы*?
3. Что называется *хордой сферы*?
4. Что называется *диаметром сферы*?
5. Вращением какой фигуры можно получить сферу?
6. Какая фигура называется *шаром*?

7. Что называется *радиусом шара*?
8. Что называется *хордой шара*?
9. Что называется *диаметром шара*?
10. Вращением какой фигуры можно получить шар?
11. Что называется *поверхностью шара*?
12. В каком случае сфера и плоскость не имеют общих точек?
13. В каком случае сфера и плоскость имеют одну общую точку?
14. В каком случае сфера и плоскость пересекаются по окружности?
15. Какая плоскость называется *касательной плоскостью к сфере*?
16. Какая прямая называется *касательной прямой к сфере*?

Задачи

А

15.1. На листе бумаги в клетку изобразите сферу, аналогичную данной на рисунке 15.8. Нарисуйте какие-нибудь параллели и меридианы.

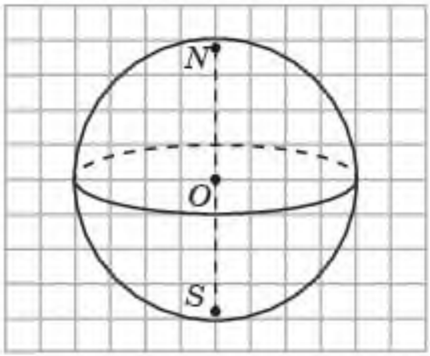


Рис. 15.8

15.2. Какому неравенству удовлетворяют точки A, лежащие: а) внутри шара с центром в точке O и радиусом R; б) вне этого шара?

15.3. Радиус сферы равен 4 см. Как расположена данная точка относительно сферы, если расстояние от нее до центра сферы равно: а) 3; б) 4; в) 5?

15.4. Сколько диаметров можно провести через центр сферы?

15.5. Найдите диаметр сферы, если известно, что он на 55 мм больше радиуса.

15.6. Расстояние между точками A и B равно 2 см. Найдите наименьший возможный радиус сферы, проходящей через эти точки.

15.7. Как расположены относительно друг друга сфера и плоскость, если радиус сферы равен 7 см, а плоскость удалена от ее центра на: а) 6 см; б) 7 см; в) 8 см?

В

15.8. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной сфере: а) через точку, принадлежащую сфере; б) через точку, расположенную внутри сферы; б) через точку, расположенную вне сферы?

15.9. Шар радиусом 5 см пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на 3 см. Найдите радиус круга, получившегося в сечении.

15.10. Радиус сферы равен 3 см. Расстояние от точки до центра сферы равно 5 см. Найдите длину отрезка касательной, проведенной через данную точку к данной сфере.

15.11. Как расположены относительно друг друга сфера и прямая, если радиус сферы равен 6 см, а прямая удалена от ее центра на: а) 5 см; б) 6 см; в) 7 см?

15.12. Радиус сферы равен 3 см. Длина отрезка касательной, проведенной через данную точку к данной сфере, равна 4 см. Найдите расстояние от данной точки до центра сферы.

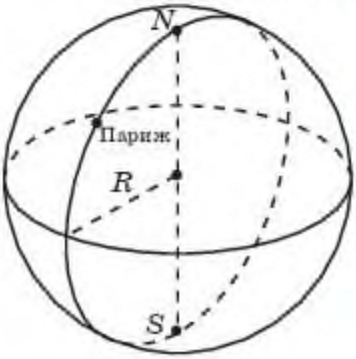


Рис. 15.9

15.13. Радиус сферы равен 6 см. Расстояние от точки до центра сферы равно 10 см. Найдите длину отрезка касательной.

15.14. Расстояние от точки до центра сферы равно 13 см. Длина отрезка касательной, проведенной через данную точку к данной сфере, равна 12 см. Найдите радиус сферы.

15.15. Как расположены между собой сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, и плоскость, заданная уравнением: а) $z = 1$; б) $z = 2$; в) $z = 3$?

15.16. Найдите радиус Земли (рис. 15.9), зная, что длина Парижского меридиана равна 40 000 км.

15.17. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной сфере через прямую, не имеющую со сферой общих точек?

15.18. Радиус сферы равен 4 см. Расстояние от данной точки до центра этой сферы равно 6 см. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния от данной точки до точек сферы.

C

15.19. Наименьшее и наибольшее расстояния от данной точки, расположенной вне сферы, до точек сферы равны 4 см и 6 см. Найдите радиус сферы.

15.20. Радиус шара равен 2 см. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.

15.21. Сколько можно провести общих касательных плоскостей к двум сферам при условии, что ни одна из них не лежит внутри другой?

15.22. Найдите геометрическое место центров сфер, которые касаются двух параллельных плоскостей.

15.23. Найдите геометрическое место касательных прямых к сфере, проходящих через данную точку на этой сфере.

15.24. Найдите геометрическое место отрезков касательных прямых к сфере, проходящих через данную точку вне этой сферы.

15.25. Как расположены между собой сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и плоскость, заданная уравнением: а) $x + y + z = \sqrt{2}$; б) $x + y + z = \sqrt{3}$; в) $x + y + z = 2$?

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

15.26. Повторите определения окружностей, вписанных и описанных около прямоугольника, треугольника, трапеции; формулы для нахождения их радиусов.

§ 16*. Комбинации тел вращения

По аналогии с понятием окружности, описанной около прямоугольника, и окружности, вписанной в квадрат, определим понятие сферы, описанной около цилиндра, и сферы, вписанной в цилиндр.

Сфера называется *описанной около цилиндра*, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. При этом цилиндр называется *вписанным в сферу* (рис. 16.1).

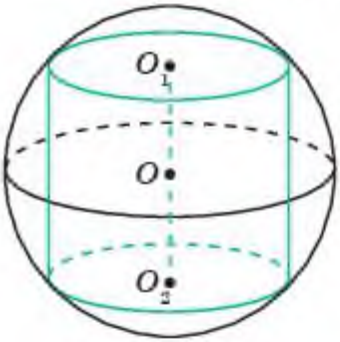


Рис. 16.1

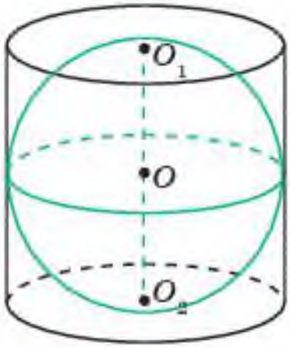


Рис. 16.2

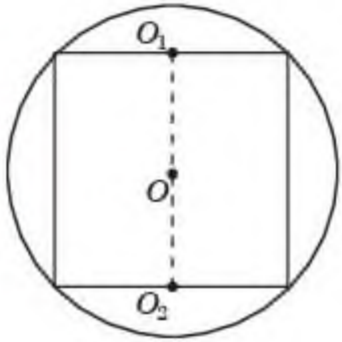


Рис. 16.3

Сфера называется *вписанной в цилиндр*, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей) (рис. 16.2). При этом цилиндр называется *описанным около сферы*.

Теорема. ***Около цилиндра можно описать сферу. Ее радиус равен радиусу окружности, описанной около прямоугольника, являющегося осевым сечением этого цилиндра.***

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение цилиндра, являющееся прямоугольником, и описанную около него окружность (рис. 16.3). Цилиндр получается вращением этого прямоугольника вокруг прямой, проходящей через середины O_1, O_2 двух его противолежащих сторон. Вращение окружности вокруг этой прямой дает сферу, описанную около данного цилиндра. Радиус этой сферы равен радиусу окружности, описанной около прямоугольника.

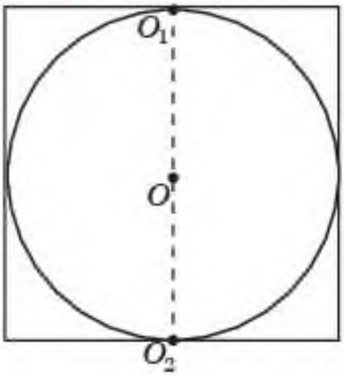


Рис. 16.4

Если радиус основания цилиндра равен r, а его высота равна h, то радиус R сферы, описанной около этого цилиндра, выражается формулой:

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Теорема. ***В цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его осевым сечением является квадрат. Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение цилиндра.***

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение цилиндра (рис. 16.4).

Сфера вписана в этот цилиндр, если в прямоугольник, являющийся осевым сечением этого цилиндра, вписана окружность. Это может быть только в случае, если этот прямоугольник является квадратом. Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение цилиндра.

Если радиус основания цилиндра равен R, то и радиус сферы равен R.

По аналогии с понятием окружности, описанной около треугольника, и окружности, вписанной в треугольник, определим понятие сферы, описанной около конуса, и сферы, вписанной в конус.

Сфера называется *описанной около конуса*, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере (рис. 16.5). При этом конус называется *вписанным в сферу*.

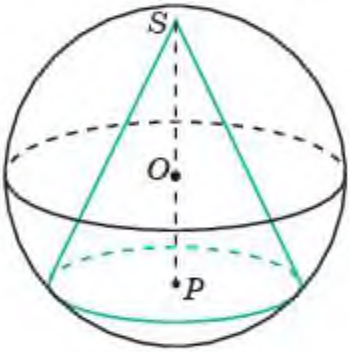


Рис. 16.5

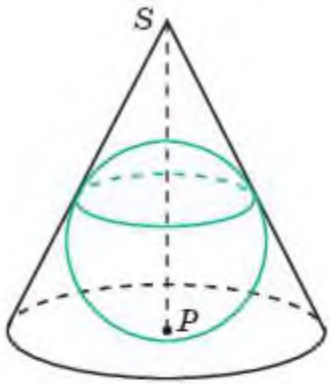


Рис. 16.6

Сфера называется *вписанной в конус*, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей) (рис. 16.6). При этом конус называется *описанным около сферы*.

Теорема. ***Около конуса можно описать сферу. Ее радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника, являющегося осевым сечением этого конуса.***

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение конуса, являющееся равнобедренным треугольником, и описанную около него окружность (рис. 16.7). Конус получается вращением этого треугольника вокруг прямой, содержащей его высоту, опущенную на основание. Вращение окружности вокруг этой прямой дает сферу, описанную около данного конуса. Радиус этой сферы равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника. □

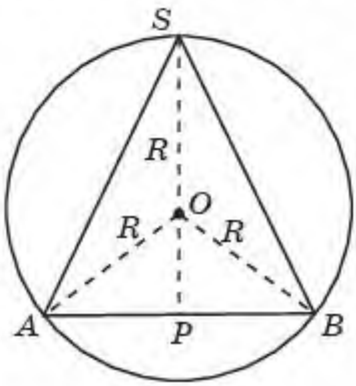


Рис. 16.7

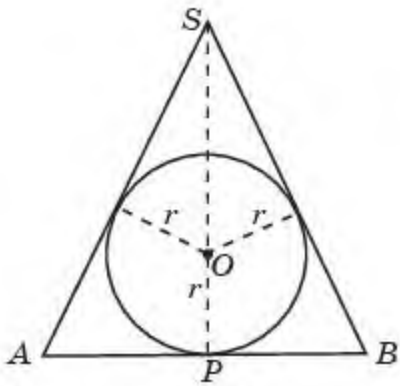


Рис. 16.8

Напомним, что радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны a, b, c, а площадь равна S, выражается формулой:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Этой же формулой выражается радиус R сферы, описанной около конуса, осевым сечением которого является треугольник, стороны которого равны a, b, c, а площадь равна S.

Пример 1. Радиус основания конуса равен 6 см, образующая равна 10 см. Найдите радиус описанной сферы.

Решение. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, стороны которого равны 12 см, 10 см, 10 см. Высота этого треугольника, опущенная на его основание, равна 8 см, площадь равна 48 см. Следовательно, радиус сферы, описанной около этого конуса, равен $6\frac{1}{4}$ см.

Теорема. ***В конус можно вписать сферу. Ее радиус равен радиусу окружности, вписанной в треугольник, являющегося осевым сечением этого конуса.***

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение конуса, являющееся равнобедренным треугольником, и вписанную в него окружность (рис. 16.8). Конус получается вращением этого треугольника вокруг прямой, содержащей его высоту, опущенную на основание. Вращение окружности вокруг этой прямой дает сферу, вписанную в данный конус. Радиус этой сферы равен радиусу окружности, вписанной в равнобедренный треугольник.

Напомним, что радиус окружности, вписанной в треугольник, стороны которого равны a, b, c, а площадь равна S, выражается формулой:

$$r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Этой же формулой выражается радиус r сферы, вписанной в конус, осевым сечением которого является треугольник, стороны которого равны a, b, c, а площадь равна S.

Пример 2. Радиус основания конуса равен 6 см, образующая равна 10 см. Найдите радиус вписанной сферы.

Решение. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, стороны которого равны 12 см, 10 см, 10 см. Высота этого треугольника, опущенная на его основание, равна 8 см, площадь равна 48 см^2. Следовательно, радиус сферы, вписанной в этот конус, равен 3 см.

По аналогии с понятием окружности, описанной около равнобедренной трапеции, и окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, определим понятие сферы, описанной около усеченного конуса, и сферы, вписанной в усеченный конус.

Сфера называется *описанной около усеченного конуса*, если окружности оснований усеченного конуса лежат на сфере (рис. 16.9). При этом усеченный конус называется *вписанным в сферу*.

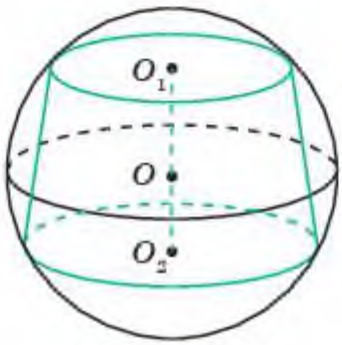


Рис. 16.9

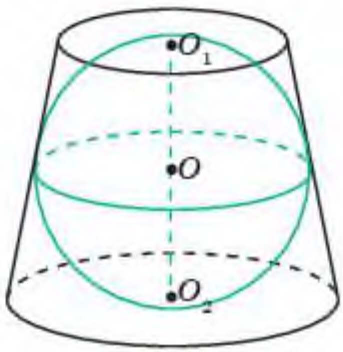


Рис. 16.10

Сфера называется *вписанной в усеченный конус*, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей) (рис. 16.10). При этом усеченный конус называется *описанным около сферы*.

Теорема. ***Около усеченного конуса можно описать сферу. Ее радиус равен радиусу окружности, описанной около равнобедренной трапеции, являющейся осевым сечением этого усеченного конуса.***

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса, являющееся равнобедренной трапецией, и описанную около нее окружность (рис. 16.11).

Усеченный конус получается вращением этой трапеции вокруг прямой, содержащей прямую, проходящую через середины оснований этой трапеции. Вращение окружности вокруг этой прямой дает сферу, описанную около данного усеченного конуса. Радиус этой сферы равен радиусу окружности, описанной около равнобедренной трапеции.

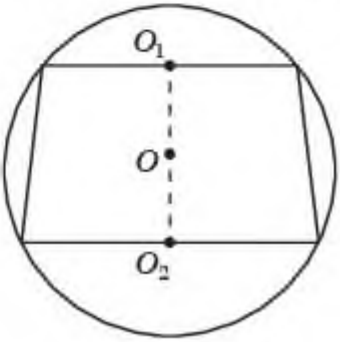


Рис. 16.11

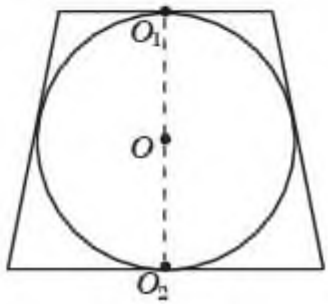


Рис. 16.12

Теорема. ***В усеченный конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его осевым сечением является равнобедренная трапеция, у которой сумма оснований равна сумме боковых сторон. Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение усеченного конуса.***

Доказательство. Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса (рис. 16.12). Сфера вписана в этот усеченный конус, если в равнобедренную трапецию, являющуюся осевым сечением этого усеченного конуса, вписана окружность. Это может быть только в случае, если для этой трапеции сумма оснований равна сумме боковых сторон. Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности, вписанной в эту трапецию.

Вопросы

1. Какая сфера называется *описанной около цилиндра*?
2. Какой цилиндр называется *вписанным в сферу*?
3. Всегда ли около цилиндра можно описать сферу?
4. Какая сфера называется *вписанной в цилиндр*?
5. Какой цилиндр называется *вписанным в сферу*?
6. В какой цилиндр можно вписать сферу?
7. Какая сфера называется *описанной около конуса*?
8. Какой конус называется *вписанным в сферу*?
9. Всегда ли около конуса можно описать сферу?
10. Какая сфера называется *вписанной в конус*?

11. Какой конус называется *описанным около сферы*?
12. Всегда ли конус можно вписать в сферу?
13. Какая сфера называется *описанной около усеченного конуса*?
14. Какой усеченный конус называется *вписанным в сферу*?
15. Всегда ли около усеченного конуса можно описать сферу?
16. Какая сфера называется *вписанной в усеченный конус*?
17. Какой усеченный конус называется *описанным около сферы*?
18. В какой усеченный конус можно вписать сферу?

Задачи

A

16.1. В цилиндр вписана сфера радиусом R. Найдите радиус основания и высоту цилиндра?

16.2. В цилиндр, высота которого равна h, вписана сфера. Найдите ее радиус.

16.3. Около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1 см, описана сфера. Найдите ее радиус.

16.4. Около цилиндра, радиус основания которого равен 1 см, описана сфера радиусом 2 см. Найдите высоту цилиндра.

16.5. Около цилиндра, высота которого равна 2 см, описана сфера радиусом 2 см. Найдите радиус основания цилиндра.

16.6. Осевым сечением цилиндра является прямоугольник, стороны которого равны 3 см и 4 см. Найдите радиус описанной сферы.

16.7. Найдите площадь поверхности цилиндра, описанного около сферы радиусом 1 см.

16.8. Радиус сферы, вписанной в усеченный конус, равен 2 см. Найдите высоту этого усеченного конуса.

B

16.9. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник со стороной равной 1 см. Найдите радиус: а) описанной; б) вписанной сферы.

16.10. Выразите радиус R сферы, описанной около конуса, через его высоту h и радиус r окружности основания.

16.11. Радиус основания конуса равен 3 см, высота равна 4 см. Найдите радиус описанной сферы.

16.12. Выразите радиус R сферы, вписанной в конус, через его высоту h и радиус r окружности основания.

16.13. Радиус основания конуса равен 3 см, высота равна 4 см. Найдите радиус вписанной сферы.

16.14. Образующая конуса и радиус описанной сферы равны 2 см. Найдите радиус основания конуса.

16.15. Радиус основания конуса равен 1 см. Образующая составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите радиус: а) описанной; б) вписанной сферы.

16.16. Образующая конуса равна 1 см и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите радиус: а) описанной; б) вписанной сферы.

C

16.17. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 1 см, образующая равна 2. Найдите радиус описанной сферы.

16.18. Докажите, что радиус r сферы, вписанной в усеченный конус, радиусы оснований которого равны R_1, R_2, а образующая равна b, выражается формулой:

$$r = \frac{\sqrt{b^2 - (R_1 - R_2)^2}}{2}.$$

16.19. Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 1 см, образующая равна 5 см. Найдите радиус вписанной сферы.

16.20. Радиусы оснований усеченного конуса, в который вписана сфера, равны 2 см и 3 см. Найдите образующую этого усеченного конуса.

16.21. Образующая усеченного конуса, в который вписана сфера, равна 8 см. Радиус одного основания этого усеченного конуса равен 5 см. Найдите радиус другого основания.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

16.22. Повторите определение длины окружности и формулу для вычисления длины окружности.

§ 17. Площадь сферы и ее частей

Определение площади сферы аналогично определению длины окружности.

Напомним, что длиной окружности считают число, к которому стремятся периметры правильных многоугольников, описанных около этой окружности, при увеличении числа их сторон.

Рассмотрим правильный многоугольник, описанный около окружности, и фигуру, образованную вращением этого многоугольника вокруг прямой, содержащей диаметр PQ окружности (рис. 17.1). В поверхность этой фигуры могут входить боковые поверхности конусов, усеченных

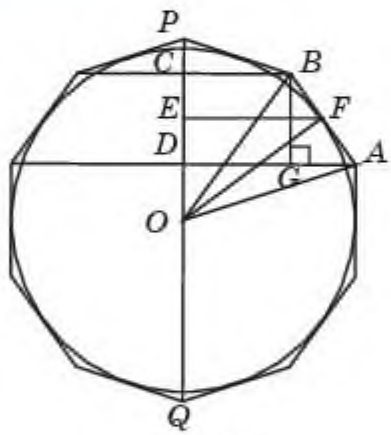


Рис. 17.1

конусов и цилиндров, а сама она будет описана около сферы, полученной вращением окружности. Площадь этой поверхности равна сумме площадей входящих в нее боковых поверхностей конусов, усеченных конусов и цилиндров.

Площадью сферы, полученной вращением окружности, считается число, к которому стремятся площади поверхностей фигур, образованных вращением правильных многоугольников, описанных около этой окружности, при увеличении числа их сторон.

Нашей задачей является нахождение формулы площади сферы радиусом R. Площадь сферы называется также *площадью поверхности шара*, ограниченного этой сферой.

Рассмотрим поверхность, полученную вращением стороны AB правильного многоугольника M, описанного около окружности. Она представляет собой боковую поверхность усеченного конуса, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг прямой CD (рис. 17.1). Площадь $S(AB)$ этой поверхности равна произведению длины окружности, радиусом которой является средняя линия EF, и боковой стороны AB трапеции, т. е. $S(AB) = 2\pi \cdot EF \cdot AB$. Имеем $CD = BG = AB \cdot \sin\angle BAD$. Следовательно,

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD}.$$

Учитывая, что угол BAD равен углу EOF (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), получаем:

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD} = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle EOF} = 2\pi \cdot OF \cdot CD = 2\pi R \cdot CD.$$

Аналогичные формулы имеют место для площадей поверхностей, полученных вращением других сторон многоугольника M. Складывая эти площади, получим формулу площади $S(M)$ поверхности вращения многоугольника M:

$$S(M) = 2\pi \cdot OF \cdot PQ = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Площадью сферы считается число, к которому стремятся площади поверхностей вращения правильных многоугольников, описанных около окружности, при увеличении числа их сторон. Таким образом, для площади S сферы имеет место формула:

$$S = 4\pi R^2.$$

Докажите, что площадь сферы равна площади боковой поверхности цилиндра, описанного около этой сферы.

Шаровым сегментом называется меньшая часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью, не проходящей через центр шара (рис. 17.2).

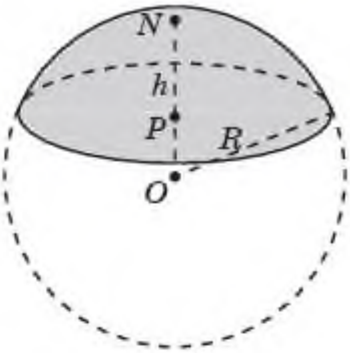


Рис. 17.2

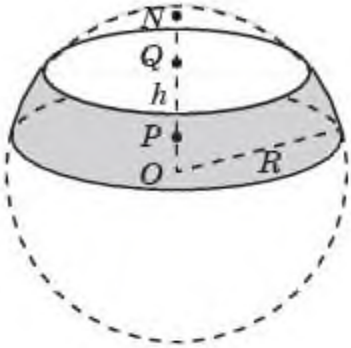


Рис. 17.3

Круг, образованный сечением шара этой плоскостью, называется *основанием шарового сегмента.*

Меньшая часть поверхности шара, отсекаемая от шара этой плоскостью, называется *боковой поверхностью шарового сегмента.*

Основание шарового сегмента и его боковая поверхность вместе составляют *поверхность шарового сегмента.*

Часть радиуса шара, лежащая внутри шарового сегмента и перпендикулярная его основанию, называется *высотой шарового сегмента.*

Шаровым поясом называется часть шара, заключенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими этот шар (рис. 17.3). *Круги*, образованные сечениями шара этими плоскостями называются *основаниями шарового пояса.* Часть поверхности шара, заключенная между этими плоскостями, называется *боковой поверхностью шарового пояса.*

Основания шарового пояса и его боковая поверхность вместе составляют *поверхность шарового пояса.*

Часть диаметра шара, лежащая внутри шарового пояса и перпендикулярная его основаниям, называется *высотой шарового пояса.*

Приведенный выше вывод формулы площади сферы можно применить для шарового сегмента и шарового пояса. В результате получим следующие формулы площади $S_{\text{сегмента}}$ боковой сегментной поверхности шарового сегмента и площади $S_{\text{пояса}}$ боковой поверхности шарового пояса:

$$S_{\text{сегмента}} = 2\pi R \cdot h, \quad S_{\text{пояса}} = 2\pi R \cdot h,$$

где R — радиус шара, h — высоты шарового сегмента и шарового пояса.

Вопросы

1. Какое число считается *площадью сферы*?
2. Что называется *площадью поверхности шара*?

3. Как вычисляется площадь сферы радиусом R?
4. Что называется *шаровым сегментом*?
5. Как вычисляется площадь боковой поверхности шарового сегмента?
6. Что называется *шаровым поясом*?
7. Как вычисляется площадь боковой поверхности шарового пояса?

Задачи

A

17.1. Найдите площадь сферы радиусом 1 см.

17.2. Найдите радиус сферы, площадь которой равна 1 $см^2$.

17.3. Площадь большого круга шара равна 3 $см^2$. Найдите площадь поверхности шара.

17.4. Как изменится площадь поверхности шара, если увеличить радиус шара в: а) два раза; б) три раза; в) n раз?

17.5. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их радиусов.

17.6. Радиусы двух шаров равны 6 см и 8 см. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

17.7. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности цилиндра.

17.8. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в цилиндр, осевым сечением которого является единичный квадрат.

17.9. Найдите площадь поверхности сферы, описанной около цилиндра, осевым сечением которого является единичный квадрат.

17.10. Диаметр Луны в четыре раза меньше диаметра Земли. Во сколько раз площадь поверхности Луны меньше площади поверхности Земли?

B

17.11. Во сколько раз площадь сферы, вписанной в куб, меньше площади сферы, описанной около этого куба.

17.12. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Во сколько раз площадь описанной сферы больше площади сферы, вписанной в этот конус?

17.13. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности шара.

17.14. Через середину радиуса шара проведена плоскость, перпендикулярная этому радиусу. В каком отношении эта плоскость разбивает площадь поверхности данного шара?

17.15. Радиус шара равен 2 см. Найдите площадь боковой поверхности шарового сегмента, высота которого равна 1 см.

17.16. Радиус шара равен 3 см. Найдите площадь боковой поверхности шарового пояса, высота которого равна 1 см.

17.17. Найдите площадь поверхности Земли, считая длину Парижского меридиана равной 40 000 км.

17.18. Диаметр шара монумента Байтерек в Нур-Султане (рис. 17.4) равен 22 м. Найдите площадь поверхности этого шара.

Рис. 17.4

17.19. ЭКСПО-2017 — Международная специализированная выставка под эгидой Международного бюро выставок, прошедшая в столице Казахстана в 2017 году. Главным объектом выставки стало здание "Нұр Әлем" (каз. "Сияющий мир"), которое является самым большим сферическим зданием в мире. Его высота — 100 метров, а диаметр — 80 метров (рис. 17.5). Найдите площадь поверхности этой сферы. (Примите $\pi \approx 3$)

Рис. 17.5

C

17.20. Шар радиусом 1 см пересечен двумя параллельными плоскостями, которые делят перпендикулярный им диаметр шара в отношении 1 : 2 : 3. Определите площадь поверхности шара, заключенную между секущими плоскостями.

