ГЕОМЕТРИЯ

Оқулық

11

Қоғамдық-гуманитарлық
бағыт

Шартты белгілер:

? — сыни ойлауды дамытуға арналған тапсырмалар

— теориялық материалды өзіндік оқып-үйренуге қажетті тапсырмалар

— теорема дәлелдеуінің аяқталуы

A — барлық оқушыға міндетті жаттығулар

B — орта деңгейлі жаттығулар

C — жоғары деңгейлі жаттығулар

АЛҒЫ СӨЗ

Оқулық 10-сынып геометрия оқулығының жалғасы болып табылады және қоғамдық-гуманитарлық бағытта оқитын 11-сынып оқушыларына арналған.

Оқулықта негізгі көпжақтармен және олардың қасиеттерімен танысу, айналу денелерімен (цилиндр, конус, шар) және олардың қасиеттерімен танысу, кеңістіктік фигуралар беттерінің ауданы мен көлемдерін табуды үйрету көзделген.

Оқулықтағы барлық материалдар тарауларға және параграфтарға бөлінген. Олар теориялық материалды, өздігінен орындауға арналған тапсырмаларды, пысықтау сұрақтарын және күрделілігі әртүрлі деңгейдегі есептерді қамтиды.

Теореманы дәлелдеудің аяқталуы (□) белгісімен белгіленген.

Оқулықтағы есептер күрделілігіне қарай А — міндетті деңгей, В — орта деңгей және С — жоғары деңгей болып бөлінген.

Жұлдызшамен (*) белгіленген параграфтар оқу бағдарламасына енбейтін қосымша материалдарды қамтиды.

Әрбір тараудың соңында оқу материалын меңгеру сапасын тексеруге арналған тест тапсырмалары берілген. Оқулықтың соңында есептердің жауаптары ұсынылған.

Геометрияны оқып білуде сәттілік тілейміз!

10-СЫНЫПТЫҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Стереометрия бастамалары

1. Кеңістікте әрбір үшеуі бір түзудің бойында жатпайтын әртүрлі: 1) үш; 2) төрт; 3) бес; 4)* n нүктелердің жұбы арқылы неше түзу жүргізуге болады?
2. Кеңістіктегі үш нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
3. Кеңістікте әрбір төртеуі бір жазықтықта жатпайтын әртүрлі: 1) төрт; 2) бес; 3)* n нүктелер арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
4. 1) Екі жазықтық; 2) үш жазықтық; 3)* төрт жазықтық кеңістікті ең көп дегенде неше бөлікке бөледі?
5. Егер түзудің жазықтықпен ортақ екі нүктесі болса, онда ол түзу сол жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.
6. Түзу және оның бойында жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.
7. Қиылысқан екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.
8. Кубтың неше: 1) төбесі; 2) қыры; 3) жағы болады?
9. Параллелепипедтің неше: 1) төбесі; 2) қыры; 3) жағы болады?
10. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты призманың неше төбесі болады?
11. Призманың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 төбесі болуы мүмкін бе?
12. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты призманың неше қыры болады?
13. Призманың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 қыры болуы мүмкін бе?
14. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты призманың неше жағы болады?
15. Призманың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 жағы болуы мүмкін бе?
16. 1) 12; 2) 15; 3) 18 қыры бар призманың табанында қандай көпбұрыш жатады?
17. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты пирамиданың неше төбесі болады?
18. Пирамиданың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 төбесі болуы мүмкін бе?
19. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты пирамиданың неше қыры болады?
20. Пирамиданың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 қыры болуы мүмкін бе?
21. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты пирамиданың неше жағы болады?
22. Пирамиданың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 жағы болуы мүмкін бе?
23. 1) 8; 2) 10; 3) 12 қыры бар пирамиданың табанында қандай көпбұрыш жатады?

Кеңістіктегі параллельдік

24. 1) Кубтың; 2) параллелепипедтің; 3) үшбұрышты призманың; 4) алтыбұрышты призманың параллель қырларының қанша жұбы болады?

25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде келесі түзулер параллель болатынын дәлелдеңдер: 1) AB және D_1C_1; 2) AD_1 және BC_1.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада келесі түзулер параллель болатынын дәлелдеңдер: 1) AB және E_1D_1; 2) AA_1 және DD_1; 3) AC_1 және FD_1.

27. 1) Кубтың; 2) параллелепипедтің; 3) үшбұрышты пирамиданың; 4) алтыбұрышты пирамиданың айқас қырларының қанша жұбы болады?

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының төбелері арқылы өтетін: 1) AB_1 және BC_1; 2) AA_1 және BD_1; 3) AC_1 және BD_1 түзулері қалай орналасқан?

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың төбелері арқылы өтетін: 1) AB_1 және CD_1; 2) AA_1 және BD_1; 3) AC_1 және BF_1 түзулері қалай орналасқан?

30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде: 1) AA_1 және BD; 2) AC_1 және BB_1 түзулері айқас болатынын дәлелдеңдер.

31. $SABCDEF$ пирамидасында SA түзуі мен: 1) BC; 2) CD түзуі айқас болатынын дәлелдеңдер.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында: 1) AA_1 және BC; 2) AC_1 және BD; 3) AB және B_1C_1 түзулері айқас болатынын дәлелдеңдер.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында: 1) AD; 2) AB_1 түзулеріне параллель жақтарын көрсетіңдер.

34. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамидасында AB қыры SDE жағына параллель болатынын дәлелдеңдер.

35. 1) Кубтың; 2) параллелепипедтің; 3) үшбұрышты призманың; 4) алтыбұрышты призманың параллель жақтарының қанша жұбы болады?

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында: 1) ABB_1 және EDD_1; 2) ACC_1 және FDD_1 жазықтықтары параллель болатынын дәлелдеңдер.

Кеңістіктегі перпендикулярлық

37. 1) Дұрыс тетраэдрдің; 2) кубтың перпендикуляр қырларының қанша жұбы болады?

38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында: 1) AB_1 және BC_1; 2) AC және BD_1; 3) AB_1 және CD_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. Оның: 1) AA_1 және CD_1; 2) AA_1 және BD_1; 3) AC және BE_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында B нүктесінен: 1) A_1D_1; 2) A_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

41. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. Оның B нүктесінен: 1) AC_1; 2) A_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында B нүктесінен: 1) ACC_1; 2) ACB_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. Оның B төбесінен: 1) ACC_1; 2) CDD_1; 3) DEE_1; 4) DFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

44. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. Оның: 1) ABB_1 және DEE_1; 2) ACC_1 және FDD_1 жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар.

45. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамидасының барлық қырлары 1-ге тең. SB түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

46. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамидасы табанының қабырғасы 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең. SB түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

47. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. 1) ABB_1 және BCC_1; 2) ABB_1 және ACC_1; 3) ACC_1 және CDD_1; 4) ACC_1 және BEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

48. Дұрыс тетраэдрдің жақтарының арасындағы екіжақты бұрыштың косинусын табыңдар.

49. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның көршілес бүйір жақтарының арасындағы екіжақты бұрышының косинусын табыңдар.

Векторлар және олардың қасиеттері

50. Параллелепипедтің қырлары әртүрлі қанша векторларды құрайды?

51. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. 1) $\overline{AC_1}$; 2) $\overline{AD_1}$ векторының ұзындығын табыңдар.

52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында: 1) $\overline{AB} + \overline{AD_1}$; 2) $\overline{AB_1} + \overline{AD_1}$ векторының ұзындығын табыңдар.

53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overline{AC_1}$ векторын $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ және $\overline{AA_1}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

54. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. $\overline{AD_1}$ векторын $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ және $\overline{AA_1}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

55. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамидасының барлық қырлары 1-ге тең. $\overline{SA}$ векторы мен: 1) $\overline{BC}$; 2) $\overline{EF}$ векторының арасындағы бұрышты табыңдар.

56. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубы берілген. $\overrightarrow{AB_1}$ векторы мен: 1) $\overrightarrow{CC_1}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$; 3) $\overrightarrow{BC_1}$; 4) $\overrightarrow{BD_1}$ векторының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында денені C төбесінен C_1 төбесіне $\vec{F} = \overrightarrow{BD_1}$ күшінің әсерімен орын ауыстырғанда орындалатын жұмысты табыңдар.

Координаталар

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубы тікбұрышты координаталар жүйесінде орналасқан. Оның D төбесі координаталар басында, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше абсцисса, ордината, аппликата осьтерінде жатыр. Кубтың барлық төбелерінің координаталарын табыңдар.

59. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең, ал A төбесі — тікбұрышты координата жүйесінің координаталар басында, ал AB, AE, AA_1 кесінділері сәйкесінше абсцисса, ордината, аппликата осьтерінде жатыр. Призманың төбелерінің координаталарын табыңдар.

60. $A(1; 2; 3)$ нүктесінен: 1) Ox; 2) Oy; 3) Oz координаталар түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

61. Центрі $A(1; 2; 2)$ нүктесінде болатын және координаталар басы арқылы өтетін сфераның теңдеуін табыңдар.

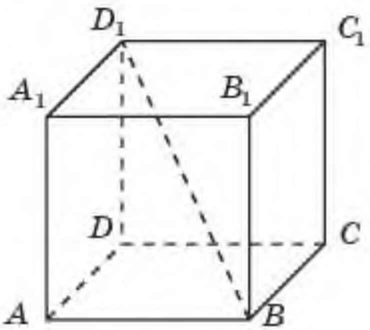
62. $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 4 = 0$ теңдеуі кеңістіктегі сфераны анықтайтынын дәлелдеңдер. Оның радиусы мен центрінің координаталарын табыңдар.

63. $\vec{a}_1(1; 2; 3)$ және $\vec{a}_2(3; -1; 2)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

64. $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін табыңдар.

§1. Көпжақ ұғымы. Призма және параллелепипед. Призманың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

Көпжақ деп оның беті көпбұрыштардың шектеулі санынан тұратын денені айтады. Мұндайда, екі көршілес (ортақ қабырғасы бар) көпбұрыштар бір жазықтықта жатпауы тиіс. Осы көпбұрыштар көпжақтың *жақтары*, ал көпбұрыштың қабырғалары мен төбелері көпжақтың сәйкесінше *қырлары* мен *төбелері* деп аталатынын еске саламыз.



1.1-сурет

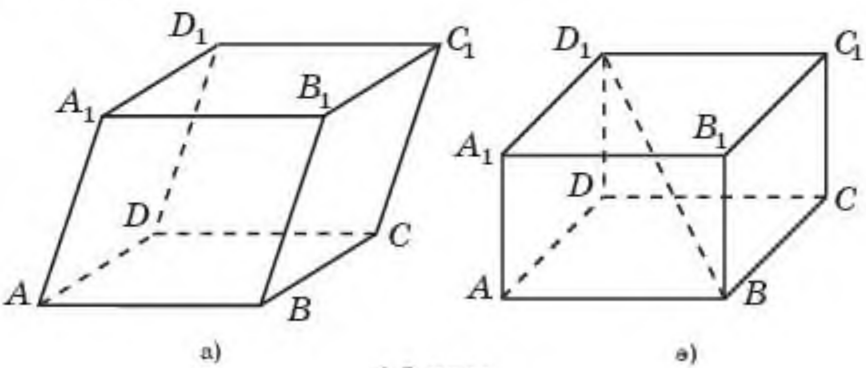
10-сынып геометрия курсында дөңес көпжақтар (куб, параллелепипед, призма, пирамида және т.б.) қарастырылды.

Куб деп алты жағы да квадрат болып келетін көпжақты айтады (1.1-сурет). Әдетте куб оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Қыры 1-ге тең куб *бірлік куб* деп аталады.

Кубтың бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесінді *кубтың диагоналі* деп аталады. 1.1-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD_1 диагоналі кескінделген.

Параллелепипед деп қарама-қарсы жақтары қос-қостан өзара параллель болатын көпжақты (алтыжақ) айтады (1.2, а-сурет). Параллелепипедтің алты жағы да параллелограмдар болады. Параллелепипед оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



1.2-сурет

Егер параллелепипедтің бүйір қырлары табан жазықтығына перпендикуляр болса, онда ол *тік параллелепипед* деп аталады. Табандары тіктөртбұрыштар болатын тік параллелепипедті *тікбұрышты параллелепипед* деп атайды (1.2, ә-сурет). Егер параллелепипедтің бүйір қырлары табан жазықтығына перпендикуляр болмаса, онда ол *көлбеу параллелепипед* деп аталады (1.2, а-сурет).

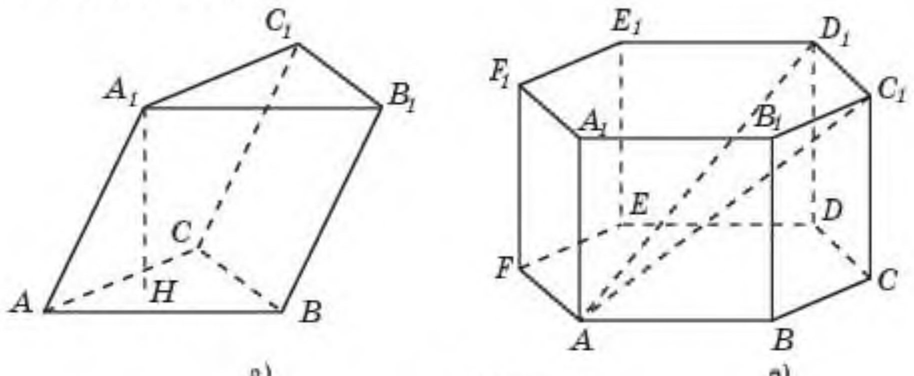
Параллелепипедтің бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесінді *параллелепипедтің диагоналі* деп аталады. 1.2, ә-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрыштың параллелепипедінің BD_1 диагоналі кескінделген.

Призма деп екі жағы параллель жазықтықтарда жататын өзара тең көпбұрыштар, ал қалған жақтары осы көпбұрыштармен ортақ қабырғалары бар параллелограмдардар болатын көпжақты айтады. Көпбұрыштар призманың *табандары*, ал параллелограмдар призманың *бүйір жақтары* деп аталады. Бүйір жақтарынан құрылған бет *призманың бүйір беті* деп аталады. Призманың бүйір жақтарының ортақ қырлары оның *бүйір қырлары* деп аталады.

Призмалар табандарында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

Егер призманың табандары n-бұрыштар болса, онда ол *n-бұрышты призма* деп аталады.

Призма оның төбелерімен белгіленеді, мысалы: $ABCA_1B_1C_1$ — үшбұрышты призма (1.3, а-сурет), $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ - алтыбұрышты призма (1.3, ә-сурет).



1.3-сурет

Призманың анықтамасынан оның мынадай қасиеттері шығады:

1) бүйір қырлары тең;

2) табандары тең және параллель болады.

Бұл қасиеттерді өздерің дәлелдеңдер.

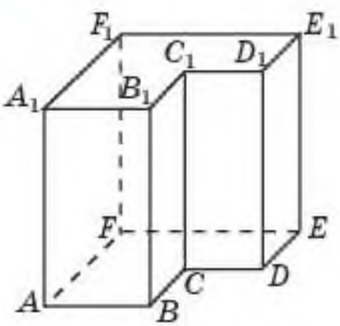
Бүйір қырлары табандарына перпендикуляр болатын призма *тік призма* деп аталады. Тік емес призма *көлбеу призма* деп аталады. 1.3, а-суретте үшбұрышты көлбеу призма кескінделген. 1.3, ә-суретте тік алтыбұрышты призма кескінделген.

Қалай ойлайсыңдар, параллелепипед төртбұрышты призма бола ма?

Табандары дұрыс көпбұрыштар болатын тік призма *дұрыс* деп аталады. 1.3, ә-суретте дұрыс алтыбұрышты призма кескінделген.

Призманың табан жазықтықтарының арақашықтығын *призманың биіктігі* деп атайды, яғни призманың бір табанының нүктесінен екінші табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр оның биіктігі болып табылады. 1.3, а-суретте $ABCA_1B_1C_1$ призмасының A_1H биіктігі кескінделген.

Тік призманың биіктігі оның бүйір қырының ұзындығына тең болатынын дәлелдеңдер.



1.4-сурет

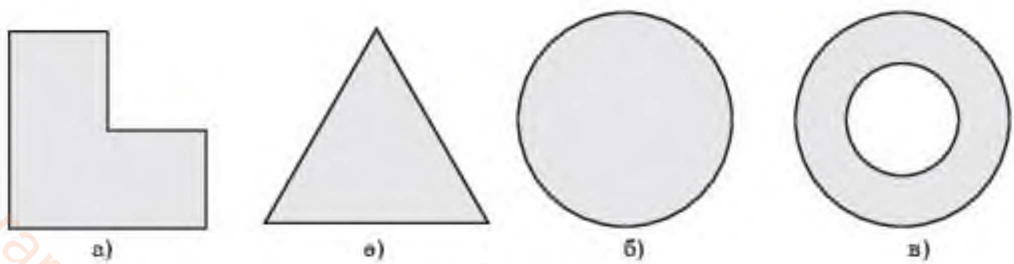
Призманың бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесінді *призманың диагоналі* деп аталады. 1.3, ә-суретте $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмасының AC_1 және AD_1 диагональдары кескінделген.

Егер көпжақ өзінің кез келген екі нүктесімен бірге оларды қосатын кесіндіні қамтитын болса, онда ол *дөңес көпжақ* деп аталады.

1.3-суретте дөңес көпжақтар кескінделген. 1.4-суретте дөңес емес алтыбұрышты призма кескінделген.

"Дөңестік" ұғымы кез келген фигура үшін анықталады. Егер фигурада оның кез келген екі нүктесімен бірге оларды қосатын кесінді жататын болса, онда ол *дөңес фигура* деп аталады.

1.5-суретте дөңес (ә, б) және дөңес емес (а, в) жазық фигуралар кескінделген.

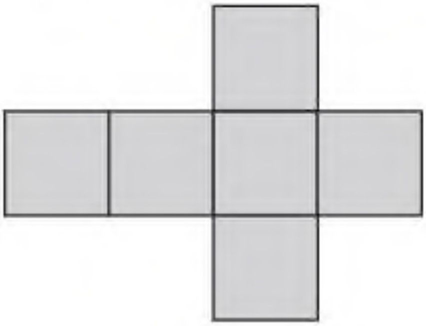


1.5-сурет

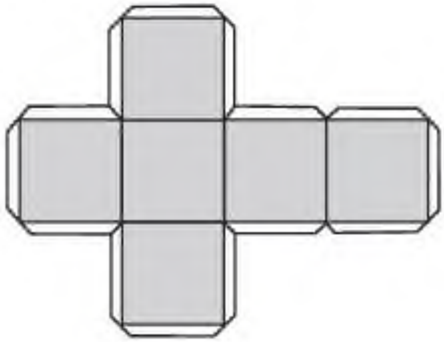
Екі дөңес фигураның қиылысуы (ортақ бөлігі) дөңес фигура болатынын дәлелдеңдер.

Егер көпжақтың бетін қандайда бір қырлары бойымен кесіп, оны жазықтыққа, яғни бетті құрайтын барлық көпбұрыштар берілген жазықтықта жататындай жазатын болсақ, онда *көпжақтың жазбасы* деп аталатын фигура пайда болады.

Мысалы, 1.6-суретте кубтың жазбасы кескінделген.



1.6-сурет



1.7-сурет

Көпжақтардың модельдерін қатты қағаздан, қатырма қағаздан немесе басқада материалдан дайындау үшін алдымен оның жазбасын әзірлеп, сәйкесінше қырларын желімдеу қажет.

Ыңғайлы болуы үшін көпжақтың жазбасын қақпақшаларымен жасаған дұрыс және олар арқылы желімдеу жүргізіледі. 1.7-суретте кубтың жазбасы қақпақшаларымен көрсетілген.

Көпжақтарды оның жазбалары арқылы құрастыру туралы толығырақ танысу үшін мынадай кітапты ұсынамыз: Веннинджер М. Модели многогранников. –М.: Мир, 2004.

Анықтама бойынша, *көпжақтың бетінің ауданы* осы беттің құрамындағы көпбұрыштардың аудандарының қосындысы болып есептеледі.

Көпжақ бетінің ауданы оның жазбасының ауданына тең болатыны анық.

Призманың бүйір беті деп осы призманың барлық бүйір жақтарынан құрылған бетті айтады. Сондықтан *призманың бүйір бетінің ауданы* оның барлық бүйір жақтарының аудандарының қосындысына тең болады.

Теорема. ***Тік призманың бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрі мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады.***

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша $S_{бүйір} = S_1 + S_2 + ... + S_n$, мұндағы S_1, S_2, ..., S_n – бүйір жақтарының аудандары. Тік призманың бүйір жақтары тіктөртбұрыштар болып келеді, оның табандары призманың табанының қабырғалары, ал бүйір қыры призманың h биіктігіне тең және $S_1 = a_1h$, $S_2 = a_2h$, ... , $S_n = a_nh$, мұндағы a_1, a_2, ..., a_n – табан қабырғаларының ұзындықтары. Осыдан призманың бүйір бетінің ауданы мынадай формуламен есептелетіні шығады:

$$S_{\text{бүйір}} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = (a_1 + a_2 + ... + a_n)h = ph,$$

мұндағы p – призманың табанының периметрі.

Призманың толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен табанының аудандарының қосындысына тең болады, яғни келесі формуламен анықталады:

$$S_{\text{призма}} = S_{\text{бүйір}} + 2S_{\text{табан}}.$$

Қыры a-ға тең болатын кубтың толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

Бір төбесінен шығатын қырлары a, b, c болатын тікбұрышты параллелепипедтің толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

Көпжақтарды модельдеу үшін http://geogebra.org сайтынан жүктеп алуға болатын тегін таратылымды GeoGebra компьютерлік программасын қолдануға болады.

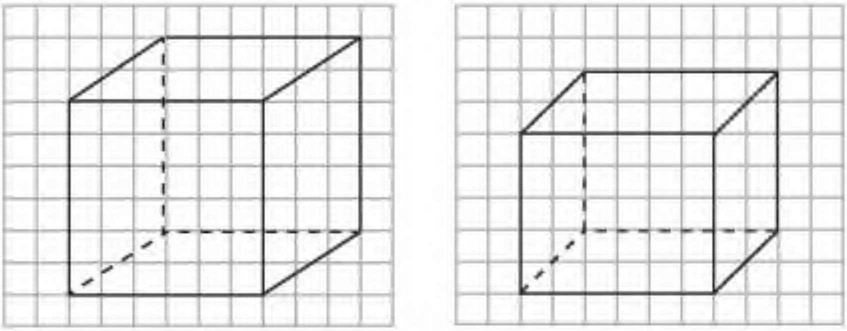
Сұрақтар

1. Көпжақ дегеніміз не?
2. Қандай көпжақ куб деп аталады?
3. Кубтың диагоналі дегеніміз не?
4. Қандай көпжақ параллелепипед деп аталады?
5. Параллелепипедтің диагоналі дегеніміз не?
6. Қандай көпжақ призма деп аталады?
7. Қандай призма дұрыс деп аталады?
8. Призманың биіктігі дегеніміз не?
9. Призманың диагоналі дегеніміз не?
10. Қандай көпжақ дөңес деп аталады?
11. Көпжақтың жазбасы дегеніміз не?
12. Көпжақтың бетінің ауданы дегеніміз не?
13. Призманың бүйір және толық бетінің аудандары қалай есептеледі?

Есептер

А

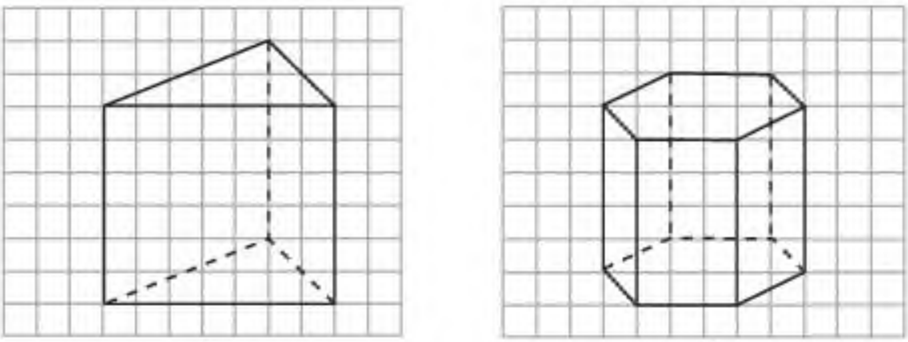
1.1. Торкөз қағазға 1.8-суреттегіге ұқсас кубты және параллелепипедті салыңдар.



а) ә)

1.8-сурет

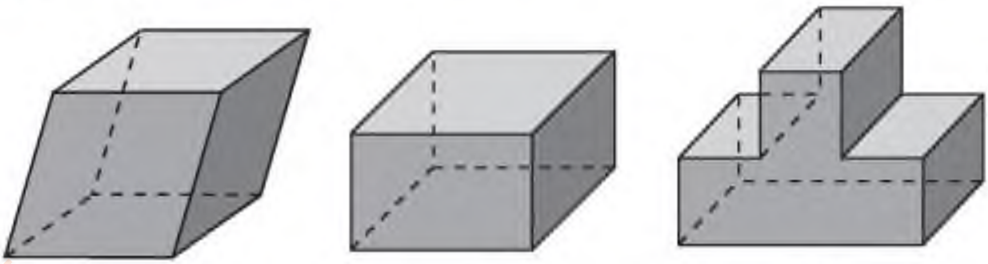
1.2. Торкөз қағазға 1.9-суреттегіге ұқсас призманы салыңдар.



а) ә)

1.9-сурет

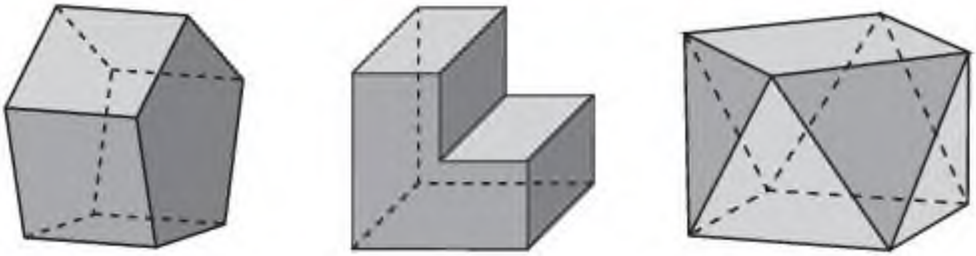
1.3. 1.10-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы параллелепипед болады?



а) ә) б)

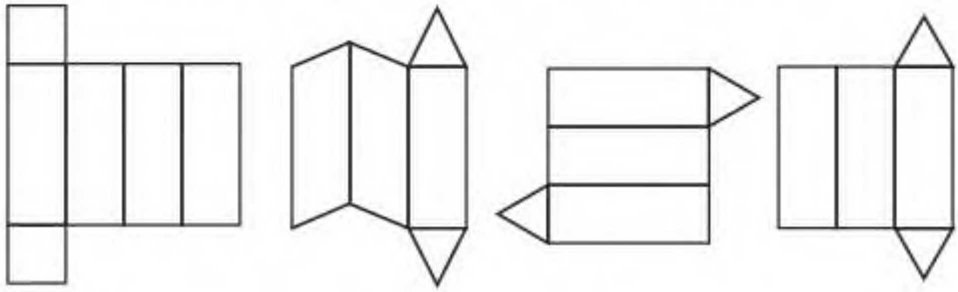
1.10-сурет

1.4. 1.11-суретте кескінделген фигуалардың қайсысы призма болады?



1.11-сурет

1.5. 1.12-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы призманың жазбасы болады? Осы призманың түрін анықтаңдар.