17.21. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник (рис. 17.6). Докажите, что площадь поверхности конуса равна

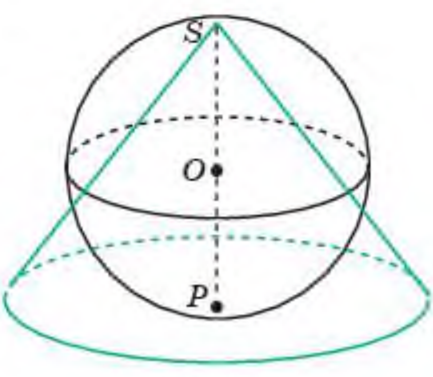


Рис. 17.6

площади поверхности шара, диаметр которого равен высоте конуса.

17.22. Дан единичный куб. Шар, радиус которого равен 1 см, имеет своим центром вершину этого куба (рис. 17.7). Найдите площадь части поверхности шара, содержащейся в кубе.

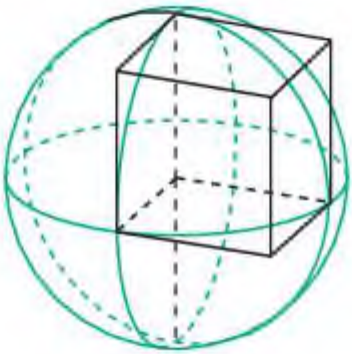


Рис. 17.7

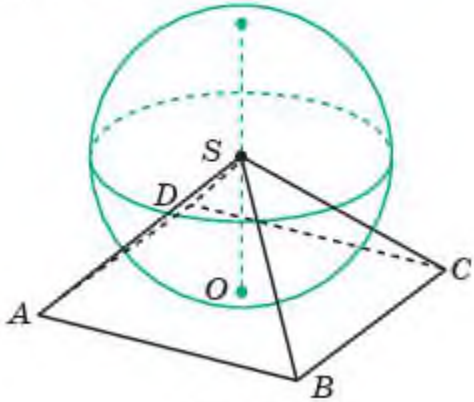


Рис. 17.8

17.23. Дана правильная четырехугольная пирамида, стороны основания которой равны 2 см, а высота равна 1 см. Шар, радиус которого равен 1 см, имеет своим центром вершину этой пирамиды (рис. 17.8). Найдите площадь части поверхности шара, содержащейся в пирамиде.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

17.24. Повторите определения вписанных и описанных многоугольников.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Радиус основания цилиндра равен 3 см, образующая 8 см. Найдите диагональ осевого сечения:

A) 6 см; B) 10 см; C) 12 см; D) 16 см.

2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, получающегося вращением прямоугольника, стороны которого равны 1 см и 2 см, вокруг прямой содержащей его большую сторону:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 4π см^2; D) 6π см^2.

3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, получающегося вращением правильной треугольной призмы, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, вокруг прямой содержащей боковое ребро:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 4π см^2; D) 6π см^2.

4. Радиус основания конуса равен 6 см, образующая равна 10 см. Найдите высоту конуса:

A) 6 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $6\sqrt{2}$ см; D) 8 см.

5. Образующая конуса равна 6 см и наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите радиус основания этого конуса:

A) 3 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $3\sqrt{3}$ см; D) 6 см.

6. Найдите площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен 2 см, а образующая равна 3 см:

A) 6π см^2; B) 8π см^2; C) 10π см^2; D) 12π см^2.

7. Радиус основания конуса равен 2 см. Через середину высоты этого конуса проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь получившегося сечения:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

8. Найдите площадь поверхности конуса, получающегося вращением равнобедренного треугольника, основание которого равно 2 см, а боковая сторона равна 4 см, вокруг прямой, содержащей его высоту, опущенную на основание:

A) 3π см^2; B) 4π см^2; C) 5π см^2; D) 6π см^2.

9. Найдите площадь боковой поверхности конуса, получающегося вращением правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2 см, а боковые ребра равны 3 см, вокруг прямой, содержащей ее высоту:

A) 3π см^2; B) 4π см^2; C) 5π см^2; D) 6π см^2.

10. Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 1 см, высота равна 4 см. Найдите образующую усеченного конуса:

A) 3 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 6 см.

11. Образующая усеченного конуса равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 45°. Радиус большего основания усеченного конуса равен 2 см. Найдите радиус меньшего основания этого усеченного конуса:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ см; D) $(2 - \sqrt{2})$ см.

12. Основания равнобедренной трапеции равны 2 см и 4 см, а боковые стороны равны 3 см. Найдите площадь поверхности вращения этой трапеции, вокруг прямой, проходящей через середины оснований:

A) 8π см^2; B) 10π см^2; C) 12π см^2; D) 14π см^2.

13. Радиус сферы равен 4 см. Расстояние от точки до центра сферы равно 5 см. Найдите длину отрезка касательной, проведенной через данную точку к данной сфере:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

14. Шар радиусом 2 см пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 1 см. Найдите площадь круга, получившегося в сечении:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

15. Радиус шара равен 6 см. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения:

A) 3π см^2; B) 6π см^2; C) 9π см^2; D) 12π см^2.

16. Наименьшее и наибольшее расстояния от данной точки, расположенной внутри сферы, до точек сферы равны соответственно 4 см и 6 см. Найдите радиус сферы:

A) 2 см; B) 3 см; C) 4 см; D) 5 см.

17. Осевым сечением цилиндра является прямоугольник, стороны которого равны 6 см и 8 см. Найдите радиус описанной сферы:

A) 5 см; B) 6 см; C) 8 см; D) 10 см.

18. Найдите радиус сферы, вписанной в конус, осевым сечением которого является правильный треугольник со стороной равной 2 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.

19. Найдите площадь сферы радиусом 2 см:

A) 12π см^2; B) 14π см^2; C) 16π см^2; D) 18π см^2.

20. Радиус шара равен 3 см. Найдите площадь боковой поверхности шарового пояса, высота которого равна 2 см:

A) 6π см^2; B) 8π см^2; C) 10π см^2; D) 12π см^2.

Глава IV* ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОГРАННИКИ

§ 18. Цилиндр и призма. Конус и пирамида

Прямая призма называется *вписанной в цилиндр*, если ее основания вписаны в основания цилиндра (рис. 18.1). При этом цилиндр называется *описанным около призмы*.

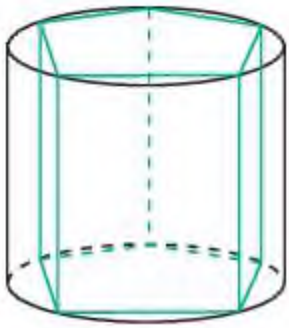


Рис. 18.1

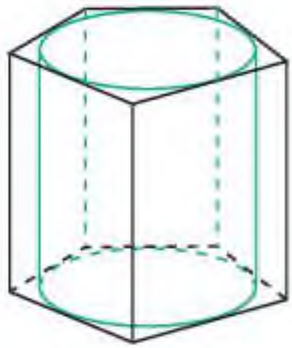


Рис. 18.2

Докажите, что около прямой призмы можно описать цилиндр тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.

Прямая призма называется *описанной около цилиндра*, если ее основания описаны около оснований цилиндра (рис. 18.2). При этом цилиндр называется *вписанным в призму*.

Докажите, что в прямую призму можно вписать цилиндр тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.

Пирамида называется *вписанной в конус*, если ее вершина совпадает с вершиной конуса, а основание вписано в основание конуса (рис. 18.3). При этом конус называется *описанным около пирамиды*.

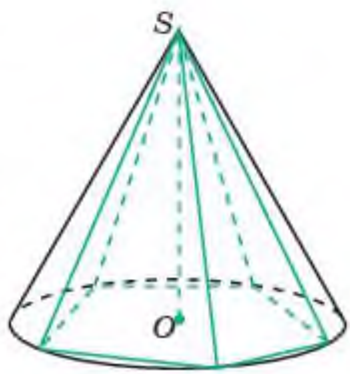


Рис. 18.3

Теорема. ***Около пирамиды можно описать конус тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность, и основание высоты пирамиды является центром этой окружности.***

Доказательство. Если основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания пирамиды, то

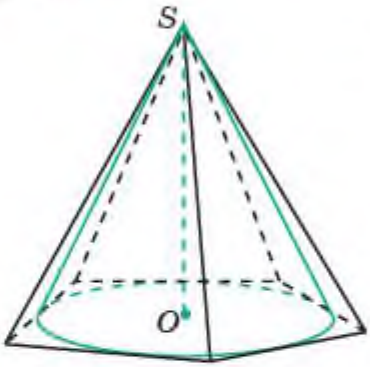


Рис. 18.4

конус, вершиной которого является вершина пирамиды, а основанием — круг, ограниченный этой окружностью, будет описанным около этой пирамиды (рис. 18.3).

Обратно, если около пирамиды описан конус, то около основания пирамиды будет описана окружность. Высотой пирамиды будет высота конуса. Следовательно, основание высоты пирамиды будет центром окружности, описанной около основания пирамиды. □

Пирамида называется *описанной около конуса*, если ее вершина совпадает с вершиной конуса, а основание описано около основания конуса (рис. 18.4). При этом конус называется *вписанным в пирамиду*.

Теорема. ***В пирамиду можно вписать конус тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность, и основание высоты пирамиды является центром этой окружности.***

Доказательство. Если в основание пирамиды можно вписать окружность, и основание высоты пирамиды является центром этой окружности, то конус, вершиной которого является вершина пирамиды, а основанием — круг, ограниченный этой окружностью, будет вписанным в эту пирамиду (рис. 18.4).

Обратно, если в пирамиду вписан конус, то в основание пирамиды будет вписана окружность. Высотой пирамиды будет высота конуса. Следовательно, основание высоты пирамиды будет центром окружности, вписанной в основание пирамиды. □

Вопросы

1. Какая призма называется *вписанной в цилиндр*?
2. Около какой призмы можно описать цилиндр?
3. Какая призма называется *описанной около цилиндра*?
4. В какую призму можно вписать цилиндр?
5. Какая пирамида называется *вписанной в конус*?
6. Около какой пирамиды можно описать конус?
7. Какая пирамида называется *описанной около конуса*?
8. В какую пирамиду можно вписать конус?

Задачи

А

18.1. Можно ли описать цилиндр около: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) наклонного параллелепипеда; г) прямой треугольной призмы; д) правильной n-угольной призмы?

18.2. Можно ли вписать цилиндр в: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед, грани которого отличны от квадратов; в) наклонный параллелепипед; г) прямую треугольную призму; д) правильную n-угольную призму?

18.3. Можно ли описать конус около правильной пирамиды?

18.4. Можно ли вписать конус в правильную пирамиду?

18.5. В каком случае в прямоугольный параллелепипед можно вписать цилиндр?

18.6. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, описанного около единичного куба (рис. 18.5).

18.7. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в единичный куб (рис. 18.6).

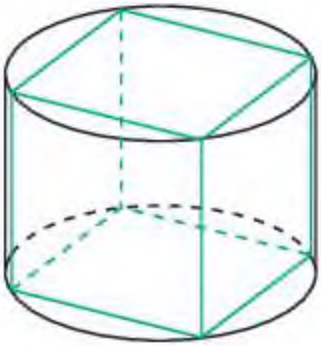


Рис. 18.5

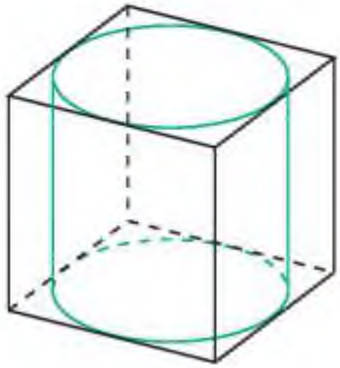


Рис. 18.6

B

18.8. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, описанного около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины равны 1 см, 2 см, 3 см. Сколько таких цилиндров?

18.9. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, описанного около правильной треугольной призмы, ребра которой равны 1 см. Сделайте рисунок.

18.10. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в правильную треугольную призму, ребра которой равны 1 см. Сделайте рисунок.

18.11. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, описанного около правильной шестиугольной призмы, ребра которой равны 1 см. Сделайте рисунок.

18.12. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, ребра которой равны 1 см. Сделайте рисунок.

18.13. Боковое ребро правильной пирамиды равно 1 см и образует угол: а) 30°; б) 45°; в) 60° с плоскостью основания этой пирамиды. Найдите радиус конуса, описанного около этой пирамиды.

C

18.14. Найдите радиус основания и высоту конуса, описанного около правильной треугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 см.

18.15. Найдите радиус основания и высоту конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 см.

18.16. Найдите радиус основания и высоту конуса, описанного около правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см.

18.17. Найдите радиус основания и высоту конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду, ребра которой равны 1 см.

18.18. Найдите радиус основания и высоту конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны 1 см.

18.19. Найдите радиус основания и высоту конуса, вписанного в правильную шестиугольную пирамиду, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см.

18.20. Докажите, что если около четырехугольной призмы можно описать цилиндр, то суммы противолежащих двугранных углов при боковых ребрах этой призмы равны.

18.21. Докажите, что если в четырехугольную пирамиду можно вписать конус, то суммы противолежащих плоских углов четырехгранного угла при вершине этой пирамиды равны.

18.22. Докажите, что если около четырехугольной пирамиды можно описать конус, то суммы противолежащих двугранных углов четырехгранного угла при вершине этой пирамиды равны.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

18.23. Повторите определение многоугольника, вписанного в окружность.

§ 19. Многогранники, вписанные в сферу. Призма

Напомним соответствующие понятия для многоугольников и окружностей.

Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины принадлежат данной окружности. При этом окружность называется описанной около многоугольника.

В планиметрии доказывалось, что около любого треугольника можно описать окружность. Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам данного треугольника. (рис. 19.1).

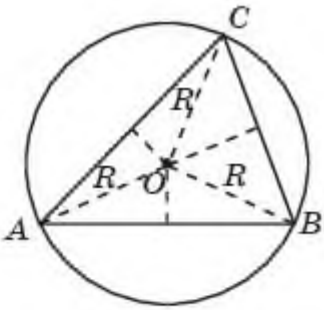


Рис. 19.1

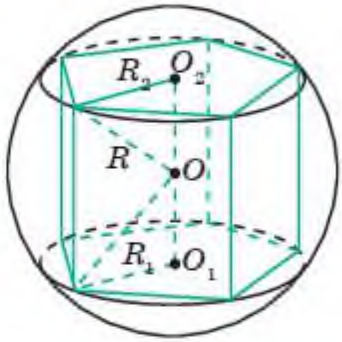


Рис. 19.2

Перейдем теперь к пространственным фигурам.

Многогранник называется *вписанным в сферу*, если все его вершины принадлежат данной сфере. При этом сфера называется *описанной около многогранника*.

Теорема. ***Около прямой призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой призмы можно описать окружность.***

Доказательство. Рассмотрим прямую призму, около основания которой описана окружность с центром в точке O_1 и радиусом R_1. Тогда и около второго основания призмы можно описать окружность с центром в точке O_2 и радиусом $R_2 = R_1$. Отрезок O_1O_2 является высотой призмы. Пусть $O_1O_2 = h$, O — середина отрезка O_1O_2. Тогда сфера с центром O и радиусом $R = \sqrt{R_1^2 + \frac{h^2}{4}}$ будет искомой описанной сферой (рис. 19.2).

Обратно, если около прямой призмы описана сфера, то все вершины основания призмы принадлежат сфере. Следовательно, они принадлежат окружности, являющейся линией пересечения сферы и плоскости основания. Значит, около основания этой призмы можно описать окружность.

Следствие 1. Сфера, описанная около призмы, является сферой, описанной около цилиндра, описанного около этой призмы.

Следствие 2. Около прямоугольного параллелепипеда можно описать сферу.

Действительно, прямоугольный параллелепипед можно рассматривать как частный случай прямой призмы, основанием которой является прямоугольник. Так как около прямоугольника можно описать окружность, то и около прямоугольного параллелепипеда можно описать сферу.

Заметим, что диагонали прямоугольного параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Следовательно, эта точка равноудалена от вершин этого параллелепипеда, значит, является центром описанной сферы (рис. 19.3).

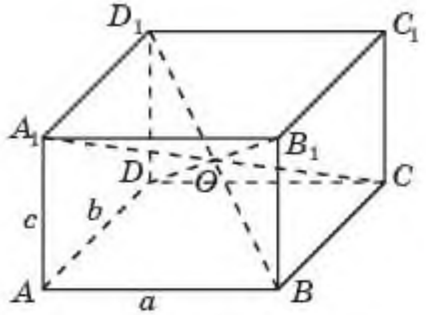


Рис. 19.3

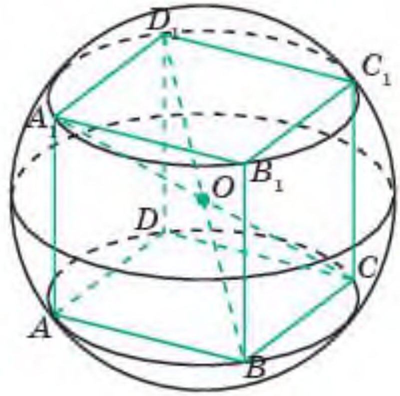


Рис. 19.4

Если ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b, c, то его диагонали равны $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Следовательно, радиус R сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, выражается формулой:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

В частности, радиус сферы, описанной около куба с ребром a, равен $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

На рисунке 19.4 изображен куб, вписанный в сферу.

Приведите пример призмы, около которой нельзя описать сферу.

Вопросы

1. Какой многогранник называется *вписанным в сферу*?
2. Какая сфера называется *описанной около многогранника*?
3. Можно ли описать сферу около прямоугольного параллелепипеда?
4. Где находится центр сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда?
5. Около какой прямой призмы можно описать сферу?

Задачи

А

19.1. Можно ли описать сферу около: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) параллелепипеда, одной из граней которого является параллелограмм, отличный от прямоугольника?

19.2. Найдите радиус сферы, описанной около единичного куба.

19.3. Найдите ребро куба, вписанного в сферу радиусом 1 см.

19.4. Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Найдите ее радиус.

B

19.5. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 см и 4 см. Радиус описанной сферы равен 3 см. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины параллелепипеда.

19.6. Приведите пример прямой призмы, около которой нельзя описать сферу.

19.7. Всегда ли центр сферы, описанной около призмы, лежит внутри призмы?

19.8. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 1 см, высота равна 2 см (рис. 19.5). Найдите радиус описанной сферы.

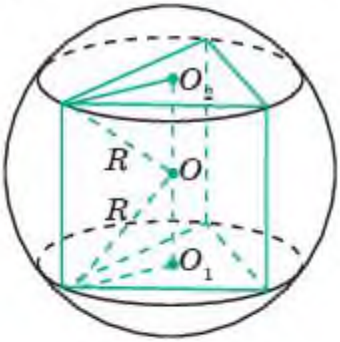


Рис. 19.5

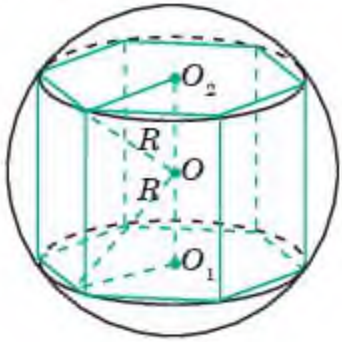


Рис. 19.6

19.9. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 1 см. Высота призмы равна 2 см. Найдите радиус описанной сферы (рис. 19.6).

C

19.10. При каком условии центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, будет находиться: а) внутри призмы; б) на одной из боковых граней призмы; в) вне призмы?

19.11. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы 24 см. Найдите радиус описанной сферы.

19.12. Около правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 1 см, описана сфера радиусом 1 см. Найдите высоту призмы.

19.13. Основанием призмы является прямоугольник со сторонами 1 см и 2 см. Радиус описанной сферы равен 2 см. Найдите высоту призмы.

19.14. Докажите, что если около четырехугольной призмы можно описать сферу, то суммы противолежащих двугранных углов при боковых ребрах этой призмы равны.

Теорема. ***Около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой пирамиды можно описать окружность.***

Доказательство. Рассмотрим пирамиду $SA_1...A_n$ (рис. 20.1), около основания $A_1...A_n$ которой можно описать окружность. Обозначим P центр этой окружности.

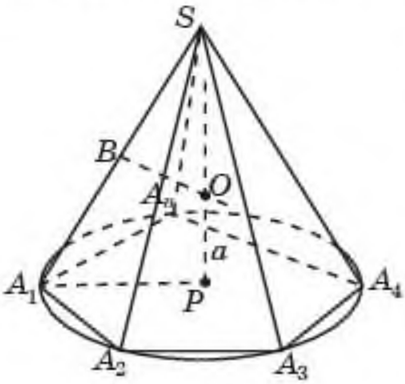


Рис. 20.1

Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A_1, ..., A_n, является прямая, назовем ее a, перпендикулярная плоскости α основания этой пирамиды и проходящая через точку P. Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A_1, S, является плоскость, назовем ее β, перпендикулярная ребру SA_1 и проходящая через его середину — точку B. Плоскость β не перпендикулярна плоскости α, следовательно, пересекает прямую a в некоторой точке O, которая будет равноудалена от всех вершин пирамиды, следовательно, будет искомым центром описанной около данной пирамиды сферы.

Обратно, если около пирамиды можно описать сферу, то все вершины основания пирамиды принадлежат сфере. Следовательно, они принадлежат окружности, являющейся линией пересечения сферы и плоскости основания. Значит, около основания пирамиды можно описать окружность. ☐

Следствие 1. Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу.

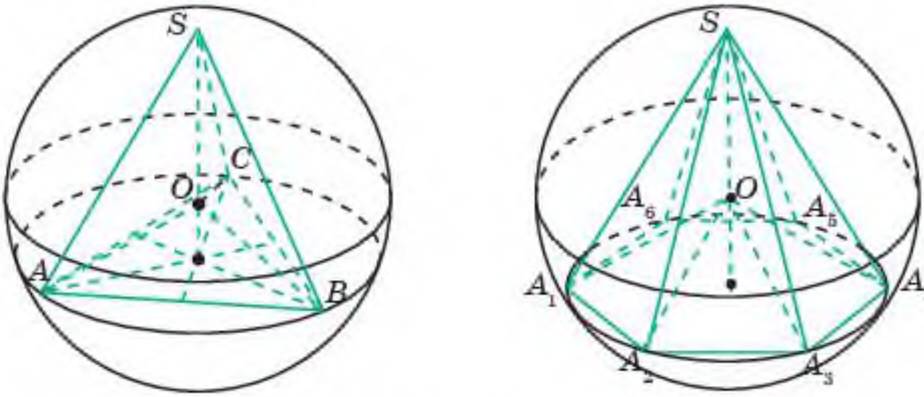
Действительно, так как основанием треугольной пирамиды является треугольник, и около любого треугольника можно описать окружность, то около любой треугольной пирамиды можно описать сферу.

Заметим, что если около основания пирамиды можно описать окружность, и центр этой окружности является основанием высоты пирамиды, то около этой пирамиды можно описать конус. Сфера, описанная около этого конуса, будет описана и около пирамиды.

Следствие 2. Около правильной пирамиды можно описать сферу.

На рисунке 20.2 изображены сферы, описанные около правильных треугольной и шестиугольной пирамид.

Следствие 3. Если около пирамиды можно описать конус, то около нее можно описать сферу. Она будет описанной около конуса, описанного около этой пирамиды.



а) б)

Рис. 20.2

Таким образом, для нахождения радиуса сферы, описанной около пирамиды можно использовать формулу для нахождения радиуса сферы, описанной около конуса, описанного около этой пирамиды.

Пример. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами равными 1 см и 2 см. Высота этой пирамиды равна 2 см, и ее основанием является точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Докажите, что около этой пирамиды можно описать сферу. Найдите ее радиус.

Решение. Около прямоугольника $ABCD$ можно описать окружность, центром которой является точка O пересечения диагоналей этого прямоугольника, а ее радиус равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. Конус, полученный вращением треугольника SAC, будет описанным около пирамиды $SABCD$. Сфера, описанная около этого конуса, будет описанной около данной пирамиды (рис. 20.3). Для треугольника SAC, являющегося осевым сечением этого конуса, имеем: $AC = \sqrt{5}$, $SO = 2$, $SA = SC = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Площадь этого треугольника равна $\sqrt{5}$ см^2. Подставляя эти данные в формулу $R = \frac{abc}{4S}$ для радиуса R сферы, описанной около конуса, получим $R = 1\frac{5}{16}$. Таким образом, радиус сферы, описанной около данной пирамиды, равен $1\frac{5}{16}$ см.

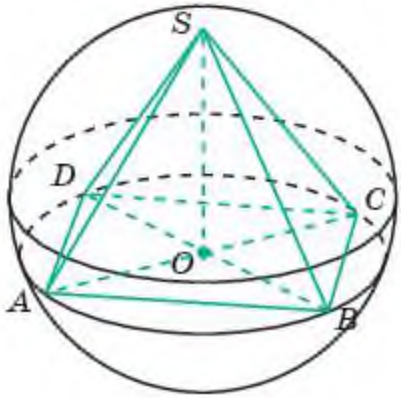


Рис. 20.3

Выразите радиус R сферы, описанной около пирамиды, через высоту h и радиус r окружности, описанной около основания пирамиды.

Вопросы

1. Около какой пирамиды можно описать сферу?
2. Около какой треугольной пирамиды можно описать сферу?
3. Можно ли описать сферу около правильной пирамиды?
4. Как связаны между собой радиусы сферы и конуса, описанных около пирамиды?

Задачи

A

20.1. Укажите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных точек.

20.2. По аналогии с рисунками 20.2, 20.3, изобразите: а) треугольную; б) четырехугольную; в) шестиугольную пирамиду, вписанную в сферу.

20.3. Найдите радиус сферы, описанной около правильной пирамиды, боковые ребра которой равны 2 см, а высота равна 1 см.

20.4. Найдите радиус сферы, описанной около правильной пирамиды, боковые ребра которой равны 2 см, а радиус окружности, описанной около основания, равен 1 см.

20.5. Найдите радиус сферы, описанной около правильной пирамиды, высота которой равна 2 см, а радиус окружности, описанной около ее основания, равен 1 см.

B

20.6. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром 1 см.

20.7. Найдите ребро правильного тетраэдра, вписанного в единичную сферу.

20.8. Найдите радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 см.

20.9. Найдите радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2 см, высота равна 1 см.

20.10. Найдите радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см.

20.11. Найдите радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания и высота которой равны 1 см.

20.12. Боковое ребро правильной пирамиды равно 1 см и образует угол: а) 30°;б) 45°; в) 60° с плоскостью основания этой пирамиды. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

20.13. Приведите пример пирамиды, около которой нельзя описать сферу.

C

20.14. Может ли центр описанной около пирамиды сферы находиться: а) внутри пирамиды; б) на основании пирамиды; в) вне пирамиды? Изобразите соответствующие пирамиды, вписанные в сферу.

20.15. Стороны основания правильной треугольной пирамиды равны 3 см, высота равна $\sqrt{3}$ см. Укажите расположение центра описанной около этой пирамиды сферы и найдите ее радиус.

20.16. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 1 см, и плоские углы при вершине равны 90°.

20.17. Ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 1 см. Укажите расположение центра описанной около этой пирамиды сферы.

20.18. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды и ее высота равны 1 см. Укажите расположение центра описанной около этой пирамиды сферы.

20.19. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник со сторонами равными 1 см и 2 см. Ребро SD равно 2 см и является высотой этой пирамиды. Найдите радиус описанной сферы.