1.12-сурет

1.6. Қыры 1 см-ге тең болатын кубтың диагоналін табыңдар.

1.7. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 2 см, 3 см және 4 см-ге тең. Параллелепипедтің диагоналін табыңдар.

1.8. Призманың бүйір қыры 2 см-ге тең және ол табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Призманың биіктігін табыңдар.

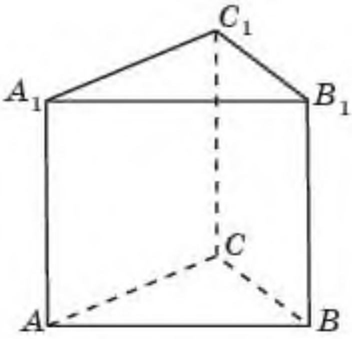
1.9. Егер кубтың барлық қырларын 3 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

1.10. Егер тікбұрышты параллелепипедтің барлық қырларын 2 есе кемітсе, онда оның бетінің ауданы неше есе кемиді?

1.11. Егер призманың барлық қырларын 2 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

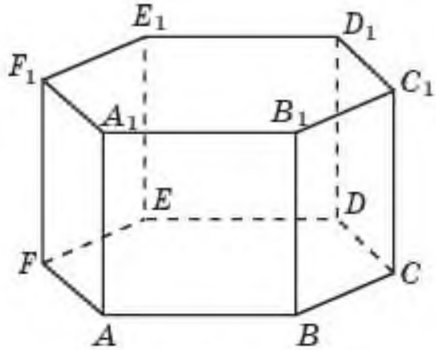
1.12. Бір төбесінен шығатын қырлары сәйкесінше 5 см, 4 см, 3 см болатын тікбұрышты параллелепипедтің бетінің ауданын табыңдар.

1.13. Барлық қырлары 1 см-ге тең болатын дұрыс үшбұрышты призманың бетінің ауданын табыңдар (1.13-сурет).



а)

1.13-сурет



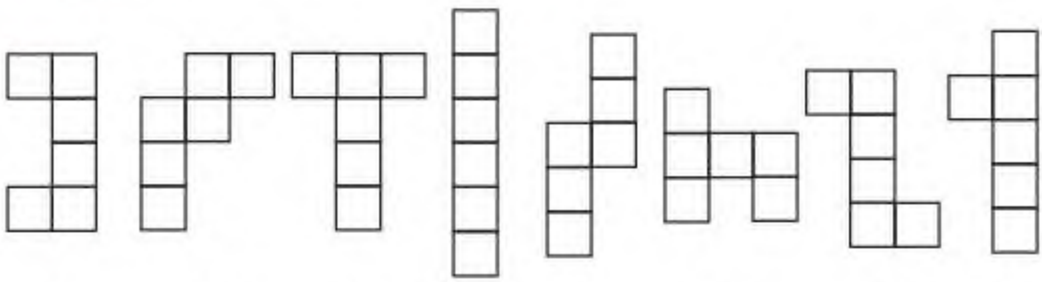
ә)

1.14-сурет

1.14. Барлық қырлары 1 см-ге тең болатын дұрыс алтыбұрышты призманың бетінің ауданын табыңдар (1.14-сурет).

В

1.15. 1.15-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы кубтың жазбасы болады?



а) ә) б) в) г) ғ) д) е)

1.15-сурет

1.16. Кубтың диагоналі 1 см-ге тең. Кубтың қырын табыңдар.

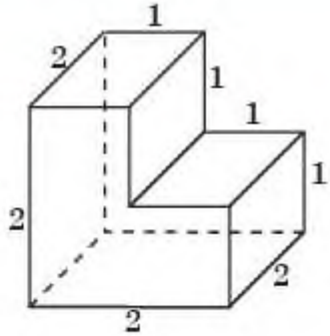
1.17. Дұрыс алтыбұрышты призманың жазбасын салыңдар.

1.18. Дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың диагоналін табыңдар.

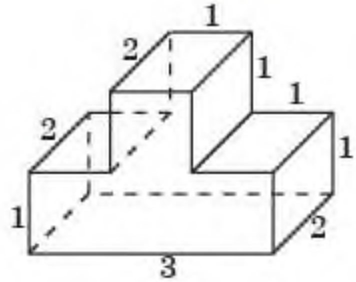
1.19. Дұрыс алтыбұрышты призманың табанының қабырғасы 1 см-ге, ал оның үлкен диагоналі 3 см-ге тең. Призманың биіктігін табыңдар.

1.20. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см-ге тең. Параллелепипедтің бетінің ауданы 40 см^2-қа тең болуы үшін осы төбесінен шығатын үшінші қыры қандай болуы керек?

1.21. 1.16-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигуралар беттерінің ауданын табыңдар.



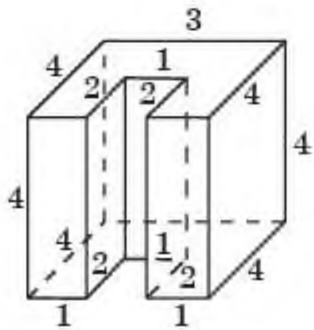
а)



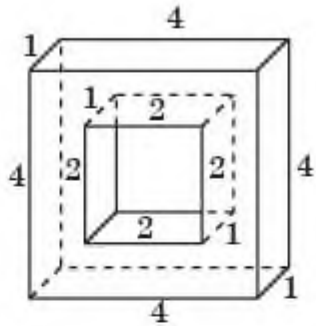
ә)

1.16-сурет

1.22. 1.17-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигуралар беттерінің ауданын табыңдар.



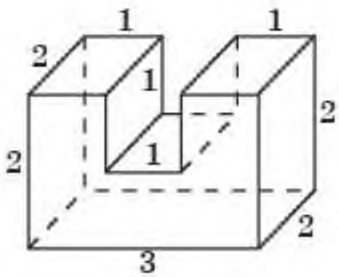
а)



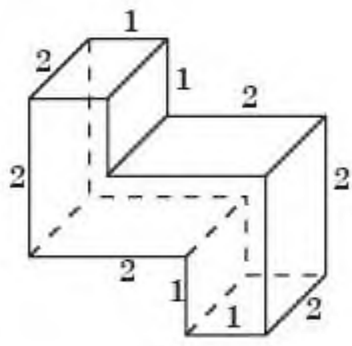
ә)

1.17-сурет

1.23. 1.18-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигуралар беттерінің ауданын табыңдар.



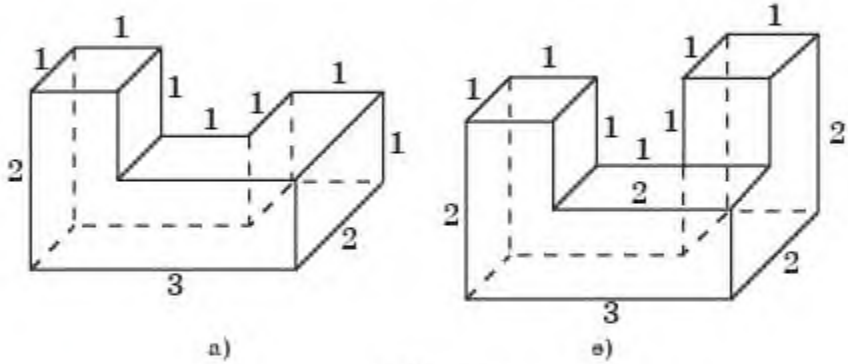
а)



ә)

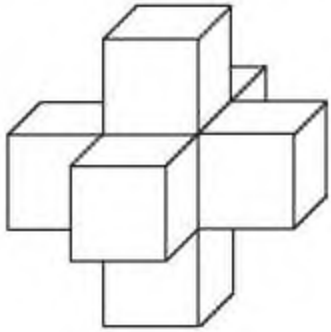
1.18-сурет

1.24. 1.19-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигуралар беттерінің ауданын табыңдар.



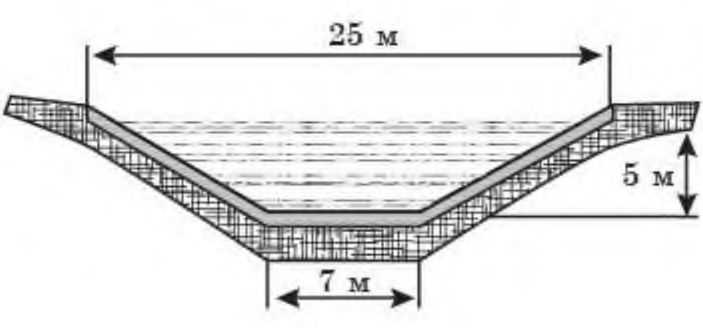
1.19-сурет

1.25. 1.20-суреттегі кеңістіктік денені құраушы кубтардың қырлары 1 см-ге тең деп алып, дененің бетінің ауданын табыңдар.



1.20-сурет

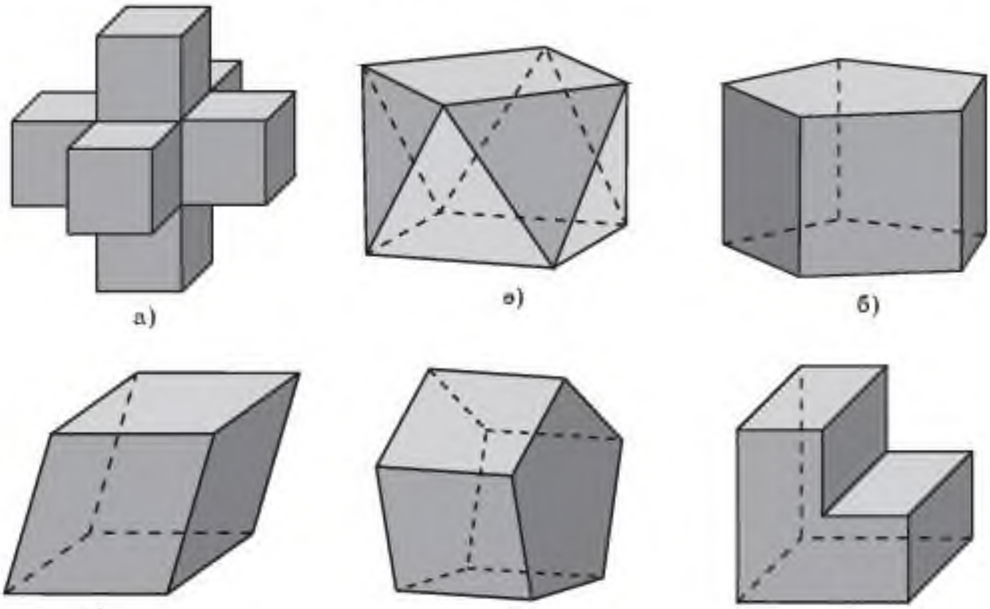
1.26. 1.21-суретте су жолы каналының көлденең қимасы көрсетілген. Каналдың төменгі және бүйір жақтары бетондалған. Каналдың әр километрінде бетонмен жабылған ауданды табыңдар.



1.21-сурет

С

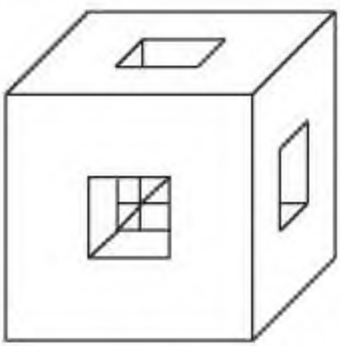
1.27. 1.22-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы дөңес және дөңес емес көпжақтар болады?



а) ә) б) в) г) ғ)

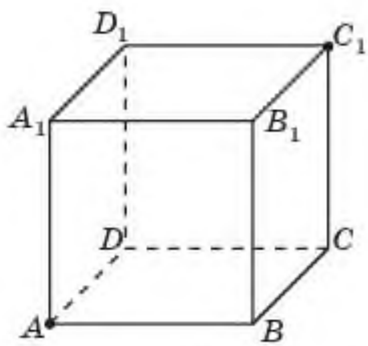
1.22-сурет

1.28. Қыры 6 см-ге тең болатын кубтың әрбір жағынан өтпелі квадратты тесіктер жасалды (1.23-сурет). Квадраттың қабырғасы 2 см-ге тең. Кубтың қалған бөлігінің бетінің ауданын табыңдар.



в)

1.23-сурет



в)

1.24-сурет

1.29. Бірлік кубтың бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейін оның бетіндегі ең қысқа арақашықтықты табыңдар (1.24-сурет).

1.30. Дөңес емес көпбұрыш дөңес көпжақтың бір жағы болады ма?
1.31. Дөңес фигуралар біріксе дөңес фигура пайда бола ма?
1.32. Барлық жақтары дөңес көпбұрыш болатын дөңес емес көпжаққа мысал келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

1.33. Пирамида ұғымын анықтап көріңдер. Оның беті қандай көпбұрыштардан тұрады?

§2. Пирамида және қиық пирамида. Пирамиданың, қиық пирамиданың жазбасы, бүйір беті және толық бетінің аудандары

Пирамида деп бір жағы кез келген көпбұрыштан, ал қалған жақтары ортақ төбесі бар үшбұрыштардан тұратын көпжақты айтады.

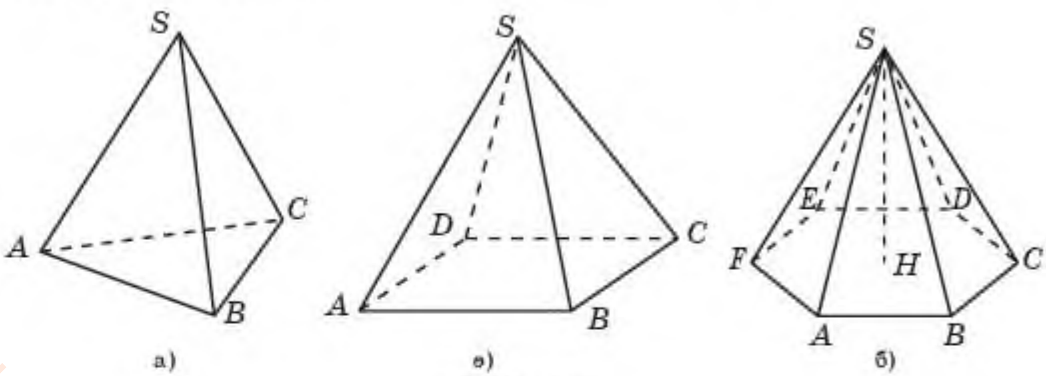
Көпбұрыш пирамиданың *табаны*, ал үшбұрыштар пирамиданың *бүйір жақтары* деп аталады.

Бүйір жақтарының ортақ төбесі пирамиданың *төбесі*, ал төбесінен шығатын қырлары пирамиданың *бүйір қырлары* деп аталады. Пирамиданың төбесінен жүргізілген бүйір жағының биіктігі пирамиданың *апофемасы* деп аталады.

Пирамидалар табанында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

Егер пирамиданың табаны n-бұрышты болса, онда ол *n-бұрышты пирамида* деп аталады.

2.1-суретте үшбұрышты, төртбұрышты және алтыбұрышты пирамидалар кескінделген.



2.1-сурет

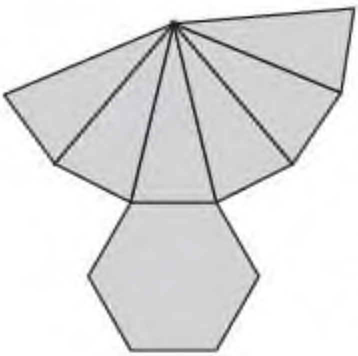
Пирамида оның төбелерімен белгіленеді, мысалы: $SABC$ үшбұрышты пирамида (2.1, а-сурет), $SABCD$ төртбұрышты пирамида (2.1, ә-сурет),

$SABCDEF$ алтыбұрышты пирамида (2.1, б-сурет). Бірінші ортақ төбесі көрсетіліп жазылады.

Пирамида төбесінен оның табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр *пирамиданың биіктігі* деп аталады. 2.1, б-суретте $SABCDEF$ пирамидасының SH биіктігі кескінделген.

Табанында дұрыс көпбұрыш жататын және барлық бүйір қырлары өзара тең болатын пирамида *дұрыс* деп аталады.

Қалай ойлайсыңдар, тетраэдр үшбұрышты пирамида бола ма?
2.2-суретте дұрыс алтыбұрышты пирамиданың жазбасы кескінделген.



2.2-сурет

Пирамиданың бүйір беті деп осы пирамиданың барлық бүйір жақтарынан құрылған бетті айтады. Сондықтан *пирамиданың бүйір бетінің ауданы* оның барлық бүйір жақтарының аудандарының қосындысына тең болады.

Теорема. ***Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табанының жарты периметрі мен апофемасының көбейтіндісіне тең болады:***

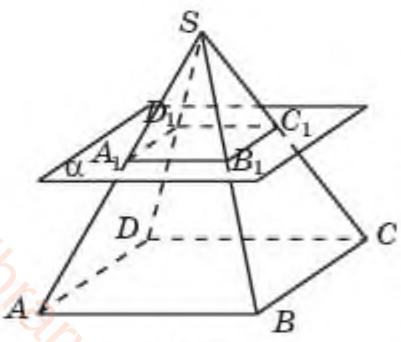
$$S_{\text{бүйір}} = \frac{1}{2}pl,$$

мұндағы l — пирамиданың апофемасы, ал p — табанының периметрі.

Бұл теореманы өздерің дәлелдеңдер.

Пирамиданың толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен табанының аудандарының қосындысына тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

$$S_{\text{пирамида}} = S_{\text{бүйір}} + S_{\text{табан}}.$$



2.3-сурет

Пирамиданың табанына параллель және бүйір қырларын қиып өтетін жазықтықты қарастырайық. Осы жазықтық пен табан жазықтығының арасында шектелген пирамиданың бөлігі *қиық пирамида* деп аталады (2.3-сурет).

Берілген пирамиданың табаны және пирамиданың жазықтықпен қимасынан пайда болған көпбұрыш *қиық пирамиданың табандары* деп аталады.

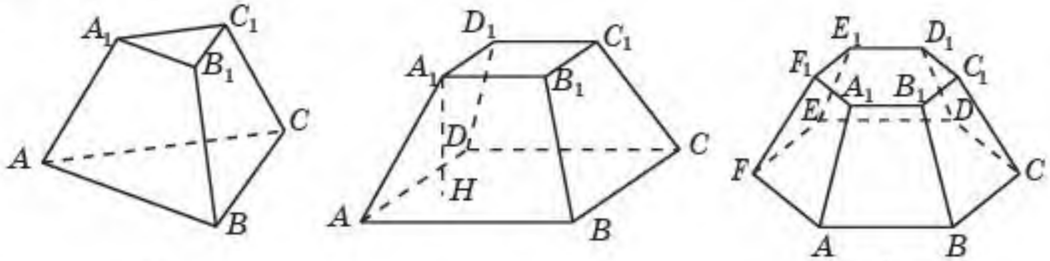
Қиық пирамида оның табандарының төбелерімен белгіленеді, мысалы, 2.3-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ төртбұрышты қиық пирамида кескінделген.

Қиық пирамиданың табандарының қабырғалары қос-қостан параллель, сондықтан *қиық пирамиданың бүйір жақтары* трапециялар болып табылады. Бүйір жақтарынан құрылған бет *қиық пирамиданың бүйір беті* деп аталады.

Қиық пирамиданың бүйір жақтарының ортақ қырлары оның *бүйір қырлары* деп аталады.

Қиық пирамидалар табанында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

2.4-суретте үшбұрышты қиық пирамида (2.4, а-сурет), төртбұрышты қиық пирамида (2.4, ә-сурет) және алтыбұрышты қиық пирамида (2.4, б-сурет) кескінделген.



2.4-сурет

Дұрыс пирамидадан алынған қиық пирамида *дұрыс* деп аталады.

Бүйір жағының биіктігі дұрыс қиық пирамиданың *апофемасы* деп аталады.

Бір табанының кез келген нүктесінен екінші табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр *қиық пирамиданың биіктігі* деп аталады. 2.4, ә-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қиық пирамидасының A_1H биіктігі кескінделген.

Қиық пирамиданың жазбасы екі ұқсас көпбұрыштар (қиық пирамиданың табандары) мен трапециялардан (қиық пирамиданың бүйір жақтары) тұрады.

Қиық пирамиданың бүйір беті деп осы қиық пирамиданың барлық бүйір жақтарынан құрылған бетті айтады. Сондықтан *қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы* оның барлық бүйір жақтарының аудандарының қосындысына тең болады.

Теорема. ***Дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табандарының периметрлерінің қосындысының жартысын апофемасына көбейткенге тең болады:***

$$S_{\text{бүйір}} = \frac{1}{2}(p + p_1)l,$$

мұндағы p және p_1 – қиық пирамиданың табандарының периметрлері, ал l – апофемасы.

Бұл теореманы өздерің дәлелдеңдер.

Қиық пирамиданың толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен табандарының аудандарының қосындысына тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

$$S_{\text{қиық пирамида}} = S_{\text{бүйір}} + S_{1\ \text{табан}} + S_{2\ \text{табан}}.$$

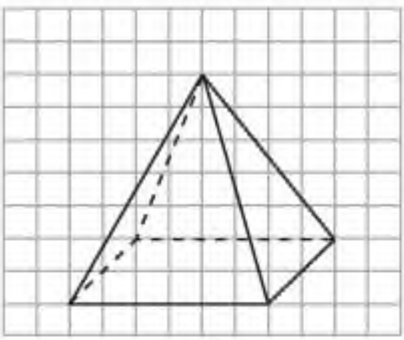
Сұрақтар

1. Қандай көпжақ пирамида деп аталады?
2. Қандай пирамида дұрыс деп аталады?
3. Пирамиданың биіктігі дегеніміз не?
4. Қандай көпжақ қиық пирамида деп аталады?
5. Қандай қиық пирамида дұрыс деп аталады?
6. Қиық пирамиданың биіктігі дегеніміз не?
7. Пирамиданың бетінің ауданы қалай есептеледі?
8. Қиық пирамиданың бетінің ауданы қалай есептеледі?

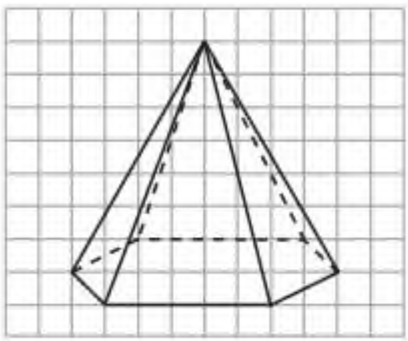
Есептер

A

2.1. Торкөз қағазға 2.5-суреттегіге ұқсас пирамиданы салыңдар және оның биіктігін жүргізіңдер.



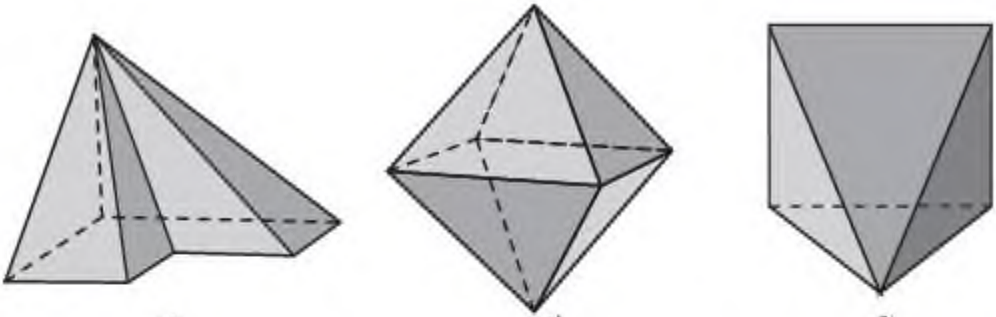
а)



ә)

2.5-сурет

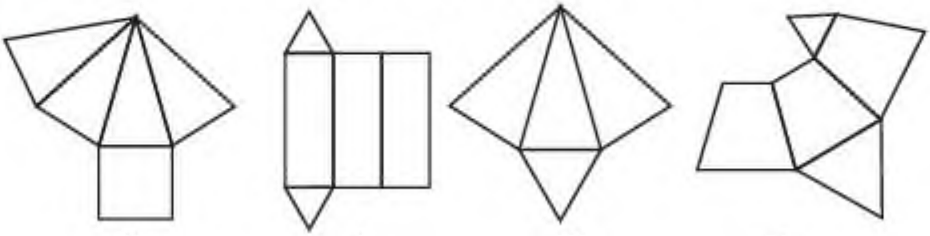
2.2. 2.6-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы пирамида болады?



а) в) б)

2.6-сурет

2.3. 2.7-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы пирамиданың жазбалары болады? Олардың түрін анықтаңдар.



а) в) б) в)

2.7-сурет

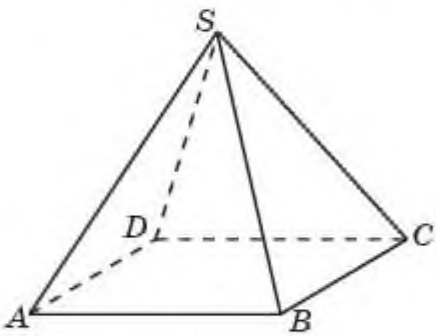
2.4. 2.8-суретте кескінделген фигура қандай көпжақтың жазбасы болады?

2.5. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың жазбасын салыңдар.

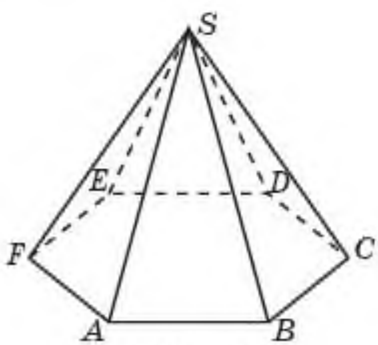
2.6. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

2.7. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар (2.9-сурет).

2.8-сурет



2.9-сурет



2.10-сурет

2.8. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар (2.10-сурет).

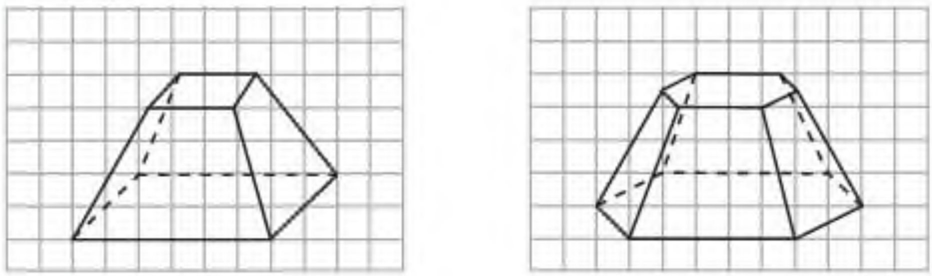
B

2.9. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

2.10. Егер пирамиданың барлық қырларын 2 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

2.11. Егер пирамиданың барлық қырларын 3 есе кемітсе, онда оның бетінің ауданы неше есе кемиді?

2.12. Торкөз қағазға 2.11-суреттегіге ұқсас қиық пирамиданы салыңдар.



а) ә)

2.11-сурет

2.13. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың жазбасын салыңдар.

C

2.14. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың жазбасын салыңдар.

2.15. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 4 см және 2 см-ге, ал бүйір қырлары 3 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

2.16. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 2 см және 1 см-ге, ал биіктігі 3 см-ге тең. Пирамиданың бүйір қырын табыңдар.