20.20. Основанием пирамиды $SABCDEF$ является правильный шестиугольник со стороной равной 2 см. Ребро SA равно 3 см и является высотой этой пирамиды. Найдите радиус описанной сферы.

20.21. Найдите радиус сферы, описанной около октаэдра, ребро которого равно 1 см (рис. 20.4).

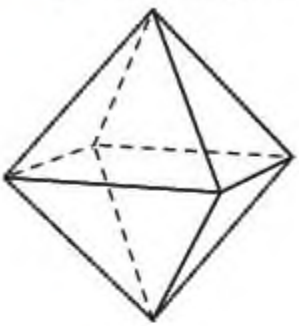


Рис. 20.4

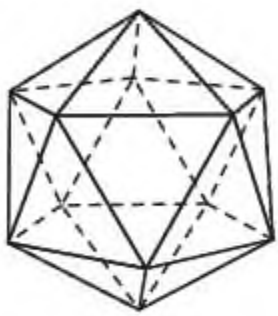


Рис. 20.5

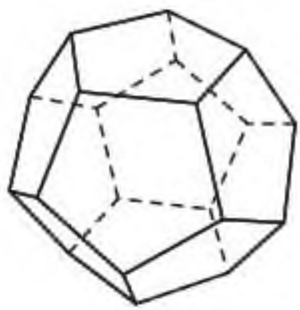


Рис. 20.6

20.22. Найдите радиус сферы, описанной около икосаэдра, ребро которого равно 1 см (рис. 20.5).

20.23. Найдите радиус сферы, описанной около додекаэдра, ребро которого равно 1 см (рис. 20.6).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

20.24. Повторите определения цилиндра, вписанного в призму, и сферы, вписанной в цилиндр.

§ 21. Многогранники, описанные около сферы. Призма

Напомним соответствующие понятия для многоугольников и окружностей.

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны этого многоугольника касаются окружности. Сам многоугольник при этом называется описанным около окружности.

В планиметрии доказывалось, что в любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Для нахождения центра вписанной в треугольник окружности, нужно провести биссектрисы его углов. Их точка пересечения O будет одинаково удалена от всех сторон треугольника, следовательно, будет искомым центром вписанной окружности (рис. 21.1).

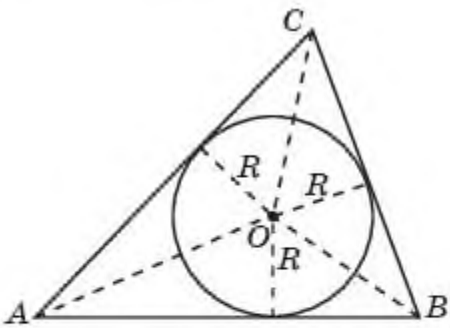


Рис. 21.1

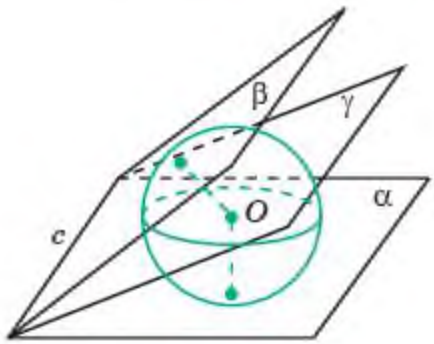


Рис. 21.2

Перейдем теперь к пространственным фигурам.

Многогранник называется *описанным около сферы*, если плоскости всех его граней касаются сферы. Сама сфера называется *вписанной в многогранник*.

Выясним сначала, какие сферы касаются одновременно граней двугранного угла.

Пусть дан двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с общей граничной прямой c. Через прямую c проведем полуплоскость γ, делящую этот двугранный угол пополам (рис. 21.2). Такая полуплоскость называется *биссектральной*.

Точки полуплоскости γ, не принадлежащие прямой c, обладают тем свойством, что расстояния от них до плоскостей α и β одинаковы. Если это расстояние принять за радиус сферы r, то сфера с центром на биссектральной полуплоскости и радиусом r будет касаться плоскости α и плоскости β. Сама биссектральная полуплоскость без прямой c дает геометрическое место центров сфер, лежащих внутри двугранного угла и касающихся плоскостей α и β.

Выясним, в каком случае в прямую призму можно вписать сферу.

Теорема. ***В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание этой призмы можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности.***

Доказательство. Пусть в прямую призму вписана сфера с центром в точке O и радиусом r (рис. 21.3).

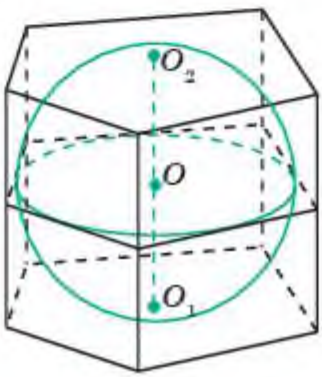


Рис. 21.3

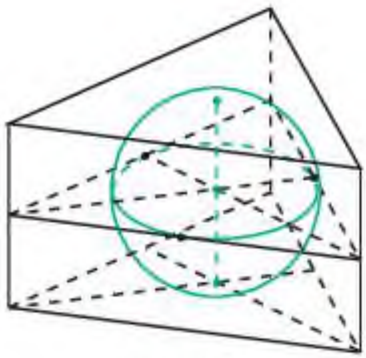


Рис. 21.4

Тогда высота призмы равна $2r$. Через центр O сферы проведем сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям. В сечении призмы будет многоугольник, равный многоугольнику основания, описанный около окружности, являющейся сечением сферы плоскостью. Таким образом, в основание призмы можно вписать окружность.

Обратно, предположим, что в основание прямой призмы можно вписать окружность радиусом r, а высота призмы равна $2r$. Пусть O — середина отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания. Тогда сфера с центром O и радиусом r будет искомой сферой, вписанной в призму. ◻

На рисунке 21.4 показана сфера, вписанная в правильную треугольную призму.

Следствие. В прямоугольный параллелепипед можно вписать сферу тогда и только тогда, когда он является кубом.

Центром сферы, вписанной в куб, является точка пересечения диагоналей этого куба. Если ребро куба равно a, то радиус вписанной сферы равен $\frac{a}{2}$.

На рисунке 21.5 показана сфера, вписанная в куб.

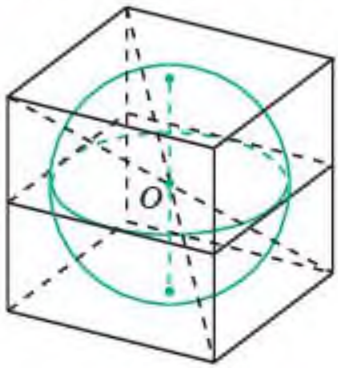


Рис. 21.5

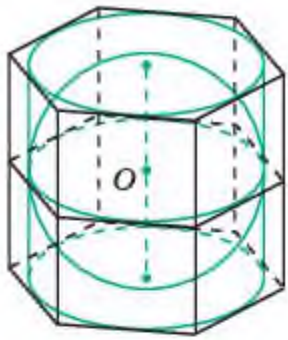


Рис. 21.6

Докажите, что если в призму можно вписать сферу, то в нее можно вписать цилиндр (рис. 21.6). Причем, сфера, вписанная в призму, будет также вписана в цилиндр, вписанный в призму.

Вопросы

1. Какой многогранник называется *описанным около сферы*?
2. Какая сфера называется *вписанной в многогранник*?
3. В какую прямую призму можно вписать сферу?
4. В какой прямоугольный параллелепипед можно вписать сферу?
5. Где находится центр сферы, вписанной в куб?
6. Чему равен радиус сферы, вписанной в куб, ребро которого равно a?

Задачи

А

21.1. Ребро куба равно 1 см. Найдите радиус вписанной в него сферы.

21.2. Радиус сферы равен 1 см. Найдите ребро описанного около нее куба.

21.3. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную призму, высота которой равна 1 см.

21.4. В правильную треугольную призму со стороной основания 1 см вписана сфера. Найдите высоту призмы.

21.5. Верно ли, что если в призму можно вписать цилиндр, то в нее можно вписать сферу?

21.6. Приведите пример правильной призмы, в которую нельзя вписать сферу.

В

21.7. В правильную треугольную призму, сторона основания которой равна 1 см, вписана сфера. Найдите ее радиус.

21.8. В правильную треугольную призму вписана сфера радиусом 1 см. Найдите сторону основания этой призмы.

21.9. В правильную четырехугольную призму, сторона основания которой равна 1 см, вписана сфера. Найдите радиус этой сферы.

21.10. В правильную четырехугольную призму вписана сфера радиусом 1 см. Найдите сторону основания этой призмы.

21.11. В правильную шестиугольную призму со стороной основания 1 см вписана сфера (рис. 21.6). Найдите высоту призмы.

21.12. В правильную шестиугольную призму вписана сфера радиусом 1 см. Найдите сторону основания этой призмы.

C

21.13. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей.

21.14. В прямую треугольную призму, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, вписана сфера. Найдите высоту этой призмы.

21.15. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб, стороны которого равны 1 см, а острый угол равен 60°. Найдите радиус сферы, вписанной в эту призму.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

21.16. Повторите определение конуса, вписанного в пирамиду, и сферы, вписанной в конус.

§ 22. Многогранники, описанные около сферы. Пирамида

Теорема. ***В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу.***

Доказательство. Центром сферы, вписанной в треугольную пирамиду, является точка, одинаково удаленная от всех ее граней. Для нахождения этой точки рассмотрим три биссектральные полуплоскости двугранных углов, образованных боковыми гранями пирамиды и основанием. Они пересекаются в точке, которая будет одинаково удалена как от боковых граней, так и от основания, т. е. будет искомым центром вписанной сферы (рис. 22.1). ◻

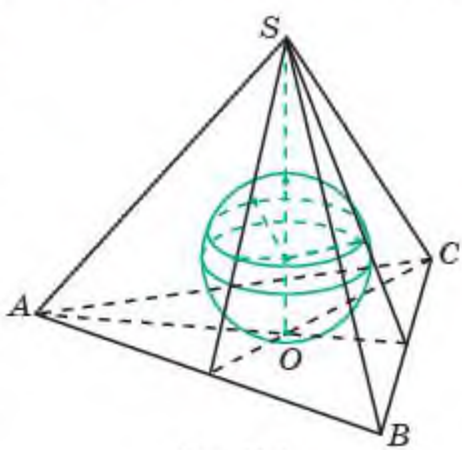


Рис. 22.1

Теорема. ***Если в основание пирамиды можно вписать окружность, и центр этой окружности является основанием высоты пирамиды, то в эту пирамиду можно вписать сферу.***

Доказательство. Если в основание пирамиды можно вписать окружность, и центр этой окружности является основанием высоты пирамиды, то в эту пирамиду можно вписать конус (рис. 22.2). Сфера, вписанная в этот конус, будет искомой сферой, вписанной в пирамиду.

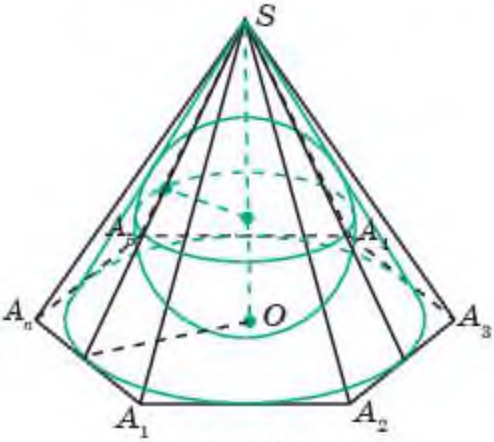


Рис. 22.2

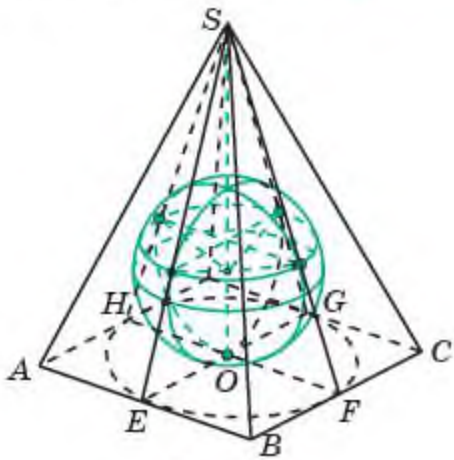


Рис. 22.3

Следствие. В любую правильную пирамиду можно вписать сферу.

Действительно, в любую правильную пирамиду можно вписать конус, следовательно, в нее можно вписать сферу.

Для нахождения радиуса сферы, вписанной в пирамиду можно использовать формулу для нахождения радиуса сферы, вписанной в конус, вписанный в эту пирамиду.

Пример. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, стороны основания и высота которой равны 2 см.

Решение. Радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, равен 1 см. Высоты SE, SF, SG, SH боковых граней равны $\sqrt{5}$ см. Конус, полученный вращением треугольника SEG вокруг прямой, содержащей его высоту SO, будет вписанным в данную пирамиду, а сам треугольник SEG будет осевым сечением этого конуса. В этом треугольнике $EG =$ $= 2$ см, $SE = SG = \sqrt{5}$ см. Площадь этого треугольника равна 2 см^2. Подставляя эти данные в формулу $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$ для радиуса r сферы, вписанной в конус, получим $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ см. Он будет равен радиусу сферы, вписанной в данную пирамиду (рис. 22.3).

Вопросы

1. В какую треугольную пирамиду можно вписать сферу?
2. В какую правильную пирамиду можно вписать сферу?
3. Что является *центром сферы, вписанной в треугольную пирамиду*?
4. Что является *центром сферы, вписанной в правильную пирамиду*?

Задачи

В

22.1. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную пирамиду, высота которой равна 2 см, а радиус окружности, вписанной в ее основание, равен 1 см.

22.2. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную пирамиду, высота боковой грани которой равна 2 см, а радиус окружности, вписанной в ее основание, равен 1 см.

22.3. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную пирамиду, высота которой равна 1 см, а высота боковой грани равна 2 см.

22.4. Выведите формулу радиуса сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, стороны основания которой равны a, а высота равна h.

22.5. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, стороны основания и высота которой равны 3 см.

22.6. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, стороны основания которой равны 2 см, а боковые грани образуют с плоскостью основания угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

С

22.7. Выведите формулу радиуса сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, стороны основания которой равны a, а высота равна h.

22.8. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, стороны основания которой равны 2 см, а высота равна 1 см.

22.9. Найдите радиус сферы, вписанной в правильный тетраэдр, ребра которого равны 1 см.

22.10. Выведите формулу радиуса сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, стороны основания которой равны a, а высота равна h.

22.11. Найдите радиус сферы, вписанной в правильной шестиугольную пирамиду, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна 2 см.

22.12. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, боковые ребра которой равны 1 см, и плоские углы при вершине равны 90°.

22.13. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб, стороны которого равны 1 см, а острый угол равен 60°. Высота этой пирамиды равна 1 см и ее основанием является точка пересечения диагоналей ромба. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду.

22.14. Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу.

22.15. Найдите радиус сферы, вписанной в октаэдр, ребра которого равны 1 см.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

22.16. Повторите определение и свойства площади фигуры на плоскости.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найдите сторону основания правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен 1 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

2. Найдите сторону основания правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен 1 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

3. Найдите сторону основания правильной шестиугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен 1 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

4. Найдите сторону основания правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен 3 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$; C) $\sqrt{3}$; D) $2\sqrt{3}$ см.

5. Найдите высоту конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 2 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

6. Найдите высоту конуса, вписанного в правильную шестиугольную пирамиду, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

7. Найдите радиус сферы, описанной около куба, ребро которого равно 2 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

8. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 1 см. Боковое ребро призмы равно 2 см. Найдите радиус описанной сферы:

A) 1 см; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ см.

9. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 4 см. Боковое ребро призмы равно 6 см. Найдите радиус описанной сферы:

A) 4 см; B) 5 см; C) 6 см; D) 8 см.

10. Найдите радиус сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1, 2, 3:

A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{11}}{2}$; D) $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

11. Где находится центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, основанием которой является треугольник, стороны которого равны 3 см, 4 см, 5 см:

A) внутри пирамиды;
B) на грани пирамиды;
C) на ребре пирамиды;
D) вне пирамиды?

12. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 2 см, а высота равна 1 см:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

13. Найдите радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 2 см, а высота равна 1 см.

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

14. Где находится центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, ребра которой равны 3 см:

A) внутри пирамиды;
B) на боковой грани пирамиды;
C) на основании пирамиды;
D) вне пирамиды?

15. Найдите радиус сферы, вписанной в куб, ребро которого равно 2 см:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

16. Найдите ребро куба, описанного около сферы радиусом 2 см:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

17. Найдите высоту призмы, в которую вписана сфера радиусом 1 см:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

18. В правильную треугольную призму, сторона основания которой равна 6 см, вписана сфера. Найдите ее радиус:

A) $\sqrt{2}$ см; B) $2\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

19. В правильную шестиугольную призму вписана сфера радиусом 3 см. Найдите сторону основания этой призмы.

A) $2\sqrt{2}$ см; B) $2\sqrt{3}$ см; C) $3\sqrt{2}$ см; D) $3\sqrt{3}$ см.

20. Найдите радиус сферы, вписанной в правильный тетраэдр, ребра которого равны 4 см:

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ см; B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см; C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ см; D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ см.

Глава V ОБЪЕМЫ ТЕЛ

§ 23. Общие свойства объемов тел

Объем — величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа, характеризующие величину части пространства, которую занимают эти фигуры.

За *единицу измерения объема* принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Можно сказать, что объем фигуры это число, полученное в результате измерения и показывающее, сколько раз единичный куб и его части целиком укладываются в данной фигуре. Это число может быть натуральным, рациональным или даже иррациональным.

Ясно, что объем фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому, на практике, после этого числа указывают единицу измерения объема. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур:

1. Объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом.
2. Равные фигуры имеют равные объемы.
3. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2, то объем фигуры Φ равен сумме объемов фигур Φ_1 и Φ_2, т. е.
$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$
4. Объем V прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны a, b, c, вычисляется по формуле:
$$V(\Phi) = a \cdot b \cdot c.$$

В частности, объем V куба с ребром a вычисляется по формуле:
$$V = a^3.$$

? Как Вы думаете, может ли объем фигуры равняться нулю?

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

Напомним, что *подобием* называется преобразование пространства, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = kAB$, где k — положительное число, называемое *коэффициентом подобия*.

Две фигуры в пространстве называются *подобными*, если существует подобие, переводящее одну из них в другую.

Примерами подобных фигур являются:

1) два куба, коэффициент подобия равен отношению длин ребер этих кубов;

2) два прямоугольных параллелепипеда, для ребер a', b', c' и a, b, c которых выполняются равенства:

$$a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc,$$

где k — некоторое фиксированное число;

3) два шара, коэффициент подобия равен отношению их радиусов.

Докажите, что площади поверхностей двух подобных многогранников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Проверьте, что площади поверхностей двух подобных шаров относятся как квадрат коэффициента подобия.

Проверьте, что объемы двух подобных прямоугольных параллелепипедов относятся как куб коэффициента подобия.

Примем без доказательства, что объемы двух подобных фигур относятся как куб коэффициента подобия, т. е. если фигура Φ_2 подобна фигуре Φ_1 с коэффициентом подобия k, то для объемов этих фигур имеет место формула:

$$V(\Phi_2) = k^3V(\Phi_1).$$

Вопросы

1. Какой величине аналогичен объем?
2. Что принимается за *единицу измерения объема*?
3. Перечислите свойства объема.
4. Какие фигуры в пространстве называются *равновеликими*?
5. Какое преобразование пространства называется *подобием*?
6. Какие фигуры в пространстве называются *подобными*?
7. Как связаны между собой объемы подобных фигур?
8. Приведите примеры подобных пространственных фигур.

Задачи

А

23.1. Объем куба равен 27 см^3. Найдите площадь его поверхности.

23.2. Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Найдите его объем.

23.3. Диагональ куба равна $\sqrt{12}$ см. Найдите его объем.

23.4. Чему равен объем пространственного креста (рис. 23.1), если ребра образующих его кубов равны 1 см?

23.5. Во сколько раз увеличится объем куба, если все его ребра увеличить в три раза?

23.6. Во сколько раз уменьшится объем прямоугольного параллелепипеда, если все его ребра уменьшить в два раза?

23.7. Как изменится объем прямоугольного параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в два раза; б) если два его измерения уменьшить в три раза?

23.8. Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько граммов весит игрушечный кирпич из того же материала, все размеры которого в четыре раза меньше?

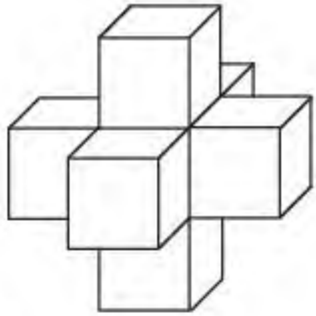
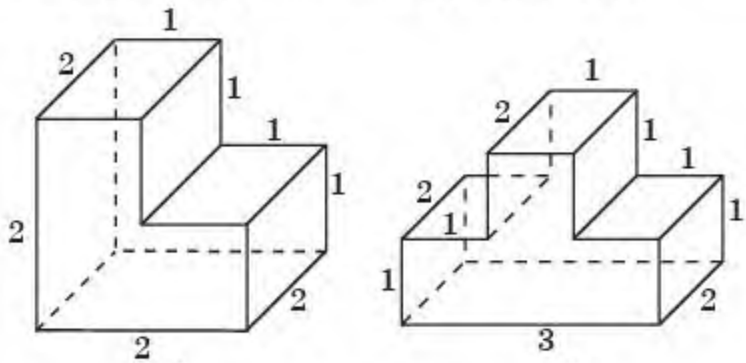


Рис. 23.1

B

23.9. Какова должна быть площадь кабинета высотой 3,5 м для класса в 28 человек, если на каждого ученика нужно 7,5 $м^3$ воздуха?

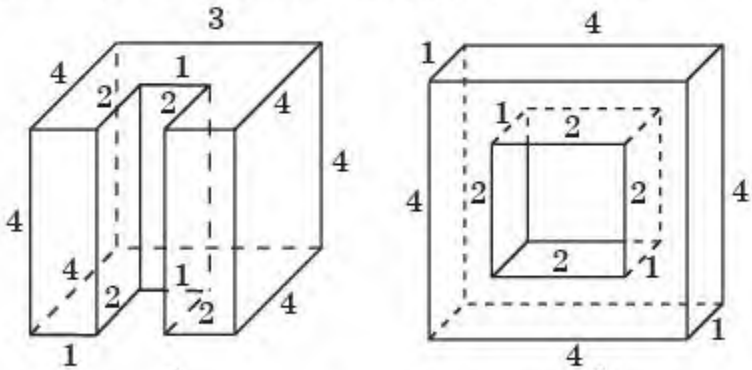
23.10. Найдите объемы деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 23.2.



а) б)

Рис. 23.2

23.11. Найдите объемы деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 23.3.



а) б)

Рис. 23.3

23.12. Найдите объемы деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 23.4.

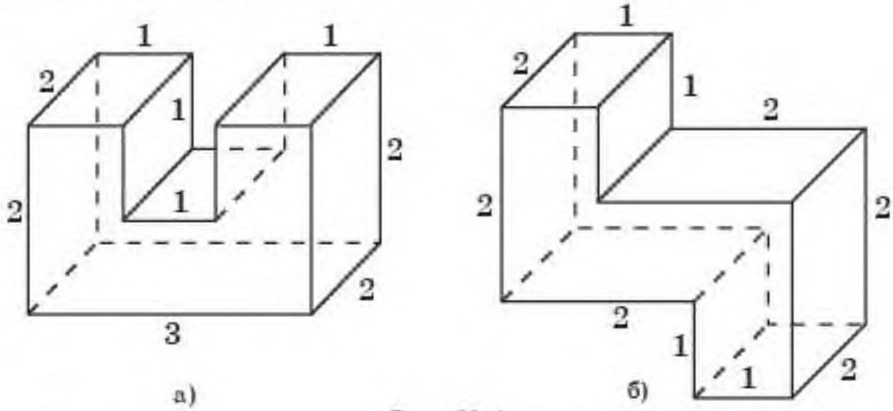


Рис. 23.4

23.13. Найдите объемы деталей, составленных из прямоугольных параллелепипедов, изображенных на рисунке 23.5.

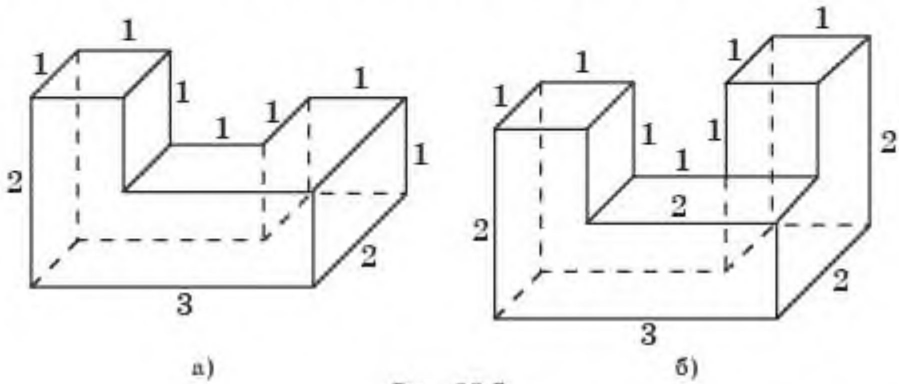


Рис. 23.5

23.14. Ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходящие из одной вершины, равны 5 см, 4 см, 3 см. Найдите объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 23.6).

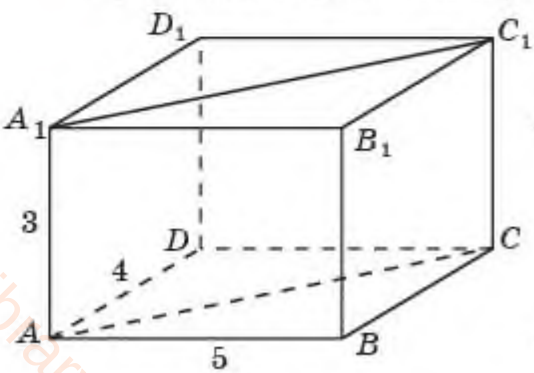


Рис. 23.6

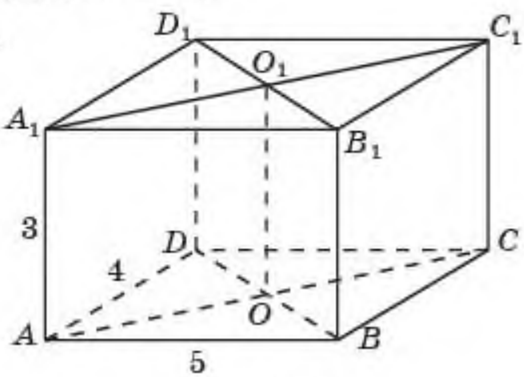


Рис. 23.7

23.15. Ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходящие из одной вершины, равны 5 см, 4 см, 3 см. Найдите объем треугольной призмы $ABOA_1B_1O_1$ (рис. 23.7).

23.16. Основанием аквариума является прямоугольник со сторонами 40 см и 50 см. Уровень воды в нем находится на высоте 80 см. Эту воду перелили в другой аквариум, основанием которого является прямоугольник со сторонами 80 см и 100 см. На какой высоте будет находиться уровень воды?

23.17. Найдите объем общей части (пересечения) двух единичных кубов, вершина одного из которых расположена в центре другого (рис. 23.8).