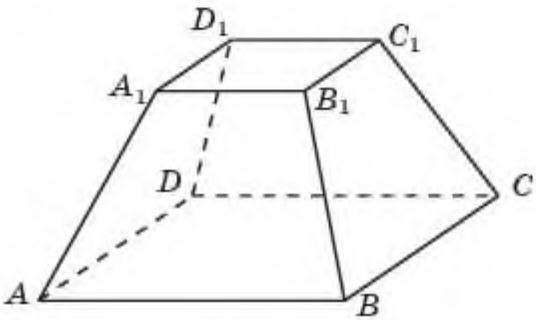
2.12-сурет

2.17. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бейбітшілік пен келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес болып табылады (2.12-сурет). Оның биіктігі мен табанының қабырғасы 62 м-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

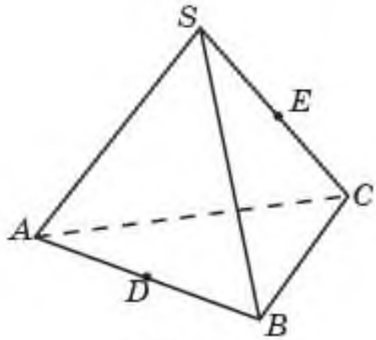
2.18. Ежелгі Мысырдағы ең үлкен ғимараттардың бірі – Хеопс пирамидасы – дұрыс төртбұрышты пирамида. Оның биіктігі шамамен 140 м-ге, ал табанының ауданы 5,3 га-ға тең (2.13-сурет). Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

2.13-сурет

2.19. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 1 см және 2 см-ге, ал бүйір қырлары 1 см-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар (2.14-сурет).



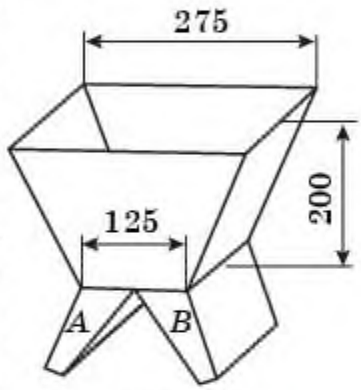
2.14-сурет



2.15-сурет

2.20. $SABC$ дұрыс пирамидасының AB және SC қырларының орталарын қосатын пирамида бетіндегі ең қысқа арақашықтықты табыңдар (2.15-сурет).

2.21. 2.16-суретте дән сақталатын қорап (бункер) кескінделген. Оның негізгі бөлігінің бетін дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың бүйір беті құрайды. Суретте көрсетілген өлшемдері (см-мен) бойынша қорапты жасау үшін (A және B бөліктерін есептемегенде) қанша квадрат дециметр қаңылтыр қажет екенін есептеңдер.



2.16-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

2.22. 1) Параллелепипед; 2) призма; 3) пирамида төбелерінің (Т), қырларының (Қ) және жақтарының (Ж) саны үшін Т – Қ + Ж = 2 теңдігі орындалатынын тексеріңдер.

§ 3*. Эйлер теоремасы

Бізге белгілі көпжақтарды қарастырып, олардың төбелерінің (Т), қырларының (Қ) және жақтарының (Ж) саны бойынша кестені толтырамыз.

1-кесте

Көпжақтың атауы	Т	Қ	Ж
Параллелепипед	8	12	6
Үшбұрышты пирамида	4	6	4
Төртбұрышты пирамида	5	8	5
Үшбұрышты призма	6	9	5
Төртбұрышты призма	8	12	6
n-бұрышты пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n-бұрышты призма	$2n$	$3n$	$n+2$

Осы кестеден қарастырылған барлық көпжақтар үшін Т − Қ + Ж = 2 теңдігі орындалатынын көреміз. Бұл теңдік қарастырылған көпжақтар үшін ғана емес, кез келген дөңес көпжақ үшін де орынды болады.

Дөңес көпжақтардың бұл қасиетін алғашқы болып 1752 жылы Леонард Эйлер дәлелдеген және Эйлер теоремасы атауын алған.

Эйлер теоремасы. ***Кез келген дөңес көпжақтар үшін келесі теңдік орынды болады:***

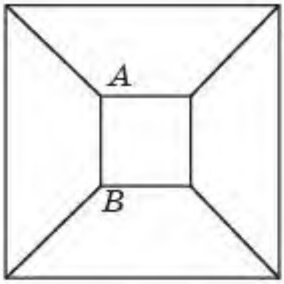
$$\text{Т} - \text{Қ} + \text{Ж} = 2,$$

мұндағы Т — берілген көпжақтың төбелерінің саны, Қ — қырларының саны, Ж — жақтарының саны.

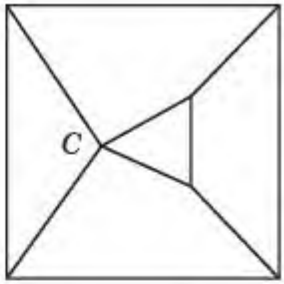
Дәлелдеуі. Көпжақ моделінің бетін қарастырайық. Оның бір жағын кесіп, қалған бетін жазықтыққа жазамыз. Осыдан Т төбелері, Қ қырларынан тұратын сызбаны және осы сызбаның жазықтықты бөлетін Ж аймақтарын аламыз.

Егер сызбадағы екі төбесі бар қандай да бір қырын оның төбелерінің біреуіне осы қыры бойымен қысып жинақтайтын болсақ, онда сызбадағы Т − Қ + Ж мәні өзгермейтінін дәлелдейік.

Мысал ретінде, кубтан алынған 3.1-суреттегі сызбаны қарастырамыз. Мұнда Т = 8, Қ = 12, Ж = 6 болады.



3.1-сурет



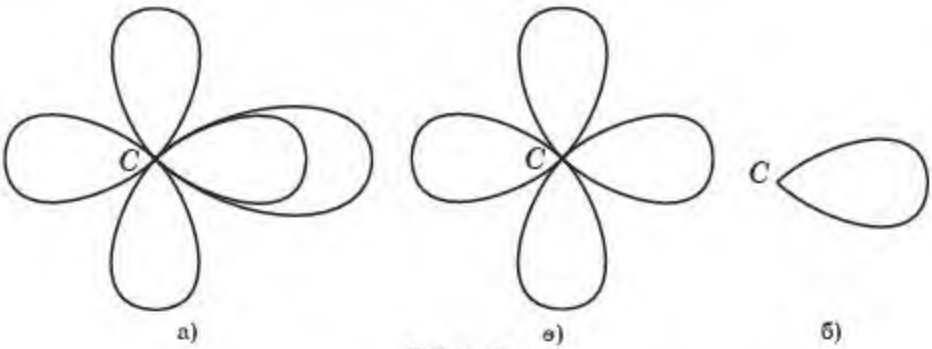
3.2-сурет

AB қырын *C* нүктесіне қысып жинақтағанда 3.2-суреттегідей сызба пайда болады. Нәтижесінде, Т төбелерінің саны біреуге кемиді, Қ қырларының саны да біреуге кемиді, ал Ж аймақтарының саны өзгермейді. Демек, Т – Қ + Ж мәні де өзгермейтін болады.

Осы қасиеттерді пайдаланып, екі төбесі бар барлық қырларын қысып жинақтаймыз. Осыдан бір төбесі бар, ал қырлары осы төбемен күрмектері болатын сызбаны аламыз (3.3, а-сурет).

Бұл тор көз үшін де Т – Қ + Ж мәні өзгеріссіз бастапқы мән болып қалады.

Енді егер пайда болған сызбадағы қандай да бір күрмекті алып тастасақ, Т – Қ + Ж мәні өзгермейтінін дәлелдейміз.



3.3-сурет

Расында да, бұл жағдайда Т төбелерінің саны өзгермейді, ол 1-ге тең. Қ қырларының саны да, Ж аймақтарының саны да 1-ге кемиді (3.3, ә-сурет). Ендеше, Т – Қ + Ж мәні де өзгермейтін болады.

Осы қасиеттерді пайдаланып, біреуден басқа барлық күрмектерді алып тастаймыз. Осыдан бір төбесі және бір қыры (төбесі мен күрмегі) бар сызбаны аламыз (3.3, б-сурет). Бұл сызба үшін Т = 1, Қ = 1, Ж = 2, яғни Т – Қ + Ж = 2 болады. Демек, бұл теңдік бастапқы көпжақ үшін де орынды болып табылады. □

Эйлер теоремасын пайдаланып, дөңес көпжақтың төбелері (Т), қырлары (Қ) және жақтарының (Ж) санын табуға мысал келтірейік.

Мысал. Дөңес көпжақтың әрбір төбесінде бес үшбұрыш түйіседі. Осы көпжақтың төбелерінің (Т), қырларының (Қ) және жақтарының (Ж) санын табыңдар.

Шешуі. Берілген көпжақтың әрбір төбесінде бес қыры түйіседі. Ал әрбір қырының екі төбесі болатындықтан, 5Т = 2Қ теңдігі орындалады. Осыдан, $Т = \frac{2Қ}{5}$. Бұл көпжақтың жақтары тек қана үшбұрыштар, ал әрбір үшбұрыштың үш қыры болатындықтан, 3Ж = 2Қ теңдігі орындалады. Демек, $Ж = \frac{2Қ}{3}$. Табылған Т және Ж мәндерін Эйлер теңдігіне қойып, мынадай теңдеуді аламыз:

$$\frac{2Қ}{5} - Қ + \frac{2Қ}{3} = 2.$$

Осы теңдеуді шешіп, көпжақтың қырларының (Қ) санын табамыз, яғни Қ = 30. Бұл мәнді Т және Ж өрнектеріне қоя отырып, көпжақтың төбелері мен жақтарының сандарын табамыз: Т = 12, Ж = 20.

Тарихи деректер

Леонард Эйлер (1707—1783) — әлемге танымал швейцариялық математик. Оның еңбектері математиканың көптеген заманауи бөлімдерінің дамуына үлес қосты.

Ғалымның ғылыми мұралары көп, қазіргі уақытта оның 800-ден астам еңбектері белгілі болып отыр. Өмірінің соңғы 12 жылында Эйлер ауыр науқастанып, көру қабілетінен айырылды, бірақ науқасына қарамастан жұмыс істеп, нәтижелер алған. Статистикалық есептеулер бойынша, Эйлер аптасына орта есеппен бір жаңалық ашып отырған.

Эйлер еңбектерінде зерттелмеген математикалық мәселелерді табу қиын. Кейінгі ұрпақтың математиктері Эйлерден білім алған. Белгілі француз ғалымы П.С. Лаплас: «Эйлерді оқыңдар, ол — бәріміздің ұстазымыз», — деген.

Математика тарихшылары Эйлер теоремасын *топологияның алғашқы теоремасы* деп атаған. Топология — үздіксіз деформация кезінде өзгермейтін, үзіліссіз немесе қосымша желімдеусіз созылатын және қысылатын фигуралардың қасиеттерін зерттейтін геометрияның бөлімі. Мұндай қасиеттер *топологиялық* деп аталады.

Дөңес көпжақтар үшін Т − Қ + Ж = 2 Эйлер қатынасы осы топологиялық қасиетті сипаттайды. Көпжақты деформациялауға болады, оның қырлары мен жақтары майысуы мүмкін, бірақ олардың саны, яғни Эйлер қатынасы өзгермейді.

Эйлер қатынасын дәлелдеу кезінде біз деформациялауды қолданғанбыз, яғни көпжақтың бетінің бір жағын кесіп, жазықтыққа жазған болатынбыз. Қырлары мен көпбұрыштардың өздері майысуы мүмкін, бірақ бұл Эйлер қатынасына әсер етпейді.

Леонард Эйлердің өмірімен және шығармашылығымен танысу үшін біз келесі кітапты ұсынамыз: Тиле Р. Леонард Эйлер. — Киев: Вища школа, 1983.

Сұрақтар

1. 1) n-бұрышты призманың; 2) n-бұрышты пирамиданың төбелері, қырлары және жақтарының саны нешеге тең?
2. Эйлер теоремасын айтыңдар.
3. Эйлер теоремасы қашан дәлелденді?
4. Топология нені зерттейді?

Есептер

A

3.1. Дөңес көпжақтың 6 төбесі және 12 қыры бар. Оның неше жағы болады?

3.2. Дөңес көпжақтың 8 төбесі және 6 жағы бар. Оның неше қыры болады?

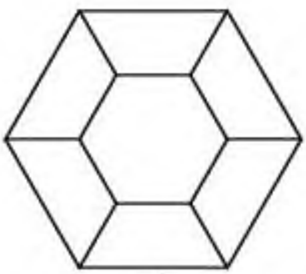
3.3. Дөңес көпжақтың 9 қыры және 5 жағы бар. Оның неше төбесі болады?

B

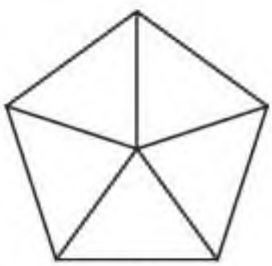
3.4. Эластикалық материалдан жасалған үшбұрышты призманың бір табаны кесіліп алынды және қалған жақтары жазықтыққа жазылды. Пайда болған сызбаның суретін салыңдар.

3.5. Эластикалық материалдан жасалған төртбұрышты пирамиданың табаны кесіліп алынды және қалған жақтары жазықтыққа жазылды. Пайда болған сызбаның суретін салыңдар.

3.6. 3.4-суреттегі сызбаларға сәйкес келетін көпжақтарды айтыңдар.



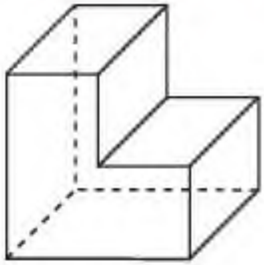
а)

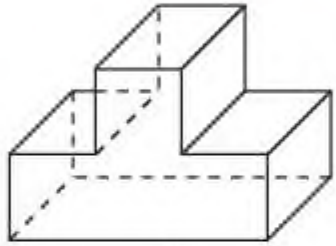


ә)

3.4-сурет

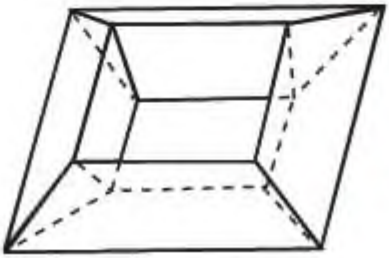
3.7. 3.5-суреттегі көпжақтар үшін Эйлер қатынасының орындалатынын немесе орындалмайтынын тексеріңдер.





3.5-сурет

C



3.6-сурет

3.8. Дөңес емес призма үшін Эйлер қатынасы орындала ма?

3.9. Дөңес емес пирамида үшін Эйлер қатынасы орындала ма?

3.10. 3.6-суреттегі көпжақтың төбелерінің, қырларының және жақтарының санын табыңдар. Осы көпжақ үшін Эйлер қатынасы орындала ма?

3.11. Дөңес көпжақтың әрбір төбесінде төрт үшбұрыш түйіседі. Осы көпжақтың төбелерінің (Т), қырларының (Қ) және жақтарының (Ж) санын табыңдар.

3.12. Дөңес көпжақтың әрбір төбесінде үш бесбұрыш түйіседі. Осы көпжақтың төбелерінің (Т), қырларының (Қ) және жақтарының (Ж) санын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

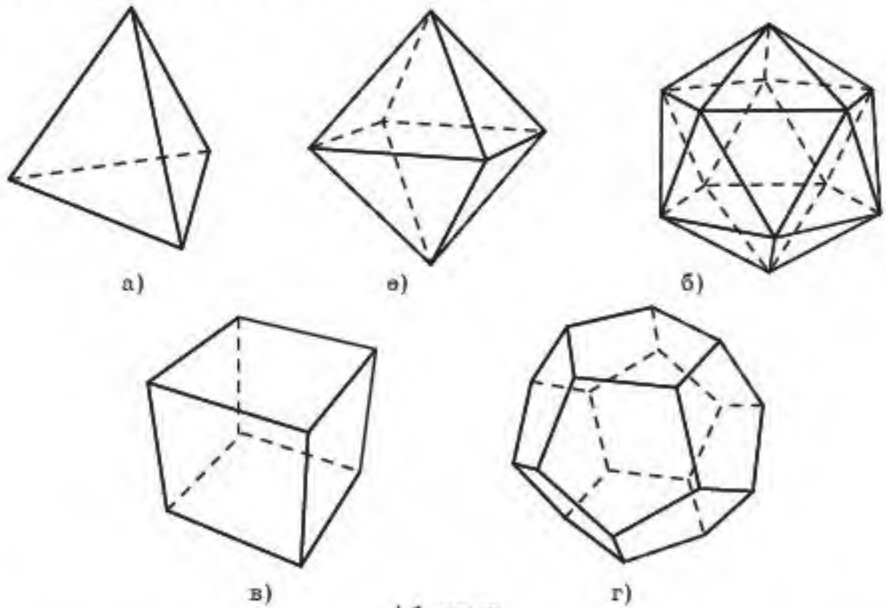
3.13. Дұрыс көпбұрыштың анықтамасын қайталаңдар. Дұрыс көпжақтың анықтамасын айтып көріңдер.

§ 4. Дұрыс көпжақтар

Егер дұрыс көпжақтың жақтары қабырғаларының саны бірдей дұрыс көпбұрыштар болса және әрбір төбесінде түйісетін жақтар саны бірдей болса, онда ол *дұрыс көпжақ* деп аталады.

Дұрыс көпжақтың төбелерінде қандай және неше дұрыс көпбұрыштар түйісетінін айқындайық.

Дұрыс көпжақтардың ішіндегі ең қарапайымы жақтары төрт дұрыс үшбұрыштардан тұратын (4.1, а-сурет) және әрбір төбесінде үш жағы түйісетін көпжақ болып табылады. Бұл көпжақ *дұрыс тетраэдр* деп аталады. Грек тілінен аударғанда «тетраэдр» сөзі «төртжақ» («тетра» — төрт, «эдра» — жақ) дегенді білдіреді.



4.1-сурет

4.1, ә-суретте жақтары дұрыс үшбұрыштардан тұратын және әрбір төбесінде төрт жағы түйісетін көпжақ кескінделген. Оның беті сегіз дұрыс үшбұрыштардан тұрады, сондықтан ол *октаэдр* («окта» — сегіз) деп аталады.

4.1, б-суретте әрбір төбесінде бес дұрыс үшбұрыштан түйісетін көпжақ кескінделген. Оның беті жиырма дұрыс үшбұрыштан тұрады, сондықтан ол *икосаэдр* («икоси» — жиырма) деп аталады.

Дөңес көпжақтың бір төбесінде бесеуден көп емес дұрыс үшбұрыштардың түйісетінін байқаймыз, өйткені керісінше жағдайда бұл төбедегі жазық бұрыштардың қосындысы 360°-тан артық немесе тең болады. Сондықтан жақтары дұрыс үшбұрыштар болатын басқадай дұрыс көпжақтар болмайды.

Осыған ұқсас, дөңес көпжақтың төбелерінде тек қана үш квадрат түйісетін болғандықтан, кубтан (4.1, в-сурет) басқа жақтары квадрат болатын басқадай дұрыс көпжақтар болмайды. Кубтың алты жағы бар, сондықтан ол *гексаэдр* («гекса» — алты) деп те аталады.

4.1, г-суретте жақтары дұрыс бесбұрыштар болатын және әрбір төбесінде үш жағы түйісетін көпжақ кескінделген. Оның беті он екі дұрыс бесбұрыштан тұрады, сондықтан ол *додекаэдр* («додека» — он екі) деп аталады.

Дөңес көпжақтың төбелерінде қабырғасының саны бесеуден артық дұрыс көпбұрыштар түйіспейтіндіктен, басқадай дұрыс көпжақтар болмайды. Сонымен, дөңес дұрыс көпжақтың бес түрі болады: *дұрыс тетраэдр, гексаэдр* (*куб*), *октаэдр, додекаэдр* және *икосаэдр.*

Қалай ойлайсыңдар, неліктен бүйір жақтары квадраттар болып келетін дұрыс үшбұрышты призма дұрыс көпжақ болмайды?

Тарихи деректер

Ежелден бері дұрыс көпжақтар ғалымдардың, құрылысшылардың, сәулетшілердің және тағы басқалардың назарын аударған. Оларды осы көпжақтардың сұлулығы, ерекшелігі және үйлесімділігі таңғалдырған. Пифагорлықтар бұл көпжақтарды құдай берген таңғажайып деп есептеп, оларды әлем туралы философиялық жазбаларында қолданған. Ежелгі грек ғалымы Платон (б.э.д. 429—348) дұрыс көпжақтардың қасиеттерін егжей-тегжейлі сипаттаған. Сол себепті дұрыс көпжақтар *Платон денелері* деп те аталады. Евклидтің танымал «Бастамалары» атты соңғы XIII кітабы дұрыс көпжақтарға арналған.

Қайта өркендеу дәуірінде (XV—XVI ғғ. ғылым мен өнердің қайта өркендеген дәуірі) дұрыс көпжақтарға мүсіншілер, архитекторлар және суретшілер үлкен қызығушылық танытты. Леонардо да Винчи (1452—1519 жж.), мысалы, көпжақтар теориясымен айналысқан және оларды өзінің суреттерінде бейнелеген. Ол өзінің досы монах Лука Пачолидің (1445—1514 жж.) «Таңғажайып пропорциялар туралы» кітабын дұрыс және жартылай дұрыс көпжақтардың суреттерімен сипаттаған.

Қайта өркендеу дәуірінде геометриямен айналысқан тағы бір атақты суретші Альбрехт Дюрер болды. Оның елге танымал «Меланхолия» өрнегінде алдыңғы қатарда додекаэдр салынған. 1525 жылы Дюрер трактат жазды, онда ол беттері болашақтың жақсы моделін көрсететін бес дұрыс көпжақты ұсынды.

Иоганн Кеплер (1571—1630 жж.) өзінің 1596 жылы жарыққа шыққан «Әлемнің құпиясы» атты еңбегінде сфераға (сол кездегі белгілі планеталардың орбитасы) сырттай сызылған дұрыс көпжақтарды пайдаланып, Күн жүйесінің моделін құрастырған. Ол центрге жердің орбитасын орналастырды. Кеплердің ойынша, Күн жүйесінің геометриясы мынадай болады: «Жер (Жердің орбитасы) — барлық орбиталардың өлшемі. Оған сырттай додекаэдрді саламыз. Додекаэдрге сырттай сызылған сфера — Марс сферасы. Марс сферасына сырттай тетраэдрді саламыз. Тетраэдрге сырттай сызылған сфера Юпитердің сферасы болып табылады. Юпитер сферасына сырттай кубты саламыз. Кубқа сырттай сызылған сфера Сатурн сферасы болып табылады. Жердің сферасына іштей икосаэдрді саламыз. Оған іштей сызылған сфера Венера сферасы болады. Венера сферасына іштей октаэдрді саламыз.

Оған іштей сызылған сфера Меркурий сферасы болады. Ол кезде басқа планеталар әлі ашылған жоқ болатын.

Күн жүйесінің мұндай моделін Кеплер «Ғарыштық куб» деп атады.

Сұрақтар

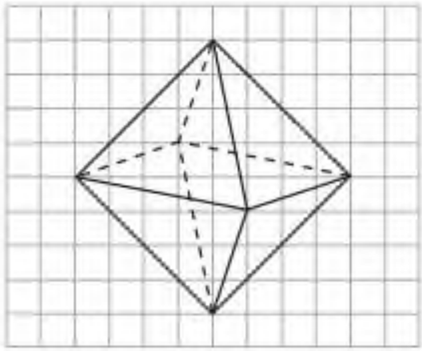
1. Қандай дөңес көпжақ дұрыс деп аталады?
2. Қандай көпжақ: а) дұрыс тетраэдр; ә) октаэдр; б) икосаэдр; в) гексаэдр; г) додекаэдр деп аталады?
3. Дұрыс көпжақтарды зерттеумен кімдер айналысқан?

Есептер

A

4.1. 1) Дұрыс тетраэдрдің; 2) кубтың; 3) октаэдрдің; 4) икосаэдрдің; 5) додекаэдрдің неше төбесі, қыры және жағы болады?

4.2. Үшбұрышты бипирамида екі дұрыс тетраэдрдің беттерін беттестіріп құрастырылды («би» қосымшасы екеу, еселеуді білдіреді). Пайда болған көпжақ дұрыс бола ма? Неліктен?

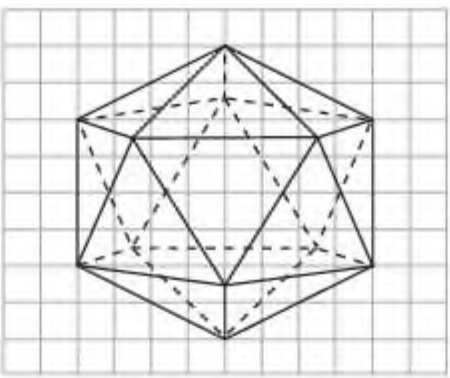


4.2-сурет

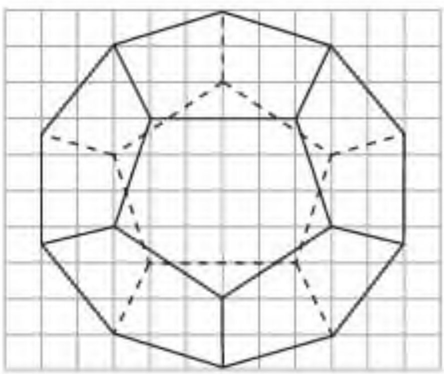
4.3. Төртбұрышты бипирамида бүйір жақтары дұрыс үшбұрыштар болатын екі төртбұрышты пирамиданың табандарын беттестіріп құрастырылды. Пайда болған көпжақ дұрыс бола ма?

4.4. Торкөз қағазға 4.2-суреттегіге ұқсас октаэдрді салыңдар.

4.5. Торкөз қағазға 4.3-суреттегіге ұқсас икосаэдрді салыңдар.



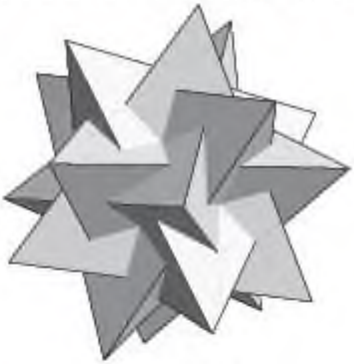
4.3-сурет



4.4-сурет

4.6. Торкөз қағазға 4.4-суреттегіге ұқсас додекаэдрді салыңдар.

4.7. 4.5-суретте неше тетраэдр кескінделген?

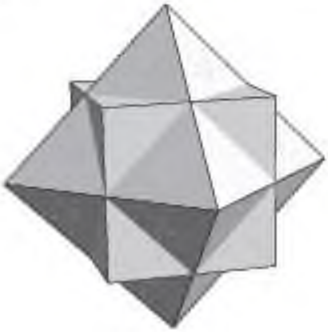


4.5-сурет

4.6-сурет

4.8. 4.6-суретте неше октаэдр кескінделген?

4.9. 4.7-суреттегі көпжақ қандай екі көпжақты біріктіру арқылы салынған?

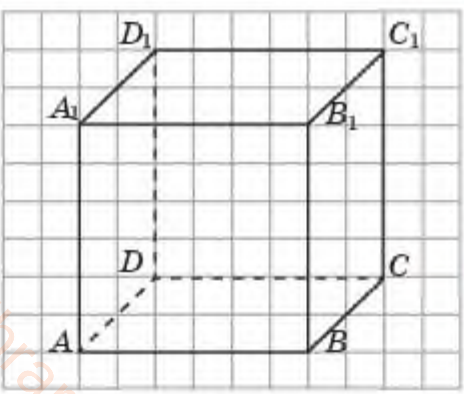


4.7-сурет

4.8-сурет

4.10. 4.8-суреттегі көпжақ қандай екі көпжақты біріктіру арқылы салынған?

B

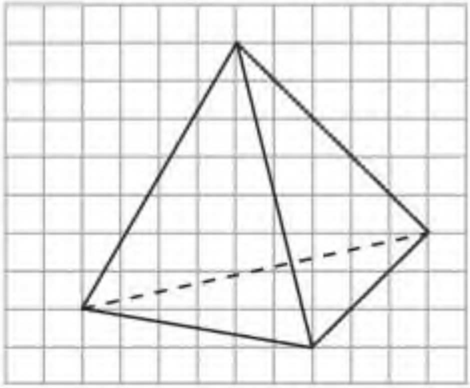


4.9-сурет

4.11. 4.9-суреттегіге ұқсас кубты торкөз қағазға салыңдар. Кубтың A, C, B_1, D_1 төбелері қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген кубтың қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырының ұзындығын табыңдар.

4.12. 4.9-суреттегіге ұқсас кубты торкөз қағазға салыңдар. Кубтың жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген кубтың қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырының ұзындығын табыңдар.

4.13. 4.10-суреттегіге ұқсас тетраэдрді торкөз қағазға салыңдар. Тетраэдрдің қырларының орталарын белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген тетраэдрдің қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырын табыңдар.



4.10-сурет

4.14. Қыры 2 см-ге тең тетраэдрдің әрбір төбесінен қыры 1 см-ге тең тетраэдр қиылып алынса, қалған бөлігі қандай көпжақ болады? Оның қырын табыңдар.

4.15. Октаэдрдің қыры 1-ге тең. Оның қарама-қарсы жатқан төбелерінің арақашықтығын табыңдар.

4.16. Бірлік октаэдрдің қырлары арқылы оның бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейінгі ұзындығы 2-ге тең неше жол болады?

4.17. Бірлік октаэдрдің қырлары арқылы оның бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейінгі ұзындығы 3-ке тең неше жол болады?

C

4.18. 4.10-суреттегіге ұқсас тетраэдрді торкөз қағазға салыңдар. Тетраэдрдің жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген тетраэдрдің қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырын табыңдар.

4.19. 4.2-суреттегіге ұқсас октаэдрді торкөз қағазға салыңдар. Октаэдрдің жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген октаэдрдің қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырын табыңдар.

4.20. 4.3-суреттегіге ұқсас икосаэдрді торкөз қағазға салыңдар. Икосаэдрдің жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады?

4.21. 4.5-суреттегіге ұқсас додекаэдрді торкөз қағазға салыңдар. Додекаэдрдің жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады?

4.22. Бірлік икосаэдрдің қырлары арқылы оның бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейінгі ұзындығы 3-ке тең неше жол болады?

4.23. Бірлік додекаэдрдің қырлары арқылы оның бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейінгі ұзындығы 5-ке тең неше жол болады?

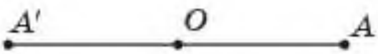
4.24. Жазықтықтағы центрлік симметрия мен осьтік симметрияның анықтамаларын қайталаңдар.

§ 5*. Көпжақтардың симметриясы

Жазықтықтағы фигуралардың симметриясы ұғымы планиметрия курсында қарастырылды. Центрлік және осьтік симметриялар ұғымдары анықталды. Кеңістіктік фигуралар үшін симметрия ұғымы осыған ұқсас анықталатын болады.

Неміс математигі Г. Вейлдің (1885—1955 жж.) айтуынша: «Симметрия — адамдардың ғасырлар бойы тәртіпті, сұлулық пен кемелдікті түсінуге және жасауға тырысқан идеялары болып табылады».

Симметрияның әдемі бейнелері өнер туындыларын — архитектура, көркем суреттерді, мүсіндерді және т.б. суреттейді.



5.1-сурет

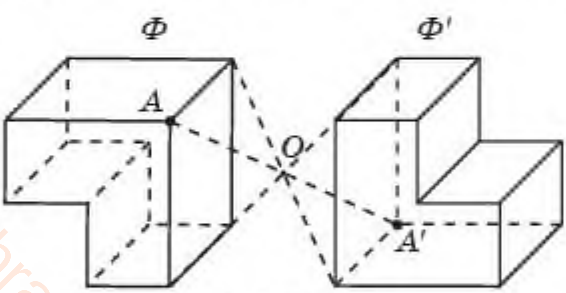
Егер кеңістіктегі O нүктесі AA' кесіндісінің ортасы болса, онда A және A' нүктелері *O нүктесіне қарағанда симметриялы* деп аталады (5.1-сурет). O нүктесі өзіне-өзі симметриялы болып табылады.

Кеңістіктің әрбір A нүктесін берілген O нүктесіне қарағанда симметриялы A' нүктесіне бейнелейтін кеңістіктегі түрлендіру *центрлік симметрия* деп аталады. O нүктесі *симметрия центрі* деп аталады.

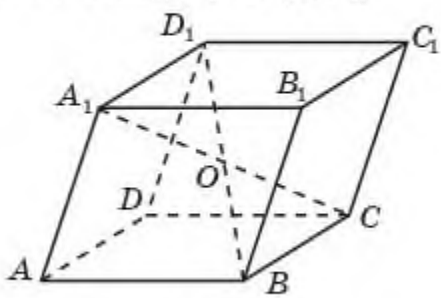
Егер кеңістіктегі O нүктесіне қарағанда Φ фигурасының әрбір A нүктесі екінші Φ' фигурасының қандай да бір A' нүктесіне симметриялы болса, онда Φ және Φ' фигуралары O центріне қарағанда *центрлік симметриялы* деп аталады (5.2-сурет).

Егер кеңістіктегі O нүктесіне қарағанда Φ фигурасы өзіне-өзі центрлік симметриялы болса, онда Φ фигурасы O центріне қарағанда *центрлік симметриялы* деп аталады.

Мысалы, параллелепипед өзінің диагональдарының қиылысуы O нүктесіне қарағанда *центрлік симметриялы* болады (5.3-сурет).



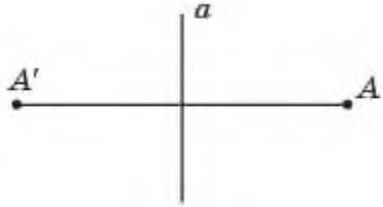
5.2-сурет



5.3-сурет

Қалай ойлайсыңдар, фигурада бірнеше симметрия центрлері бола ма?

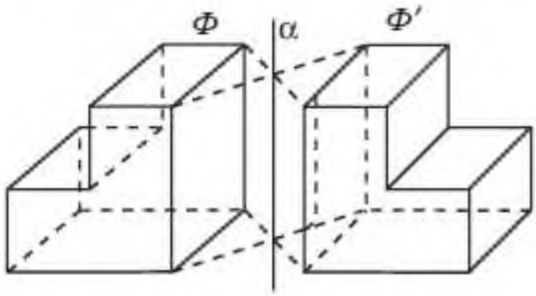
Егер кеңістіктегі a түзуі AA' кесіндісіне перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтсе, онда A және A' нүктелері *a түзуіне қарағанда симметриялы* деп аталады (5.4-сурет). a түзуінің әрбір нүктесі өзіне-өзі симметриялы болады.



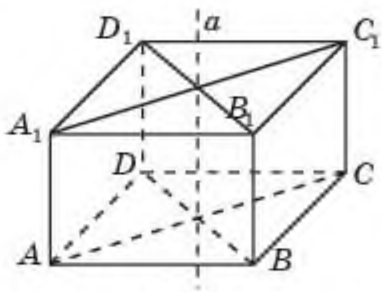
5.4-сурет

Кеңістіктің әрбір A нүктесін берілген a түзуіне қарағанда A' нүктесіне бейнелейтін кеңістіктегі түрлендіру *осьтік симметрия* деп аталады. a түзуі *симметрия осі* деп аталады.

Егер кеңістіктегі a түзуіне қарағанда Φ фигурасының әрбір A нүктесі екінші Φ' фигурасының қандай да бір A' нүктесіне симметриялы болса, онда Φ және Φ' фигуралары a осіне қарағанда *симметриялы фигуралар* деп аталады (5.5-сурет).



5.5-сурет



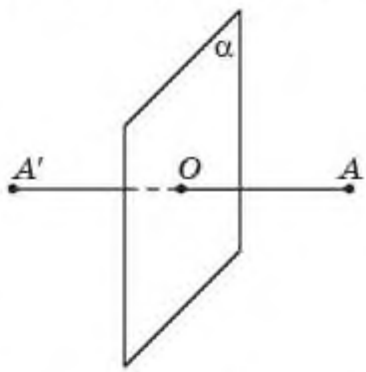
5.6-сурет

Егер кеңістіктегі a түзуіне қарағанда Φ фигурасы өзіне-өзі симметриялы болса, онда Φ фигурасы *a осіне қарағанда симметриялы* деп аталады.

Мысалы, тікбұрышты параллелепипед өзінің қарама-қарсы жатқан жақтарының диагональдарының қиылысу нүктелері арқылы өтетін осіне қарағанда *центрлік симметриялы болады* (5.6-сурет).

Қалай ойлайсыңдар, фигурада бірнеше симметрия осьтері бола ма?

Егер кеңістіктегі α жазықтығы AA' кесіндісіне перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтсе, онда A және A' нүктелері *α жазықтығына қарағанда симметриялы* деп аталады (5.7-сурет). α жазықтығының әрбір нүктесі өзіне-өзі симметриялы болады.

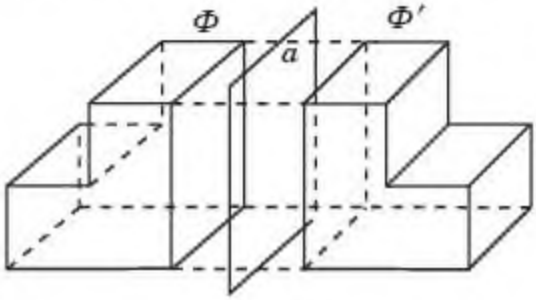


5.7-сурет

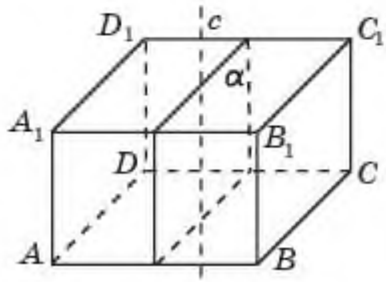
Кеңістіктің әрбір A нүктесін берілген α жазықтығына қарағанда A' нүктесіне бейнелейтін кеңістіктегі түрлендіру *α жазықтығына қарағанда симметрия* деп аталады. α жазықтығы *симметрия жазықтығы* деп аталады.

Жазықтыққа қарағанда симметрия *айналы симметрия* деп те аталады.

Егер кеңістіктегі α жазықтығына қарағанда Φ фигурасының әрбір A нүктесі екінші Φ' фигурасының қандай да бір A' нүктесіне айналы симметриялы болса, онда Φ және Φ' фигуралары α жазықтығына қарағанда *айналы симметриялы фигуралар* деп аталады (5.8-сурет).



5.8-сурет



5.9-сурет

Егер кеңістіктегі α жазықтығына қарағанда Φ фигурасы өзіне-өзі айналы симметриялы болса, онда Φ фигурасы α жазықтығына қарағанда *айналы симметриялы* деп аталады.

Мысалы, тікбұрышты параллелепипед өзінің симметрия осі арқылы өтетін және қарама-қарсы жатқан жақтарының біреуіне параллель болатын жазықтыққа қарағанда айналы симметриялы болады (5.9-сурет).

? Қалай ойлайсыңдар, фигурада бірнеше симметрия жазықтықтары бола ма?

Кристалдар — табиғи көпжақтар

5.10-сурет

Көпжақтардың көптеген пішіндерін адамның өзі ойлап тапқан жоқ, олар табиғи кристалдар түрінде түзілген. Ас тұзының кристалдары текше пішіндес (5.10-сурет), мұздың және сутас (кварц) кристалдары екі жақты қарындаштың ұштарына ұқсас болып келеді, яғни табандарында алтыбұрышты пирамидалар жататын алтыбұрышты призма пішіндес болады (5.11-сурет).

Алмаз көбінесе октаэдр түрінде кездеседі (5.12-сурет). Кескінді екіге бөлетін исландық шпат көлбеу параллелепипед пішіндес болады (5.13-сурет).

Кристалдардың сыртқы пішіні — олардың физикалық және химиялық қасиеттерінің көрінісі ғана. Олардың барлығы кристалдардың геометриялық құрылымының ерекшеліктерімен, мысалы кристалдық торда атомдардың симметриялы орналасуы арқылы түсіндіріледі.

5.11-сурет

5.12-сурет

5.13-сурет

Кристалдарға басқа да мысалдар келтіріңдер және олардың пішіндерін көрсетіңдер.

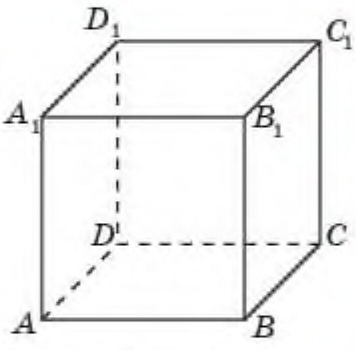
Кристалдармен толығырақ танысу үшін Қазақстан Республикасының геологиялық мұражайы және А.Е. Ферсман атындағы минералогиялық мұражайы сайттарына кіруді ұсынамыз.

Сұрақтар

1. Кеңістіктің қандай нүктелері центрлік симметриялы деп аталады?
2. Кеңістіктегі қандай түрлендіру центрлік симметрия деп аталады?
3. Кеңістіктегі қандай екі фигура центрлік симметриялы деп аталады?
4. Кеңістіктегі қандай фигура центрлік симметриялы деп аталады?
5. Қандай нүктелер түзуге қарағанда симметриялы деп аталады?
6. Кеңістіктегі қандай түрлендіру остік симметрия деп аталады?
7. Кеңістіктегі қандай екі фигура түзуге қарағанда симметриялы деп аталады?
8. Кеңістіктегі қандай фигура түзуге қарағанда симметриялы деп аталады?
9. Кеңістіктегі қандай нүктелер жазықтыққа қарағанда симметриялы деп аталады?
10. Кеңістіктегі қандай түрлендіру айналы симметрия деп аталады?
11. Кеңістіктегі қандай екі фигура айналы симметриялы деп аталады?
12. Кеңістіктегі қандай фигура айналы симметриялы деп аталады?

Есептер

A



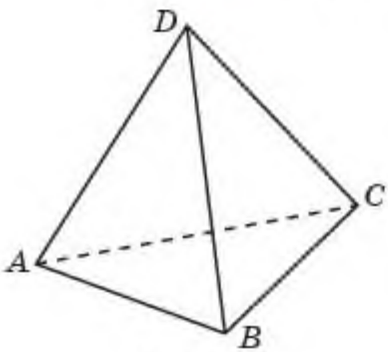
5.14-сурет

5.1. Кеңістіктегі центрлік симметриялы және центрлік симметриялы емес фигураларға мысалдар келтіріңдер.

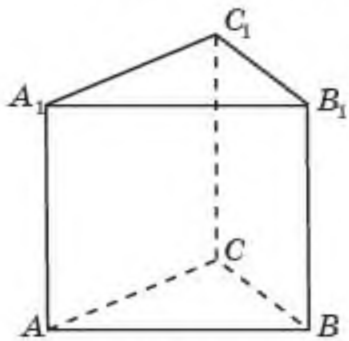
5.2. 5.14-суреттегі кубтың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

5.3. 5.15-суреттегі дұрыс тетраэдрдің: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

5.4. 5.16-суреттегі дұрыс үшбұрышты призманың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

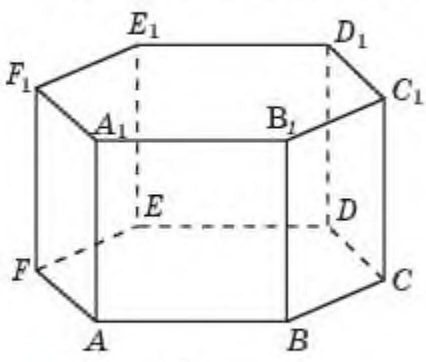


5.15-сурет

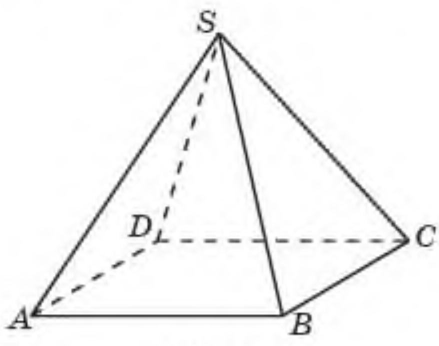


5.16-сурет

5.5. 5.17-суреттегі дұрыс алтыбұрышты призманың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?



5.17-сурет

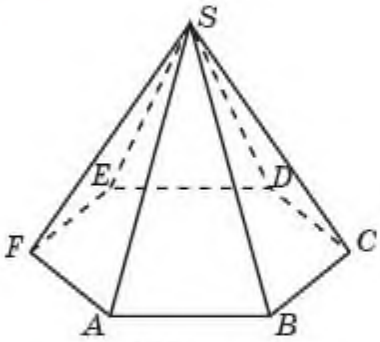


5.18-сурет

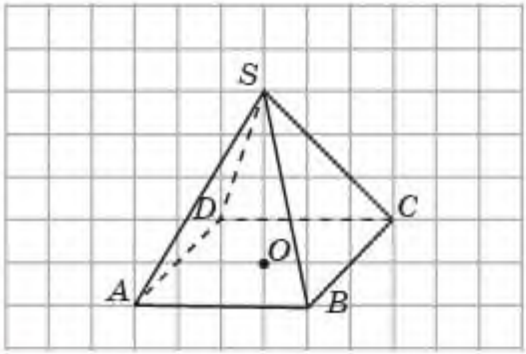
5.6. 5.18-суреттегі дұрыс төртбұрышты пирамиданың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

5.7. 5.19-суреттегі дұрыс алтыбұрышты пирамиданың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

5.8. Торкөзді қағазға 5.20-суреттегі O нүктесіне қарағанда $SABCD$ пирамидасына симметриялы пирамиданы салыңдар.



5.19-сурет



5.20-сурет

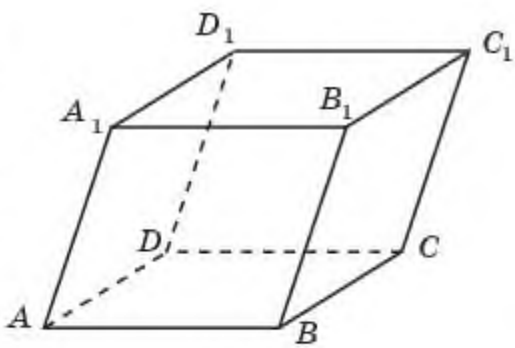
B

5.9. Параллель екі түзуден тұратын фигуралардың симметрия центрін көрсетіңдер.

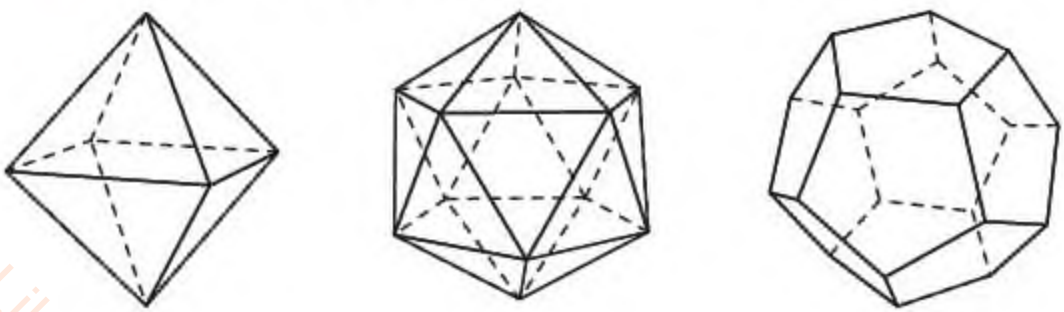
5.10. 1) Қиылысқан екі жазықтықтан; 2) параллель екі жазықтықтан тұратын фигуралардың симметрия центрін көрсетіңдер.

5.11. Көлбеу параллелепипедтің симметрия центрі бола ма (5.21-сурет)?

5.12. 1) Октаэдрдің; 2) икосаэдрдің; 3) додекаэдрдің симметрия центрі бола ма (5.22-сурет)?



5.21-сурет



а) ә) б)

5.22-сурет

5.13. Дұрыс: 1) үшбұрышты призманың (5.16-сурет); 2) алтыбұрышты призманың неше симметрия осі болады (5.17-сурет)?

5.14. Дұрыс: 1) үшбұрышты призманың (5.16-сурет); 2) алтыбұрышты призманың неше симметрия жазықтығы болады (5.17-сурет)?

5.15. Дұрыс: 1) төртбұрышты пирамиданың (5.18-сурет); 2) алтыбұрышты пирамиданың неше симметрия осі болады (5.19-сурет)?

5.16. Дұрыс: 1) төртбұрышты пирамиданың (5.18-сурет); 2) алтыбұрышты пирамиданың неше симметрия жазықтығы болады (5.19-сурет)?

C

5.17. Дұрыс: 1) n-бұрышты призманың; 2) n-бұрышты пирамиданың неше симметрия осі болады?

5.18. Дұрыс: 1) n-бұрышты призманың; 2) n-бұрышты пирамиданың неше симметрия жазықтығы болады?

5.19. 1) Октаэдрдің; 2) икосаэдрдің; 3) додекаэдрдің неше симметрия осі болады (5.22-сурет)?

5.20. 1) Октаэдрдің; 2) икосаэдрдің; 3) додекаэдрдің неше симметрия жазықтығы болады (5.22-сурет)?

5.21. Кеңістіктік фигураның симметрия центрі оған тиісті болмауы мүмкін бе? Мысал келтіріңдер.

5.22. 1) Симметрия центрі бар, бірақ симметрия осі жоқ; 2) симметрия осі бар, бірақ симметрия центрі жоқ кеңістіктегі фигураларға мысал келтіріңдер.

5.23. 1) Симметрия центрі бар, бірақ симметрия жазықтығы жоқ; 2) симметрия осі бар, бірақ симметрия жазықтығы жоқ кеңістіктегі фигураларға мысал келтіріңдер.

5.24. 1) Симметрия жазықтығы бар, бірақ симметрия центрі жоқ; 2) симметрия жазықтығы бар, бірақ симметрия осі жоқ кеңістіктегі фигураларға мысал келтіріңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Дөңес көпжақтың әрбір төбесінен үш қыры шығады. Егер оның 12 төбесі бар болса, онда оның неше қыры болады:

   A) 12; B) 16;
   C) 18; D) 24?

2. Дөңес көпжақтың әрбір төбесінде үш үшбұрышты жақтары түйіседі. Егер оның 4 жағы бар болса, онда оның неше төбесі болады:

   A) 4; B) 6;
   C) 9; D) 12?

3. Дөңес көпжақтың жақтары — үшбұрыштар. Егер оның 12 қыры бар болса, онда оның неше жағы болады:

A) 6; B) 8;
C) 9; D) 12?

4. Дөңес көпжақтың 10 төбесі мен 15 қыры бар. Оның неше жағы болады:

A) 5; B) 7;
C) 9; D) 12?

5. Дөңес көпжақтың 6 төбесі мен 5 жағы бар. Оның неше қыры болады:

A) 5; B) 7;
C) 9; D) 12?

6. Дөңес көпжақтың 12 қыры мен 8 жағы бар. Оның неше төбесі болады:

A) 6; B) 7;
C) 8; D) 9?

7. Икосаэдрдің неше жағы болады:

A) 8; B) 12;
C) 16; D) 20?

8. Додекаэдрдің неше төбесі болады:

A) 8; B) 12;
C) 16; D) 20?

9. Дұрыс тетраэдрдің жақтарының орталары қандай көпжақтың төбелері болады:

A) тетраэдр; B) куб;
C) октаэдр; D) икосаэдр?

10. Кубтың жақтарының орталары қандай көпжақтың төбелері болады:

A) тетраэдр; B) куб;
C) октаэдр; D) икосаэдр?

11. Додекаэдрдің жазбасында неше бесбұрыш болады:

A) 8; B) 12;
C) 16; D) 20?

12. Дұрыс тетраэдрдің қырлары 2 см-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар:

A) $\sqrt{3}$ см^2; B) $2\sqrt{3}$ см^2;
C) $3\sqrt{3}$ см^2; D) $4\sqrt{3}$ см^2.

13. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 1 см, 2 см және 3 см. Параллелепипедтің бетінің ауданын табыңдар:

A) 11 см^2; B) 18 см^2;
C) 22 см^2; D) 28 см^2.

14. Дұрыс үшбұрышты призманың бүйір қырлары 1 см-ге, ал табанының қабырғалары 2 см-ге тең. Призманың бетінің ауданын табыңдар:

A) $3 + \sqrt{3}$ см^2; B) $3 + 2\sqrt{3}$ см^2;
C) $6 + \sqrt{3}$ см^2; D) $6 + 2\sqrt{3}$ см^2.

15. Кубтың неше симметрия осі болады:

A) 3; B) 6;
C) 8; D) 9?

16. Дұрыс бесбұрышты призманың неше симметрия осі болады:

A) 5; B) 6;
C) 8; D) 9?

17. Дұрыс тетраэдрдің неше симметрия жазықтығы болады:

A) 3; B) 6;
C) 8; D) 9?

18. Дұрыс алтыбұрышты призманың неше симметрия жазықтығы болады:

A) 3; B) 5;
C) 7; D) 9?

19. Қайнатпалы тұздың кристалдары қандай көпжақтың пішінін береді:

A) куб; B) тетраэдр;
C) призма; D) октаэдр?

20. Алмаз кристалдары көбінесе қандай көпжақтың пішінін береді:

A) куб; B) тетраэдр;
C) призма; D) октаэдр?

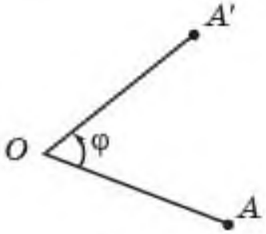
II тарау

АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

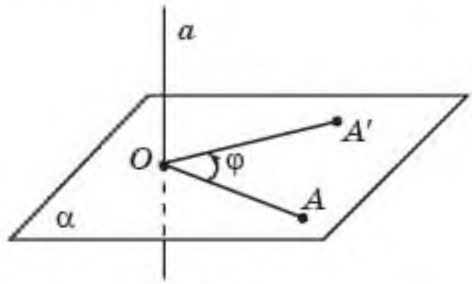
§ 6. Цилиндр және оның элементтері. Цилиндрдің жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

Кеңістіктегі фигуралардың ішінде көпжақтардан басқа *айналу денелері* деп аталатын фигуралар ерекше орын алады.

Егер $OA' = OA$ және $\angle A'OA = \varphi$ болса, онда жазықтықтағы A' нүктесі A нүктесін O нүктесінен φ бұрышқа айналдыра бұру кезінде пайда болатынын еске салайық (6.1-сурет).



6.1-сурет



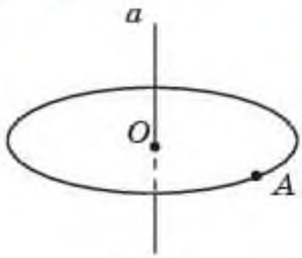
6.2-сурет

Кеңістікте a түзуі және осы түзудің бойында жатпайтын A нүктесі берілсін (6.2-сурет). A нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр α жазықтығын жүргіземіз және a түзуі мен α жазықтығының қиылысу нүктесін O деп белгілейік. Егер α жазықтығында A' нүктесі A нүктесін O нүктесінен айналдыра φ бұрышқа бұру кезінде пайда болса, онда кеңістіктегі A' нүктесі A нүктесін O нүктесінен айналдыра φ бұрышқа бұру арқылы алынды деп айтады.

a түзуінің нүктелері орнында қалып, ал қалған барлық нүктелер осы түзуден айнала бірдей бағытта белгілі φ бұрышқа бұрылатын кеңістіктегі түрлендіру a түзуінен айналдыра *бұру* немесе *айналу* деп аталады. a түзуі *айналу осі* деп аталады.