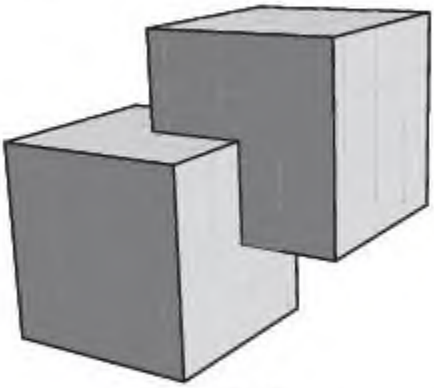


Рис. 23.8

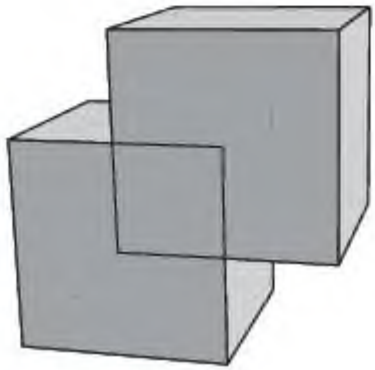


Рис. 23.9

23.18. Найдите объем фигуры, составленной из двух единичных кубов, две вершины одного из которых расположены в центрах граней другого (рис. 23.9).

23.19. Строительный кирпич имеет размер 25 см × 12 см × 6 см. Найдите объем стены, выложенной из 10000 кирпичей. Учтите, что раствор увеличивает объем на 15%.

23.20. Три свинцовых куба с ребрами 1 см, 6 см и 8 см переплавили в один куб. Найдите длину ребра полученного куба.

C

23.21. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

23.22. В каждой грани куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см (рис. 23.10). Найдите объем оставшейся части.

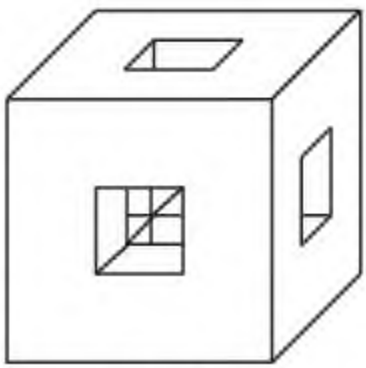


Рис. 23.10

23.23. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань единичного куба, а вершиной — центр этого куба (рис. 23.11).

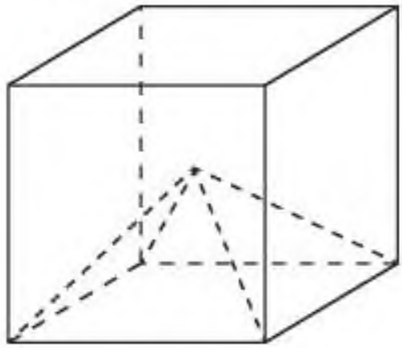


Рис. 23.11

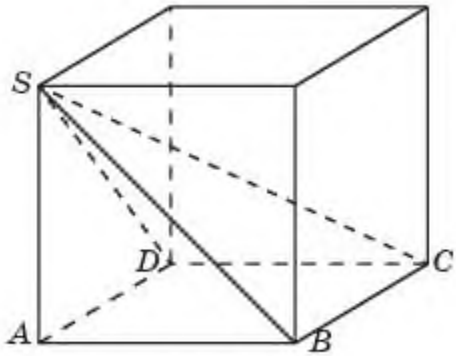


Рис. 23.12

23.24. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань единичного куба, а вершиной — вершина куба, не принадлежащая этой грани (рис. 23.12).

23.25. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1 см (рис. 23.13). Найдите объем параллелепипеда.

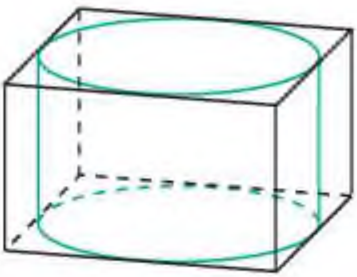


Рис. 23.13

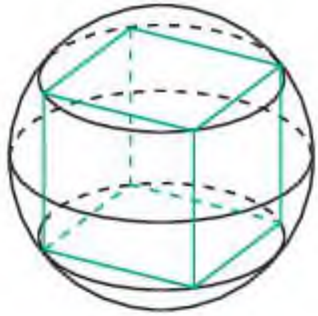


Рис. 23.14

23.26. Найдите объем куба, вписанного в сферу радиусом 1см (рис. 23.14).

23.27. Докажите, что любая плоскость, проходящая через центр куба, делит его на две равновеликие части.

23.28. Емкость имеет форму параллелепипеда (рис. 23.15). Необходимо наполнить водой ровно половину объема данной емкости, не имея никаких других емкостей и не делая измерений. Покажите на рисунке и объясните. Най-

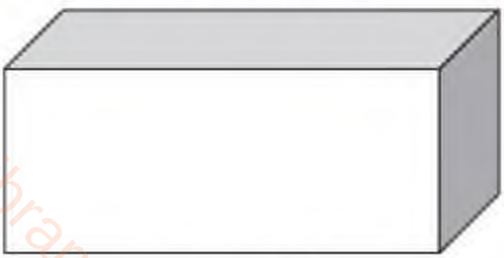


Рис. 23.15

дите объем этой воды, если длина емкости 4 м, ширина на 0,5 м больше высоты, а высота составляет 37,5% длины.

23.29. Длина аквариума — 80 см, ширина — 45 см, а высота — 55 см. Сколько литров воды надо влить в этот аквариум, чтобы уровень воды был ниже верхнего края аквариума на 10 см.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

23.30. Повторите определение призмы, вписанных и описанных призм.

§ 24. Объем призмы

Рассмотрим метод вычисления объемов пространственных фигур, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери (1598—1647) и названный впоследствии принципом Кавальери. Он заключается в следующем.

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур Φ_1 и Φ_2 в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади (рис. 24.1), то объемы исходных пространственных фигур равны.

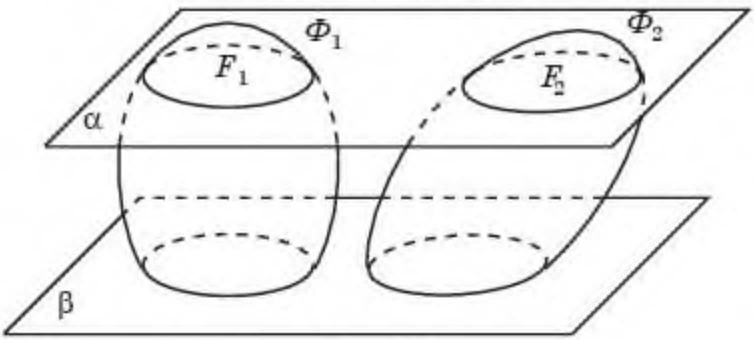


Рис. 24.1

Для обоснования этого принципа представим фигуры Φ_1 и Φ_2, составленными из тонких слоев одинаковой толщины, которые получаются при пересечении фигур Φ_1 и Φ_2 плоскостями, параллельными некоторой заданной плоскости (рис. 24.1). Из равенства площадей и толщины этих слоев следует равенство их объемов. Значит, равны и объемы фигур Φ_1 и Φ_2, составленных из этих слоев.

Применим принцип Кавальери для нахождения объема призмы.

Теорема. ***Объем V призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е. имеет место формула:***

$$V = S \cdot h,$$

где S — площадь основания, h — высота призмы.

Доказательство. Для призмы с площадью основания S и высотой h рассмотрим прямоугольный параллелепипед, у которого ребра, выходящие из одной вершины, равны a, b, h, причем, $a \cdot b = S$. Расположим призму и параллелепипед так, чтобы грань со сторонами a, b лежала в плоскости основания призмы, а сами параллелепипед и призма располагались по одну сторону от этой плоскости (рис. 24.2).

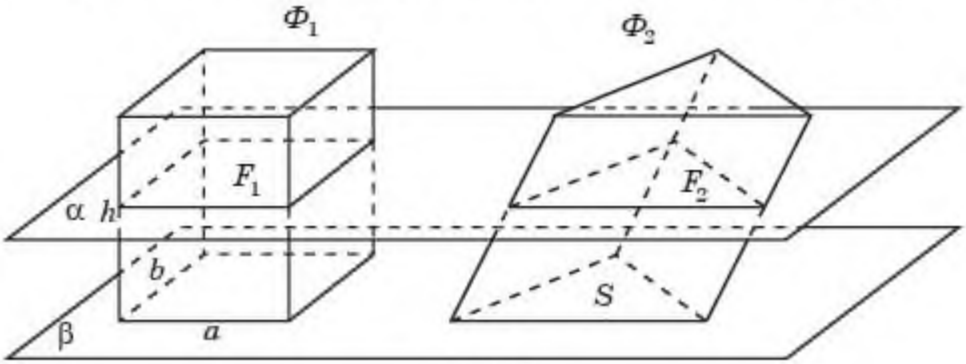


Рис. 24.2

В сечении параллелепипеда плоскостью α, параллельной плоскости β, получается прямоугольник, равный прямоугольнику, лежащему в плоскости β со сторонами a, b. В сечении призмы этой плоскостью получается многоугольник, равный основанию призмы. Площади этих сечений равны, следовательно, по принципу Кавальери равны объемы параллелепипеда и призмы. Значит, объем призмы равен $S \cdot h$.

Выведите формулу объема правильной: а) треугольной; б) шестиугольной призмы, стороны основания которой равны a, а высота равна h.

Вопросы

1. Как формулируется принцип Кавальери?
2. Как вычисляется объем призмы?

Задачи

А

24.1. Основанием треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объем данной призмы.

24.2. Найдите объем правильной треугольной призмы, сторона основания которой 4 см и высота 5 см.

24.3. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 2 см, а боковые ребра равны 3 см.

24.4. Основанием четырехугольной призмы является квадрат со стороной 1 см. Боковое ребро равно 2 см и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем призмы.

24.5. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 см и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол 60° и равно 1 см. Найдите объем параллелепипеда.

B

24.6. Найдите высоту правильной треугольной призмы, если сторона ее основания 20 см и объем 4800 см^3.

24.7. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру (рис. 24.3). В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

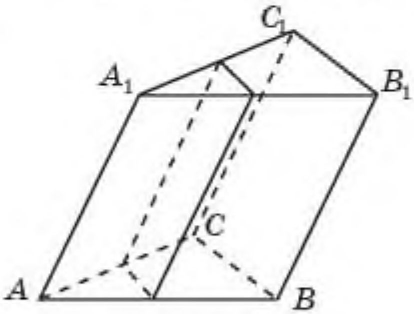


Рис. 24.3

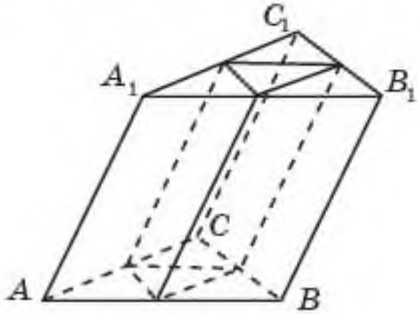


Рис. 24.4

24.8. Объем треугольной призмы равен 12 см^3. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы (рис. 24.4).

24.9. Объем четырехугольной призмы равен 10 см^3. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы (рис. 24.5).

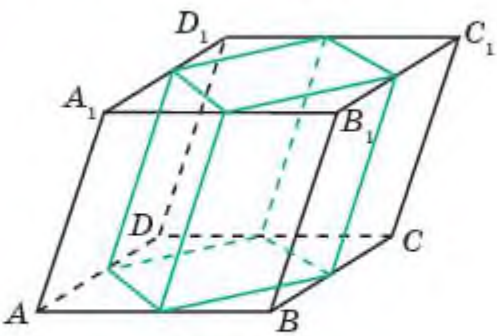


Рис. 24.5

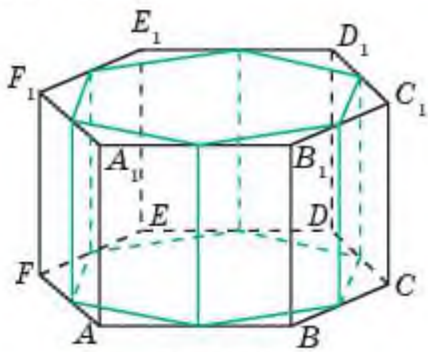


Рис. 24.6

24.10. Объем правильной шестиугольной призмы равен 12 см^3. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы (рис. 24.6).

24.11. Сформулируйте условия на стороны оснований и боковые ребра двух правильных n-угольных призм, при которых эти призмы подобны. Как относятся объемы этих призм?

C

24.12. Основание прямой призмы — ромб, площадь которого равна 1 м². Площади диагональных сечений равны 3 м² и 6 м² (рис. 24.7). Найдите объем призмы.

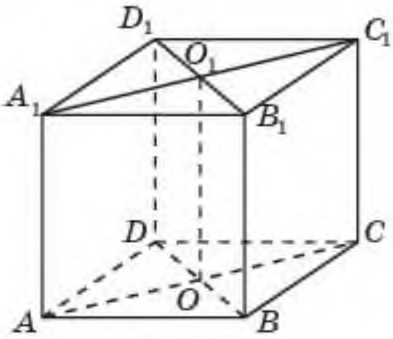


Рис. 24.7

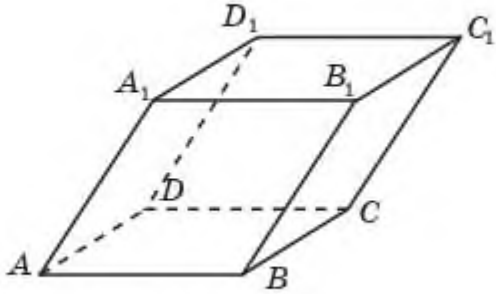


Рис. 24.8

24.13. Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, являются ромбами со сторонами 1 см и острыми углами при этой вершине 60° (рис. 24.8). Найдите объем параллелепипеда.

24.14. В параллелепипеде две грани имеют площади S_1 и S_2, их общее ребро равно a, и они образуют между собой двугранный угол 150° (рис. 24.8). Найдите объем параллелепипеда.

24.15. В пространстве даны три параллелепипеда. Как провести плоскость, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две равновеликие части?

24.16. Найдите объем правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1 см (рис. 24.9).

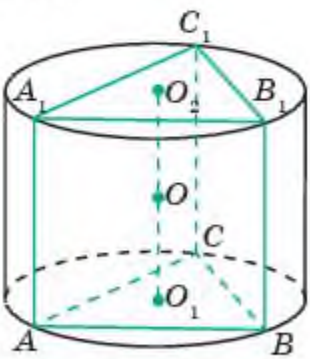


Рис. 24.9

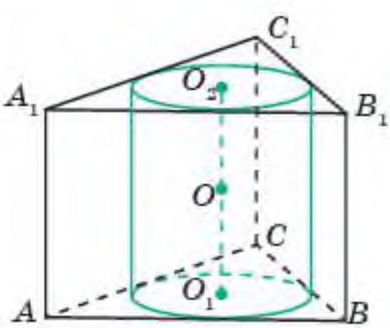


Рис. 24.10

24.17. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1 см (рис. 24.10).

24.18. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около единичной сферы (рис. 24.11).

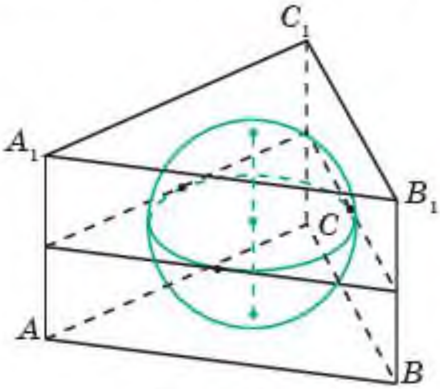


Рис. 24.11

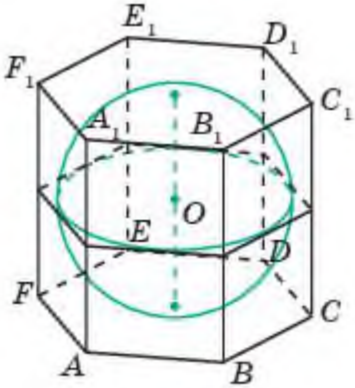


Рис. 24.12

24.19. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около единичной сферы (рис. 24.12).

24.20. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна Q, а расстояние от нее до противолежащего ребра равно d. Найдите объем призмы (рис. 24.13).

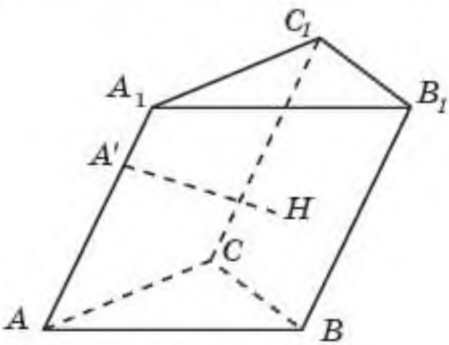


Рис. 24.13

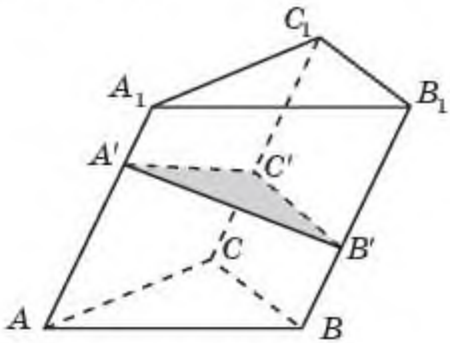


Рис. 24.14

24.21. Докажите, что объем наклонной призмы равен произведению ее бокового ребра на площадь сечения плоскостью, перпендикулярной этому ребру и пересекающей все ребра этой призмы (рис. 24.14).

24.22. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 6 см, а расстояния между ними равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите объем призмы.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

24.23. Повторите определения тела вращения и цилиндра.

§ 25. Объем цилиндра

Применим принцип Кавальери для нахождения объема цилиндра.

Теорема. ***Объем V цилиндра, радиус основания которого равен R, а высота равна h, выражается формулой:***

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

Доказательство. Аналогично доказательству формулы объема призмы. А именно, для цилиндра с радиусом основания R и высотой h рассмотрим прямоугольный параллелепипед, у которого ребра, выходящие из одной вершины, равны a, b, h. Причем, $a \cdot b = \pi R^2$. Расположим цилиндр и параллелепипед так, чтобы грань со сторонами a, b лежала в плоскости β основания цилиндра, а сами параллелепипед и цилиндр располагались по одну сторону от этой плоскости (рис. 25.1). В сечении параллелепипеда плоскостью α, параллельной плоскости β, получается прямоугольник, равный прямоугольнику, лежащему в плоскости β со сторонами a, b. В сечении цилиндра этой плоскостью получается круг, равный основанию цилиндра.

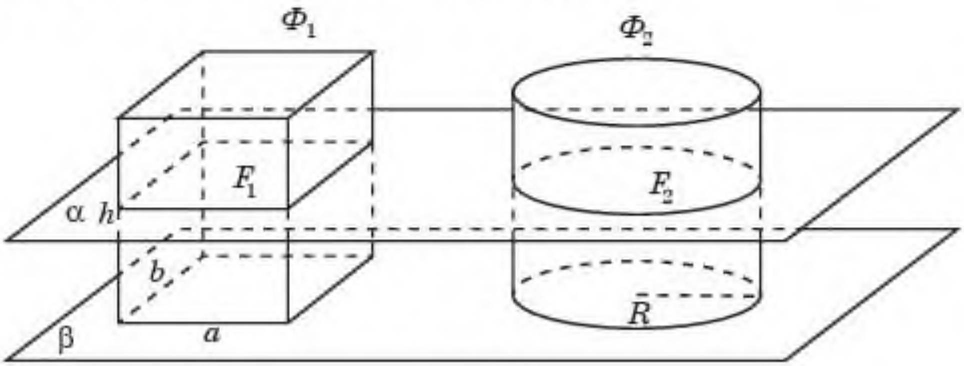


Рис. 25.1

Площади этих сечений равны, следовательно, по принципу Кавальери равны объемы параллелепипеда и цилиндра. Значит, объем цилиндра равен $\pi R^2 \cdot h$. ☐

Вопросы

Как вычисляется объем цилиндра?

Задачи

А

25.1. Радиус основания цилиндра равен 2 см, образующая равна 3 см. Найдите объем этого цилиндра.

25.2. Осевое сечение цилиндра — квадрат со стороной a см. Найдите объем цилиндра.

25.3. Одна кружка вдвое выше другой, зато вторая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?

25.4. Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a.

25.5. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 1 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем цилиндра.

25.6. Найдите объем цилиндра, вписанного в единичный куб.

25.7. В основании прямой призмы находится квадрат со стороной 1 см. Боковые ребра равны 2 см. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

B

25.8. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон a и b. Как относятся объемы цилиндров?

25.9. Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?

25.10. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке, высекаемой из цилиндра прямым двугранным углом (рис. 25.2). Радиус основания цилиндра равен 2 см, а образующая равна 3 см.

25.11. В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?

25.12. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого?

25.13. Развертка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник со сторонами 1 см и 2 см. Найдите объем цилиндра.

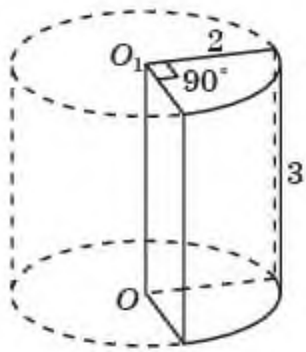


Рис. 25.2

25.14. Найдите объем цилиндра, описанного около единичной сферы.

25.15. Сформулируйте условия на радиусы оснований и образующие двух цилиндров, при которых эти цилиндры подобны. Как относятся объемы этих цилиндров?

C

25.16. Многоугольник, изображенный на рисунке 25.3, все углы которого прямые, вращается вокруг прямой a, содержащей сторону, равную 2 см. Найдите объем тела вращения.

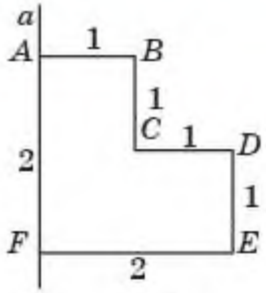


Рис. 25.3

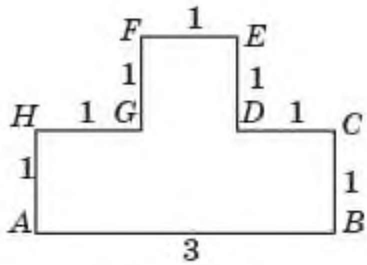


Рис. 25.4

25.17. Многоугольник, изображенный на рисунке 25.4, все углы которого прямые, вращается вокруг прямой AB, содержащей сторону, равную 3 см. Найдите объем тела вращения.

25.18. Найдите объем цилиндра, вписанного призму, основанием которой является правильный треугольник со стороной 1 см, а боковые ребра призмы равны 2 см.

25.19. В основании призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Боковые ребра равны 5 см. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

25.20. В правильную шестиугольную призму со стороной основания 1 см и боковым ребром 2 см вписан цилиндр. Найдите объем этого цилиндра.

25.21. Около правильной шестиугольной призмы со стороной основания 1 см описан цилиндр. Боковые ребра призмы равны 2 см. Найдите объем этого цилиндра.

25.22. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, делит его на две равновеликие части.

25.23. Профиль русла реки имеет форму равнобедренной трапеции, основания которой равны 10 м и 6 м, а высота — 2 м (рис. 25.5). Скорость течения равна 1 м/сек. Какой объем воды проходит через этот профиль за 1 мин? Ответ дайте в кубических метрах.

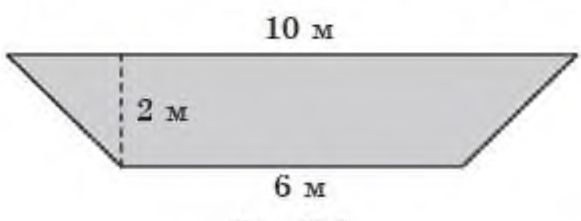


Рис. 25.5

25.24. Чугунная труба имеет длину 2 м и внешний диаметр 20 см. Толщина стенок трубы равна 2 см (рис. 25.6). Найдите вес трубы, если удельный вес чугуна примерно равен 7,5 г/см³. Ответ дайте в килограммах (Примите $\pi \approx 3$).

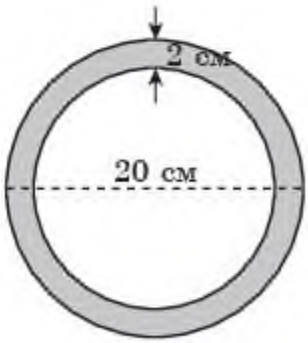


Рис. 25.6

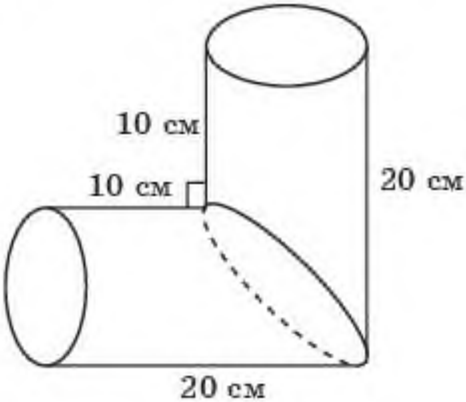


Рис. 25.7

25.25. Найдите объем детали, изображенной на рисунке 25.7, составленной из двух равных частей цилиндров. (Примите $\pi \approx 3$).

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

25.26. Повторите определения пирамиды и усеченной пирамиды.

§ 26. Объемы пирамиды и усеченной пирамиды

Первые упоминания о вычислении объема пирамиды найдены в папирусах древних вавилонян и египтян (свыше 3000 лет до н. э.). Интересно, что они не вывели общей формулы для нахождения объема пирамиды, а вычисляли объемы конкретных пирамид. Так им удалось найти объем правильной четырехугольной пирамиды с основанием, равным единице измерения, и высотой, равной $\frac{1}{2}$. Для этого они брали куб с ребром, равным единице измерения, и разбивали его на 6 равных правильных четырехугольных пирамид. Основаниями этих пирамид будут грани куба, а вершина каждой из них будет находиться в центре куба (рис. 26.1). Все шесть полученных пирамид равны, отсюда получаем, что объем каждой из них равен $\frac{1}{6}$ объема куба.

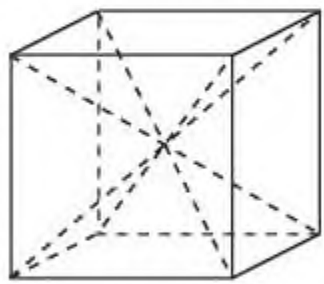


Рис. 26.1

Используя принцип Кавальери, докажем следующую вспомогательную теорему.

Теорема. ***Если две пирамиды имеют равные высоты и основания равной площади, то их объемы равны.***

Доказательство. Пусть пирамиды Φ_1 и Φ_2 имеют высоты, равные h, а основания площадью S расположены в одной плоскости β (рис. 26.2).

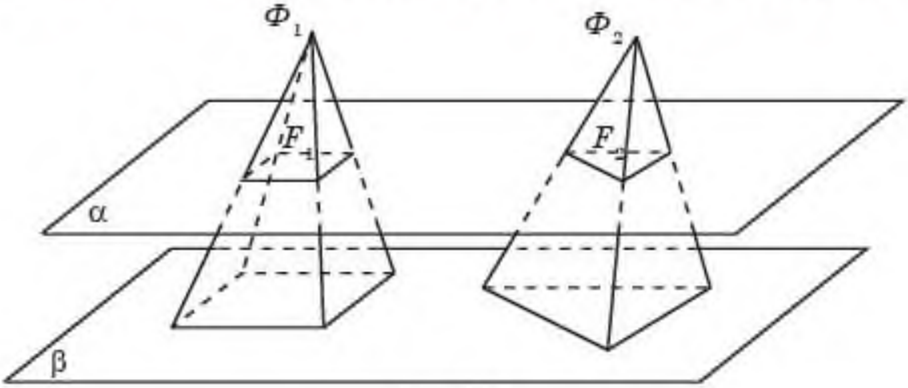


Рис. 26.2

Проведем плоскость α, параллельную плоскости β, на расстоянии x от нее, $0 \leqslant x \leqslant h$. Тогда фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях пирамид этой плоскостью, подобны соответствующим основаниям, и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $(h - x) : h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$, значит, равны. Из принципа Кавальери получаем, что объемы пирамид равны.

Докажем теперь основную теорему об объеме треугольной пирамиды.

Теорема. ***Объем треугольной пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.***

Доказательство. Пусть A_1ABC — треугольная пирамида. Достроим ее до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 26.3).

Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1 разбивают эту призму на три пирамиды A_1ABC, A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ с вершинами в точке A_1. Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1, так как диагональ CB_1 разбивает параллелограмм CBB_1C_1 на два равных треугольника. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, эти пирамиды имеют равные объемы. Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, они имеют равные объемы. Таким образом, объемы всех трех пирамид равны. Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объема V треугольной пирамиды:

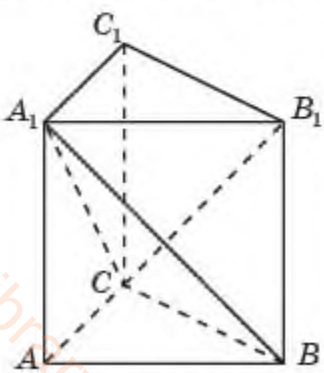


Рис. 26.3

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота. ◻

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении объема произвольной пирамиды.

Теорема. ***Объем произвольной пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.***

Доказательство. Для данной пирамиды рассмотрим треугольную пирамиду с такой же площадью основания и такой же высотой. По принципу Кавальери объемы этих пирамид равны и, следовательно, имеет место формула:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота. ◻

Выведите формулу объема правильной: а) треугольной; б) шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, а высота равна h.

Выведем формулу для объема усеченной пирамиды.

Теорема. ***Объем V усеченной пирамиды выражается формулой:***

$$V = \frac{1}{3}h_у(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

где S, s — площади оснований, $h_у$ — высота усеченной пирамиды.

Доказательство. Рассмотрим усеченную пирамиду, площади оснований которой равны S и s, а высота $h_у$ равна разности $H - h$ высот исходной и отсеченной пирамид.

На рисунке 26.4 изображена пятиугольная усеченная пирамида $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

Для объема V усеченной пирамиды имеет место формула:

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

Выразим высоту $h_у$ усеченной пирамиды через высоты пирамид H, h и их площади сечений S, s.

Заметим, что в сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию, получается фигура, подобная основанию, и коэффициент подобия равен отношению расстояний от вершины пирамиды до плоскости сечения и плоскости основания, т. е. равен $\frac{h}{H}$. Кроме того, отношение пло-

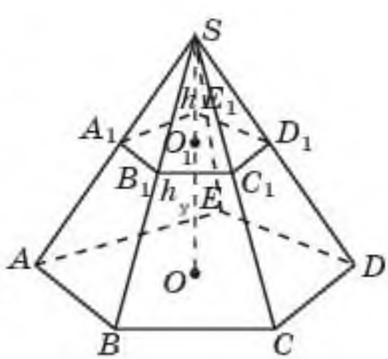


Рис. 26.4

щадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Следовательно, имеем равенство:

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{H - h_y}{H}\right)^2.$$

Из этого равенства найдем высоты H и h:

$$H = \frac{h_y\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}, \ h = \frac{h_y\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Подставляя теперь H и h в выражение для объема усеченной пирамиды, получим:

$$V = \frac{1}{3}\left(S\frac{h_y\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} - s\frac{h_y\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}h_y\frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} = \frac{1}{3}h_y(S + \sqrt{S \cdot s} + s).$$

Выведите формулу объема усеченной правильной четырехугольной пирамиды, стороны оснований которой равны a и b, а высота равна h_y.

Вопросы

1. Как вычисляется объем треугольной пирамиды?
2. Как вычисляется объем произвольной пирамиды?
3. Как вычисляется объем усеченной пирамиды?

Задачи

А

26.1. Выведите формулу объема правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

26.2. В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите ее объем.

26.3. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания и высота которой равны 1 см.

26.4. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания и высота которой равны 1 см.

26.5. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см.

26.6. Найдите объем тетраэдра с ребром, равным 1 см.

26.7. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

26.8. Как изменится объем правильной пирамиды, если ее высота будет увеличена в три раза, а сторона основания уменьшена в три раза?

26.9. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 1 см³. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки: а) A, B, C, D, B_1; б) A, B, D, C_1 (рис. 26.5).

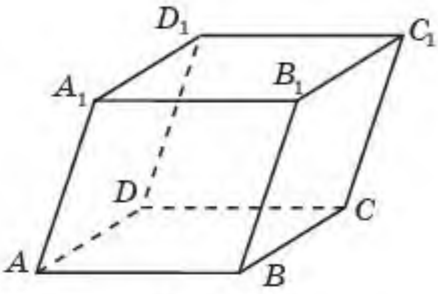


Рис. 26.5

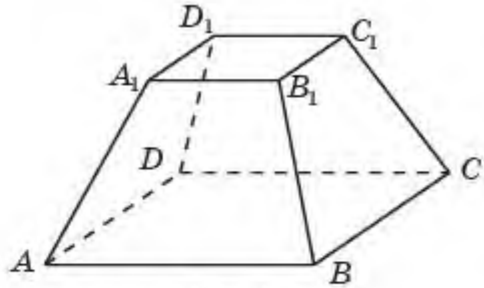


Рис. 26.6

26.10. Параллельно основанию пирамиды проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей пирамиды?

26.11. Найдите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 2 см и 1 см, а высота равна 3 см (рис. 26.6).

B

26.12. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1 см.

26.13. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 1 см. Найдите объем пирамиды.

26.14. Найдите объем треугольной пирамиды, если ее боковые ребра равны 1 см, а плоские углы при вершине равны 60°, 90° и 90°.

26.15. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3. Сторона основания 1 см. Найдите высоту этой пирамиды.

26.16. Объем параллелепипеда равен 1 см^3 (рис. 26.5). Найдите объем тетраэдра BDA_1C_1.

26.17. Плоскость проходит через сторону основания треугольной пирамиды и середину противолежащего бокового ребра (рис. 26.7). В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

26.18. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 12 см^3. Найдите объем пирамиды, отсекаемой от нее плоскостью, проходящей через диагональ AC основания и середину E противолежащего бокового ребра (рис. 26.8).

26.19. Найдите объем октаэдра с ребром, равным 1 см (рис. 26.9).

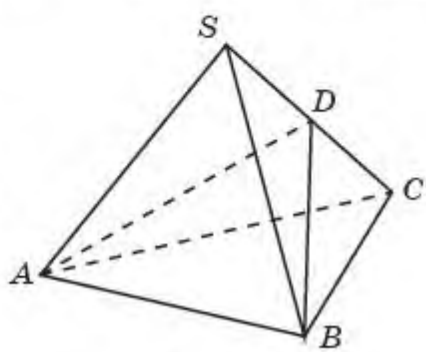


Рис. 26.7

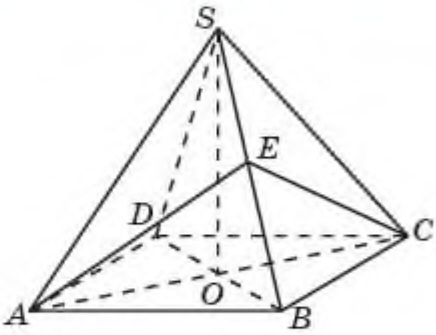


Рис. 26.8

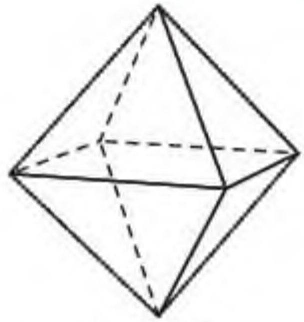


Рис. 26.9

26.20. Найдите объем правильной шестиугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 2 см и 1 см, а высота равна 3 см (рис. 26.10).

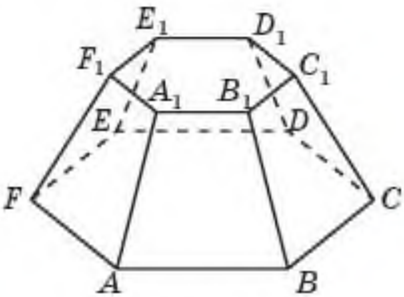


Рис. 26.10

Рис. 26.11

26.21. Дворец мира и согласия в Нур-Султане (рис. 26.11) имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания и высота которой равны 62 м. Найдите его объем.

26.22. Сформулируйте условия на стороны оснований и боковые ребра двух правильных n-угольных пирамид, при которых эти пирамиды подобны. Как относятся объемы этих пирамид?

26.23. Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса (рис. 26.12) — имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой 146 м и боковым ребром 230 м. Найдите объем этой пирамиды.

Рис. 26.12

26.24. На фотографии виден жилой дом, у которого крыша имеет форму пирамиды с квадратным основанием (рис. 26.13). Все ребра пирамиды равны 12 м. Найдите объем крыши этого дома.

Рис. 26.13

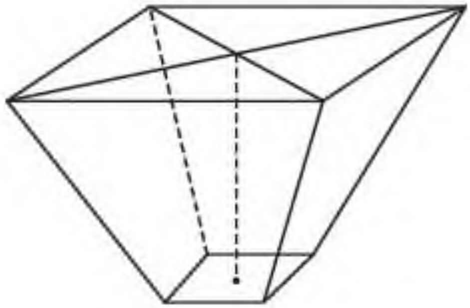


Рис. 26.14

26.25. Ящик для засыпки картофеля имеет форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды (рис. 26.14). Стороны оснований равны соответственно 6 дм и 14,4 дм. Высота пирамиды — 4,3 дм. Найти объем и массу картофеля, который может храниться в ящике, если 1 дм^3 массы клубней весит 0,675 кг.

C

26.26. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 1 см, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.

26.27. Объем четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 1 см^3. Найдите объем пирамиды, вершинами основания которой являются середины сторон основания $ABCD$, а вершина совпадает с вершиной S данной пирамиды (рис. 26.15).

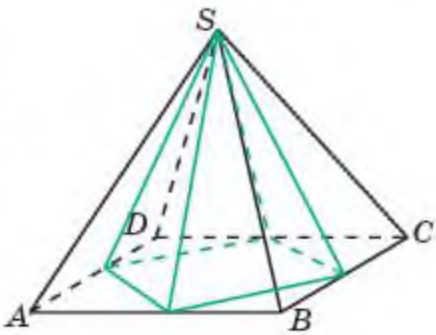


Рис. 26.15

26.28. Объем тетраэдра равен 1 см^3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер этого тетраэдра.

26.29. Два противолежащих ребра тетраэдра перпендикулярны и равны 3 см. Расстояние между ними равно 2 см. Найдите объем тетраэдра.

26.30. Два противолежащих ребра тетраэдра образуют угол 60° и равны 2 см. Расстояние между ними равно 3 см. Найдите объем тетраэдра.

26.31. Плоскость пересекает ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках A', B', C' соответственно (рис. 26.16), $SA' : SA = k$, $SB' : SB = l$, $SC' : SC = m$. Докажите, что объем пирамиды $SA'B'C'$ равен объему пирамиды $SABC$, умноженному на $k \cdot l \cdot m$. Найдите объем пирамиды $SA'B'C'$, если объем исходной пирамиды равен 1 см³ и $SA' : SA = 1 : 2$, $SB' : SB = 2 : 3$, $SC' : SC = 3 : 4$.

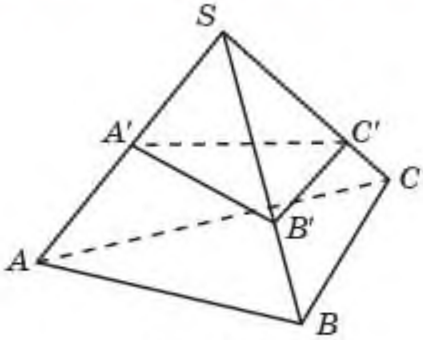


Рис. 26.16

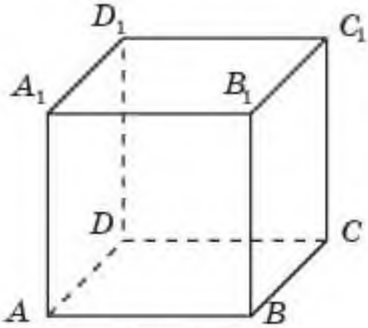


Рис. 26.17

26.32. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 26.17) найдите объем общей части двух призм ADA_1BCB_1 и ABA_1DCD_1.

26.33. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 26.17) найдите объем общей части двух призм ADA_1BCB_1 и $BA_1B_1CD_1C_1$.

26.34. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 26.17) найдите объем общей части двух пирамид A_1ABCD и C_1ABCD.

26.35. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 26.17) найдите объем общей части двух пирамид A_1ABCD и $DBCC_1B_1$.

26.36. Объем одной треугольной пирамиды равен 1 см³. Вторая пирамида зеркально-симметрична данной относительно плоскости, проходящей через середину высоты и параллельной основанию этой пирамиды. Найдите объем общей части этих пирамид.

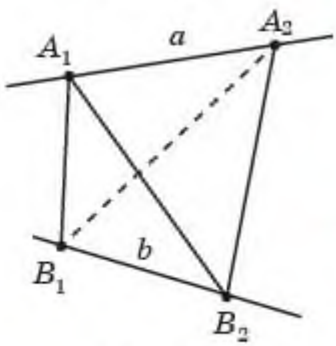


Рис. 26.18

26.37. Объем одного правильного тетраэдра равен 1 см. Второй правильный тетраэдр центрально-симметричен данному относительно середины отрезка, соединяющего середины двух противолежащих ребер. Найдите объем их общей части.

26.38. На двух скрещивающихся прямых a и b расположены два отрезка соответственно A_1A_2 и B_1B_2 (рис. 26.18). Докажите, что объем тетраэдра $A_1A_2B_1B_2$ не зависит от положений этих отрезков на прямых, а зависит только от их длины.

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

26.39. Повторите определения конуса и усеченного конуса.

§ 27. Объемы конуса и усеченного конуса

Применим принцип Кавальери для нахождения объема конуса.

Теорема. ***Объем конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.***

Доказательство. Для данного конуса с основанием площадью S и высотой h рассмотрим какую-нибудь пирамиду с теми же площадью основания и высотой. Расположим их так, чтобы основания лежали в одной плоскости β, а сами они лежали по одну сторону от этой плоскости (рис. 27.1).

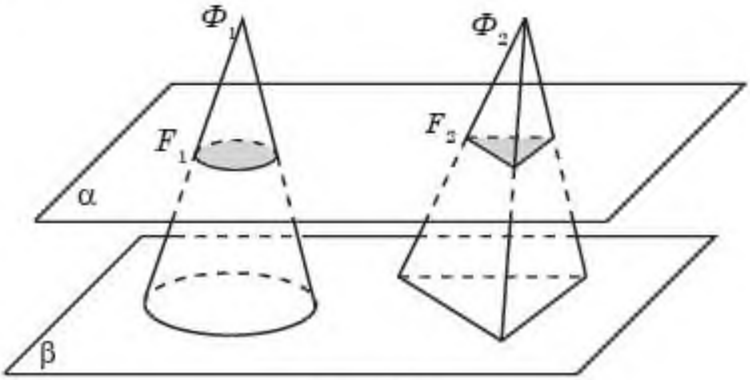


Рис. 27.1

Проведем плоскость α, параллельную плоскости β, на расстоянии x от нее, $0 \leqslant x \leqslant h$. Тогда фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях конуса и пирамиды этой плоскостью, подобны соответствующим основаниям, и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $(h - x) : h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$, значит, равны. Из принципа Кавальери получаем, что объемы конуса и пирамиды равны. Следовательно, для объема V конуса имеет место формула:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

где R — радиус основания, h — высота конуса. ☐

Для усеченного конуса имеет место формула объема, аналогичная формуле объема усеченной пирамиды, а именно:

$$V = \frac{1}{3}h_y(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

где S, s — площади оснований, h_y — высота усеченного конуса (рис. 27.2).

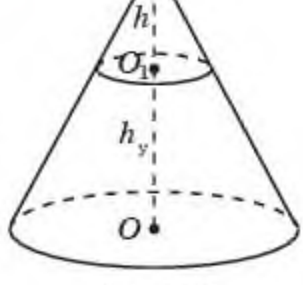


Рис. 27.2

Доказательство аналогично доказательству формулы объема усеченной пирамиды. Проведите его самостоятельно.

Учитывая, что S и s равны соответственно πR^2 и πr^2, где R и r радиусы оснований усеченного конуса, формула его объема будет иметь следующий вид:

$$V = \frac{1}{3}\pi h_y(R^2 + \sqrt{R \cdot r} + r^2).$$

Вопросы

1. Как вычисляется объем конуса?
2. Как вычисляется объем усеченного конуса?

Задачи

A

27.1. Во сколько раз увеличится объем конуса, если: а) высоту увеличить в три раза; б) радиус основания увеличить в два раза?

27.2. Изменится ли объем конуса, если радиус основания увеличить в два раза, а высоту уменьшить в два раза?

27.3. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 15 см^3.

27.4. Объем конуса равен V. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей конуса?

27.5. Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объем.

27.6. Найдите объем части конуса, изображенной на рисунке 27.3, если радиус основания конуса равен 3 см, высота равна 6 см, $\angle AOB = 60^\circ$.

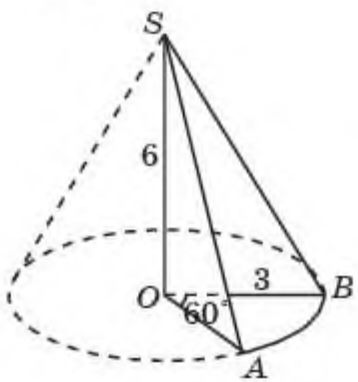


Рис. 27.3

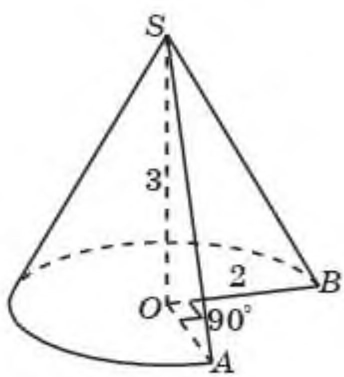


Рис. 27.4

27.7. Найдите объем части конуса, изображенной на рисунке 27.4, если радиус основания конуса равен 2 см, высота равна 3 см, $\angle AOB = 90^\circ$.

27.8. Найдите объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 1 см и 2 см, а высота равна 3 см.

B

27.9. Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения — 90°. Найдите объем конуса.

27.10. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник площадью 9 $см^2$. Найдите объем конуса.

27.11. Равносторонний треугольник со стороной 1 см вращается вокруг прямой, содержащей его высоту. Найдите объем тела вращения.

27.12. Два конуса получены от вращения неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг каждого из катетов. Равны ли объемы этих конусов?

27.13. Конус вписан в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания 2 см и высотой 6 см (рис. 27.5). Найдите его объем.

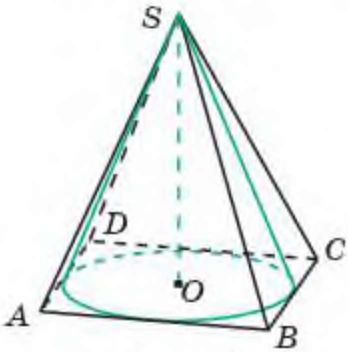


Рис. 27.5

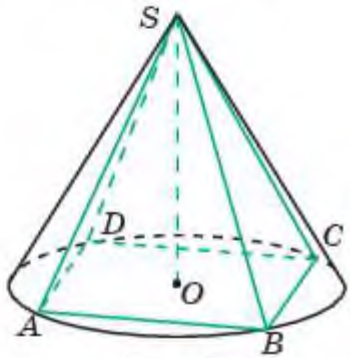


Рис. 27.6

27.14. Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 1 см и высотой 2 см (рис. 27.6). Найдите его объем.

27.15. Объем конуса равен 1 $см^3$. Его высота разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Найдите объем средней части конуса.

27.16. Воду, заполняющую всю коническую колбу высотой 12 см, перелили в цилиндрический сосуд, радиус основания которого равен радиусу окружности конической колбы (рис. 27.7). На какой высоте от основания цилиндрического сосуда будет находиться поверхность воды?

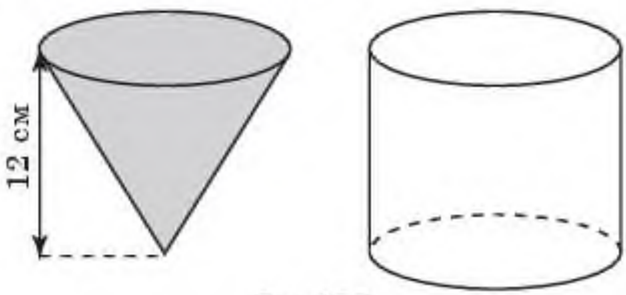


Рис. 27.7

27.17. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 2 см, образующая равна 5 см. Найдите объем этого усеченного конуса.

27.18. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота — 3 см, вращается относительно оси, проходящей через середины оснований. Найдите объем тела вращения.

27.19. Сформулируйте условия на радиусы оснований и образующие двух конусов, при которых эти конусы подобны. Как относятся объемы этих конусов?

Рис. 27.8

27.20. Найдите объем юрты (рис. 27.8) в форме цилиндра с поставленным на него усеченным конусом, диаметр основания цилиндра равен 5 м, диаметры оснований усеченного конуса равны 5 м и 1 м, а высоты цилиндра и усеченного конуса равны 2 м.

C

27.21. Найдите объем тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет равный 3 см.

27.22. Единичный квадрат вращается вокруг прямой, содержащей его диагональ. Найдите объем тела вращения.

27.23. Равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны 1 см, а угол между ними равен 120°, вращается вокруг прямой, содержащей одну из боковых сторон. Найдите объем тела вращения.

27.24. Разверткой боковой поверхности конуса служит полукруг радиусом 2 см. Найдите объем конуса.

27.25. Объем одного конуса равен 1 см^3. Второй конус зеркально-симметричен данному относительно плоскости, проходящей через середину высоты и параллельной основанию этого конуса. Найдите объем общей части этих конусов.

27.26. Равносторонний треугольник со стороной равной 2 см, вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника. Найдите объем тела вращения.

27.27. Найдите объем кучи песка на строительной площадке, имеющей форму конуса (рис. 27.9). Измерив мягкой метровой лентой длину окружности основания кучи песка, получили 21,6 м. Перекинув метровую ленту через вершину кучи, определили длину двух образующих — 7,8 м. (Примите $\pi \approx 3$).

Рис. 27.9

Подготовьтесь к овладению новыми знаниями

27.28. Повторите определение шара и принцип Кавальери.

§ 28. Объем шара и его частей

Воспользуемся принципом Кавальери для нахождения формулы объема шара.

Теорема. Объем V шара радиусом R выражается формулой:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Доказательство. Рассмотрим полушар радиусом R, основание которого расположено в плоскости β. Возьмем цилиндр, основание которого — круг радиуса R, расположенный в той же плоскости β, и высота которого равна R (рис. 28.1).

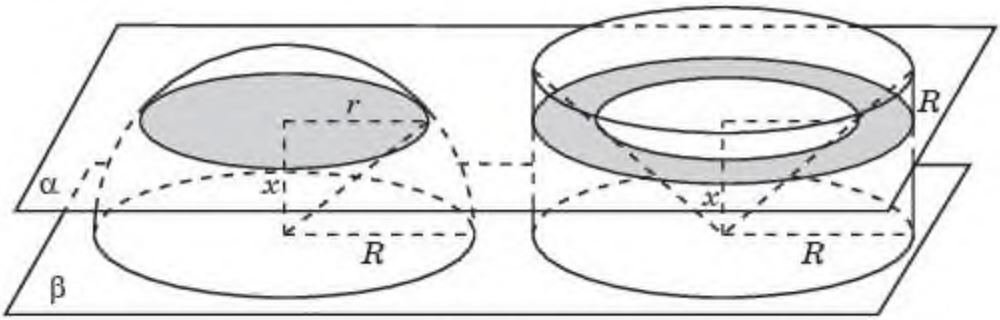


Рис. 28.1

В цилиндр впишем конус, основанием которого будет верхнее основание цилиндра, а вершиной — центр нижнего основания цилиндра. Докажем, что фигура $Ф$, состоящая из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, и данный полушар имеют равные объемы.

Проведем плоскость α, параллельную плоскости β, на расстоянии x от нее, $0 \leqslant x \leqslant R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиусом $\sqrt{R^2 - x^2}$ и площадью $\pi(R^2 - x^2)$. В сечении фигуры Φ получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором равен x, а внешнего — R. Площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавальери следует, что полушар и фигура Φ имеют равные объемы. Вычислим этот объем. Он равен разности объемов цилиндра и конуса, т. е.

$$V = V_ц - V_к = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объем шара вдвое больше объема полушара и, следовательно, выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Выведем формулу объема шарового сегмента – меньшей части шара, отсекаемой от него какой-нибудь плоскостью, не проходящей через центр шара (рис. 28.2).

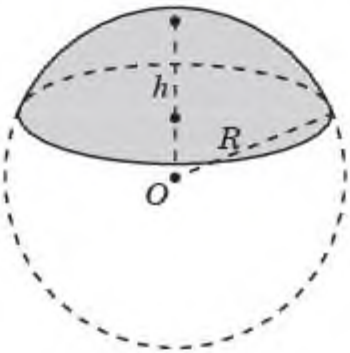


Рис. 28.2

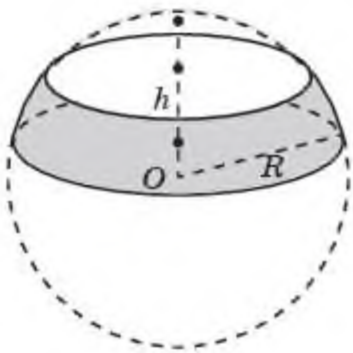


Рис. 28.3

Теорема. ***Объем шарового сегмента высотой h, отсекаемого от шара радиусом R, выражается формулой:***

$$\boldsymbol{V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).}$$

Доказательство. Из доказательства формулы объема шара следует, что объем шарового сегмента, отсекаемого от полушара плоскостью равен объему части фигуры Φ, отсекаемой плоскостью α (рис. 28.1). Если высота шарового сегмента равна h, то объем осекаемой части цилиндра равен $\pi R^2 h$. Объем отсекаемой части конуса равен $\frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(R - h)^3 = \pi R^2 h - \pi h^2 R + \frac{1}{3}\pi h^3$. Следовательно, объем V шарового сегмента выражается требуемой формулой.

Самостоятельно выведите формулу объема шарового пояса – части шара, заключенной между двумя параллельными плоскостями, пересекающими этот шар (рис. 28.3).

Вопросы

1. Как вычисляется объем шара?
2. Как вычисляется объем шарового сегмента?

Задачи

A

28.1. Найдите объем шара, диаметр которого равен 6 см.

28.2. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в: а) 3 раза; б) 4 раза?

28.3. Радиусы трех шаров 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

28.4. Сколько нужно взять шаров радиусом 2 см, чтобы сумма их объемов равнялась объему шара радиусом 6 см?