Егер кеңістіктегі Φ фигурасының барлық нүктелері F фигурасының нүктелерін a осінен айналдыра бірдей бағытта бұру кезінде пайда болса, онда Φ фигурасы F фигурасының a осінен айналуы арқылы алынды деп айтады. Φ фигурасы *айналу денесі* деп аталады.

Мысалы, a түзуінде жатпайтын A нүктесінің осы түзуді айналуы кезінде центрі O нүктесі болатын шеңбер пайда болады. O нүктесі — A нүктесі арқылы өтетін және a түзуіне перпендикуляр жазықтықтың осы a түзуімен қиылысу нүктесі болады (6.3-сурет).

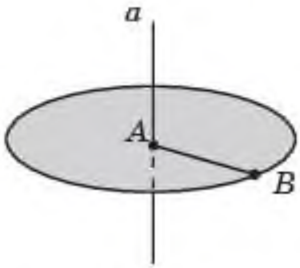


6.3-сурет

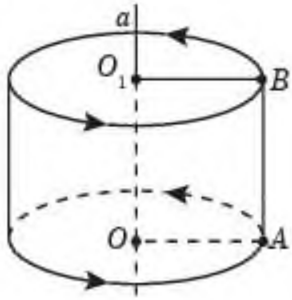
Кесіндінің оған перпендикуляр және оның бір ұшы арқылы өтетін түзуді айналуы кезінде радиусы осы кесіндіге тең дөңгелек пайда болады (6.4-сурет).

Цилиндр деп тіктөртбұрышты оның бір қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда алынған фигураны (денені) айтады.

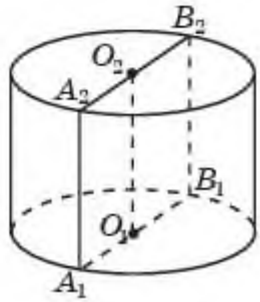
6.5-суретте AOO_1B тіктөртбұрышын OO_1 қабырғасы жатқан a түзуінен айналдырғанда шыққан цилиндр кескінделген. Тіктөртбұрыштың OO_1 қабырғасы *цилиндрдің осі* деп аталады.



6.4-сурет



6.5-сурет



6.6-сурет

Тіктөртбұрыштың OO_1 қабырғасына перпендикуляр болатын OA және O_1B қабырғаларының айналуы кезінде алынған дөңгелектер *цилиндрдің табандары*, ал олардың радиусы *цилиндрдің радиусы* деп аталады.

Тіктөртбұрыштың OO_1 қабырғасына параллель болатын AB қабырғасының айналуы кезінде алынған бет *цилиндрдің бүйір беті* деп аталады.

Цилиндрдің толық беті табандары мен бүйір бетінен тұрады.

Тіктөртбұрыштың OO_1 қабырғасына параллель болатын AB қабырғасының айналуы кезінде алынатын кесінділер *цилиндрдің жасаушысы* деп аталады.

Цилиндрдің табан жазықтықтарының арақашықтығын *цилиндрдің биіктігі* деп атайды.

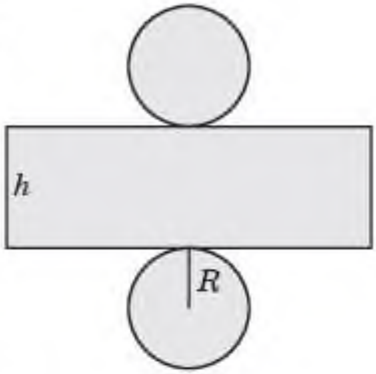
Цилиндрдің биіктігі оның жасаушысының ұзындығына тең болатынын дәлелдеңдер.

Цилиндрдің осі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *цилиндрдің осьтік қимасы* деп аталады (6.6-сурет).

Цилиндрдің осьтік қимасы тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

Цилиндрді осы тіктөртбұрышты оның қарама-қарсы екі қабырғасының орталары арқылы өтетін түзуден айналдыру арқылы алуға болады.

Цилиндрді тіктөртбұрыштан басқа жазық фигураларды айналдыру арқылы алуға бола ма?



6.7-сурет

Егер цилиндрдің бүйір бетін жасаушысы бойымен кесіп жазықтыққа жазатын болсақ және оған табандарын қоссақ, онда *цилиндрдің жазбасы* деп аталатын фигура пайда болады (6.7-сурет).

Цилиндрдің толық бетінің ауданы деп оның жазбасының ауданын айтады.

Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің жазбасының ауданын айтады.

Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығын оның биіктігіне көбейткенге тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

$$S_{\text{бүйір}} = 2\pi Rh.$$

мұндағы R — цилиндрдің табанының радиусы, h — биіктігі.

Цилиндрдің толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен екі табанының аудандарының қосындысына тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

$$S_{\text{толық}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R).$$

мұндағы R — цилиндрдің табанының радиусы, h — биіктігі.

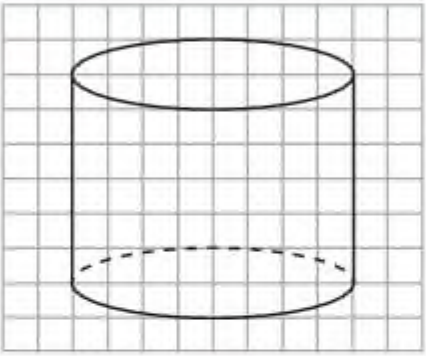
Сұрақтар

1. Кеңістіктегі қандай түрлендіру түзуден айналдыра бұру деп аталады?
2. Қандай фигура айналу фигурасы деп аталады?
3. Қандай фигура цилиндр деп аталады?
4. Цилиндрдің осі дегеніміз не?
5. Цилиндрдің табандары дегеніміз не?
6. Қандай фигура цилиндрдің бүйір беті деп аталады?
7. Қандай кесінділер цилиндрдің жасаушылары деп аталады?
8. Цилиндрдің биіктігі дегеніміз не?
9. Цилиндрдің осьтік қимасы дегеніміз не?
10. Цилиндрдің жазбасы дегеніміз не?
11. Цилиндрдің бетінің ауданы дегеніміз не?
12. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?
13. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.
14. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

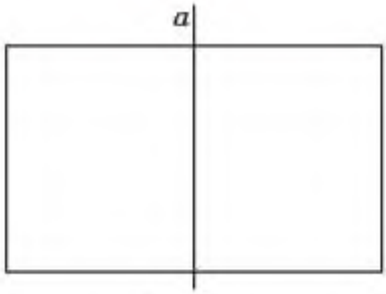
Есептер

A

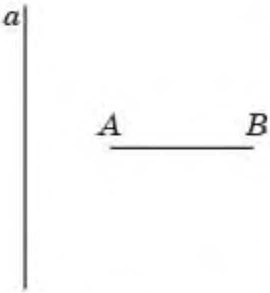
6.1. Торкөз қағазға 6.8-суреттегіге ұқсас цилиндрді салыңдар. Цилиндрдің осьтік қимасын кескіндеңдер.



6.8-сурет



6.9-сурет



6.10-сурет

6.2. Цилиндрдің қанша жасаушысы болады?

6.3. Цилиндрдің табандарына параллель жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?

6.4. Тіктөртбұрышты оның қарама-қарсы жатқан екі қабырғасының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (6.9-сурет)?

6.5. AB кесіндісін осы кесіндімен бір жазықтықта жатқан, ортақ нүктелері болмайтын және оған перпендикуляр түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (6.10-сурет)?

6.6. Цилиндрдің биіктігі 3 см-ге, ал табанының радиусы 2 см-ге тең. Оның осьтік қимасының диагоналін табыңдар.

6.7. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы — қабырғасы 1 см-ге тең квадрат. Цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.

6.8. Цилиндрдің табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Оның: 1) бүйір бетінің; 2) толық бетінің ауданын табыңдар.

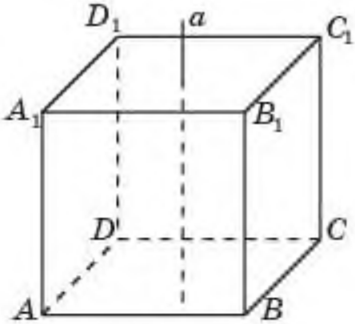
B

6.9. Торкөз қағазға 6.8-суреттегіге ұқсас цилиндрді салыңдар. Осы цилиндрдің табандарына параллель жазықтықпен қимасын кескіндеңдер.

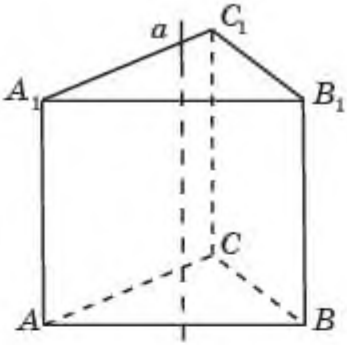
6.10. Торкөз қағазға 6.8-суреттегіге ұқсас цилиндрді салыңдар. Осы цилиндрдің осіне параллель жазықтықпен қимасын кескіндеңдер. Ол қандай фигура болады?

6.11. Цилиндрдің: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

6.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубын: 1) AA_1 түзуінен; 2) қарама-қарсы жақтарының центрлерін қосатын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (6.11-сурет)?



6.11-сурет



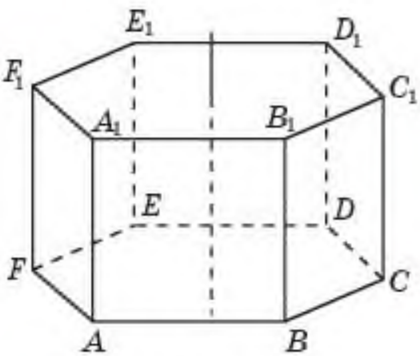
6.12-сурет

6.13. Бірлік кубты: 1) AA_1 түзуінен; 2) қарама-қарсы жақтарының центрлерін қосатын түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

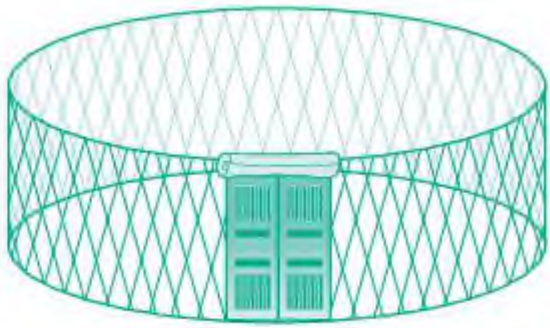
6.14. Дұрыс үшбұрышты призманы оның: 1) бүйір қыры арқылы өтетін түзуден; 2) табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (6.12-сурет)?

6.15. Дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы оның: 1) бүйір қыры арқылы өтетін түзуден; 2) табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар (6.12-сурет).

6.16. Дұрыс алтыбұрышты призманы оның: 1) бүйір қыры жатқан түзуден; 2) табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (6.13-сурет)?



6.13-сурет



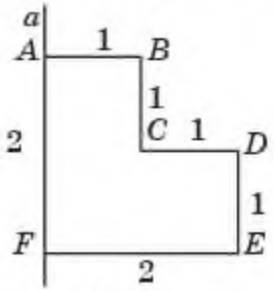
6.14-сурет

6.17. Дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы оның: 1) бүйір қыры жатқан түзуден; 2) табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар (6.13-сурет).

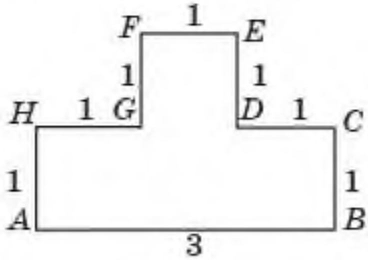
6.18. Киіз үй — көшпенділердің ежелден келе жатқан тұрғын үйі (6.14-сурет). Биіктігі 2 м, ал диаметрі 5 м болатын киіз үйдің керегесінің бетінің ауданын табыңдар.

C

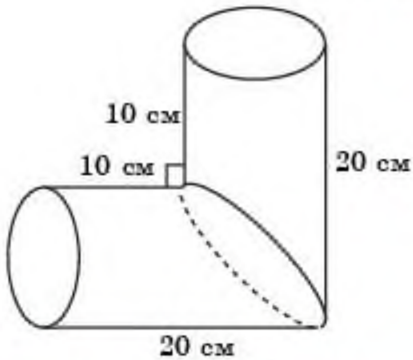
6.19. 6.15-суреттегі көршілес қабырғалары тік бұрыш жасайтын *ABCDEF* көпбұрышын *AF* түзуінен айналдырғанда пайда болған фигура бетінің ауданын табыңдар.



6.15-сурет



6.16-сурет



6.17-сурет

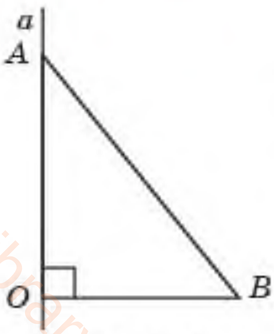
6.20. 6.16-суреттегі көршілес қабырғалары тік бұрыш жасайтын *ABCDEFGH* көпбұрышын *AB* түзуінен айналдырғанда пайда болған фигура бетінің ауданын табыңдар.

6.21. 6.17-суреттегі 90° бұрыш жасайтын цилиндрлердің екі тең бөлігінен тұратын фигура бетінің ауданын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

6.22. Теңбүйірлі үшбұрыштың және дөңгелек сектордың анықтамаларын қайталаңдар.

§ 7. Конус және оның элементтері. Конустың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары



7.1-сурет

Конус деп тікбұрышты үшбұрышты оның бір катеті жатқан түзуден айналдыру арқылы алынған фигураны (денені) айтады.

Бізге *ABO* тікбұрышты үшбұрышы берілсін (7.1-сурет). Егер осы тікбұрышты үшбұрышты оның *AO* катеті арқылы өтетін *a* түзуінен айналдырсақ, нәтижесінде айналу денесі — конусты аламыз.

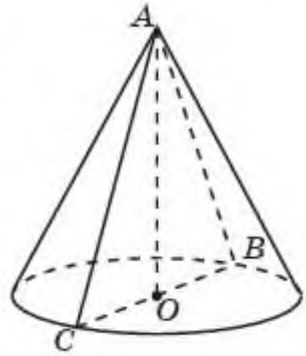
Тікбұрышты үшбұрыштың *AO* катеті *конустың осі* деп аталады.

AO катетіне перпендикуляр болатын тікбұрышты үшбұрыштың *BO* қабырғасының айналуы кезінде алынған дөңгелек *конустың табаны*, ал оның радиусы *конустың радиусы* деп аталады.

Тікбұрышты үшбұрыштың *AB* гипотенузасының айналуы кезінде пайда болатын бет *конустың бүйір беті* деп аталады.

Конустың толық беті табаны мен бүйір бетінен тұрады.

Тікбұрышты үшбұрыштың *AB* гипотенузасының *AO* катетінен айналуы кезінде алынатын кесінділер *конустың жасаушысы* деп аталады.



7.2-сурет

Конустың осі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *конустың осьтік қимасы* деп аталады (7.2-сурет).

Конустың осьтік қимасы — теңбүйірлі үшбұрыш, оның табаны конустың табанының диаметрі болатынын дәлелдеңдер.

Конусты осы теңбүйірлі үшбұрышты табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдыру арқылы алуға болады. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына қарсы жатқан төбесі *конустың төбесі* деп аталады.

Конустың төбесінен оның табан жазықтығына түсірілген перпендикулярдың ұзындығы *конустың биіктігі* деп аталады.

Қалай ойлайсыңдар, конусты тікбұрышты емес және теңбүйірлі емес үшбұрышты айналдыру арқылы алуға бола ма?

Егер конустың бүйір бетін жасаушысы бойымен кесіп жазықтыққа жазатын болсақ және оған табанын қоссақ, онда *конустың жазбасы* деп аталатын фигура пайда болады (7.3-сурет).

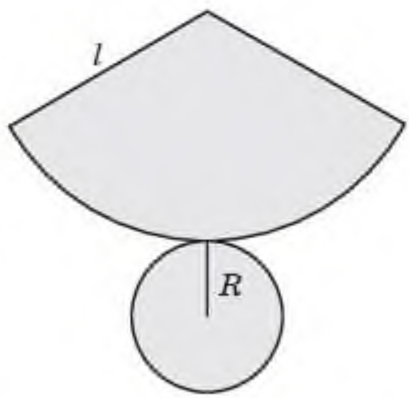
Конустың толық бетінің ауданы деп оның жазбасының ауданын айтады.

Конустың бүйір бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің жазбасының ауданын айтады.

Конустың бүйір бетінің ауданы оның табанындағы шеңберінің ұзындығы мен жасаушысының көбейтіндісінің жартысына тең болады, яғни мынадай формуламен анықталады:

$$S_{\text{бүйір}} = \pi R l.$$

мұндағы R — конустың табанының радиусы, l — жасаушысы.



7.3-сурет

Конустың толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен табанының аудандарының қосындысына тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

$$S_{\text{толық}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$$

мұндағы R — конустың табанының радиусы, l — жасаушысы.

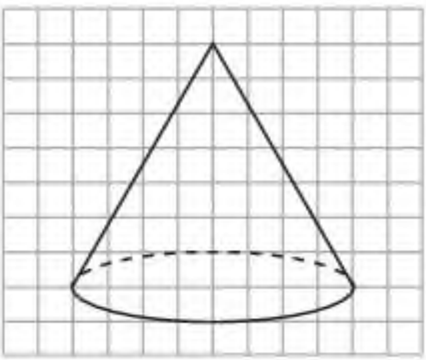
Сұрақтар

1. Қандай фигура конус деп аталады?
2. Конустың осі дегеніміз не?
3. Конустың табаны дегеніміз не?
4. Қандай фигура конустың бүйір беті деп аталады?
5. Қандай кесінділер конустың жасаушылары деп аталады?
6. Конустың осьтік қимасы дегеніміз не?
7. Конустың төбесі дегеніміз не?
8. Конустың биіктігі дегеніміз не?
9. Қандай фигура конустың жазбасы деп аталады?
10. Конустың бетінің ауданы дегеніміз не?
11. Конустың бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?
12. Конустың бүйір бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.
13. Конустың толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

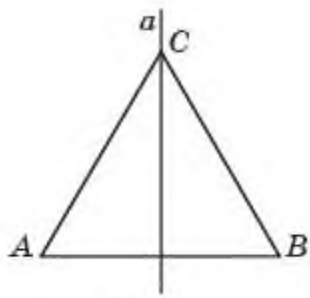
Есептер

A

7.1. Торкөз қағазға 7.4-суреттегіге ұқсас конусты салыңдар. Конустың осьтік қимасын кескіндеңдер.



7.4-сурет



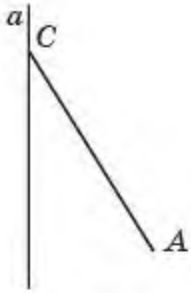
7.5-сурет

7.2. Конустың қанша жасаушысы болады?

7.3. Конустың табанына параллель жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?

7.4. Теңбүйірлі үшбұрышты оның табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (7.5-сурет)?

7.5. AC кесіндісін C нүктесі арқылы өтетін және оған перпендикуляр емес түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (7.6-сурет)?



7.6-сурет

7.7-сурет

7.6. Конустың табанының радиусы 3 см-ге, ал биіктігі 4 см-ге тең. Конустың жасаушысын табыңдар.

7.7. Конустың осьтік қимасы — қабырғасы 10 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш. Конустың: 1) табанының радиусын; 2) биіктігін табыңдар.

7.8. Конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 30° бұрыш жасап көлбейді. Конустың биіктігін табыңдар.

7.9. Конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 60° бұрыш жасап көлбейді. Конустың табанының радиусын табыңдар.

7.10. Конустың табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Конустың бетінің ауданын табыңдар.

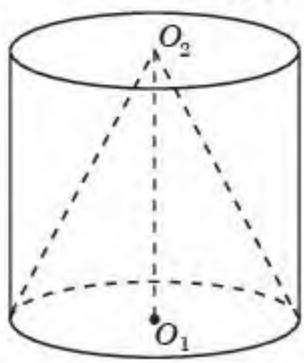
7.11. 7.7-суреттегі дөңгелектің бөлігі конустың бүйір бетінің жазбасы бола ма?

B

7.12. Торкөз қағазға 7.4-суреттегіге ұқсас конусты салыңдар. Осы конустың осіне параллель жазықтықпен қимасын кескіндеңдер.

7.13. Конустың табанының радиусы 1 см-ге тең. Конустың биіктігінің ортасы арқылы өтетін және табан жазықтығына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

7.14. Цилиндрдің табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Табаны цилиндрдің бір табаны, ал төбесі цилиндрдің екінші табанының центрі болатын конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар (7.8-сурет).

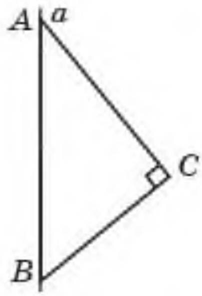


7.8-сурет

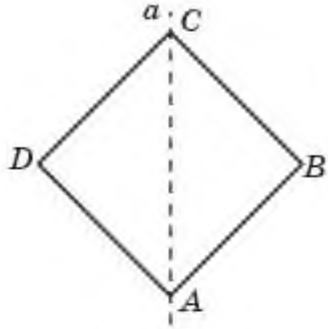
7.15. Конустың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

7.16. Тікбұрышты үшбұрышты оның гипотенузасы жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (7.9-сурет)?

7.17. Бірлік квадратты оның диагоналі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (7.10-сурет)? Фигураның бетінің ауданын табыңдар.



7.9-сурет

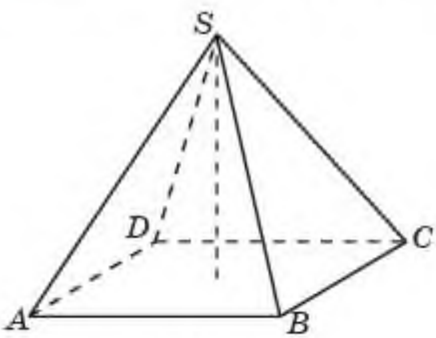


7.10-сурет

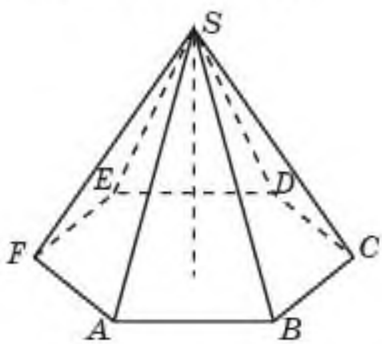
7.18. Дұрыс төртбұрышты пирамиданы оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (7.11-сурет)?

7.19. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамиданы оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда пайда болатын конустың бетінің ауданын табыңдар (7.11-сурет).

7.20. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданы оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (7.12-сурет)?



7.11-сурет



7.12-сурет

7.21. Табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең дұрыс алтыбұрышты пирамиданы оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда пайда болатын конустың бетінің ауданын табыңдар (7.12-сурет).

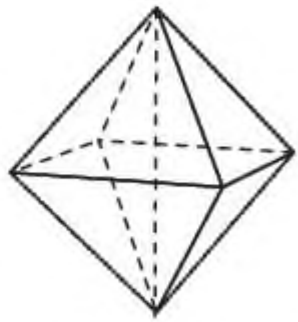
C

7.22. Октаэдрді оның қарама-қарсы жатқан төбелерін қосатын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (7.13-сурет)?

Октаэдрдің қыры 1 см-ге тең деп алып, пайда болған фигура бетінің ауданын табыңдар.

7.23. Конустың бүйір бетінің жазбасы — радиусы 1 см-ге тең жарты дөңгелек. Конус табанының радиусын табыңдар.

7.24. Конус табанының радиусы 1 см-ге, жасаушысы 3 см-ге тең. Конустың бүйір бетінің жазбасының центрлік бұрышын табыңдар.



7.13-сурет

7.25. Конус пішіндес жиналған шөп үйіндісінің төбесін темір қаңылтырмен жабу қажет. Оның биіктігі 2 м-ге, ал табанының диаметрі 6 м-ге тең. Егер барлық қаңылтыр бетінің 10%-ы оларды жабыстыруға кететін болса, онда төбені жабу үшін $0,7 \times 1,4$ өлшемді қанша қаңылтыр қажет болады? ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

7.26. Құрылыс алаңындағы конус пішіндес үйінді құмның табаны шеңберінің ұзындығын метрлік таспамен өлшегенде 21,6 м болды (7.14-сурет). Метрлік таспаны үйіндінің төбесі арқылы асыра лақтырып өлшегенде оның екі жасаушысының ұзындығы 7,8 м екені анықталды. Үйінді құмның бетінің ауданын табыңдар ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

7.14-сурет

7.27. Мөлдір туған күніне орай қағаздан биіктігі 8 см, ал табанының радиусы 6 см болатын конустың бүйір беті тәріздес 8 дана бас киім дайындамақшы болды. Оған бас киімдерді дайындау үшін қанша қағаз (см^2-мен) қажет екенін табыңдар ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

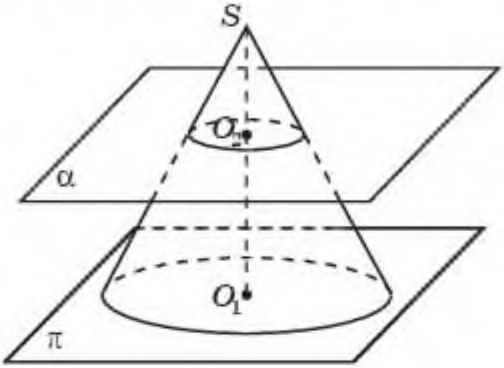
7.28. Дөңгелек сақинаның анықтамасын және оның ауданын табу формуласын қайталаңдар.

§ 8. Қиық конус және оның элементтері. Қиық конус бетінің ауданы

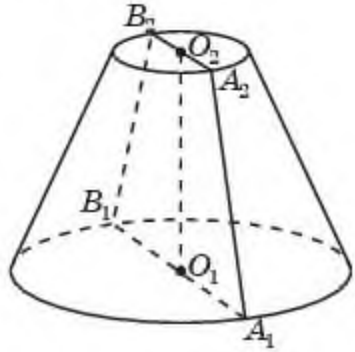
Егер конусты табан жазықтығына параллель жазықтықпен қиып өтсе, онда конустың осы жазықтықпен табан жазықтығының арасындағы шектелген бөлігі *қиық конус* деп аталады (8.1-сурет).

Конустың табан жазықтығына параллель жазықтықпен қимасы да *қиық конустың табаны* деп аталады. Сонымен, қиық конусты шектейтін дөңгелектерді оның *табандары* деп атайды.

Конустың осі *қиық конустың осі* деп аталады.



8.1-сурет



8.2-сурет

Қиық конустың табандарының арасында шектелген конустың бүйір бетінің бөлігі *қиық конустың бүйір беті* деп аталады.

Қиық конустың табандарының арасында шектелген конустың жасаушыларының кесінділері *қиық конустың жасаушылары* деп аталады.

Қиық конустың табан жазықтықтарының арасындағы қашықтық *қиық конустың биіктігі* деп аталады.

Қиық конустың осі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *қиық конустың осьтік қимасы* деп аталады (8.2-сурет).

Қиық конустың осьтік қимасы теңбүйірлі трапеция болатынын дәлелдеңдер.