28.5. Найдите объем шара, вписанного в куб, ребро которого равно 1 см.

28.6. Найдите объем шара, вписанного в цилиндр (рис. 28.4), высота которого равна 2 см.

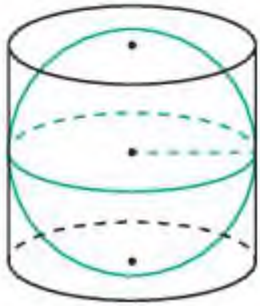


Рис. 28.4

B

28.7. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объем шара.

28.8. Найдите объем шара, описанного около куба, ребро которого равно 1 см.

28.9. Найдите объем шара, описанного около цилиндра (рис. 28.5), радиус основания и высота которого равны 1 см.

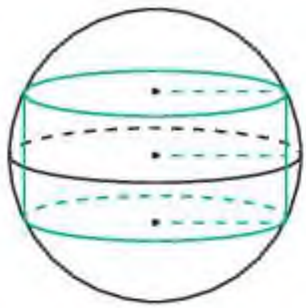


Рис. 28.5

28.10. Найдите объем шара, вписанного в правильную треугольную призму, сторона основания которой равна 1 см.

28.11. Площади поверхностей двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объемы?

28.12. Найдите формулу объема шарового кольца — фигуры, заключенной между поверхностями двух шаров (рис. 28.6) радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$), имеющих общий центр.

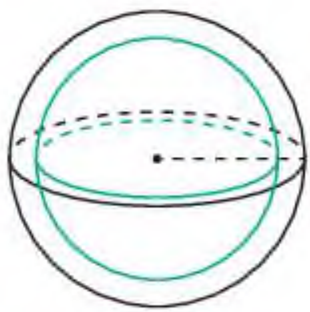


Рис. 28.6

28.13. Мякоть вишни окружает косточку толщиной, равной диаметру косточки (рис. 28.7). Считая шарообразной форму вишни и косточки, найдите отношение объема мякоти к объему косточки.

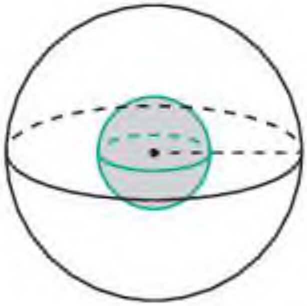


Рис. 28.7

Рис. 28.8

28.14. Апельсин имеет форму шара. Толщина его кожуры составляет одну пятую часть радиуса (рис. 28.6). Какую часть объема апельсина составляет его кожура?

28.15. Диаметр шара монумента Байтерек в Нур-Султане (рис. 28.8) равен 22 м. Найдите объем этого шара.

C

28.16. Найдите объем шара, описанного около правильной треугольной призмы, ребра которой равны 1 см (рис. 28.9).

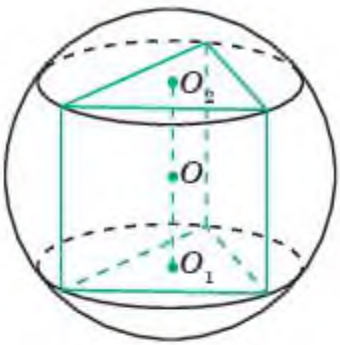


Рис. 28.9

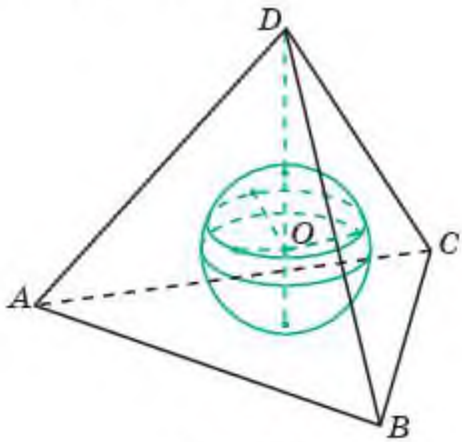


Рис. 28.10

28.17. Найдите объем шара, вписанного в правильный тетраэдр с ребром 1 см (рис. 28.10).

28.18. Найдите объем шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром 1 см (рис. 28.11).

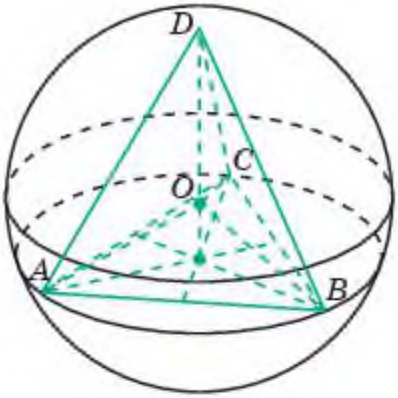


Рис. 28.11

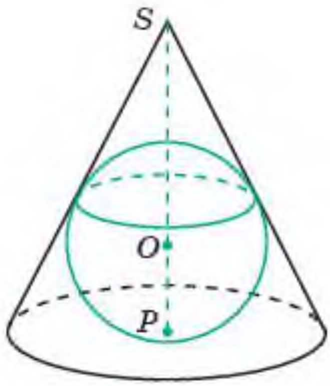


Рис. 28.12

28.19. В конус, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см, вписан шар. Найдите его объем (рис. 28.12).

28.20. Около конуса, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см, описан шар. Найдите его объем (рис. 28.13).

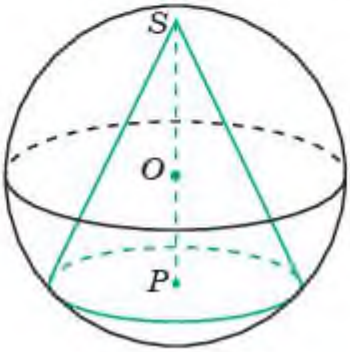


Рис. 28.13

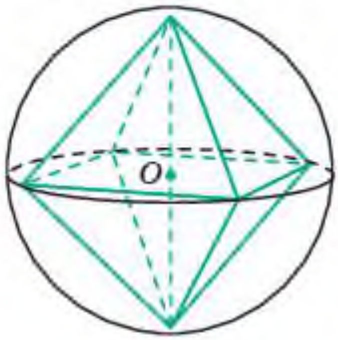


Рис. 28.14

28.21. Найдите объем шара, описанного около октаэдра с ребром 1 см (рис. 28.14).

28.22. Найдите объем шара, вписанного в октаэдр с ребром 1 см (рис. 28.15).

28.23. Через середину радиуса шара проведена плоскость, перпендикулярная этому радиусу (рис. 28.16). Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, отсекаемого от шара этой плоскостью?

28.24. Чему равен объем шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара — 75 см?

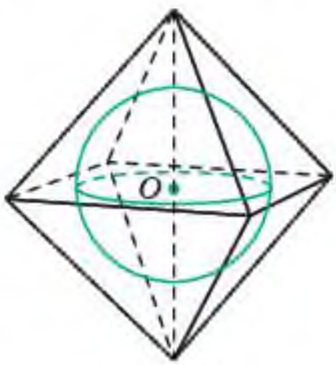


Рис. 28.15

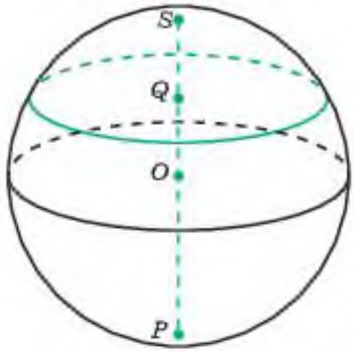


Рис. 28.16

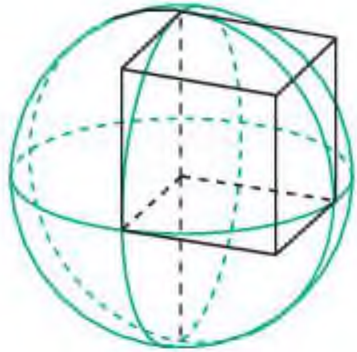


Рис. 28.17

28.25. Найдите объем шарового пояса, если радиусы его оснований равны 3 см и 4 см, а радиус шара — 5 см.

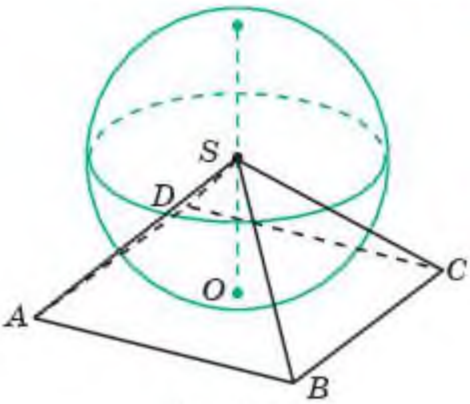


Рис. 28.18

28.26. Дан единичный куб. Шар, радиус которого равен 1 см, имеет своим центром вершину этого куба (рис. 28.17). Найдите объем общей части куба и шара.

28.27. Дана правильная четырехугольная пирамида, стороны основания которой равны 2 см, а высота равна 1 см. Шар, радиус которого равен 1 см, имеет своим центром вершину этой пирамиды (рис. 28.18). Найдите объем общей части пирамиды и шара.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Во сколько раз увеличится объем куба, если все его ребра увеличить в два раза:

   A) 2; B) 4; C) 6; D) 8?

2. Площадь поверхности куба равна 12 см^2. Найдите его объем:

   A) $2\sqrt{2}$ см^3; B) 4 см^3; C) $4\sqrt{2}$ см^3; D) 8 см^3.

3. Найдите объем куба, описанного около сферы радиусом 2 см:

   A) 32 см^3; B) 64 см^3; C) 128 см^3; D) 256 см^3.

4. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем тре-

угольной призмы, отсеченной этой плоскостью, если объем исходной призмы равен 8 см^3:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

5. Найдите объем шестиугольной призмы, основанием которой является правильный шестиугольник со сторонами равными 2 см, а боковые ребра равны 3 см и образуют угол 60° с плоскостью основания этой призмы:

A) $6\sqrt{3}$ см^3; B) 9 см^3; C) 27 см^3; D) $9\sqrt{3}$ см^3.

6. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания и высота которого равны 2 см:

A) 8 см^3; B) $8\sqrt{2}$ см^3; C) 16 см^3; D) $16\sqrt{2}$ см^3.

7. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 8 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в два раза меньше первого:

A) 16 см; B) 32 см; C) 48 см; D) 64 см?

8. Развертка боковой поверхности цилиндра — квадрат со стороной равной 2 см. Найдите объем цилиндра:

A) $\frac{2}{\pi}$ см^3; B) $\frac{4}{\pi}$ см^3; C) 2π см^3; D) 4π см^3.

9. Найдите объем цилиндра, описанного около треугольной призмы, ребра которой равны 3 см?

A) 3π см^3; B) 6π см^3; C) 9π см^3; D) 12π см^3.

10. Объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 6 см^3. Найдите объем четырехугольной пирамиды $A_1BCC_1B_1$:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

11. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, ребра которой равны 2 см:

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ см^3; B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см^3; D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см^3.

12. Объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 6 см^3. Найдите объем тетраэдра ACB_1D_1:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

13. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 2 см и образуют угол 30° с плоскостью основания этой пирамиды:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ см^3; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^3; D) $\sqrt{3}$ см^3.

14. Равносторонний треугольник со стороной 2 см вращается вокруг прямой, содержащей его высоту. Найдите объем тела вращения:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{\pi}{3}$ см^3; D) $\pi\sqrt{3}$ см^3.

15. Разверткой боковой поверхности конуса служит круговой сектор радиусом 3 см и центральным углом 120°. Найдите объем конуса:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{2\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3.

16. Конус описан около правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания и высота которой равны 1 см. Найдите его объем:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{2\pi}{3}$ см^3.

17. Найдите объем усеченного конуса, осевым сечением которого является равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 2 см, а боковые стороны равны 2 см:

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3.

18. Площадь поверхности шара равна 36 см^2. Найдите объем этого шара:

A) $24\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; B) $36\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; C) $48\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; D) $60\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3.

19. Найдите объем шара, описанного около куба, ребро которого равно 2 см:

A) $\sqrt{3}\pi$ см^3; B) $2\sqrt{3}\pi$ см^3; C) $3\sqrt{3}\pi$ см^3; D) $4\sqrt{3}\pi$ см^3.

20. Чему равен объем шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 4 см, а радиус шара — 5 см:

A) $\frac{52\pi}{3}$ см^3; B) $\frac{43\pi}{3}$ см^3; C) $\frac{32\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{22\pi}{3}$ см^3?

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ ЗА КУРС 10—11 КЛАССОВ

УГЛЫ

Угол между прямыми

А

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB и CD_1.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и DA_1.
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC и BC_1.
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между прямыми AC_1 и BB_1.
5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между прямыми SB и CD.

В

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите угол между прямыми SB и CD.
7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между прямыми AB и C_1D_1.
8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между прямыми AC и BE_1.

С

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между прямыми AB и CA_1.
10. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра CD. Найдите косинус угла между прямыми BC и AE.
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите косинус угла между прямыми AB и CA_1.
12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, точка E — середина ребра SD, найдите тангенс угла между прямыми SB и AE.
13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите косинус угла между прямыми AB и FE_1.
14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.
15. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите косинус угла между прямыми SB и AE.

16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите косинус угла между прямыми SB и AD.

Угол между прямой и плоскостью

A

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCD_1.
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой CA_1 и плоскостью AB_1D_1.
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между прямой AB и плоскостью ACC_1.
5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между прямой SB и плоскостью ABC.

B

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите угол между прямой SC и плоскостью ABC.
7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между прямой AB и плоскостью CDD_1.
8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между прямой AC и плоскостью CDD_1.

C

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BDD_1.
10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите синус угла между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.
11. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра BD. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC.
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите тангенс угла между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1.
13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите синус угла между прямой BD и плоскостью SBC.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите синус угла между прямой BC и плоскостью SAF.
15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BCE_1.
16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью AFF_1.

Угол между двумя плоскостями

A

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и ABC.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ADC_1 и BCD_1.
3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между плоскостями ACC_1 и BCC_1.
4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между плоскостями SAC и SBD.

B

5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите угол между плоскостями SAD и SBE.
6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между плоскостями ABB_1 и CDD_1.
7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между плоскостями ABB_1 и CEE_1.
8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите угол между плоскостями ACC_1 и BEE_1.

C

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CB_1D_1.
10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и AB_1D_1.

11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CA_1B_1.
12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите косинус угла между плоскостями SAD и SBC.
13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SBC и SCD.
14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите косинус угла между плоскостями SBC и SEF.
15. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите косинус угла между плоскостями SAF и SBC.
16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

РАССТОЯНИЯ

Расстояние от точки до прямой

А

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AD_1.
2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой A_1D_1.
3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до прямой BC.
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.

В

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки S до прямой AC.
6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите расстояние от точки S до прямой BE.
7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки F до прямой BB_1.
8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки F до прямой B_1C_1.

C

9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой DA_1.
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.
11. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите расстояние от точки S до прямой BF.
12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите расстояние от точки B до прямой SA.
13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1.
14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки B до прямой A_1D_1.
15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки B до прямой FE_1.
16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки B до прямой AD_1.

Расстояние от точки до плоскости

A

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDD_1.
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1.
3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки S до плоскости ABC.
4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите расстояние от точки S до плоскости ABC.

B

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости BDD_1.
6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1.

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости CDD_1.
8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости BDE_1.

C

9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CB_1D_1.
10. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDC_1.
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости BCA_1.
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости CA_1B_1.
13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости SCD.
14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите расстояние от точки A до плоскости SDE.
15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости DEA_1.
16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние от точки A до плоскости DEF_1.

Расстояние между двумя прямыми

A

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и CC_1.
2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и C_1D_1.
3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и CD_1.
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние между прямыми AB и B_1C_1.

B

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.
7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние между прямыми AB и C_1D_1.
8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние между прямыми AB_1 и DE_1.

C

9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1.
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние между прямыми CC_1 и AB.
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1.
12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние между прямыми SB и AC.
13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние между прямыми SA и CD.
14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите расстояние между прямыми SB и AF.
15. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, найдите расстояние между прямыми SB и AE.
16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, найдите расстояние между прямыми BB_1 и EF_1.

СЕЧЕНИЯ

А

1. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AA_1, BB_1, B_1C_1. Найдите его площадь.
2. Изобразите сечение тетраэдра $ABCD$, все ребра которого равны 1 см, проходящее через середины ребер AB, BC и CD. Найдите его площадь.
3. Изобразите сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через середины ребер AB, BC, A_1B_1. Найдите его площадь.
4. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер BB_1, CC_1, A_1B_1. Найдите его площадь.

5. Изобразите сечение тетраэдра $ABCD$, все ребра которого равны 1 см, проходящее через середины ребер AD, BD и BC. Найдите его площадь.
6. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины A, C и D_1. Найдите его площадь.
7. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер BC, B_1C_1. Найдите его площадь.
8. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину C и середины ребер AD, A_1D_1. Найдите его площадь.
9. Изобразите сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины B, B_1 и середину ребра AC. Найдите его площадь.

B

10. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер BB_1, DD_1. Найдите его площадь.
11. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершины A, C и середину ребра C_1D_1. Найдите его площадь.
12. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины A, D и C_1. Найдите его площадь.
13. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину B и середины ребер AA_1, CC_1. Найдите его площадь.
14. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершины A_1, B и середину ребра CC_1. Найдите его площадь.
15. Изобразите сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины A_1, B_1 и середину ребра AC. Найдите его площадь.
16. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AA_1, CC_1 и точку на ребре BB_1, отстоящую от вершины B на 0,25. Найдите его площадь.
17. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину A и середины ребер CD, A_1D_1. Найдите его площадь.
18. Изобразите сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины A, B и середину ребра SC. Найдите его площадь.
19. Изобразите сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через середины ребер AA_1, BB_1 и A_1C_1. Найдите его площадь.
20. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер A_1B_1, CD и точку на ребре AB, отстоящую от вершины A на 0,25. Найдите его площадь.

21. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершины A_1, C_1 и середину ребра AD. Найдите его площадь.
22. Изобразите сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины B, C и середину ребра SA. Найдите его площадь.
23. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины B, D и E_1. Найдите его площадь.
24. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AD, B_1C_1 и точку на ребре BC, отстоящую от вершины B на 0,25. Найдите его площадь.
25. Изобразите сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через середины ребер AD, BC и SD. Найдите его площадь.
26. Изобразите сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины A, B и середину ребра A_1C_1. Найдите его площадь.
27. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины C, F и E_1. Найдите его площадь.

C

28. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AA_1, CC_1 и точку на ребре AB, отстоящую от вершины A на 0,75. Найдите его площадь.
29. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину D_1 и середины ребер AB, BC. Найдите его площадь.
30. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер BB_1, DD_1 и точку на ребре AB, отстоящую от вершины A на 0,75. Найдите его площадь.
31. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, проходящее через вершины A, B и D_1. Найдите его площадь.
32. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AA_1, CC_1 и точку на ребре AB, отстоящую от вершины A на 0,25. Найдите его площадь.
33. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AB, BC, CC_1. Найдите его площадь.
34. Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через вершину B_1 и середины ребер AD, CD. Найдите его площадь.

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ

Цилиндр и конус

А

1. Периметр осевого сечения цилиндра, в который вписана сфера, равен 8 см. Найдите радиус сферы.
2. Площадь осевого сечения цилиндра, в который вписана сфера, равна 4 см^2. Найдите диаметр сферы.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 2 см. Найдите радиус сферы, описанной около этого цилиндра.
4. Около цилиндра высотой 2 см и радиусом основания 1 см описана сфера. Найдите ее радиус.
5. Около цилиндра, радиус основания которого равен 1 см, описана сфера радиусом 2 см. Найдите высоту цилиндра.
6. Около цилиндра, высота которого равна 1 см, описана сфера радиусом 1 см. Найдите радиус основания цилиндра.
7. В основании прямой призмы правильный треугольник со стороной 1 см. Найдите радиус окружности основания цилиндра, вписанного в эту призму.
8. В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Найдите радиус окружности основания цилиндра, вписанного в эту призму.
9. Найдите радиус окружности основания цилиндра, вписанного в единичный куб.
10. В правильную шестиугольную призму, со стороной основания 1 см, вписан цилиндр. Найдите радиус окружности основания этого цилиндра.
11. В основании прямой призмы правильный треугольник со стороной 1 см. Найдите радиус окружности основания цилиндра, описанного около этой призмы.
12. В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Найдите радиус окружности основания цилиндра, описанного около этой призмы.
13. В основании прямой призмы квадрат со стороной 1 см. Найдите радиус окружности основания цилиндра, описанного около этой призмы.
14. Около правильной шестиугольной призмы, со стороной основания 1 см, описан цилиндр. Найдите радиус окружности основания этого цилиндра.

В

15. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1 см.

16. Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1 см.
17. Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1 см.
18. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1 см.
19. Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1 см.
20. Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1 см.
21. В конус, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см, вписана сфера. Найдите ее радиус.

C

22. В конус, радиус основания которого равен 2 см, вписана сфера радиусом 1 см. Найдите высоту конуса.
23. Радиус основания конуса равен 1 см. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите радиус вписанной сферы.
24. Высота конуса равна 8 см, образующая — 10 см. Найдите радиус вписанной сферы.
25. В усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 см и 1 см, вписана сфера. Найдите высоту усеченного конуса.
26. В усеченный конус, радиус одного основания которого равен 2 см, вписана сфера радиусом 1 см. Найдите радиус второго основания.
27. В усеченном конусе радиус большего основания равен 2 см, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите радиус вписанной сферы.
28. Образующая усеченного конуса равна 2 см, площадь осевого сечения 3 см. Найдите радиус вписанной сферы.
29. Около конуса, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна 2 см, описана сфера. Найдите ее радиус.
30. Около конуса, радиус основания которого равен 4 см, описана сфера радиусом 5 см. Найдите высоту конуса.
31. Радиус основания конуса равен 1 см. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите радиус описанной сферы.
32. Высота конуса равна 8 см, образующая — 10 см. Найдите радиус описанной сферы.
33. Около усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 2 см и 1 см, а образующая равна 2 см, описана сфера. Найдите ее радиус.

34. Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 1 см, образующая равна 2 см и составляет угол 45° с плоскостью другого основания. Найдите радиус описанной сферы.
35. Радиус одного основания усеченного конуса равен 4 см, высота — 7 см, радиус описанной сферы — 5 см. Найдите радиус второго основания усеченного конуса.
36. Найдите радиус сферы, описанной около усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 2 см и 4 см, а высота равна 5 см.

Вписанная сфера

А

1. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный куб.
2. В куб вписана сфера радиусом 1 см. Найдите ребро куба.
3. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную призму, если стороны основания призмы равны 1 см.
4. В правильную треугольную призму вписана сфера радиусом 1 см. Найдите высоту призмы.
5. Найдите высоту правильной шестиугольной призмы и радиус, вписанной в нее сферы, если сторона основания призмы равна 1 см.

В

6. В призму, в основании которой прямоугольный треугольник с катетами, равными 1 см, вписана сфера. Найдите радиус сферы.
7. В призму, в основании которой равнобедренный треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 3 см, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту призмы.
8. Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой ромб со стороной 1 см и острым углом 60°. Найдите радиус сферы и высоту призмы.
9. Сфера радиусом 1 см вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой ромб с острым углом 60°. Найдите сторону основания a и высоту призмы h.
10. Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой трапеция. Высота трапеции равна 2 см. Найдите высоту призмы и радиус вписанной сферы.
11. В правильную шестиугольную призму вписана сфера радиусом 1 см. Найдите сторону основания и высоту призмы.
12. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный тетраэдр.
13. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны 1 см.
14. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, у которой стороны основания равны 1 см, и двугранные углы при основании равны 60°.

C

15. Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой четырехугольник, периметром 4 см и площадью 2 см^2. Найдите радиус вписанной сферы.

16. В правильный тетраэдр вписана единичная сфера. Найдите ребро этого тетраэдра.

17. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна 2 см, и двугранные углы при основании равны 60°.

18. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, боковые ребра которой равны 1 см, и плоские углы при вершине равны 90°.

19. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 1 см, а боковое ребро — 2 см.

20. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 2 см, и двугранные углы при основании равны 60°.

21. Единичная сфера вписана в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 4 см. Найдите высоту пирамиды.

22. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, у которой ребра основания равны 1 см, а боковые ребра — 2 см.

Описанная сфера

A

1. Найдите радиус сферы, описанной около единичного куба.

2. Найдите ребро куба, вписанного в единичную сферу.

3. Найдите радиус сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны 1 см, 2 см, 3 см.

4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 см и 2 см. Радиус описанной сферы равен 1,5 см. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины параллелепипеда.

B

5. Найдите радиус сферы, описанной около единичного тетраэдра.

6. Найдите ребро правильного тетраэдра, вписанного в единичную сферу.

7. Найдите радиус сферы, описанной около правильной призмы, все ребра которой равны 1 см.
8. Около правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 1 см, описана сфера радиусом 2 см. Найдите высоту призмы.
9. Около правильной треугольной призмы, высота которой равна 1 см, описана сфера радиусом 1 см. Найдите сторону основания призмы.
10. Найдите радиус сферы, описанной около прямой треугольной призмы, в основании которой прямоугольный треугольник с катетами, равными 1 см, и высотой призмы равна 2 см.
11. Найдите радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1 см.
12. Найдите радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 см.
13. Найдите радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра — 2 см.

С

14. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 см. Одно из боковых ребер равно 2 см и перпендикулярно плоскости основания. Найдите радиус описанной сферы.
15. Ребро SC пирамиды $SABC$ равно 2 см и перпендикулярно плоскости основания ABC, угол ACB равен 90°, $AC = BC = 1$ см. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.
16. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 1 см, и плоские углы при вершине равны 90°.

ОБЪЕМ

А

1. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12 см^2. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4 см. Найдите объем параллелепипеда.
2. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24 см^3. Одно из его ребер равно 3 см. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.
3. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60 см^3. Площадь одной его грани равна 12 см^2. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.
4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 см и 6 см. Объем параллелепипеда равен

48 см^3. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

5. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4 см, 6 см, 9 см. Найдите ребро равновеликого ему куба.
6. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?
7. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см, боковое ребро равно 5 см. Найдите объем призмы.
8. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 5 см. Объем призмы равен 30 см^3. Найдите ее боковое ребро.
9. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$ см.
10. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?
11. Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6 см, а основание — прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см.
12. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Ее объем равен 16 см^3. Найдите высоту этой пирамиды.
13. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1 см, а высота равна $\sqrt{3}$ см.
14. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2 см, а объем равен $\sqrt{3}$ см^3.
15. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?
16. В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали?
17. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в три раза больше первого?
18. Найдите объем конуса, площадь основания которого равна 2 см^2, а образующая равна 6 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°.
19. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высоту уменьшить в три раза?
20. Во сколько раз увеличится объем конуса, если его радиус основания увеличить в 1,5 раза?
21. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если объем конуса равен 10 см^3.

22. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150 см^3.
23. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

B

24. Диагональ куба равна $\sqrt{12}$ см. Найдите его объем.
25. Объем куба равен $24\sqrt{3}$ см^3. Найдите его диагональ.
26. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 см, 4 см. Диагональ параллелепипеда равна 6 см. Найдите объем параллелепипеда.
27. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 см, 3 см. Объем параллелепипеда равен 36 см^3. Найдите его диагональ.
28. Если каждое ребро куба увеличить на 1 см, то его объем увеличится на 19 см^3. Найдите ребро куба.
29. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 см и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол 60° и равно 2 см. Найдите объем параллелепипеда.
30. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2 см. Найдите объем параллелепипеда.
31. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 1 см. Объем параллелепипеда равен 8 см^3. Найдите высоту цилиндра.
32. Куб описан около сферы радиусом 2 см. Найдите его объем.
33. Объем куба, описанного около сферы, равен 216 см^3. Найдите радиус сферы.
34. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32 см^3, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.
35. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5 см^3. Найдите объем исходной призмы.
36. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2 см, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ см и наклонены к плоскости основания под углом 30°.
37. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6 см, боковое ребро равно 10 см. Найдите ее объем.
38. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12 см, объем равен 200 см^3. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

39. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°.Высота пирамиды равна 6 см. Найдите объем пирамиды.
40. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3 см. Найдите объем пирамиды.
41. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2 см, боковое ребро равно 4 см. Найдите объем пирамиды.
42. Объем правильной шестиугольной пирамиды равны 6 см^3. Сторона основания равна 1 см. Найдите боковое ребро.
43. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4 см, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.
44. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12 см^3. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC.
45. Объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12 см^3. Точки E, F, E_1, F_1 — середины ребер соответственно BC, CD, B_1C_1, C_1D_1. Найдите объем треугольной призмы $CEFC_1E_1F_1$.
46. Объем куба равен 12 см^3. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.
47. От призмы $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен 6 см^3, отсечена треугольная пирамида C_1ABC. Найдите объем оставшейся части.
48. Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1 см^3. Найдите объем шестиугольной пирамиды.
49. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12 см^3. Точка E — середина ребра SB. Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.
50. От треугольной пирамиды, объем которой равен 12 см^3, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.
51. Объем треугольной пирамиды $SABC$ равен 15 см^3. Плоскость проходит через сторону AB основания этой пирамиды и пересекает противолежащее боковое ребро в точке D, делящей ребро SC в отношении 1 : 2, считая от вершины S. Найдите объем пирамиды $DABC$.
52. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.
53. Объем конуса равен 12 см^3. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите объем отсеченного конуса.

54. Высота конуса равна 6 см, образующая равна 10 см. Найдите его объем, деленный на π.
55. Диаметр основания конуса равен 6 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса, деленный на π.
56. Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 6 см. Найдите его объем, деленный на π.
57. Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 см и высотой 6 см. Найдите его объем, деленный на π.
58. Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?
59. Радиусы трех шаров равны 6 см, 8 см и 10 см. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.
60. В куб с ребром 3 см вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.
61. Около куба с ребром $\sqrt{3}$ см описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.

C

62. Основание прямой призмы — ромб, площадь которого равна 3 см^2. Площади диагональных сечений равны 8 см^2 и 12 см^2. Найдите объем призмы.
63. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 2 см^2, 3 см^2, 6 см^2. Найдите объем параллелепипеда.
64. В параллелепипеде две грани имеют площади 4 см^2 и 6 см^2, их общее ребро равно 2 см, и они образуют между собой двугранный угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.
65. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна 12 см^2, а расстояние от нее до противолежащего ребра равно 3 см. Найдите объем призмы.
66. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны и имеют общее ребро, равное 2 см. Площади этих граней равны 4 см^2 и 6 см^2. Найдите объем призмы.
67. От куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребра которого равны 3 см, отсечены четыре треугольные призмы плоскостями, которые проходят через середины смежных сторон грани $ABCD$ параллельно ребру AA_1. Найдите объем оставшейся части.
68. Объем правильной шестиугольной призмы равен 12 см^3. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.

69. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt{3}$ см.
70. Найдите объем правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания и высота которого равны $2\sqrt{3}$ см.
71. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около сферы, радиус которой равен $\sqrt{3}$ см.
72. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt{3}$ см.
73. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания и высота которого равны $\sqrt{3}$ см.
74. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около сферы, радиус которой равен $\sqrt{3}$ см.
75. В куб с ребром 6 см вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Найдите объем тетраэдра.
76. Одно ребро тетраэдра равно 3 см. Все остальные ребра равны 2 см. Найдите объем тетраэдра.
77. Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной 6 см. Найдите объем этой пирамиды.
78. Два противолежащих ребра тетраэдра перпендикулярны и равны 3 см и 4 см. Расстояние между ними равно 2 см. Найдите объем тетраэдра.
79. Единичный тетраэдр $ABCD$ повернут на 60° вокруг высоты DD_1. Найдите объем общей части исходного тетраэдра и повернутого.
80. От четырехугольной пирамиды, объем которой равен 12 см^3, отсечены четыре треугольные пирамиды плоскостями, проходящими через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Найдите объем оставшейся части пирамиды.
81. Центры граней куба, ребро которого равно 6 см, служат вершинами октаэдра. Найдите его объем.
82. Найдите объем куба, вписанного в октаэдр, ребра которого равны 3 см.
83. В каждой грани куба с ребром 6 см проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 2 см. Найдите объем оставшейся части.
84. Через каждое ребро единичного куба, перпендикулярно плоскости, проходящей через это ребро и центр куба, проведена плоскость. Найдите объем многогранника, ограниченного этими плоскостями.
85. Через каждое ребро единичного тетраэдра параллельно противолежащему ребру проведена плоскость. Найдите объем многогранника, ограниченного этими плоскостями.
86. Через каждую вершину тетраэдра, объем которого равен 1 см^3, параллельно противолежащей грани проведена плоскость. Найдите объем многогранника, ограниченного этими плоскостями.

87. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 4 см. Боковые ребра призмы равны 6 см. Найдите объем цилиндра, вписанного в данную призму.

88. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 2 см. Боковые ребра призмы равны 6 см. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

89. Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной треугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?

90. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1 см. Боковые ребра равны 4 см. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

91. Во сколько раз объем цилиндра, вписанного в правильную четырехугольную призму, больше объема цилиндра, описанного около этой же призмы?

92. В правильную шестиугольную призму со стороной основания 1 см и боковым ребром 6 см вписан цилиндр. Найдите объем этого цилиндра.

93. Около правильной шестиугольной призмы со стороной основания 1 см описан цилиндр. Боковые ребра призмы равны 6 см. Найдите объем этого цилиндра.

94. Найдите объем цилиндра, описанного около шара, объем которого равен 1 $см^3$.

95. Объем шара равен 12 $см^3$. Найдите объем конуса, основанием которого является большой круг данного шара, а высотой — радиус, перпендикулярный плоскости этого круга.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

А

1. Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 см, 2 см, 3 см. Найдите его площадь поверхности.
2. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 см и 4 см. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 52 $см^2$. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.
3. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в три раза?
4. Во сколько раз увеличится площадь поверхности тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?
5. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 3 см, а высота — 6 см.

6. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь ее поверхности.
7. Длина окружности основания цилиндра равна 3 см, высота равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
8. Длина окружности основания конуса равна 3 см, образующая равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
9. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в три раза?
10. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?
11. Площадь большого круга шара равна 1 см^2. Найдите площадь поверхности шара.
12. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если его радиус увеличить в два раза?

B

13. Диагональ куба равна 1 см. Найдите площадь его поверхности.
14. Площадь поверхности куба равна 8 см^2. Найдите его диагональ.
15. Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Найдите его объем.
16. Объем куба равен 27 см^3. Найдите площадь его поверхности.
17. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 см, 4 см. Диагональ параллелепипеда равна 6 см. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.
18. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 см, 2 см. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16 см^2. Найдите его диагональ.
19. Если каждое ребро куба увеличить на 1 см, то его площадь поверхности увеличится на 30 см^2. Найдите ребро куба.
20. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 см, 2 см. Объем параллелепипеда равен 6 см^3. Найдите площадь его поверхности.
21. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 3 см и 4 см, и боковым ребром, равным 5 см.
22. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 см и 8 см. Площадь ее поверхности равна 248 см^2. Найдите боковое ребро этой призмы.
23. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если стороны ее основания равны 3 см, а площадь поверхности равна 66 см^2.

24. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 см и отстоит от других боковых ребер на 6 см и 8 см. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

25. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Площадь ее поверхности равна 288 см^2. Найдите высоту призмы.

26. Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 12 см^2, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

27. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 8. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

28. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 6 см, боковые ребра равны 5 см. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

29. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 см и высота равна 4 см.

30. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 6 см, боковые ребра равны 5 см. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

31. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в три раза?

32. Высота конуса равна 6 см, образующая равна 10 см. Найдите площадь его поверхности, деленную на π.

33. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.

34. Площадь поверхности конуса равна 12 см^2. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите площадь поверхности отсеченного конуса.

35. Объем шара равен 36π. Найдите площадь его поверхности, деленную на π.

36. Объем одного шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

37. Радиусы двух шаров равны 6 см, 8 см. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

C

38. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

39. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2 см. Площадь боковой поверхности призмы равна 48 см^2. Найдите высоту цилиндра.
40. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$ см, а высота равна 3 см.
41. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$ см, а высота равна 3 см.
42. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$ см, а высота равна 3 см.
43. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания и высота которого равны 3 см.
44. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 2 см. Найдите его площадь поверхности.
45. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равна 54 см^2. Найдите радиус сферы.
46. Площадь осевого сечения цилиндра равна 1 см^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
47. Площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в правильную треугольную призму, равна 6 см^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около этой призмы.
48. Высота правильного тетраэдра равна 4 см. Найдите площадь поверхности шара, описанного около этого тетраэдра.
49. Площадь поверхности шара, описанного около правильного тетраэдра, равна 9 см^2. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в этот тетраэдр.
50. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 9 см^2. Найдите площадь поверхности шара.
51. Около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 см, 4 см и 6 см, описан шар. Найдите площадь его поверхности.
52. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Вращение многоугольников

А

1. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ см вокруг прямой AC.

2. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ см вокруг прямой, содержащей высоту CH этого треугольника.
3. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равностороннего треугольника ABC со сторонами, равными 1 см, вокруг прямой CH, содержащей высоту этого треугольника.
4. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC = 1$ см, $\angle C = 120^\circ$, CH — высота. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой CH.
5. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AD и BC, равными 1 см, и основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, вокруг прямой c, проходящей через середины оснований AB и CD.
6. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, меньшей боковой стороной, равной 1 см, вокруг прямой AD.

B

7. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ см вокруг прямой AB.
8. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равностороннего треугольника ABC со сторонами, равными 1 см, вокруг прямой AB.
9. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC = 1$ см, $\angle C = 120^\circ$. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой AB.
10. В прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$, $BC = 4$ см, $\angle C = 90^\circ$. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой AB.
11. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1 см, и острым углом 60°, вокруг прямой AC.
12. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1 см, и острым углом 60°, вокруг прямой BD.
13. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AD и BC, равными 1 см, и основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, вокруг прямой AB.
14. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, меньшей боковой стороной, равной 1 см, вокруг прямой AB.

C

15. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC = 1$ см, $\angle C = 120^\circ$. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой AC.

16. В прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 90^\circ$, CH — высота. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения этого треугольника вокруг прямой CH.

17. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1 см, и острым углом 60°, вокруг прямой AB.

18. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AD и BC, равными 1 см, и основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, вокруг прямой CD.

19. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AD и BC, равными 1 см, и основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, вокруг прямой c, содержащей среднюю линию этой трапеции.

20. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, равными соответственно 2 см и 1 см, меньшей боковой стороной, равной 1 см, вокруг прямой CD.

21. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 см вокруг прямой AB.

22. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 см вокруг прямой AC.

23. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 см вокруг прямой AD.

24. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 см вокруг прямой c, проходящей через середины сторон AB и DE.

Вращение многогранников

A

1. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой AA_1.

2. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой c, проходящей через центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

3. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой AA_1.

4. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой c, проходящей через центры граней ABC и $A_1B_1C_1$.

5. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой c, проходящей через центры ее оснований.

B

6. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой c, проходящей через середины ребер BC и B_1C_1.
7. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного тетраэдра $ABCD$ вокруг прямой, содержащей высоту DH этого тетраэдра.
8. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой, содержащей высоту SH этой пирамиды.
9. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1 см, а боковые ребра равны 2 см, вокруг прямой, содержащей высоту SH этой пирамиды.
10. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой AA_1.

C

11. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного тетраэдра $ABCD$ вокруг прямой AB.
12. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения единичного октаэдра $S'ABCDS''$ вокруг прямой $S'S''$.
13. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой c, проходящей через середины ребер BC и B_1C_1.
14. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 см, вокруг прямой c, проходящей через середины ребер BC и B_1C_1.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Апофема 18
Биссектральная полуплоскость 124
Боковая грань
— пирамиды 18
— призмы 9
— усеченной пирамиды 20
Боковая поверхность
— конуса 82
— пирамиды 19
— призмы 9
— усеченного конуса 88
— усеченной пирамиды 20
— цилиндра 76
— шарового пояса 107
— шарового сегмента 107
Боковое ребро
— пирамиды 18
— призмы 9
— усеченной пирамиды 20
Большая окружность сферы 94
Вектор нормали 59
Вершина
— конуса 82
— многогранника 8
— многогранного угла 25
— пирамиды 18
Вращение 75
Высота
— конуса 82
— призмы 10
— усеченного конуса 88
— цилиндра 76
— шарового пояса 107
— шарового сегмента 107
Гексаэдр 35
Грань
— многогранника 8
— многогранного угла 25
Диагональ
— куба 8
— параллелепипеда 8
— призмы 9
Диаметр
— сферы 94
— шара 94
Додекаэдр 35
Единичный куб 8
Единица измерения объема 133
Зеркальная симметрия 47
Зеркально-симметричная фигура 47
Зеркально-симметричные фигуры 47

Икосаэдр 34
Касательная
— плоскость 95
— прямая 96
Конус 82
— вписанный в пирамиду 114
— вписанный в сферу 100
— описанный около пирамиды 113
— описанный около сферы 100
Коэффициент подобия 133
Кристаллы 48
— алмаза 48
— исландского шпата 48
— кварца 48
— поваренной соли 48
Куб 8
Меридианы 96
Метод следов 40
Многогранная поверхность 16
Многогранник 8
— вписанный в сферу 117
— выпуклый 10
— описанный около сферы 124
— правильный 34
Многогранный угол 25
Образующая
— конуса 82
— усеченного конуса 88
— цилиндра 76
Объем 133
— конуса 155
— пирамиды 147
— призмы 139
— усеченного конуса 155
— усеченной пирамиды 149
— цилиндра 144
— шара 159
— шарового сегмента 160
Октаэдр 34
Осевая симметрия 46
Осевое сечение
— конуса 82
— усеченного конуса 88
— цилиндра 76
Основание
— конуса 82
— пирамиды 18
— призмы 9
— усеченного конуса 88
— усеченной пирамиды 20
— цилиндра 76
— шарового пояса 107
— шарового сегмента 107

Ось
— вращения 75
— конуса 82
— поворота 75
— симметрии 46
— сферы 96
— усеченного конуса 88
— цилиндра 76
Параллелепипед 8
— прямоугольный 8
Параллели 96
Параметрические уравнения прямой 55
Пирамида 18
— вписанная в конус 113
— описанная около конуса 114
— правильная 19
— усеченная 20
Плоскость симметрии 47
Площадь боковой поверхности
— конуса 83
— усеченного конуса 89
— цилиндра 77
Площадь поверхности
— конуса 83
— многогранника 11
— пирамиды 19
— призмы 11
— усеченного конуса 89
— усеченной пирамиды 21
— цилиндра 77
— шара 106
Поваренная соль 48
Поверхность шара 94
— шарового пояса 107
— шарового сегмента 107
Поворот 75
Подобие 133
Полюс сферы 96
Призма 9
— вписанная в цилиндр 113
— описанная около цилиндра 113
— наклонная 9
— правильная 10
— прямая 9
Принцип Кавальери 139
Радиус
— сферы 93
— шара 94
Развертка
— конуса 83
— многогранника 11
— усеченного конуса 89
— цилиндра 77

Ребро
— многогранника 8
— многогранного угла 25
Сечение многогранника 39
Симметрия
— многогранников 45
— относительно плоскости 47
— относительно прямой 46
Сфера 93
— вписанная в конус 100
— вписанная в многогранник 124
— вписанная в усеченный конус 102
— вписанная в цилиндр 99
— описанная около конуса 100
— описанная около многогранника 117
— описанная около усеченного конуса 102
— описанная около цилиндра 100
Тела Платона 35
Теорема Эйлера 20
Тетраэдр
— правильный 34
Топология 31
Усеченная пирамида 20
— правильная 20
Усеченный конус 88
— вписанный в сферу 102
— описанный около сферы 102
Фигура
— вращения 75
— выпуклая 10
Фигуры
— подобные 134
— равновеликие 133
Хорда сферы 94
Центр
— симметрии 45
— сферы 93
— шара 94
Центральная симметрия 45
Центрально-симметричная фигура 45
Центрально-симметричные фигуры 45
Цилиндр 76
— вписанный в призму 113
— вписанный в сферу 99
— описанный около призмы 113
— описанный около сферы 99
Шар 94
Шаровой пояс 107
Шаровой сегмент 106
Экватор 95

ОТВЕТЫ

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА

1. а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.** Одна или бесконечно много. **3.** а) 4; б) 10; в) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **4.** а) 4; б) 8; в) 15. **8.** а) 8; б) 12; в) 6. **9.** а) 8; б) 12; в) 6. **10.** а) 6; б) 8; в) 10; г) 12; д) $2n$. **11.** а), г) Нет; б), в) да. **12.** а) 9; б) 12; в) 15; г) 18; д) $3n$. **13.** а), в), г) Да; б) нет. **14.** а) 5; б) 6; в) 7; г) 8; д) $n+2$. **15.** а), б), в), г) Да. **16.** а) Четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник. **17.** а) 4; б) 5; в) 6; г) 7; д) $n+1$. **18.** а), б), в), г) Да. **19.** а) 6; б) 8; в) 10; г) 12; д) $2n$. **20.** а), г) Нет; б), в) да. **21.** а) 4; б) 5; в) 6; г) 7; д) $n+1$. **22.** а), б), в), г) Да. **23.** а) Четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник. **24.** а) 18; б) 18; в) 6; г) 27. **27.** а) 24; б) 24; в) 3; г) 24. **28.** а), б) Скрещиваются; в) пересекаются. **29.** а), б) Скрещиваются, в) пересекаются. **33.** а) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, BCC_1B_1, EFF_1E_1; б) DEE_1D_1. **35.** а) 3; б) 3; в) 1; г) 4. **37.** а) 3; б) 48. **38.** а) 60°; б) 90°; в) 90°. **39.** а) 45°; б) 60°; в) 90°. **40.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **41.** а) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **42.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **43.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{3}$; г) $1\frac{1}{2}$. **44.** а) $\sqrt{3}$; б) 1. **45.** 45°. **46.** 60°. **47.** а) 60°; б) 30°; в) 90°; г) 90°. **48.** $\frac{1}{3}$. **49.** $-\frac{1}{3}$. **50.** 6. **51.** а) 2; б) $\sqrt{5}$; **52.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{6}$. **53.** $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. **54.** $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$. **55.** а) 120°; б) 60°. **56.** а) 1; б) 0; в) 1; г) 0. **57.** 1. **58.** $A(0;1;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;0;0)$, $D(0;0;0)$, $A_1(0;1;1)$, $B_1(1;1;1)$, $C_1(1;0;1)$, $D_1(0;0;1)$. **59.** $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $D(1;\sqrt{3};0)$, $E(0;\sqrt{3};0)$, $F(-0{,}5;\frac{\sqrt{3}}{2};0)$, $A_1(0;0;1)$, $B_1(1;0;1)$, $C_1(1{,}5;\frac{\sqrt{3}}{2};1)$, $D_1(1;\sqrt{3};1)$, $E_1(0;\sqrt{3};1)$, $F_1(-0{,}5;\frac{\sqrt{3}}{2};1)$. **60.** а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. **61.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$. **62.** $R=3$, $O(2;-1;0)$. **63.** 7. **64.** $6x+3y+2z=6$.

Глава I. МНОГОГРАННИКИ

§ 1

3. а), б). **4.** а), б). **5.** а), б), в), г). **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\sqrt{29}$. **8.** 1. **9.** В 9 раз. **10.** В 4 раза. **11.** В 4 раза. **12.** 94. **13.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$. **14.** $6+3\sqrt{3}$. **15.** в), д), ж). **16.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **18.** 2 и $\sqrt{5}$. **19.** $\sqrt{5}$. **20.** 4. **21.** а) 22; б) 28. **22.** а) 92; б) 48. **23.** а), б) 34. **24.** а) 22; б) 26. **25.** 30. **26.** ≈ 27600 м². **27.** б), в), г), д) — выпуклые; а), е) — невыпуклые. **28.** 288 см². **29.** $\sqrt{5}$. **30.** Нет. **31.** Нет. **32.** Пространственный крест.

§ 2

2. а), в). **3.** а), в). **4.** Пятиугольной пирамиды. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $1+\sqrt{3}$. **8.** $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{2}$. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** В 4 раза. **11.** В 9 раз. **15.** $\sqrt{7}$. **16.** $\sqrt{10}$. **17.** ≈ 8595 м². **18.** ≈ 8,3 га. **19.** $5+3\sqrt{3}$. **20.** 1. **21.** ≈ 1710 дм².

§ 3

1. а), б) Нет; в) да. **2.** Тетраэдр. **3.** а) Четырехугольная пирамида; б) пятиугольная пирамида; в) шестиугольная пирамида. **4.** а) Трехгранные углы; б) трехгранные и n-гранный углы. **5.** Больше 10° и меньше 150°. **6.** а) 240°; б) 270°; в) 300°. **7.** а) 210°; б) 240°. **10.** а), б) Нет. **12.** Нет.

§ 4

1. 8. **2.** 12. **3.** 6. **6.** а) Шестиугольная призма; б) пятиугольная пирамида. **7.** Выполняется. **8.** Да. **9.** Да. **10.** В = 12, Р = 24, Г = 12; В − Р + Г = 0. **11.** В = 24, Р = 60, Г = 38.

§ 5

1. а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 8, Р = 12, Г = 6; в) В = 6, Р = 12, Г = 8; г) В = 12, Р = 30, Г = 20; д) В = 20, Р = 30, Г = 12. **2.** Нет. У него есть вершины, в которых сходится разное число граней. **3.** Да, это октаэдр. **7.** 5. **8.** 3. **9.** Куба и октаэдра. **10.** Икосаэдра и додекаэдра. **11.** Тетраэдр, $\sqrt{2}$. **12.** Октаэдр, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** Октаэдр, $\frac{1}{2}$. **14.** Октаэдр, 1. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 4. **17.** 8. **18.** Тетраэдр, $\frac{1}{3}$. **19.** Куб, $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **20.** Додекаэдра. **21.** Икосаэдра. **22.** 10. **23.** 6. **24.** а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

§ 6

11. Нет.

§ 7

2. а), б), в) Да. **3.** а) Нет; б), в) да. **4.** а) Нет; б), в) да. **5.** а), б), в) Да. **6.** а) Нет; б), в) да. **7.** а) Нет; б), в) да. **9.** Точки прямой, лежащей в плоскости данных прямых, параллельной им и одинаково удаленной от них. **10.** а) Точки прямой пересечения данных плоскостей; б) точки плоскости, параллельной данным плоскостям, одинаково удаленной от этих плоскостей. **11.** Да. **12.** а), б), в) Да. **13.** а) 3; б) 7. **14.** а) 4; б) 7. **15.** а), б) 1. **16.** а) 4; б) 6. **17.** а) n, если n нечетно, $n + 1$, если n четно; б) 0, если n нечетно, 1, если n четно. **18.** а) $n + 1$; б) n. **19.** а) 9; б), в) 15. **20.** а) 9; б), в) 15. **21.** Да, например, центр симметрии сферы ей не принадлежит. **22.** а) У параллелепипеда, гранями которого являются параллелограммы, отличные от прямоугольников, есть центр симметрии, но нет осей симметрии; б) у правильной четырехугольной пирамиды есть ось симметрии, но нет центра симметрии. **23.** а) У параллелепипеда, гранями которого являются параллелограммы, отличные от прямоугольников, есть центр симметрии, но нет плоскостей симметрии; б) у четырехугольной пирамиды, в основании которой параллелограмм, отличный от ромба и прямоугольника, есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии. **24.** а) У правильной четырехугольной пирамиды есть плоскость симметрии, но нет центра симметрии; б) у правильной треугольной пирамиды есть плоскости симметрии, но нет оси симметрии. **25.** Октаэдр. **26.** Правильная шестиугольная призма.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	A)	B)	D)	C)	B)	C)	A)	D)	D)	A)	C)	B)	D)	B)	C)	D)	A)	B)	C)

§ 8

1. $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = -2 + 5t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 3 - 4t. \end{cases}$ **3.** Параллельны. **4.** $\frac{4}{9}$. **5.** 0. **6.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **7.** $\frac{9}{25}$. **8.** 0. **9.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **10.** $\frac{4}{5}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.** $\frac{11\sqrt{35}}{70}$. **13.** $\frac{3}{4}$.

§ 9

1. $3y - 2z = 0$. **2.** $6x - 3y - 2z + 6 = 0$. **3.** а) $z = 3$; б) $y = -2$; в) $x = 1$. **4.** а), в). **5.** а), б) Да; в) нет. **6.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{21}$. **7.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{4}{5}$. **8.** $\frac{7}{25}$. **9.** а) $\frac{6}{7}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{3}{7}$. **10.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{3}{5}$. **11.** $\frac{1}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **13.** $\frac{3}{5}$. **14.** $\frac{13}{19}$. **15.** $\frac{5}{7}$.

§ 10

1. $\frac{4}{9}$. **2.** $\frac{8}{9}$. **3.** а) Перпендикулярны; б) параллельны; в) прямая лежит в плоскости. **4.** а) $\frac{\sqrt{14}}{14}$; б) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$; в) $\frac{\sqrt{14}}{7}$. **5.** а) $\frac{12\sqrt{13}}{91}$; б) $\frac{12\sqrt{5}}{35}$; в) $\frac{6\sqrt{10}}{35}$. **6.** а) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; в) $\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **7.** а) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) 1. **8.** а) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; б) $\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **9.** а) $\frac{4\sqrt{19}}{19}$; б) $\frac{2\sqrt{285}}{95}$. **10.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

§ 11

1. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **5.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **6.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **7.** а), б), в) $\frac{6}{7}$. **8.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ см. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **10.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ см. **11.** $\frac{4\sqrt{57}}{19}$ см. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	C)	D)	A)	B)	D)	A)	B)	D)	A)	D)	B)	D)	B)	B)	C)	D)	A)	D)

§ 12

2. Бесконечно много. **3.** Кругом. **4.** Цилиндр. **5.** Кольцо. **6.** 5 см. **7.** $\frac{1}{2\pi}$ см. **8.** а) 4π см^2; б) 6π см^2. **10.** Прямоугольником. **11.** а), б), в) Да. **12.** а), б) Цилиндр. **13.** а) $2\sqrt{2}\pi$ см^2; б) $\sqrt{2}\pi$ см^2. **14.** а), б) Цилиндр. **15.** а) 2π см^2; б) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ см^2. **16.** а), б) Цилиндр. **17.** а) 12π см^2; б) 4π см^2. **18.** $10\pi \approx 31{,}4$ (м^2). **19.** 3 дм. **20.** Фигура состоит из двух цилиндров, радиусы оснований которых равны 2 см и 1 см, а высоты равны 1 см. Площадь поверхности этой фигуры равна 14π. **21.** Фигура состоит из трех цилиндров, радиусы оснований которых равны 2 см, 1 см, 1 см, а высоты равны 1 см. Площадь поверхности этой фигуры равна 16π см^2. **22.** Фигура состоит из цилиндра, радиусом основания и высотой равными 2 см, из которого вырезан другой цилиндр, радиусом основания равным 1 см, и высотой равной 2 см. Площадь поверхности этой фигуры равна 18π см^2. **23.** Состоит из двух цилиндров, радиусы оснований которых равны $2\sqrt{2}$ см и $\sqrt{5}$ см, а высоты равны 1 см. Площадь поверхности этой фигуры равна $(16 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\pi$ см^2. **24.** $\sqrt{9 + 4\pi^2}$ см. **25.** 13 см. **26.** 350π см^2.