Қиық конусты осы теңбүйірлі трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдыру арқылы алуға болады.

Қиық конусты теңбүйірлі емес трапецияны айналдыру арқылы алуға бола ма?

Егер қиық конустың бүйір бетін жасаушысы бойымен кесіп жазықтыққа жазатын болсақ және оған табандарын қоссақ, онда қиық конустың жазбасы деп аталатын фигура пайда болады (8.3-сурет).

Қиық конустың бетінің ауданы деп оның жазбасының ауданын айтады.

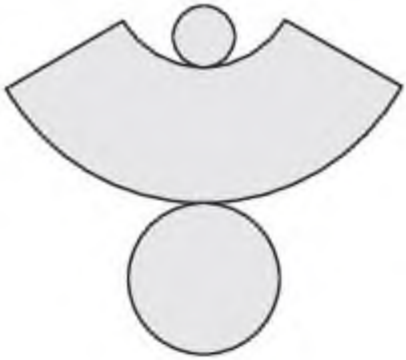
Қиық конустың бүйір бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің жазбасының ауданын айтады.

Егер қиық конустың табандарының радиустары R және r, ал жасаушысы l-ға тең болса, онда қиық конустың бүйір бетінің ауданы мынадай формуламен анықталады:

$$S_{\text{бүй}} = \pi(R + r)l.$$

Қиық конустың толық бетінің ауданын алу үшін оның бүйір бетінің ауданына табандарының аудандарын қосу керек болады:

$$S_{\text{толық}} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$



8.3-сурет

Сұрақтар

1. Қандай фигура қиық конус деп аталады?
2. Қиық конустың табандары дегеніміз не?
3. Қиық конустың биіктігі дегеніміз не?
4. Қиық конустың осі дегеніміз не?
5. Қиық конустың осьтік қимасы дегеніміз не?
6. Қандай фигура қиық конустың жазбасы деп аталады?
7. Қиық конустың бетінің ауданы дегеніміз не?
8. Қиық конустың бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?
9. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.
10. Қиық конустың толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

Есептер

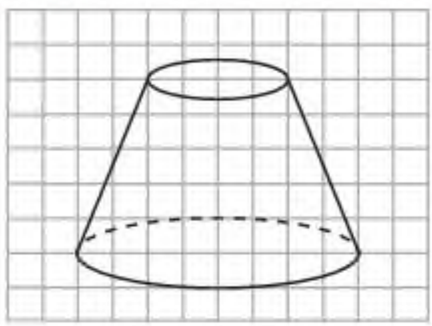
A

8.1. Торкөз қағазға 8.4-суреттегіге ұқсас қиық конусты салыңдар. Қиық конустың осьтік қимасын кескіндеңдер.

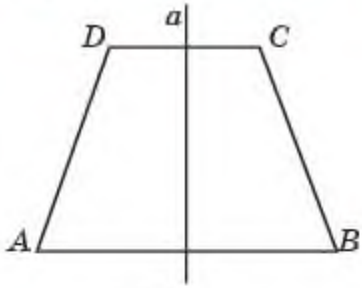
8.2. Қиық конустың қанша жасаушысы болады?

8.3. Қиық конустың табанына параллель жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?

8.4. Теңбүйірлі трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (8.5-сурет)?



8.4-сурет

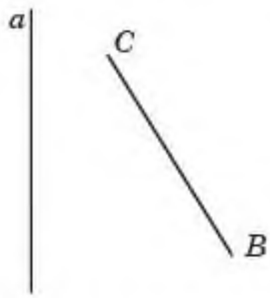


8.5-сурет

8.5. *BC* кесіндісін осы кесіндімен бір жазықтықта жататын, ортақ нүктесі болмайтын және оған параллель де, перпендикуляр да емес түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (8.6-сурет)?

8.6. Қиық конустың табандарының радиустары 6 см және 2 см, ал биіктігі 3 см-ге тең. Қиық конустың жасаушысын табыңдар.

8.7. Қиық конустың табандарының радиустары 6 см және 2 см, ал жасаушысы 5 см-ге тең. Қиық конустың бетінің ауданын табыңдар.



8.6-сурет


8.7-сурет

8.8. 8.7-суреттегі дөңгелектің бөлігі қиық конустың бүйір бетінің жазбасы бола ма?

B

8.9. Торкөз қағазға 8.4-суреттегіге ұқсас қиық конусты салыңдар. Осы конустың осіне параллель болатын және табандарымен қиылысатын жазықтықпен қимасын кескіндеңдер.

8.10. Қиық конустың табандарының радиустары 2 см және 4 см. Қиық конустың биіктігінің ортасы арқылы табан жазықтығына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

8.11. Қиық конустың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

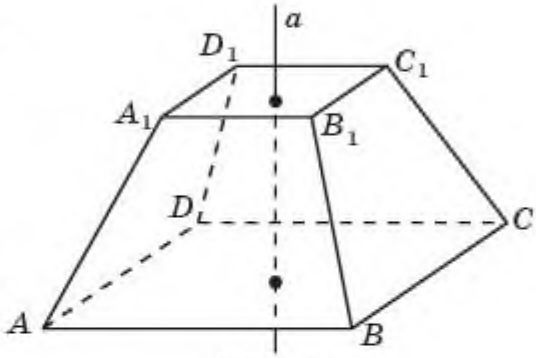
8.12. Қиық конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 30° бұрыш жасап көлбейді. Қиық конустың биіктігін табыңдар.

8.13. Қиық конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 60° бұрыш жасап көлбейді. Қиық конустың кіші табанының радиусы 1 см-ге тең болса, үлкен табанының радиусын табыңдар.

8.14. Теңбүйірлі трапецияның табандары 1 см және 2 см, ал бүйір қабырғалары 2 см. Осы трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның бетінің ауданын табыңдар.

8.15. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданы оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (8.8-сурет)?

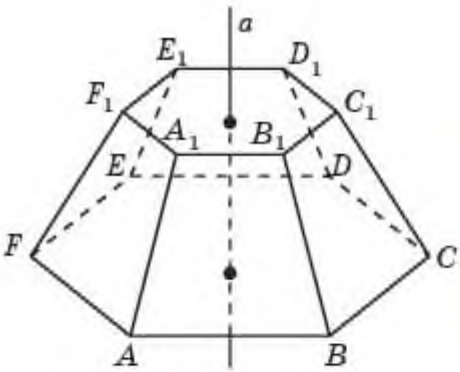
8.16. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 4 см және 2 см, ал бүйір қырлары 3 см-ге тең. Осы пирамиданы оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның бетінің ауданын табыңдар (8.8-сурет)?



8.8-сурет

8.17. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданы оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (8.9-сурет)?

8.18. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 2 см және 1 см, ал бүйір қырлары 3 см-ге тең. Осы пирамиданы оның табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның толық бетінің ауданын табыңдар (8.9-сурет).



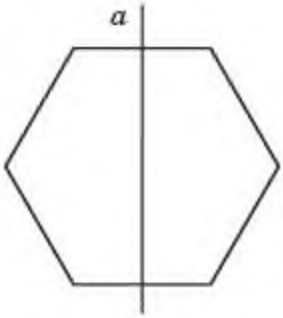
8.9-сурет

8.10-сурет

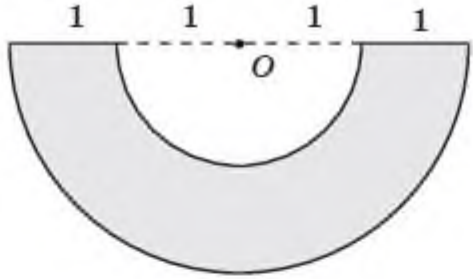
8.19. Қиық конус пішіндес киіз үй түндігі табандарының диаметрлері 5 м және 1 м, ал биіктігі 2 м-ге тең (8.10-сурет). Киіз үй күмбезінің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

C

8.20. Дұрыс алтыбұрышты оның қарама-қарсы жатқан қабырғаларының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (8.11-сурет)? Дұрыс алтыбұрыштың қабырғалары 1 см-ге тең болса, пайда болған фигура бетінің ауданын табыңдар.



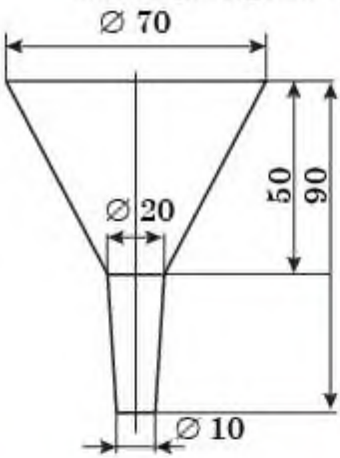
8.11-сурет



8.12-сурет

8.21. 8.12-суретте шеңберлерінің радиустары 1 см және 2 см болатын дөңгелек сақинаның жартысы — қиық конустың бүйір бетінің жазбасы кескінделген. Қиық конус табандарының радиустарын табыңдар.

8.22. Қиық конус пішіндес шелектің іші-сыртын бояу қажет. Оның табандарының диаметрлері 30 см және 20 см, ал жасаушысы 30 см-ге тең. Егер бояудың орташа шығыны 1 м^2-ге 300 г болса, онда бұл жұмысты орындау үшін қанша бояу қажет болады?



8.13-сурет

8.23. 8.13-суретте темір қаңылтырдан жасалған сұйық құйғыштың өлшемдері миллиметрмен көрсетілген. Егер барлық қаңылтыр бетінің 10%-ы оларды жабыстыруға кететін болса, онда құйғышты дайындау үшін қанша квадрат дециметр қаңылтыр қажет болады?

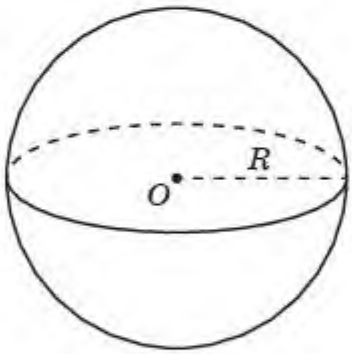
8.24. Қиық конус пішіндес шелекті темір қаңылтырдан жасау қажет. Оның табандарының диаметрлері 28 см және 20 см, ал биіктігі 24 см-ге тең. Жабыстыруға кететін шығынды есепке алмағанда шелектің бүйір беті жазбасының өлшемдері қандай болады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

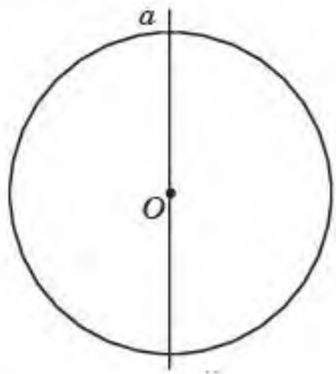
8.25. Шеңбердің, дөңгелектің және олардың элементтерінің анықтамаларын, шеңберге жүргізілген жанаманың анықтамасын және шеңбер мен түзудің өзара орналасуы жағдайларын қайталаңдар.

Сфера және шар — жазықтықтағы сәйкесінше шеңбер мен дөңгелектің кеңістіктік аналогтары болып табылады.

Берілген нүктеден белгілі қашықтықта орналасқан кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын фигура *сфера* деп аталады (9.1-сурет).



9.1-сурет



9.2-сурет

Берілген нүкте *сфераның центрі*, берілген қашықтық *сфераның радиусы* деп аталады.

Сфераның центрін оның бойында жатқан қандай да бір нүктесімен қосатын кесіндіні *сфераның радиусы* деп атайды.

Сонымен, центрі O нүктесі және радиусы R болатын сфера осы O нүктесінен арақашықтығы R-ге тең кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын геометриялық фигураны құрайды.

Сфераның бойында жатқан кез келген екі нүктені қосатын кесінді *сфераның хордасы* деп аталады. Сфераның центрі арқылы өтетін хорда осы *сфераның диаметрі* болады.

Сфераның центрі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *үлкен шеңбері* болады.

Сфераны осы шеңберді оның диаметрі жатқан түзуден айналдыру арқылы алуға болады (9.2-сурет).

Берілген нүктеден белгілі қашықтықтан аспайтын кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын фигура *шар* деп аталады.

Берілген нүкте *шардың центрі*, ал берілген қашықтық *шардың радиусы* деп аталады.

Шардың центрін оның бетінде жатқан қандай да бір нүктесімен қосатын кесіндіні де *шардың радиусы* деп атайды.

Сонымен, центрі O нүктесі және радиусы R болатын шар осы O нүктесінен арақашықтығы R-ден аспайтын кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын геометриялық фигураны құрайды.

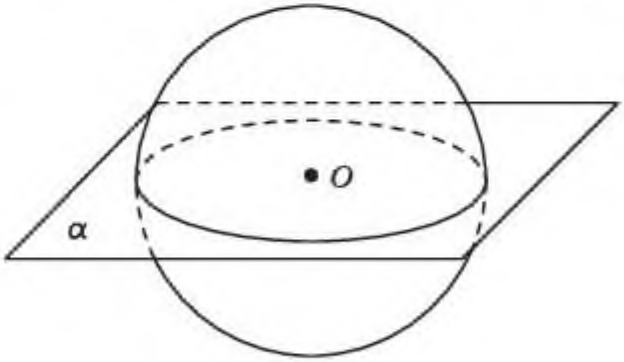
Шардың бетінде жатқан кез келген екі нүктені қосатын кесінді осы *шардың хордасы* деп аталады. Шардың центрі арқылы өтетін хорда осы *шардың диаметрі*, шардың центрі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *үлкен дөңгелегі* болады.

Шарды осы дөңгелекті оның диаметрі жатқан түзуден айналдыру арқылы алуға болады.

Берілген шардың центрімен және радиусымен бірдей болатын сфера осы *шардың беті* деп аталады.

Сфера мен жазықтықтың өзара орналасуы жағдайларын қарастырайық.

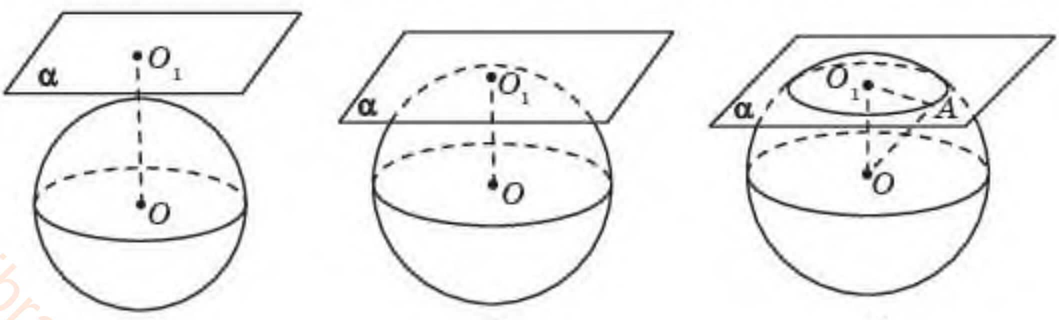
Егер α жазықтығы сфераның центрі арқылы өтсе, онда сфераның осы жазықтықпен қимасында шеңбер пайда болады (9.3-сурет).



9.3-сурет

Егер α жазықтығы сфераның центрі арқылы өтпесе, онда осы центрден α жазықтығына OO_1 перпендикулярын түсіреміз. Бұл келесі жағдайларда орындалуы мүмкін.

1-жағдай. Егер OO_1 перпендикулярының ұзындығы сфераның R радиусынан үлкен болса, онда O нүктесінен α жазықтығының кез келген нүктесіне дейінгі қашықтық R-ден үлкен болады. Демек, бұл жағдайда сфера мен жазықтықтың ортақ нүктелері болмайды (9.4, а-сурет).



9.4-сурет

2-жағдай. Егер OO_1 перпендикулярдың ұзындығы сфераның R радиусына тең болса, онда сфера мен жазықтықтың тек бір ғана ортақ нүктесі — O_1 нүктесі бар болады (9.4, ә-сурет).

Сферамен бір ғана ортақ нүктесі бар жазықтық *сфераға жанама жазықтық* деп аталады. Мұндағы сфера мен жазықтықтың ортақ нүктесі *жанасу нүктесі* деп аталады. Сонымен бірге осы нүктеде сфера жазықтықты *жанайды* немесе жазықтық сферамен *жанасады* деп те айтады.

Жанама жазықтық жанасу нүктесіне жүргізілген сфераның радиусына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

3-жағдай. Егер OO_1 перпендикулярының ұзындығы, яғни O нүктесінен α жазықтығына дейінгі d қашықтығы сфераның R радиусынан кіші болса, онда сфера мен жазықтық қиылысады және олардың қиылысуы — центрі O_1 нүктесі және радиусы $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ болатын шеңбер болады (9.4, б-сурет).

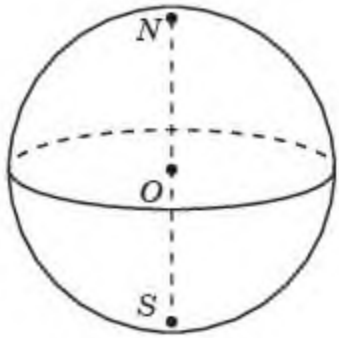
Расында да, сфера мен α жазықтығының қиылысуында жататын қандай да бір A нүктесі үшін $OO_1 = d$, $OA = R$ болатын OO_1A тікбұрышты үшбұрышынан $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$ теңдігі шығады. Керісінше, егер α жазықтығында жатқан A нүктесі үшін бұл теңдік орындалса, онда O нүктесінен A нүктесіне дейінгі қашықтық R-ге тең болады, яғни A нүктесі сфераның бойында жатады.

Әдетте сфера 9.5-суреттегідей кескінделеді. Бұл суретте шеңберден басқа:

а) сфераның центрі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы — *сфераның үлкен шеңбері* немесе *экватор*;

ә) сфераның центрі арқылы өтетін және экватор жазықтығына перпендикуляр түзу — *сфераның осі*;

б) остің сферамен қиылысу нүктелері — *сфераның полюстері* кескінделген. Әдетте, оларды N (солтүстік полюс) және S (оңтүстік полюс) әріптерімен белгілейді.

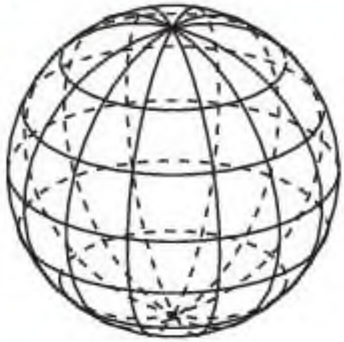


9.5-сурет

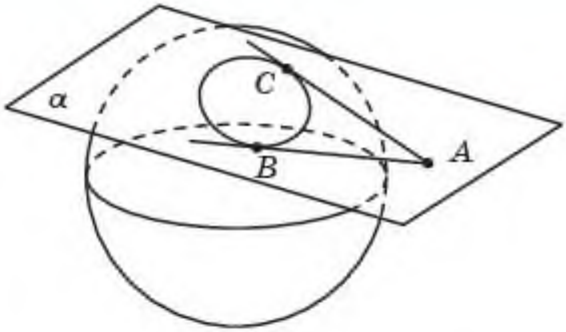
Кейде сфераның суретінде полюс пен экватор таңдап алынғаннан кейін параллельдер мен меридиандардың кескінін салуға болады.

Параллельдер — сфераның экватор жазықтығына параллель жазықтықтармен қималары. *Меридиандар* — сфераның осі арқылы өтетін жазықтықтармен қималары (9.6-сурет). Әдетте, дәл осылай жер шарының нобайы (кескіні) — глобус кескінделеді.

Шардың жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?



9.6-сурет



9.7-сурет

Сфера мен жазықтықтың өзара орналасуы жағдайларына ұқсас сфера мен түзудің өзара орналасуын өздерің қарастырыңдар.

Сферамен бір ғана ортақ нүктесі болатын түзу сфераға *жанама түзу* деп аталады.

Теорема. ***Сферадан тыс жатқан бір нүктеден осы сфераға жүргізілген жанама түзулердің кесінділері өзара тең болады.***

Дәлелдеуі. AB және AC — қандай да бір A нүктесінен сфераға жүргізілген жанамалардың кесінділері болсын, мұндағы B және C — жанасу нүктелері (9.7-сурет).

A, B және C нүктелері арқылы өтетін жазықтығын қарастырайық. Бұл жазықтық сферамен сәйкесінше B және C нүктелерінде AB және AC түзулерімен жанасатын шеңбер бойымен қиылысады. Шеңберден тыс жатқан нүктеден осы шеңберге жүргізілген жанамалардың кесінділерінің қасиеттері бойынша $AB = AC$ болады.

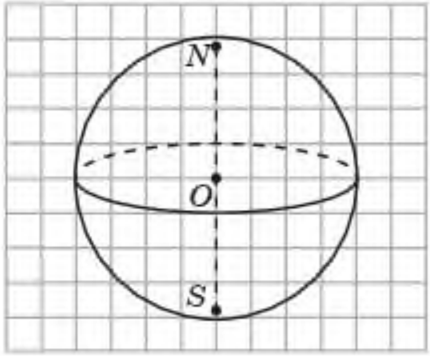
Сұрақтар

1. Қандай фигура сфера деп аталады?
2. Сфераның радиусы дегеніміз не?
3. Сфераның хордасы дегеніміз не?
4. Сфераның диаметрі дегеніміз не?
5. Қандай фигураны айналдырғанда сфераны алуға болады?
6. Қандай фигура шар деп аталады?
7. Шардың радиусы дегеніміз не?
8. Шардың хордасы дегеніміз не?
9. Шардың диаметрі дегеніміз не?
10. Қандай фигураны айналдырғанда шарды алуға болады?
11. Шардың беті дегеніміз не?
12. Қандай жағдайда сфера мен жазықтықтың ортақ нүктесі болмайды?
13. Қандай жағдайда сфера мен жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі болады?
14. Қандай жағдайда сфера мен жазықтық шеңбер бойымен қиылысады?
15. Қандай жазықтық сфераға жүргізілген жанама жазықтық деп аталады?
16. Қандай түзу сфераға жүргізілген жанама түзу деп аталады?

Есептер

А

9.1. Торкөз қағазға 9.8-суреттегіге ұқсас сфераны салыңдар. Қандай да бір параллельдер мен меридиандарды кескіндеңдер.



9.8-сурет

9.2. Центрі O нүктесі және радиусы R болатын: 1) шардың ішінде жатқан; 2) шардан тыс жатқан A нүктесі қандай теңсіздікті қанағаттандырады?

9.3. Сфераның радиусы 4 см-ге тең. Егер берілген нүктеден сфераның центріне дейінгі қашықтық: 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см болса, онда осы нүкте сфераға қатысты қалай орналасады?

9.4. Сфераның центрі арқылы қанша диаметр жүргізуге болады?

9.5. Сфераның диаметрі оның радиусынан 55 мм-ге үлкен. Осы диаметрді табыңдар.

9.6. A және B нүктелерінің арақашықтығы 2 см-ге тең. Осы нүктелер арқылы өтетін сфераның ең кіші радиусын табыңдар.

9.7. Сфераның радиусы 7 см-ге тең және қандай да бір жазықтық оның центрінен: 1) 6 см; 2) 7 см; 3) 8 см қашықтықта орналасқан. Осы сфера мен жазықтықтың бір-біріне қатысты қалай орналасқанын анықтаңдар.

В

9.8. 1) Сфераның бойында жатқан нүкте арқылы; 2) сфераның ішінде жатқан нүкте арқылы; 3) сферадан тыс жатқан нүкте арқылы осы сфераға қанша жанама жазықтық жүргізуге болады?

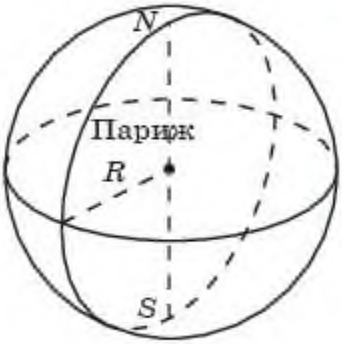
9.9. Шардың радиусы 5 см-ге тең. Шардың центрінен 3 см қашықтықта болатын жазықтықпен қимасы — дөңгелектің радиусын табыңдар.

9.10. Сфераның радиусы 3 см-ге тең. Берілген нүктеден осы сфераның центріне дейінгі қашықтық — 5 см. Осы нүктеден сфераға жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

9.11. Сфераның радиусы 3 см-ге тең және оның центрінен қандай да бір түзу: 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 7 см қашықтықта орналасқан. Осы сфера мен түзудің бір-біріне қатысты қалай орналасқанын анықтаңдар.

9.12. Сфераның радиусы 3 см-ге тең. Берілген нүктеден осы сфераға жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығы 4 см-ге тең. Осы нүктеден сфераның центріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

9.13. Сфераның радиусы 6 см-ге тең. Берілген нүктеден осы сфераның центріне дейінгі қашықтық — 10 см. Осы нүктеден сфераға жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығын табыңдар.



9.9-сурет

9.14. Берілген нүктеден сфераның центріне дейінгі қашықтық 13 см-ге тең. Осы нүктеден сфераға жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығы 12 см. Сфераның радиусын табыңдар.

9.15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ теңдеуімен берілген сфера мен 1) $z = 1$; 2) $z = 2$; 3) $z = 3$ теңдеуімен берілген жазықтықтың өзара орналасуын анықтаңдар.

9.16. Париж меридианы ұзындығы 40 000 км-ге тең. Жер шарының радиусын табыңдар (9.9-сурет).

9.17. Сфераның радиусы 4 см-ге тең. Берілген нүктеден осы сфераның центріне дейінгі қашықтық — 6 см. Осы нүктеден сфераның бойында жатқан нүктелеріне дейінгі ең үлкен және ең кіші қашықтықтарды табыңдар.

9.18. Сферадан тыс жатқан нүктеден осы сфераның бойында жатқан нүктелеріне дейінгі ең кіші және ең үлкен қашықтықтар — 4 см және 6 см. Сфераның радиусын табыңдар.

C

9.19. 1) $x + y + z = \sqrt{2}$; 2) $x + y + z = \sqrt{3}$; 3) $x + y + z = 2$ теңдеуімен берілген жазықтық пен $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ теңдеуімен берілген сфераның өзара орналасуын анықтаңдар.

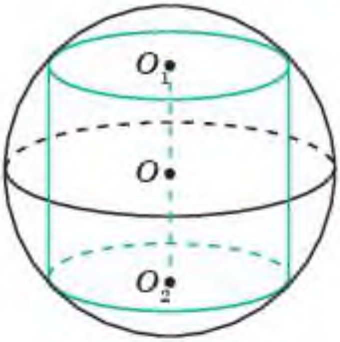
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

9.20. Тіктөртбұрышқа, үшбұрышқа, трапецияға іштей және сырттай сызылған шеңберлердің анықтамаларын және олардың радиустарын табу формулаларын қайталаңдар.

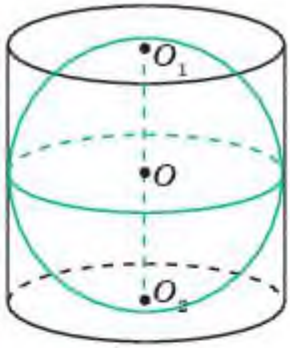
§ 10*. Айналу денелерінің комбинациялары

Тіктөртбұрышқа сырттай сызылған шеңбер және квадратқа іштей сызылған шеңбер ұғымдарына ұқсас цилиндрге сырттай сызылған сфера және цилиндрге іштей сызылған сфера ұғымдарын анықтайық.