§ 13

2. Бесконечно много. **3.** Кругом. **4.** Конус. **5.** Боковая поверхность конуса. **6.** 5. **7.** а) 5 см; б) $5\sqrt{3}$ см. **8.** 1. **9.** 1. **10.** 3π. **11.** Да. **13.** $\frac{\pi}{4}$. **14.** $\sqrt{5}\pi$. **15.** а) Нет; б), в) да. **16.** Конус. **17.** Фигура, составленная из двух конусов с общим основанием. **18.** Фигура, составленная из двух равных конусов с общим основанием; площадь ее поверхности равна $\sqrt{2}\pi$. **19.** Конус. **20.** $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$. **21.** Конус. **22.** 3π. **23.** Фигура состоит из конуса, радиус основания которого равен 2 см, а образующая равна 3 см, из которого вырезан другой конус, радиус основания которого равен 1 см, а образующая равна $\sqrt{6}$ см. Площадь ее поверхности равна $(9 + \sqrt{6})\pi$ см^2. **24.** Фигура состоит из двух равных конусов с общим основанием. Ее площадь поверхности равна $\sqrt{2}\pi$ см^2. **25.** Фигура, составленная из двух равных конусов с общим основанием; площадь ее поверхности равна π см^2. **26.** 0,5. **27.** 120°. **28.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **29.** 37. **30.** 42,12 м^2. **31.** 1440 см^2.

§ 14

2. Бесконечно много. **3.** Кругом. **4.** Усеченный конус. **5.** Боковая поверхность усеченного конуса. **6.** 5 см. **7.** 80π см^2. **8.** Да. **10.** 9π см^2. **11.** а) Нет; б), в) да. **12.** 1 см. **13.** 2.

14. $\frac{17\pi}{4}$ см². **15.** Усеченный конус. **16.** $(10 + 9\sqrt{2})\pi$ см². **17.** Усеченный конус. **18.** 14π см². **19.** $6\sqrt{2}\pi \approx 26{,}6$ (м²). **20.** Фигура, составленная из двух равных усеченных конусов с общим основанием. Площадь ее поверхности равна $3{,}5\pi$ см². **21.** Фигура является усеченным конусом, из которого вырезан конус, основанием которого служит одно из оснований усеченного конуса. Площадь ее поверхности равна 3π см². **22.** 1 см и 0,5 см. **23.** $y = x^2$. **24.** $y = a^x$. **25.** $y = \sin x$. **26.** ≈ 161 г. **27.** ≈ 1,1 дм². **28.** ≈ 88 см, ≈ 63 см, ≈ 24,3 см ≈ 21 дм².

§ 15

2. а) $OA < R$; б) $OA > R$. **3.** а) Расположена внутри сферы; б) принадлежит сфере; в) расположена вне сферы. **4.** Бесконечно много. **5.** 110 мм. **6.** 1 см. **7.** а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек. **8.** а) Одну; б) ни одной; в) бесконечно много. **9.** 4 см. **10.** 4 см. **11.** а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек. **12.** 5 см. **13.** 8 см. **14.** 5 см. **15.** а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек. **16.** ≈ 6369 км. **17.** Две. **18.** 2 см и 10 см. **19.** 1 см. **20.** π. **21.** Бесконечно много. **22.** Плоскость, параллельная данным плоскостям и равноудаленная от них. **23.** Касательная плоскость к сфере. **24.** Боковая поверхность конуса с вершиной в данной точке. **25.** а) Пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек.

§ 16

1. R и $2R$. **2.** $\frac{h}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **4.** $2\sqrt{3}$ см. **5.** $\sqrt{3}$ см. **6.** 2,5 см. **7.** 6π см². **8.** 4 см. **9.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см; б) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **10.** $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$. **11.** $3\frac{1}{8}$ см. **12.** $R = \frac{r(\sqrt{r^2 + h^2} - r)}{h}$. **13.** 1,5 см. **14.** $\sqrt{3}$ см. **15.** а) 1 см; б) $\sqrt{2} - 1$ см. **16.** а) 1 см; б) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$ см. **17.** 2 см. **19.** 2 см. **20.** 5 см. **21.** 3 см.

§ 17

1. 4π см². **2.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$ см. **3.** 12 см². **4.** Увеличится в: а) 4; б) 9; в) n^2 раз. **5.** 2 : 3. **6.** 10 см. **7.** 1. **8.** π. **9.** 2π. **10.** В 16 раз. **11.** В 3 раза. **12.** В 4 раза. **13.** 400π см². **14.** 1 : 3. **15.** 4π см². **16.** 6π см². **17.** ≈ 509554140 км². **18.** ≈ 1520 м². **19.** ≈ 19200 м². **20.** $\frac{2\pi}{3}$ см². **22.** $\frac{\pi}{3}$ см². **23.** $\frac{2\pi}{3}$ см².

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B)	C)	C)	D)	B)	C)	A)	C)	D)	C)	D)	D)	C)	C)	C)	D)	A)	D)	C)	D)

§ 18

1. а), б), г), д) Да; в) нет. **2.** а), г), д) Да; б), в) нет. **3.** Да. **4.** Да. **5.** Когда одна из его граней является квадратом. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1. **7.** $\frac{1}{2}$, 1. **8.** Три цилиндра, у которых радиусы оснований и высоты равны соответственно $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см и 3 см; $\frac{\sqrt{10}}{2}$ см и 2 см; $\frac{\sqrt{13}}{2}$ см и 1 см. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см и 1 см. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см и 1 см. **11.** 1 см и 1 см. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и 1 см. **13.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см; в) $\frac{1}{2}$ см. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см и $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. **15.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см и $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **16.** 1 см и $\sqrt{3}$ см. **17.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см и $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. **18.** $\frac{1}{2}$ см и $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **19.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и $\sqrt{3}$ см.

§ 19

1. а), б) Да; в) нет. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **4.** 1,5 дм. **5.** 4. **6.** Четырехугольная призма, в основании которой параллелограмм, отличный от прямоугольника. **7.** Нет, например, у прямой треугольной призмы, в основании которой тупоугольный треугольник, центр описанной сферы лежит вне этой призмы. **8.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **9.** $\sqrt{2}$. **10.** Если основанием призмы является: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный треугольник. **11.** 13 см. **12.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ см. **13.** $\sqrt{11}$ см.

§ 20

1. Плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки и перпендикулярная этому отрезку. **3.** 2 см. **4.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **5.** $1\frac{1}{4}$ см. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ см. **7.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ см. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **9.** $1\frac{1}{2}$ см. **10.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **11.** 1 см. **12.** а) 1 см; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **13.** Четырехугольная пирамида, основанием которой является параллелограмм, отличный от прямоугольника. **14.** а), б), в) Да. **15.** Центром описанной сферы является центр окружности, описанной около основания этой пирамиды; радиус сферы равен $\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **17.** Центром описанной сферы является центр окружности, описанной около основания этой пирамиды. **18.** Центром описанной сферы является центр окружности, описанной около основания этой пирамиды. **19.** $1\frac{1}{2}$ см. **20.** $2\frac{1}{2}$ см. **21.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **22.** $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ см. **23.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}$ см.

§ 21

1. $\frac{1}{2}$ см. **2.** 2 см. **3.** $\frac{1}{2}$ см. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **5.** Нет. **6.** Правильная призма, у которой высота не равна удвоенному радиусу окружности, вписанной в ее основание. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **8.** $2\sqrt{3}$ см. **9.** $\frac{1}{2}$ см. **10.** 2 см. **11.** $\sqrt{3}$ см. **12.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **13.** Две перпендикулярные плоскости, содержащие биссектральные полуплоскости двугранных углов, образованных данными плоскостями. **14.** 2 см. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см.

§ 22

1. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ см. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **3.** $2\sqrt{3}-3$ см. **4.** $R=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+4h^2}}$. **5.** $\frac{3\sqrt{5}-3}{4}$ см. **6.** а) $2-\sqrt{3}$ см; б) $\sqrt{2}-1$ см; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **7.** $R=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+12h^2}}$. **8.** $\frac{1}{3}$ см. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$ см. **10.** $R=\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3}a+\sqrt{3a^2+4h^2}}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{19}-\sqrt{3})}{8}$ см. **12.** $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ см. **13.** $\frac{\sqrt{57}-3}{16}$ см. 14. Четырехугольная пирамида, основанием которой является прямоугольник, отличный от квадрата, а основанием высоты является точка пересечения диагоналей этого прямоугольника. **15.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ см.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	D)	A)	D)	B)	C)	C)	D)	B)	D)	B)	B)	B)	C)	A)	D)	B)	C)	B)	B)

§ 23

1. 54 см². **2.** 8 см³. **3.** 8 см³. **4.** 7 см³. **5.** В 27 раз. **6.** В 8 раз. **7.** а) Увеличится в 2 раза; б) уменьшится в 9 раз. **8.** 62,5 г. **9.** 60 м². **10.** а) 6 см³; б) 8 см³. **11.** а) 40; б) 12.

12. а), б) 10. **13.** а) 5; б) 6. **14.** 30 см³. **15.** 15 см³. **16.** 20 см. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** $1\frac{3}{4}$. **19.** ≈ 21 м³. **20.** 9 см. **21.** 3 см. **22.** 160 см³. **23.** $\frac{1}{6}$. **24.** $\frac{1}{3}$. **25.** 4 см³. **26.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ см³. **28.** 6 м³. **29.** 162 л.

§ 24

1. 60 см³. **2.** $20\sqrt{3}$ см³. **3.** $18\sqrt{3}$ см³. **4.** $\sqrt{3}$ см³. **5.** 0,75 см³. **6.** $16\sqrt{3}$ см. **7.** 1 : 3. **8.** 3 см³. **9.** 5 см³. **10.** 9 см³. **12.** 3 м³. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см³. **14.** $\frac{S_1S_2}{2a}$. **15.** Искомой плоскостью является плоскость, проходящая через центры симметрии параллелепипедов. **16.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ см³. **17.** $3\sqrt{3}$ см³. **18.** $6\sqrt{3}$. **19.** $4\sqrt{3}$. **20.** $\frac{Q\cdot d}{2}$. **22.** 36 см³.

§ 25

1. 12π см³. **2.** $\frac{\pi a^3}{4}$ см³. **3.** Вторая. **4.** πa^3 **5.** $\frac{3\pi}{32}$ см³. **6.** $\frac{\pi}{4}$. **8.** $\frac{a}{b}$ или $\frac{b}{a}$. **9.** В два раза. **10.** 3π см³. **11.** 243π см³. **12.** 4 см. **13.** $\frac{1}{\pi}$ или $\frac{1}{2\pi}$ в зависимости от выбора основания цилиндра. **14.** 2π. **16.** 5π см³. **17.** 6π см³. **18.** $\frac{\pi}{6}$ см³. **19.** 125π см³. **20.** $\frac{3\pi}{2}$ см³. **21.** 2π см³. **23.** 960 м³. **24.** 162 кг. **25.** 2250 см³.

§ 26

1. $\frac{1}{3}a^2h$. **2.** 32 м³. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см³. **5.** $1\frac{1}{2}$ см³. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ см³. **7.** В 8 раз. **8.** Уменьшится в 3 раза. **9.** а) $\frac{1}{3}$ см³; б) $\frac{1}{6}$ см³. **10.** 1 : 7. **11.** 7 см³. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **13.** $\frac{1}{6}$ см³. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **15.** $4\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{1}{3}$ см³. **17.** 1 : 1. **18.** 3 см³. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ см³. **20.** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ см³. **21.** ≈ 79443 м³. **23.** 3074176 м³. **24.** 407 м³. **25.** 473 дм³, 319 кг. **26.** $\frac{3}{4}$ см³. **27.** $\frac{1}{2}$ см³. **28.** $\frac{1}{2}$ см³. **29.** 3 см³. **30.** $\sqrt{3}$ см³. **31.** $\frac{1}{4}$ см³. **32.** $\frac{1}{3}$. **33.** $\frac{1}{6}$. **34.** $\frac{1}{6}$. **35.** $\frac{1}{12}$. **36.** $\frac{1}{4}$ см³. **37.** $\frac{1}{2}$ см³.

§ 27

1. Увеличится в: а) три; б) четыре раза. **2.** Увеличится в 2 раза. **3.** 5 см³. **4.** 1 : 7. **5.** 16π см³. **6.** 3π см³. **7.** 3π см³. **8.** 7π см³. **9.** 72π см³. **10.** 9π см³. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см³. **12.** Нет. **13.** 2π см³. **14.** $\frac{\pi}{3}$ см³. **15.** $\frac{7}{27}$ см³. **16.** 4 см. **17.** 52π см³. **18.** 19π см³. **20.** ≈ 55,5 м³. **21.** 9π см³. **22.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **23.** $\frac{\pi}{4}$ см³. **24.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см³. **25.** $\frac{1}{4}$ см³. **26.** $2\sqrt{3}\pi$ см³. **27.** V = 19,44 м³.

§ 28

1. 36π см³. **2.** Увеличится в: а) 27; б) 64 раз. **3.** 6 см. **4.** 27. **5.** $\frac{\pi}{6}$ см³. **6.** $\frac{4\pi}{3}$ см³. **7.** $\frac{4000\pi}{3}$ см³. **8.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ см³. **9.** $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ см³. **10.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{54}$ см³. **11.** $m^{\frac{2}{3}} : n^{\frac{2}{3}}$. **12.** $\frac{4\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3)$. **13.** 26 : 1. **14.** ≈ 0,5. **15.** $\frac{5324\pi}{3} \approx$ ≈ 5572 (м³). **16.** $\frac{7\sqrt{21}\pi}{54}$ см³. **17.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{216}$ см³. **18.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$ см³. **19.** $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **20.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **21.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ см³. **22.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ см³. **23.** $\frac{5}{32}$. **24.** 58500π см³. **25.** Если центр шара лежит между основаниями пояса, то $\frac{134\pi}{3}$ см³. В противном случае $\frac{38\pi}{3}$ см³. **26.** $\frac{\pi}{6}$ см³. **27.** $\frac{2\pi}{9}$ см³.

Проверь себя!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	B)	B)	C)	C)	B)	A)	C)	D)	B)	B)	C)	A)	D)	C)	C)	B)	D)	A)

ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ ЗА КУРС 10—11 КЛАССОВ

УГЛЫ

Угол между прямыми

1. 45°. **2.** 90°. **3.** 60°. **4.** 45°. **5.** 60°. **6.** 60°. **7.** 60°. **8.** 90°. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **14.** $\frac{3}{4}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **16.** $\frac{1}{4}$.

Угол между прямой и плоскостью

1. 45°. **2.** 90°. **3.** 90°. **4.** 60°. **5.** 45°. **6.** 60°. **7.** 60°. **8.** 90°. **9.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **14.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **15.** 60°. **16.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Угол между двумя плоскостями

1. 45°. **2.** 90°. **3.** 60°. **4.** 90°. **5.** 60°. **6.** 60°. **7.** 30°. **8.** 90°. **9.** $\sqrt{2}$. **10.** $\frac{1}{3}$. **11.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **12.** $\frac{1}{3}$. **13.** $-\frac{1}{3}$. **14.** 0,6. **15.** 0,2. **16.** $\frac{2}{3}$.

РАССТОЯНИЯ

Расстояние от точки до прямой

1. 1. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **4.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **6.** $\sqrt{3}$ см. **7.** $\sqrt{3}$ см. **8.** 2 см. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ см. **10.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$ см. **11.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$ см. **12.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$ см. **13.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см. **14.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см. **15.** $\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см.

Расстояние от точки до плоскости

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **4.** $\sqrt{3}$ см. **5.** 1 см. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **7.** $\sqrt{3}$ см. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$ см. **12.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$ см. **13.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. **14.** $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ см. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **16.** $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ см.

Расстояние между двумя прямыми

1. 1. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** 1. **4.** 1 см. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **7.** 1 см. **8.** $\sqrt{3}$ см. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **12.** 0,5 см. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **14.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$ см. **15.** $\frac{2\sqrt{39}}{13}$ см. **16.** $\sqrt{3}$ см.

СЕЧЕНИЯ

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** 0,25 см^2. **3.** 0,5 см^2. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 0,25 см^2. **6.** $\sqrt{6}$ см^2. **7.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^2. **10.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **11.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **12.** $1\frac{1}{8}$ см^2. **13.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **14.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **15.** $1\frac{1}{8}$ см^2. **16.** $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **17.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **18.** $\frac{3\sqrt{21}}{16}$ см^2. **19.** $\frac{3\sqrt{11}}{16}$ см^2. **20.** $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **21.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **22.** $1\frac{1}{8}$ см^2. **23.** $\frac{3\sqrt{11}}{16}$ см^2. **24.** $\sqrt{6}$. **25.** $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ см^2. **26.** $\frac{3\sqrt{19}}{16}$ см^2. **27.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ см^2. **28.** $\frac{5\sqrt{17}}{16}$. **29.** $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. **30.** $1\frac{5}{16}$. **31.** 3 см^2. **32.** $1\frac{5}{16}$. **33.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **34.** $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ

Цилиндры и конусы

1. 1 см. 2. 2 см. 3. 1. 4. $\sqrt{2}$ см. 5. $2\sqrt{3}$ см. 6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. 7. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. 8. 2 см. 9. 0,5. 10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. 11. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. 12. 5 см. 13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. 14. 1 см. 15. $\sqrt{3}$ см. 16. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ см. 17. 1 см. 18. $2\sqrt{3}$ см. 19. 2 см. 20. $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ см. 21. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. 22. $2\frac{2}{3}$ см. 23. $\sqrt{2}-1$ см. 24. 3 см. 25. $2\sqrt{2}$ см. 26. 0,5 см. 27. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. 28. 0,75 см. 29. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. см 30. 8 см. 31. 1 см. 32. $6\frac{1}{4}$ см. 33. 2 см. 34. $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ см. 35. 3 см. 36. $\frac{\sqrt{221}}{5}$ см.

Сфера, вписанная в многогранник

1. 0,5. 2. 2 см. 3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. 4. 2 см. 5. $\sqrt{3}$ см. 6. $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ см. 7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и $\sqrt{2}$ см. 8. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. 9. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см и 2 см. 10. 1 см и 2 см. 11. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см и 2 см. 12. $\frac{\sqrt{6}}{12}$. 13. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ см. 14. 0,5 см. 15. 1 см. 16. $2\sqrt{6}$. 17. $\frac{1}{3}$ см. 18. $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ см. 19. $\frac{\sqrt{14}(\sqrt{15}-1)}{28}$ см. 20. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. 21. $2\frac{2}{3}$ см. 22. $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$ см.

Сфера, описанная около многогранника

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. $\frac{3\sqrt{3}}{3}$. 3. $\sqrt{14}$ см. 4. 2 см. 5. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 6. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 7. $\frac{\sqrt{21}}{6}$ см. 8. $\frac{2\sqrt{33}}{3}$ см. 9. 1,5 см. 10. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ см. 11. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ см. 12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. 13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. 14. 2 см. 15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. 16. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

ОБЪЕМ

1. 48 см³. 2. 8 см². 3. 5 см. 4. 4 см. 5. 6 см. 6. 27. 7. 120 см³. 8. 4 см. 9. 4,5 см³. 10. 8. 11. 24 см³. 12. 4 см. 13. 0,25 см³. 14. 3 см. 15. 4. 16. 3 л. 17. 2 см. 18. 2 см³. 19. 3. 20. 2,25. 21. 30 см³. 22. 50 см³. 23. 27. 24. 8 см³. 25. 6 см³. 26. 32 см³. 27. 7 см. 28. 2 см. 29. 1,5 см³. 30. 32 см³. 31. 2 см. 32. 64 см³. 33. 3 см. 34. 8 см³. 35. 20 см³. 36. 18 см³. 37. 256 см³. 38. 13 см. 39. 48 см³. 40. 4,5 см³. 41. 12 см³. 42. 7 см. 43. 48 см³. 44. 2 см³. 45. 1,5 см³. 46. 2 см³. 47. 4 см³. 48. 6 см³. 49. 3 см³. 50. 3 см³. 51. 10 см³. 52. 1,125. 53. 1,5 см³. 54. 128. 55. 9. 56. 72. 57. 16. 58. 2. 59. 12 см. 60. 4,5. 61. 4,5. 62. 12 см³. 63. 6. 64. 6. 65. 18. 66. 6 см³. 67. 13,5 см³. 68. 9. 69. 27 см³. 70. 54 см³. 71. 54 см³. 72. 18 см³. 73. 13,5 см³. 74. 36 см³. 75. 72 см³. 76. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см³. 77. 9 см³. 78. 4 см³. 79. $\frac{\sqrt{2}}{18}$. 80. 6 см³. 81. 36 см³. 82. $2\sqrt{2}$ см³. 83. 160 см³. 84. 2. 85. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 86. 27 см³. 87. 8π см³. 88. 8π см³. 89. 4. 90. 2π см³. 91. 2. 92. $\frac{9\pi}{2}$ см³. 93. 6π см³. 94. 1,5 см³. 95. 3 см³.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

1. 22 см³. 2. 2 см. 3. 9. 4. 4. 5. 108 см². 6. 288 см². 7. 6 см². 8. 3 см². 9. 3. 10. 1,5. 11. 4 см². 12. 4. 13. 2 см². 14. 2 см². 15. 8 см³. 16. 54 см². 17. 64 см². 18. 3 см. 19. 2 см. 20. 22 см³. 21. 62 см². 22. 10 см². 23. 4 см². 24. 240 см². 25. 10 см. 26. 6 см². 27. 16 см². 28. 84 см². 29. 96 см². 30. 72 см². 31. 9. 32. 144. 33. 60. 34. 3 см². 35. 36. 36. 9. 37. 10 см. 38. 32 см². 39. 3 см. 40. 54 см². 41. 27 см². 42. 36 см². 43. 54 см². 44. 96 см². 45. 1,5 см. 46. π см². 47. 12 см². 48. 36π см². 49. 1 см². 50. 6 см². 51. 56π см². 52. 3.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Вращение многоугольников

1. $\frac{\pi}{3}$ см^3 и $(\sqrt{2}+1)\pi$ см^2. **2.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см^3 и $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см^2. **3.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см^3 и $0{,}75\pi$ см^2. **4.** $\frac{\pi}{8}$ см^3 и $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{4}$ см^2. **5.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{48}$ см^3 и $2{,}75\pi$ см^2. **6.** $\frac{7\pi}{3}$ см^3 и $(3\sqrt{2}+5)\pi$ см^2. **7.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ см^3 и $\sqrt{2}\pi$ см^2. **8.** $\frac{\pi}{4}$ см^3 и $\sqrt{3}\pi$ см^2. **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 и π см^2. **10.** $9{,}6\pi$ см^3 и $16{,}8\pi$ см^2. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 и π см^2. **12.** $0{,}25\pi$ см^3 и $\sqrt{3}\pi$ см^2. **13.** π см^3 и $2\sqrt{3}\pi$ см^2. **14.** $\frac{4\pi}{3}$ см^3 и $(\sqrt{2}+3)\pi$ см^2. **15.** $\frac{\pi}{4}$ см^3 и $\frac{(\sqrt{3}+3)\pi}{2}$ см^2. **16.** $8{,}192\pi$ и $23{,}04\pi$. **17.** $0{,}75\pi$ см^3 и $2\sqrt{3}\pi$ см^2. **18.** $1{,}25\pi$ см^3 и $3\sqrt{3}\pi$ см^2. **19.** $\frac{11\pi}{32}$ см^3 и $\frac{5\sqrt{3}\pi}{14}$ см^2. **20.** $\frac{5\pi}{3}$ см^3 и $(\sqrt{2}+5)\pi$ см^2. **21.** $4{,}5\pi$ см^3 и $6\sqrt{3}\pi$ см^2. **22.** $\frac{19\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 и 7π см^2. **23.** π см^3 и $2\sqrt{3}\pi$ см^2. **24.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 и $3{,}5\pi$ см^2.

Вращение многогранников

1. 2π см^3 и $(2\sqrt{2}+4)\pi$ см^2. **2.** $0{,}5\pi$ см^3 и $(\sqrt{2}+1)\pi$ см^2. **3.** π см^3 и 4π см^2. **4.** $\frac{\pi}{3}$ см^3 и $\frac{(2\sqrt{3}+2)\pi}{2}$ см^2. **5.** π см^3 и 4π см^2. **6.** $1{,}25\pi$ и $(\sqrt{5}+2{,}5)\pi$. **7.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ и $\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см^3 и $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см^2. **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см^3 и 3π см^2. **10.** 4π см^3 и 12π см^2. **11.** $0{,}25\pi$ и $\sqrt{3}\pi$. **12.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ и $\sqrt{2}\pi$. **13.** $0{,}75\pi$ см^3 и $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{2}$ см^2. **14.** $3{,}25\pi$ см^3 и $\frac{(2\sqrt{13}+13)\pi}{2}$ см^2.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА............ 4

Глава I. МНОГОГРАННИКИ

§ 1. Понятие многогранника. Призма и ее элементы, виды призм. Развертка, площадь боковой и полной поверхностей призмы 8
§ 2. Пирамида и усеченная пирамида. Развертка, площадь боковой и полной поверхности пирамиды и усеченной пирамиды............ 18
§ 3. Многогранные углы............ 25
§ 4*. Теорема Эйлера 29
§ 5. Правильные многогранники............ 34
§ 6. Сечения многогранников плоскостью 39
§ 7*. Симметрия многогранников 45
ПРОВЕРЬ СЕБЯ! 53

Глава II. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 8. Нахождение угла между двумя прямыми 55
§ 9. Нахождение угла между двумя плоскостями............ 59
§ 10. Нахождение угла между прямой и плоскостью 64
§ 11. Нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве............ 67
ПРОВЕРЬ СЕБЯ! 71

Глава III. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ

§ 12. Цилиндр и его элементы. Развертка, площадь боковой и полной поверхности цилиндра............ 75
§ 13. Конус и его элементы. Развертка, площадь боковой и полной поверхности конуса............ 82
§ 14. Усеченный конус и его элементы. Развертка, площадь боковой и полной поверхности усеченного конуса 88
§ 15. Сфера, шар и их элементы............ 93
§ 16*. Комбинации тел вращения 99
§ 17. Площадь сферы и ее частей............105
ПРОВЕРЬ СЕБЯ! 110

Глава IV*. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОГРАННИКИ

§ 18. Цилиндр и призма. Конус и пирамида 113
§ 19. Многогранники, вписанные в сферу. Призма 116
§ 20. Многогранники, вписанные в сферу. Пирамида............120
§ 21. Многогранники, описанные около сферы. Призма............124
§ 22. Многогранники, описанные около сферы. Пирамида 127
ПРОВЕРЬ СЕБЯ! 130

Глава V. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

§ 23. Общие свойства объемов тел............133
§ 24. Объем призмы 139
§ 25. Объем цилиндра 144
§ 26. Объемы пирамиды и усеченной пирамиды............147
§ 27. Объемы конуса и усеченного конуса............155
§ 28. Объем шара и его частей............159
ПРОВЕРЬ СЕБЯ! 164
ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ ЗА КУРС 10—11 КЛАССОВ 167
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 193
ОТВЕТЫ............197