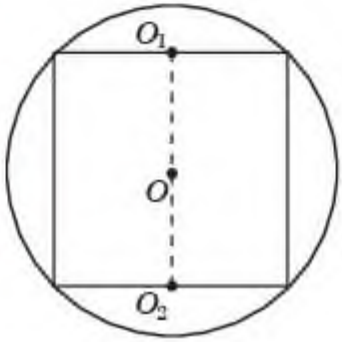
Егер цилиндрдің табандарының шеңберлері сфераның бойында жатса, онда сфера *цилиндрге сырттай сызылған* немесе *цилиндр сфераға іштей сызылған* деп аталады (10.1-сурет).



10.1-сурет



10.2-сурет



10.3-сурет

Егер сфера цилиндрдің табандарына және бүйір бетімен (әрбір жасаушысымен) жанасатын болса, онда *сфера цилиндрге іштей сызылған* немесе *цилиндр сфераға сырттай сызылған* деп аталады (10.2-сурет).

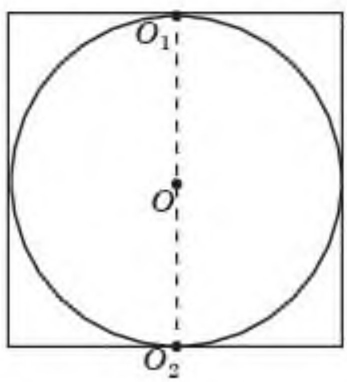
Теорема. ***Цилиндрге сырттай сфера сызуға болады. Оның радиусы осы цилиндрдің осьтік қимасы — тіктөртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***

Дәлелдеуі. Цилиндрдің осьтік қимасы — тіктөртбұрышты және оған сырттай сызылған шеңберді қарастырайық (10.3-сурет). Цилиндр осы тіктөртбұрышты оның қарама-қарсы екі қабырғасының O_1, O_2 орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда алынады. Шеңберді осы түзуден айналдырғанда берілген цилиндрге сырттай сызылған сфера пайда болады. Бұл сфераның радиусы тіктөртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады.

Егер цилиндрдің табанының радиусы r-ге және биіктігі h-қа тең болса, онда осы цилиндрге сырттай сызылған сфераның R радиусы мынадай формуламен анықталады:

$$R = \sqrt{r^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Теорема. ***Егер цилиндрдің осьтік қимасы квадрат болса, онда оған іштей сфера сызуға болады. Іштей сызылған сфераның радиусы цилиндрдің осьтік қимасына іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***



10.4-сурет

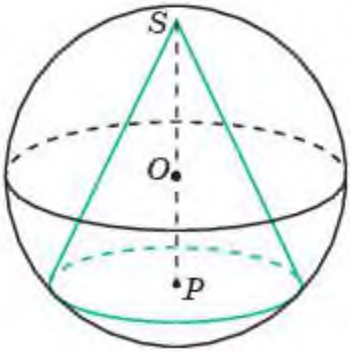
Дәлелдеуі. Цилиндрдің осьтік қимасын қарастырайық (10.4-сурет).

Егер цилиндрдің осьтік қимасы — тіктөртбұрышқа іштей шеңбер сызылған болса, онда осы цилиндрге іштей сфера сызылады. Бұл тіктөртбұрыш квадрат болған жағдайда ғана орындалады. Демек, іштей сызылған сфераның радиусы цилиндрдің осьтік қимасына іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады. ☐

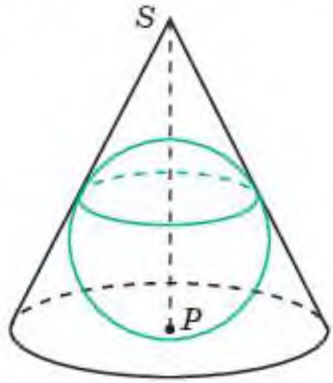
Егер цилиндрдің табанының радиусы R-ге тең болса, онда сфераның радиусы да R-ге тең болады.

Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер және үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер ұғымдарына ұқсас *конусқа сырттай сызылған сфера* және *конусқа іштей сызылған сфера* ұғымдарын анықтайық.

Егер конустың төбесі мен табанының шеңбері сфераның бойында жатса, онда *сфера конусқа сырттай сызылған* немесе *конус сфераға іштей сызылған* деп аталады (10.5-сурет).



10.5-сурет

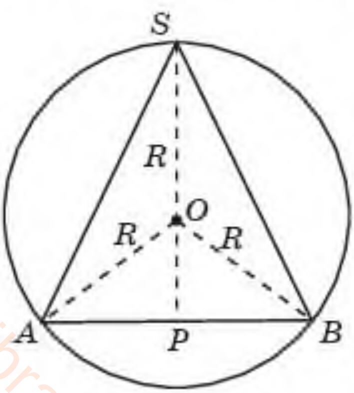


10.6-сурет

Егер сфера конустың табанына және бүйір бетіне (әрбір жасаушысына) жанасатын болса, онда *сфера конусқа іштей сызылған* немесе *конус сфераға сырттай сызылған* деп аталады (10.6-сурет).

Теорема. ***Конусқа сырттай сфера сызуға болады. Оның радиусы осы конустың осьтік қимасы — үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***

Дәлелдеуі. Конустың осьтік қимасы — теңбүйірлі үшбұрышты және оған сырттай сызылған шеңберді қарастырайық (10.7-сурет). Конус осы үшбұрышты оның табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдырғанда алынады. Шеңберді осы түзуден айналдырғанда берілген конусқа сырттай сызылған сфера пайда болады. Бұл сфераның радиусы теңбүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады. ☐



10.7-сурет

Қабырғалары a, b, c және ауданы S болатын үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің R радиусы үшін мынадай формула орынды болатынын еске салайық:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

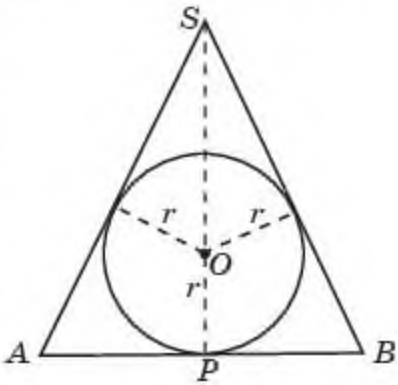
Осы формуламен осьтік қимасы үшбұрыш болатын конусқа сырттай сызылған сфераның R радиусы да анықталады. Мұндағы, a, b, c — үшбұрыштың қабырғалары, S — үшбұрыштың ауданы.

1-мысал. Конустың табанының радиусы 6 см-ге, жасаушысы 10 см-ге тең. Конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

Шешуі. Конустың осьтік қимасы — қабырғалары 12 см, 10 см, 10 см болатын теңбүйірлі үшбұрыш болады. Осы үшбұрыштың табанына түсірілген биіктігі 8 см-ге, ал ауданы 48 см^2-ге тең. Демек, конусқа сырттай сызылған сфераның радиусы $6\frac{1}{4}$ см-ге тең болады.

Теорема. ***Конусқа іштей сфера сызуға болады. Іштей сызылған сфераның радиусы конустың осьтік қимасы — үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***

Дәлелдеуі. Конустың осьтік қимасы — теңбүйірлі үшбұрышты және оған іштей сызылған шеңберді қарастырайық (10.8-сурет). Конус осы үшбұрышты оның табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдырғанда алынады. Шеңберді осы түзуден айналдырғанда берілген конусқа іштей сызылған сфера пайда болады. Бұл сфераның радиусы теңбүйірлі үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады. ☐



10.8-сурет

Қабырғалары a, b, c және ауданы S болатын үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің r радиусы үшін мынадай формула орынды болатынын еске салайық

$$r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Осы формуламен осьтік қимасы үшбұрыш болатын конусқа іштей сызылған сфераның r радиусы да анықталады. Мұндағы, a, b, c — үшбұрыштың қабырғалары, S — үшбұрыштың ауданы.

2-мысал. Конустың табанының радиусы 6 см-ге, жасаушысы 10 см-ге тең. Конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

Шешуі. Конустың осьтік қимасы — қабырғалары 12 см, 10 см, 10 см болатын теңбүйірлі үшбұрыш болады. Осы үшбұрыштың табанына түсірілген биіктігі 8 см-ге, ал ауданы 48 см^2-ге тең. Демек, конусқа іштей сызылған сфераның радиусы 3 см-ге тең болады.

Сұрақтар

1. Қандай сфера цилиндрге сырттай сызылған деп аталады?
2. Қандай сфераға іштей цилиндр сызылады?

3. Цилиндрге сырттай сфераны әрдайым сызуға бола ма?
4. Қандай цилиндрге іштей сфера сызылады?
5. Қандай цилиндр сфераға сырттай сызылған деп аталады?
6. Қандай конусқа сырттай сфера сызылады?
7. Қандай сфераға іштей конус сызылады?
8. Конусқа сырттай сфераны әрдайым сызуға бола ма?
9. Қандай конусқа іштей сфера сызылады?
10. Қандай сфераға сырттай конус сызылады?
11. Конусқа іштей сфераны әрдайым сызуға бола ма?

Есептер

А

10.1. Сфераның радиусы R-ге тең. Сфераға іштей сызылған цилиндрдің табанының радиусын және биіктігін табыңдар.

10.2. Цилиндрдің биіктігі h-қа тең. Цилиндрге іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

10.3. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусы 1 см-ге тең. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

10.4. Цилиндрдің табанының радиусы 1 см-ге тең. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусы 2 см-ге тең деп алып, цилиндрдің биіктігін табыңдар.

10.5. Цилиндрдің биіктігі 2 см-ге тең. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусы 2 см-ге тең деп алып, цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.

10.6. Цилиндрдің осьтік қимасы — қабырғалары 3 см және 4 см болатын тіктөртбұрыш. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

10.7. Сфераның радиусы 1 см-ге тең. Сфераға сырттай сызылған цилиндр бетінің ауданын табыңдар.

В

10.8. Конустың осьтік қимасы — қабырғасы 1 см-ге тең теңқабырғалы үшбұрыш. Конусқа: 1) сырттай сызылған; 2) іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

10.9. Конусқа сырттай сызылған сфераның R радиусын конустың h биіктігі мен табанының r радиусы арқылы өрнектеңдер.

10.10. Конустың табанының радиусы 3 см-ге, ал биіктігі 4 см-ге тең. Конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

10.11. Конусқа іштей сызылған сфераның r радиусын конустың h биіктігі мен табанының r_0 радиусы арқылы өрнектеңдер.

10.12. Конустың табанының радиусы 3 см-ге, ал биіктігі 4 см-ге тең. Конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

10.13. Конустың жасаушысы мен оған сырттай сызылған сфераның радиусы 2 см-ге тең. Конус табанының радиусын табыңдар.

10.14. Конус табанының радиусы 1 см-ге тең. Оның жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Конусқа: 1) сырттай сызылған; 2) іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

10.15. Конустың жасаушысы 1 см-ге тең және ол табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Конусқа: 1) сырттай сызылған; 2) іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

10.16. Шеңбердің ұзындығының анықтамасын және шеңбердің ұзындығын табу формуласын қайталаңдар.

§ 11. Сфера бетінің ауданы

Сфераның ауданының анықтамасы шеңбердің ұзындығының анықтамасына ұқсас келеді.

Шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының санын шексіз арттырған кездегі көпбұрыш периметрі ұмтылатын сан шеңбер ұзындығының дәл мәнін беретінін еске саламыз.

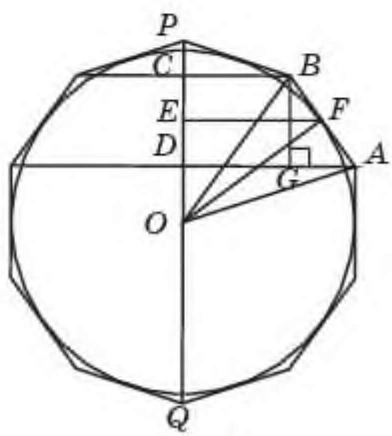
Шеңберге сырттай сызылған дұрыс көпбұрышты және осы көпбұрышты шеңбердің PQ диаметрі жататын түзуден айналдырғанда пайда болған фигураны қарастырайық (11.1-сурет). Бұл фигураның беті конустың, қиық конустың және цилиндрдің бүйір беттерінен тұрады, ал фигураның өзі шеңберді айналдырғанда пайда болған сфераға сырттай сызылады. Фигураның бетінің ауданы оған тиісті конустың, қиық конустың және цилиндрдің бүйір беттерінің аудандарының қосындысына тең болады.

Шеңберді оның диаметрі жататын түзуден айналдырғанда алынған сфераның ауданы осы шеңберге сырттай сызылған дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының санын шексіз арттыра отырып, айналдырғанда пайда болған фигура бетінің ауданы ұмтылатын сан *сфераның ауданы* болып табылады.

Енді радиусы R болатын сфераның ауданын табу формуласын анықтайық.

Сфераның ауданы деп осы сферамен шектелген шардың бетінің ауданын да айтады.

Шеңберге сырттай сызылған M дұрыс көпбұрышының AB қабырғасын айналдырғанда пайда болған бетті қарастырайық. Ол $ABCD$ тікбұрышты трапециясын CD түзуінен айналдырғанда алынған қиық конустың бүйір бетін береді (11.1-сурет).



11.1-сурет

Осы беттің $S(AB)$ ауданы — радиусы трапецияның EF орта сызығы болатын шеңбердің ұзындығы мен AB бүйір қабырғасының көбейтіндісіне тең болады, яғни

$$S(AB) = 2\pi \cdot EF \cdot AB.$$

$ABCD$ тікбұрышты трапециядан табамыз: $CD = BG = AB \cdot \sin\angle BAD$. Демек,

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD}.$$

$\angle BAD = \angle EOF$ (сәйкесінше перпендикуляр қабырғаларындағы бұрыштар ретінде тең) екенін ескеріп, келесідей теңдікті аламыз:

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD} = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle EOF} = 2\pi \cdot OF \cdot CD = 2\pi R \cdot CD.$$

Осыған ұқсас M көпбұрышының басқадай қабырғаларын айналдырғанда пайда болған беттердің аудандарының формулалары алынады. Осы аудандарды қосып, M көпбұрышын айналдырғанда пайда болған беттің $S(M)$ ауданын табамыз:

$$S(M) = 2\pi \cdot OF \cdot PQ = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Шеңберге сырттай сызылған дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының санын шексіз арттыра отырып айналдырғанда пайда болған фигура бетінің ауданы ұмтылатын сан *сфераның ауданы* болып есептеледі. Сонымен, сфераның S ауданын мынадай формуламен табуға болады:

$$S(M) = 4\pi R^2.$$

Сфераның ауданы осы сфераға сырттай сызылған цилиндрдің бүйір бетінің ауданына тең болатынын дәлелдеңдер.

Сұрақтар

1. Сфераның ауданы қалай анықталады?
2. Шар бетінің ауданы дегеніміз не?
3. Радиусы R болатын сфераның ауданы қандай формуламен есептеледі?

Есептер

А

11.1. Радиусы 1 см-ге тең сфераның ауданын табыңдар.

11.2. Ауданы 1 см^2-ге тең сфераның радиусын табыңдар.

11.3. Шардың үлкен дөңгелегінің ауданы 3 см^2-ге тең. Шардың бетінің ауданын табыңдар.

11.4. Егер шардың радиусы: 1) 2 есе; 2) 3 есе; 3) n есе артатын болса, онда оның бетінің ауданы қалай өзгереді?

11.5. Екі шардың беттерінің аудандары 4 : 9 қатынасындай болса, онда олардың радиустарының қатынасын табыңдар.

11.6. Екі шардың радиустары 6 см және 8 см. Бетінің ауданы берілген шарлардың беттерінің аудандарының қосындысына тең болатын шардың радиусын табыңдар.

11.7. Шарға сырттай цилиндр сызылған. Шар беті ауданының цилиндрдің бүйір бетінің ауданына қатынасын табыңдар.

В

11.8. Осьтік қимасы бірлік квадрат болатын цилиндрге іштей сызылған сфера бетінің ауданын табыңдар.

11.9. Осьтік қимасы бірлік квадрат болатын цилиндрге сырттай сызылған сфера бетінің ауданын табыңдар.

11.10. Күннің диаметрі Айдың диаметрінен 400 есе үлкен. Күннің бетінің ауданы Ай бетінің ауданынан неше есе үлкен болады?

11.11. Кубқа іштей сызылған сфера бетінің ауданы осы кубқа сырттай сызылған сфераның бетінің ауданынан неше есе кіші болады?

11.12. Конустың осьтік қимасы — теңқабырғалы үшбұрыш. Конусқа сырттай сызылған сфера бетінің ауданы осы конусқа іштей сызылған сфера бетінің ауданынан неше есе үлкен болады?

11.13. Шардың центрінен 8 см қашықтықта жататын жазықтықпен қимасы — дөңгелектің радиусы 6 см. Шар бетінің ауданын табыңдар.

11.14. Париж меридианасы ұзындығы шамамен 40 000 км-ге тең. Жер шары бетінің ауданын табыңдар.

11.15. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бәйтерек монументі шарының диаметрі 22 м-ге тең (11.2-сурет). Осы шар бетінің ауданын табыңдар.

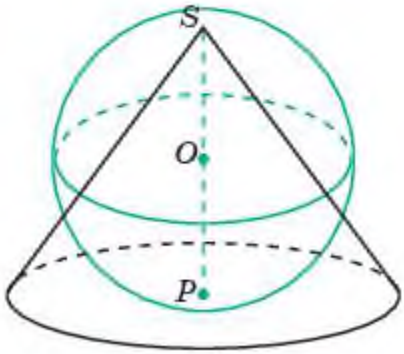
11.2-сурет

11.3-сурет

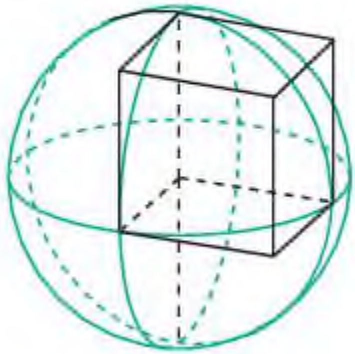
11.16. ЭКСПО-2017 — Қазақстанның елордасында 2017 жылы «Халықаралық көрмелер» бюросы ұйымдастырған халықаралық көрме (11.3-сурет). Көрменің орталық элементі әлемдегі ең үлкен сфералық ғимарат болатын «Нұр Әлем» кешені болды. Оның диаметрі — 80 м. Осы сфера бетінің ауданын табыңдар ($\pi \approx 3$).

C

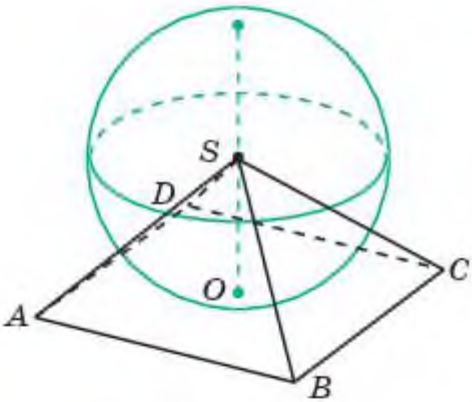
11.17. Конустың осьтік қимасы — теңқабырғалы үшбұрыш (11.4-сурет). Конус бетінің ауданы диаметрі осы конустың биіктігімен бірдей шар бетінің ауданына тең болатынын дәлелдеңдер.



11.4-сурет



11.5-сурет



11.6-сурет

11.18. Радиусы 1 см-ге тең шардың центрі — бірлік кубтың төбесі (11.5-сурет). Осы кубтың ішінде орналасқан шар беті бөлігінің ауданын табыңдар.

11.19. Дұрыс төртбұрышты пирамидада табанының қабырғалары 2 см-ге, ал биіктігі 1 см-ге тең. Радиусы 1 см-ге тең шардың центрі — осы пирамиданың төбесі (11.6-сурет). Пирамиданың ішінде орналасқан шар беті бөлігінің ауданын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

11.20. Іштей және сырттай сызылған көпбұрыштардың анықтамаларын қайталаңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Цилиндр табанының радиусы 3 см, ал жасаушысы 8 см. Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналін табыңдар:

A) 6 см; B) 10 см;

C) 12 см; D) 16 см.

2. Тіктөртбұрыштың қабырғалары 1 см және 2 см. Осы тіктөртбұрышты оның үлкен қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар:

A) 2π см^2; B) 3π см^2;
C) 4π см^2; D) 6π см^2.

3. Дұрыс үшбұрышты призма табанының қабырғалары 1 см-ге және бүйір қырлары 2 см-ге тең. Осы призманы оның бүйір қыры жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар:

A) 2π см^2; B) 3π см^2;
C) 4π см^2; D) 6π см^2.

4. Конус табанының радиусы 6 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең. Конустың биіктігін табыңдар:

A) 6 см; B) $3\sqrt{2}$ см;
C) $6\sqrt{2}$ см; D) 8 см.

5. Конустың жасаушысы 6 см-ге тең және ол табан жазықтығына 45° бұрыш жасап көлбеген. Осы конус табанының радиусын табыңдар:

A) 3 см; B) $3\sqrt{2}$ см;
C) $3\sqrt{3}$ см; D) 6 см.

6. Конус табанының радиусы 2 см-ге, ал жасаушысы 3 см-ге тең. Конус бетінің ауданын табыңдар:

A) 6π см^2; B) 8π см^2;
C) 10π см^2; D) 12π см^2.

7. Конус табанының радиусы 2 см-ге тең. Конус биіктігінің ортасы арқылы табан жазықтығына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар:

A) π см^2; B) 2π см^2;
C) 3π см^2; D) 4π см^2.

8. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны 2 см-ге және бүйір қабырғалары 4 см-ге тең. Осы үшбұрышты оның табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдырғанда пайда болған конус бетінің ауданын табыңдар:

A) 3π см^2; B) 4π см^2;
C) 5π см^2; D) 6π см^2.

9. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 2 см-ге және бүйір қырлары 3 см-ге тең. Осы пирамиданы оның биіктігі

жататын түзуден айналдырғанда пайда болған конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар:

A) 3π см^2; B) 4π см^2;
C) 5π см^2; D) 6π см^2.

10. Қиық конустың табандарының радиустары 4 см және 1 см, ал биіктігі 4 см-ге тең. Қиық конустың жасаушысын табыңдар:

A) 3 см; B) 4 см;
C) 5 см; D) 6 см.

11. Қиық конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 45° бұрыш жасап көлбеген. Конустың үлкен табанының радиусы 2 см-ге тең болса, кіші табанының радиусын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см;
C) $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ см; D) $2 - \sqrt{2}$ см.

12. Теңбүйірлі трапецияның табандары 2 см және 4 см, ал бүйір қабырғалары 3 см-ге тең. Осы трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигура бетінің ауданын табыңдар:

A) 8π см^2; B) 10π см^2;
C) 12π см^2; D) 14π см^2.

13. Шардың радиусы 2 см-ге тең. Шардың центрінен 1 см қашықтықта болатын жазықтықпен қимасы — дөңгелектің ауданын табыңдар:

A) π см^2; B) 2π см^2;
C) 3π см^2; D) 4π см^2.

14. Сфераның ішінде жатқан нүктеден сфераның бойында жатқан нүктелерге дейінгі ең кіші және ең үлкен қашықтықтар сәйкесінше 4 см-ге және 6 см-ге тең. Сфераның радиусын табыңдар:

A) 2 см; B) 4 см;
C) 5 см; D) 10 см.

15. Цилиндрдің осьтік қимасы — қабырғалары 6 см және 8 см болатын тіктөртбұрыш. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 5 см; B) 6 см;
C) 8 см; D) 10 см.

16. Конустың осьтік қимасы — қабырғалары 2 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш. Осы конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см;

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.

17. Радиусы 2 см-ге тең сфераның ауданын табыңдар:

A) 12π см^2; B) 14π см^2;
C) 16π см^2; D) 18π см^2.

18. Бірлік кубқа іштей сызылған сфераның ауданын табыңдар:

A) $\frac{\pi}{2}$ см^2; B) π см^2;
C) 2π см^2; D) 3π см^2.

19. Бірлік кубқа сырттай сызылған сфераның ауданын табыңдар:

A) π см^2; B) 2π см^2;
C) 3π см^2; D) 4π см^2.

20. Екі шардың радиустары 2 : 3 қатынасындай. Олардың беттерінің аудандарының қатынасын табыңдар:

A) 2 : 3; B) 4 : 6;
C) 6 : 9; D) 4 : 9.

III тарау ДЕНЕЛЕР КӨЛЕМДЕРІ

§ 12. Денелер көлемдерінің жалпы қасиеттері

Көлем — геометриялық фигуралардың кеңістіктегі бөлігін сипаттайтын шама. Көлем геометриялық денелерге байланысты негізгі шамалардың бірі болып табылады.

Көлемнің өлшем бірлігі ретінде қырының ұзындығы 1-ге тең куб алынады. Ол *бірлік куб* деп аталады.

Мысалы, егер ұзындықтың өлшем бірлігі 1 мм, 1 см немесе 1 м болса, онда көлемнің өлшем бірлігі ретінде қырының ұзындығы сәйкесінше 1 мм, 1 см немесе 1 м-ге тең куб алынады. Мұндай куб сәйкесінше *кубтық миллиметр*, *кубтық сантиметр* немесе *кубтық метр* деп аталады.

Қарапайым жағдайда фигураның көлемі осы фигура ішіне сиятын бірлік кубтардың және оның бөліктерінің санымен өлшенеді. Бұл сан натурал, рационал немесе иррационал болуы мүмкін. Фигураның көлемі өлшем бірлігіне байланысты болғандықтан, түсінікті болу үшін іс жүзінде осы саннан кейін көлемнің өлшем бірлігі көрсетіледі. Мысалы, V мм^3, V см^3, V м^3.

Кеңістіктегі фигураның көлемі үшін мынадай қасиеттер орынды болады:

1) кеңістіктегі фигураның көлемі оң сан;

2) бірдей фигуралардың көлемдері тең;

3) егер Φ фигурасы Φ_1 және Φ_2 фигураларынан құралса, онда Φ фигурасының көлемі Φ_1 және Φ_2 фигуралары көлемдерінің қосындысына тең болады, яғни

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

4. Бір төбесінен шығатын қырлары a, b, c болатын *тікбұрышты параллелепипедтің V көлемі* мынадай формуламен есептеледі:

$$V(\Phi) = a \cdot b \cdot c.$$

Кейде *тікбұрышты параллелепипедтің көлемі* оның сызықтық өлшемдерінің көбейтіндісіне тең немесе оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең дейді. Соңғы тұжырым кез келген параллелепипед үшін де дұрыс.

Дербес жағдайда қыры a-ға тең кубтың V көлемі мынадай формуламен есептеледі:

$$V = a^3.$$

? Қалай ойлайсыңдар, фигураның көлемі нөлге тең бола ма?

Көлемдері тең екі фигура *тең шамалас фигуралар* деп аталады.

Нүктелерінің арақашықтығы бірдей оң санға көбейтілетін жазықтықты түрлендіру *ұқсастық* деп аталатынын еске саламыз. Демек, ұқсастық түрлендіру кезінде кез келген A, B нүктелері сәйкесінше A', B' нүктелеріне көшсе, $A'B' = k \cdot AB$ болады, мұндағы k — *ұқсастық коэффициенті* деп аталатын оң сан.

Егер кеңістіктегі екі фигураның біреуін екіншісіне көшіретін ұқсастық түрлендіру бар болса, онда осы екі фигура *ұқсас* деп аталады.

Ұқсас фигураларға мысалдар:

1) екі кубтың ұқсастық коэффициенті осы кубтардың қырлары ұзындықтарының қатынасына тең болады;

2) екі тікбұрышты параллелепипедтердің a', b', c' пен a, b, c қырлары үшін мынадай теңдіктер орындалады:

$$a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc,$$

мұндағы k — қандай да бір тұрақты сан;

3) екі шардың ұқсастық коэффициенті осы шарлардың радиустарының қатынасына тең болады.

Екі ұқсас көпжақ беттерінің аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең болатынын дәлелдеңдер.

Екі ұқсас шар беттерінің аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең болатынын тексеріңдер.

Екі тікбұрышты параллелепипед көлемдерінің қатынасы ұқсастық коэффициентінің кубына тең болатынын тексеріңдер.

Екі ұқсас фигура көлемдерінің қатынасы ұқсастық коэффициентінің кубына тең болатынын дәлелдеусіз береміз, яғни егер k ұқсастық коэфициенті бойынша Φ_2 фигурасы Φ_1 фигурасына ұқсас болса, онда осы фигуралардың көлемдері үшін мынадай формула орынды болады:

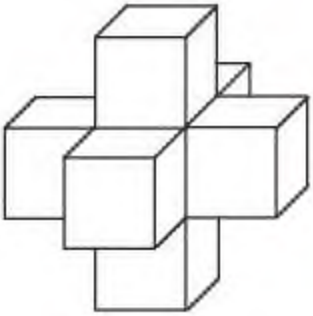
$$V(\Phi_2) = k^3 V(\Phi_1).$$

Сұрақтар

1. Көлем қандай шаманы сипаттайды?
2. Көлемнің өлшем бірлігі ретінде не алынады?
3. Көлемнің қасиеттерін айтыңдар.
4. Кеңістіктегі қандай фигуралар теңшамалы деп аталады?
5. Кеңістіктегі қандай түрлендіру ұқсастық деп аталады?
6. Кеңістіктегі қандай фигуралар ұқсас деп аталады?
7. Ұқсас фигуралардың көлемдері өзара қалай байланысқан?
8. Кеңістіктегі ұқсас фигураларға мысалдар келтіріңдер.

Есептер

А



12.1-сурет

12.1. Кубтың көлемі 27 $см^3$-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.

12.2. Кубтың бетінің ауданы 24 $см^2$-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

12.3. Кубтың диагоналі $\sqrt{12}$ см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

12.4. 12.1-суреттегі кеңістіктік фигураны құрайтын кубтардың қырлары 1 см-ге тең. Осы фигураның көлемін табыңдар.

12.5. Егер кубтың барлық қырларын 3 есе арттырсақ, онда оның көлемі неше есе артады?

12.6. Егер тікбұрышты параллелепипедтің барлық қырларын 2 есе қысқартсақ, онда оның көлемі неше есе кемиді?

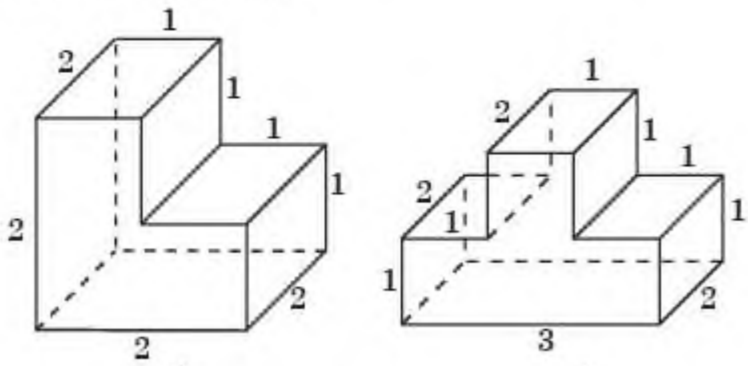
12.7. Егер тікбұрышты параллелепипедтің: 1) бір сызықтық өлшемін 2 есе арттырса; 2) екі сызықтық өлшемін 3 есе қысқартса, онда оның көлемі қалай өзгереді?

12.8. Құрылыс кірпішінің салмағы 4 кг. Барлық сызықтық өлшемдері осы кірпіштің өлшемдерінен төрт есе кіші болатын ойыншық кірпіштің салмағы қанша грамм болады?

В

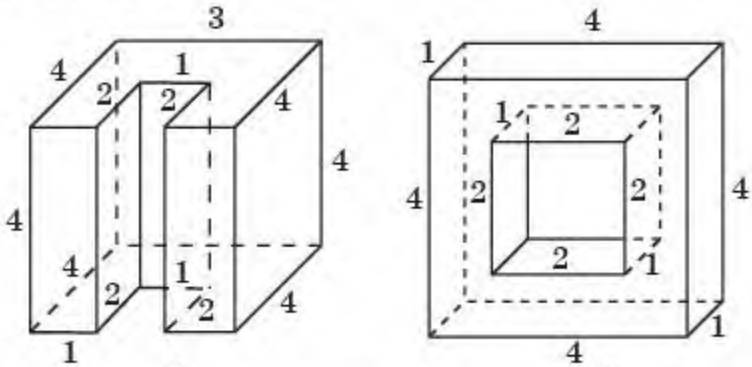
12.9. Мектептегі сынып бөлмесінің биіктігі 3,5 м-ге тең. Егер әрбір оқушыға 7,5 $м^3$ ауа қажет болса, онда 28 оқушыға арналған сынып бөлмесінің ауданы қандай болуы керек?

12.10. 12.2-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигураның көлемін табыңдар.



12.2-сурет

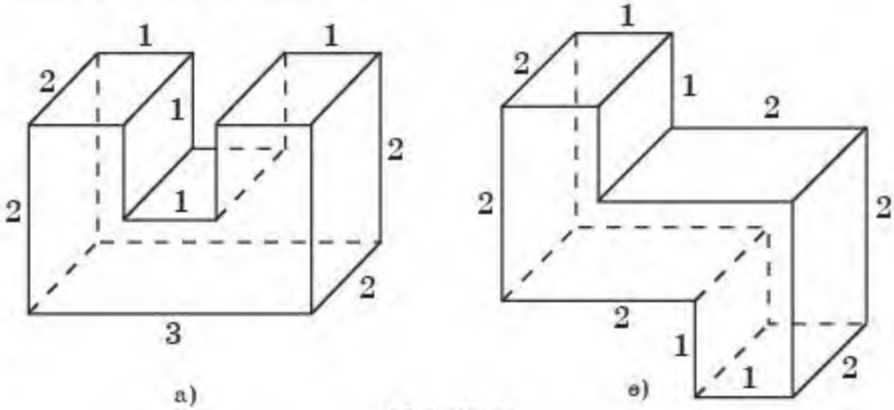
12.11. 12.3-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигураның көлемін табыңдар.



а) ә)

12.3-сурет

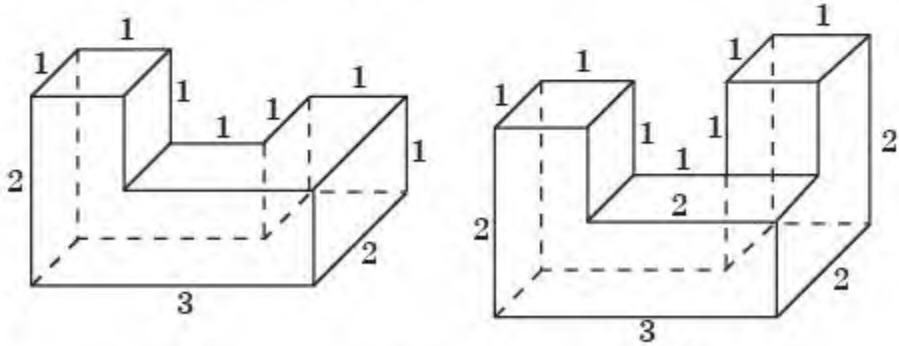
12.12. 12.4-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигураның көлемін табыңдар.



а) ә)

12.4-сурет

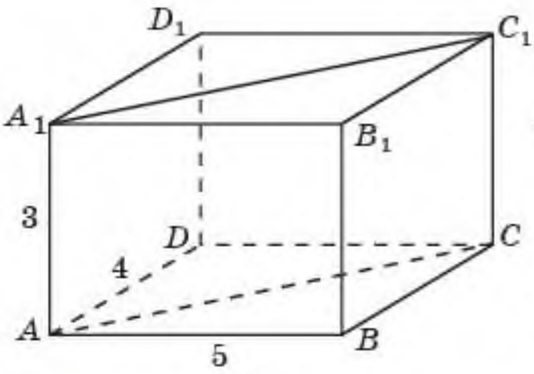
12.13. 12.5-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигураның көлемін табыңдар.



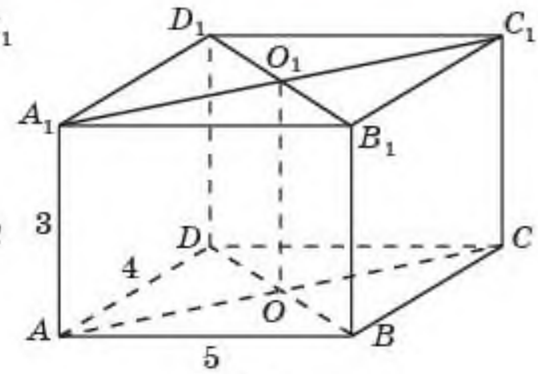
а) ә)

12.5-сурет

12.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 5 см, 4 см, 3 см-ге тең. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призманың көлемін табыңдар (12.6-сурет).



12.6-сурет

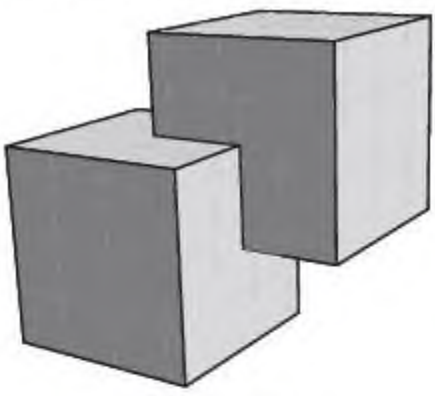


12.7-сурет

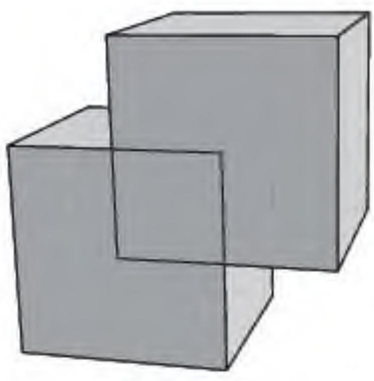
12.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 5 см, 4 см, 3 см-ге тең. $ABOA_1B_1O_1$ үшбұрышты призманың көлемін табыңдар (12.7-сурет).

12.16. Балықты өсіруге арналған аквариумның табаны — қабырғалары 40 см және 50 см болатын тіктөртбұрыш. Аквариумдегі судың тереңдігі 80 см-ді құрайды. Бұл су екінші аквариумге құйылып алынды. Екінші аквариумның түбі — қабырғалары 80 см және 100 см-ге тең тіктөртбұрыш. Мұндағы судың тереңдігі қандай болады?

12.17. Бірінің төбесі екіншісінің центрінде орналасқан екі бірлік кубтың ортақ бөлігінің көлемін табыңдар (12.8-сурет).



12.8-сурет



12.9-сурет

12.18. Бірінің екі төбесі екіншісінің екі жағының центрлерінде орналасқан екі бірлік кубтардан құрылған фигураның көлемін табыңдар (12.9-сурет).

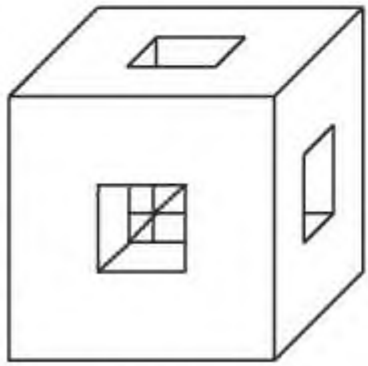
12.19. Құрылыс кірпішінің өлшемі 25 см × 12 см × 6 см. Цемент ерітіндісі көлемді 15 %-ға арттыратын болса, 10000 кірпіштен қаланған қабырғаның көлемін табыңдар.

12.20. Қырлары 1 см, 6 см және 8 см болатын үш қорғасын кубты балқытып бір куб жасалды. Алынған кубтың қырының ұзындығын табыңдар.

C

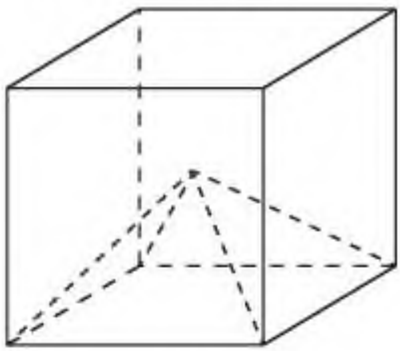
12.21. Егер кубтың әрбір қырын 2 см-ге арттырса, онда кубтың көлемі 98 $см^3$-ге артады. Кубтың қырын табыңдар.

12.22. Қыры 6 см болатын кубтың әрбір жағынан қабырғасы 2 см-ге тең өтпелі квадратты тесіктер жасалған (12.10-сурет). Кубтың қалған бөлігінің көлемін табыңдар.

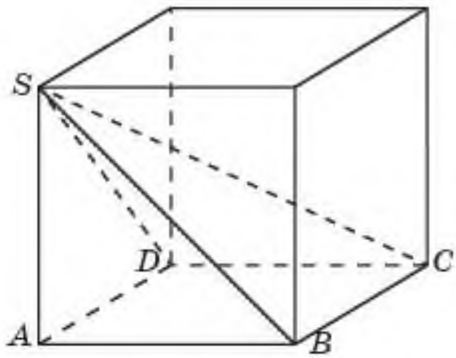


12.10-сурет

12.23. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табаны — бірлік кубтың бір жағы, ал төбесі осы кубтың центрі болып табылады (12.11-сурет). Пирамиданың көлемін табыңдар.



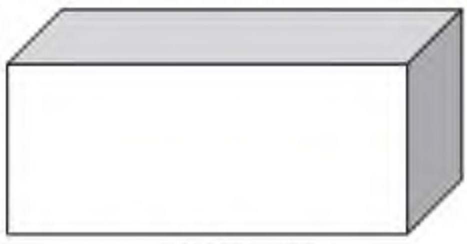
12.11-сурет



12.12-сурет

12.24. Төртбұрышты пирамиданың табаны — бірлік кубтың бір жағы, ал төбесі — осы жағында жатпайтын кубтың төбесі болып табылады (12.12-сурет). Пирамиданың көлемін табыңдар.

12.25. Параллелепипед пішіндес ыдыс берілген (12.13-сурет). Ыдыстың көлемінің тең жартысы сумен толтырылған. Суретін салып көрсетіңдер және түсіндіріңдер. Егер ыдыстың ұзындығы 4 м,



12.13-сурет

ені биіктігінен 0,5 м-ге артық, ал биіктігі ұзындығының 37,5%-ын құрайтын болса, құйылған судың көлемін табыңдар.

12.26. Аквариумның ұзындығы — 80 см, ені — 45 см, ал биіктігі — 55 см. Су деңгейі аквариумның жоғарғы жиегінен 10 см төмен болу үшін осы аквариумға неше литр су құю керек?

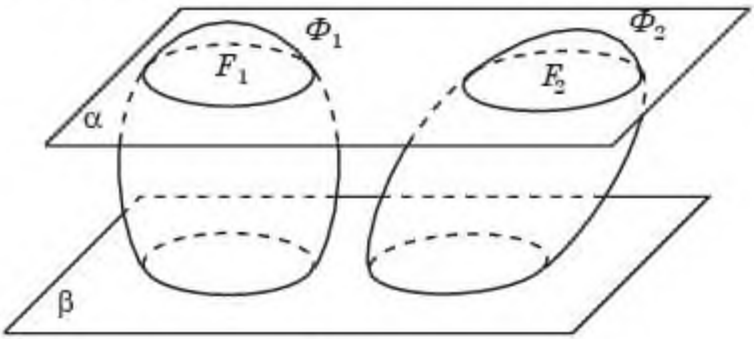
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

12.27. Призманың, іштей сызылған және сырттай сызылған призмалардың анықтамаларын қайталаңдар.

§ 13. Призма көлемі

Итальяндық математик Бонавентура Кавальери (1598—1647жж.) ұсынған кеңістіктік фигуралардың көлемін есептеу әдісін қарастырайық.

Кавальери принципі. ***Егер кеңістіктегі Φ_1 және Φ_2 фигураларының бір жазықтыққа параллель жазықтықтармен қималарында аудандары бірдей F_1 және F_2 фигуралары пайда болса, онда берілген кеңістіктік фигуралардың көлемдері тең болады*** (13.1-сурет).



13.1-сурет

Кавальери принципін негіздеу үшін Φ_1 және Φ_2 фигураларын қалыңдығы бірдей жұқа қабаттардан құрастырылған деп аламыз. Олар Φ_1 және Φ_2 фигураларының қандай да бір жазықтыққа параллель жазықтықтармен қиылысуы кезінде пайда болады (13.1-сурет). Осы қабаттардың қалыңдығы мен аудандарының теңдігінен олардың көлемдерінің теңдігі шығады. Демек, осы қабаттардан құрылған Φ_1 және Φ_2 фигураларының көлемдері де тең болады.

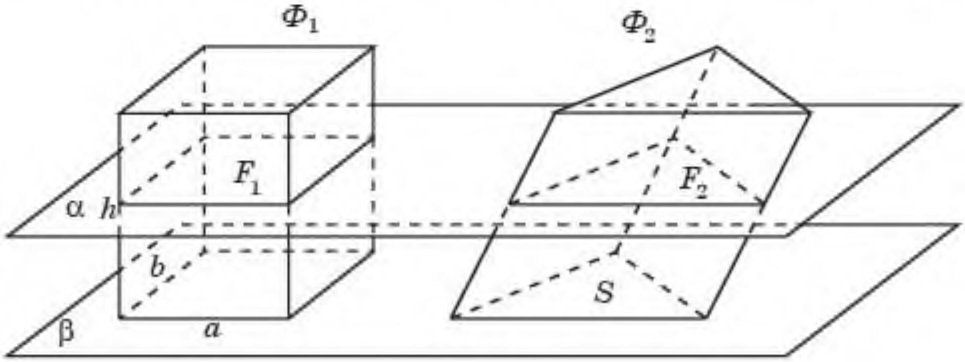
Кавальери принципін қолданып, кез келген призманың көлемін табу формуласын қорытуға болады.

Теорема. ***Призманың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады:***

$$V = S \cdot h,$$

мұндағы S — призманың табанының ауданы, h — призманың биіктігі.

Дәлелдеуі. Табанының ауданы S және биіктігі h болатын призма үшін тікбұрышты параллелепипедті қарастырамыз. Оның бір төбесінен шығатын қырлары a, b, h-қа тең және $a \cdot b = S$ болсын. Призма мен параллелепипедті оның a, b қабырғалары жатқан жағы призма табанының β жазықтығында жататындай және өздері осы жазықтықтың бір жақ бөлігінде болатындай орналастырамыз (13.2-сурет).



13.2-сурет

Параллелепипедтің β жазықтығына параллель α жазықтығымен қимасында β жазықтығындағы қабырғалары a, b болатын тіктөртбұрышқа тең тіктөртбұрыш пайда болады. Призманың осы α жазықтығымен қимасында призманың табанына тең көпбұрыш алынады. Бұл қималардың аудандары тең. Демек, Кавальери принципі бойынша параллелепипед пен призманың көлемдері тең болады. Осыдан призманың көлемі $V = S \cdot h$ болатыны шығады. ◻

Тік призманың биіктігі оның бүйір қырымен беттеседі, ал көлемі табанының ауданы мен бүйір қырының көбейтіндісіне тең болады.

Биіктігі h және табанының қабырғалары a болатын дұрыс: а) үшбұрышты; ә) алтыбұрышты призманың көлемін табу формуласын қорытып шығарыңдар.

Сұрақтар

1. Кавальери принципі қалай тұжырымдалады?
2. Призманың көлемі қалай есептеледі?

Есептер

A

13.1. Үшбұрышты призманың табаны — катеттері 3 см және 4 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призманың биіктігі 10 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

13.2. Дұрыс үшбұрышты призманың биіктігі 5 см-ге, ал табанының қабырғалары 4 см-ге тең. Осы призманың көлемін табыңдар.

13.3. Дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір қырлары 3 см-ге, ал табанының қабырғалары 2 см-ге тең. Осы призманың көлемін табыңдар.

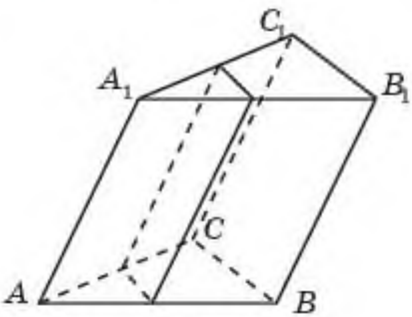
13.4. Төртбұрышты призманың табаны — қабырғалары 1 см-ге тең квадрат. Призманың бүйір қырлары 2 см-ге тең және олар табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Призманың көлемін табыңдар.

13.5. Параллелепипедтің жағы — қабырғалары 1 см және сүйір бұрышы 60° болатын ромб. Параллелепипедтің бір қыры 1 см-ге тең және осы жағымен 60° бұрыш жасайды. Оның көлемін табыңдар.

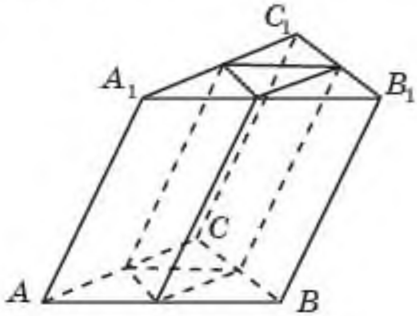
B

13.6. Дұрыс үшбұрышты призманың көлемі 4800 $см^3$-ге, ал табанының қабырғалары 20 см-ге тең. Призманың биіктігін табыңдар.

13.7. Үшбұрышты призманың табанының орта сызығы арқылы оның бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген (13.3-сурет). Бұл жазықтық призманың көлемін қандай қатынаста бөледі?



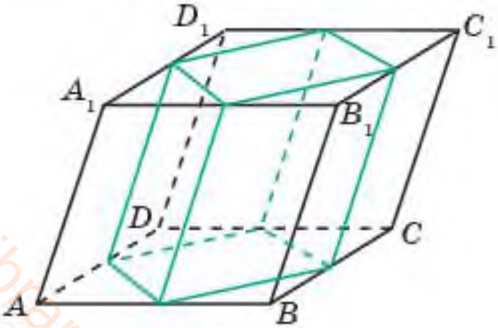
13.3-сурет



13.4-сурет

13.8. Үшбұрышты призманың көлемі 12 $см^3$-ге тең. Табанының төбелері берілген призманың табанының қабырғаларының орталары болатын екінші призманың көлемін табыңдар (13.4-сурет).

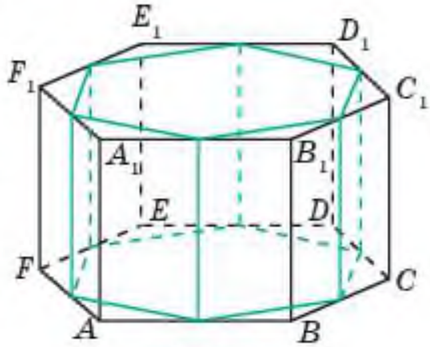
13.9. Төртбұрышты призманың көлемі 10 $см^3$-ге тең. Табанының төбелері берілген призманың табанының қабырғаларыныңорталары болатын екінші призманың көлемін табыңдар (13.5-сурет).



13.5-сурет

13.10. Алтыбұрышты призманың көлемі 12 см^3-ге тең. Табанының төбелері берілген призманың табанының қабырғаларыныңорталары болатын екінші призманың көлемін табыңдар (13.6-сурет).

13.10. Алтыбұрышты призманың көлемі 12 см^3-ге тең. Табанының төбелері берілген призманың табанының қабырғаларының орталары болатын екінші призманың көлемін табыңдар (13.6-сурет).

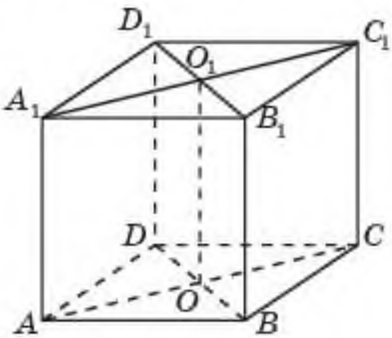


13.6-сурет

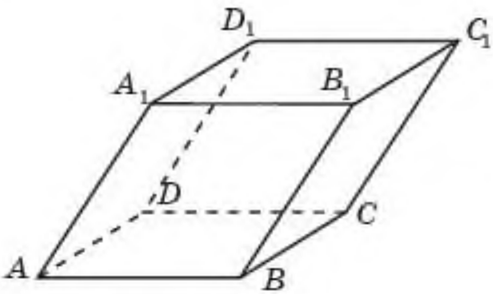
13.11. Екі дұрыс n-бұрышты призма ұқсас болуы үшін олардың бүйір қырлары мен табанының қабырғаларына қатысты шарттарды тұжырымдаңдар. Осы призмалардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

C

13.12. Тік призманың табаны — ауданы 1 м^2-ге тең болатын ромб. Оның диагональдық қималарының аудандары 3 м^2-ге және 6 м^2-ге тең (13.7-сурет). Призманың көлемін табыңдар.



13.7-сурет



13.8-сурет

13.13. Параллелепипедтің ортақ төбесі бар үш жағы — қабырғалары 1 см, төбесіндегі сүйір бұрышы 60°-қа тең ромб (13.8-сурет). Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

13.14. Айналу денелерінің және цилиндрдің анықтамаларын қайталаңдар.

§ 14. Цилиндр көлемі

Кавальери принципін цилиндрдің көлемін табуда қолданайық.

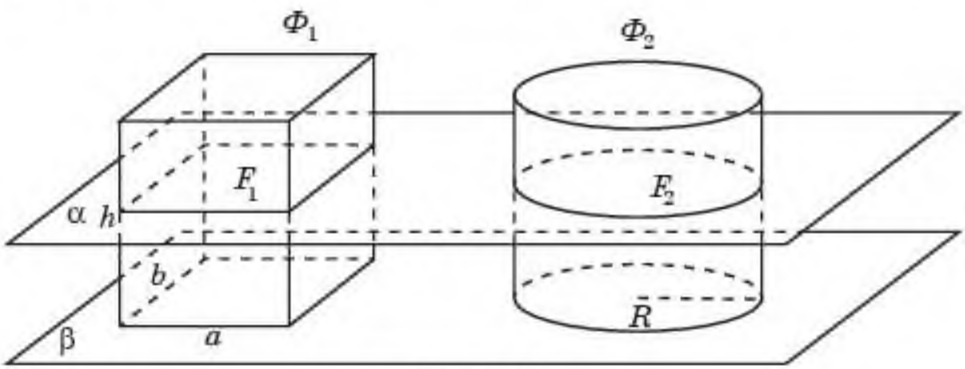
Теорема. ***Цилиндрдің көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады:***

$$\boldsymbol{V = S \cdot h = \pi R^2 \cdot h,}$$

мұндағы S — цилиндрдің табанының ауданы, R — табанының радиусы, h — цилиндрдің биіктігі.

Дәлелдеуі. Теореманың дәлелдемесі призманың көлемін табу формуласының дәлелдемесіне ұқсас болады. Табанының радиусы R және биіктігі h болатын цилиндр үшін тікбұрышты параллелепипедті қарастырамыз. Оның бір төбесінен шығатын қырлары a, b, h-қа тең және $a \cdot b = \pi R^2$ болсын.

Цилиндр мен параллелепипедті оның a, b қабырғалары жатқан жағы цилиндр табанының β жазықтығында жататындай және өздері осы жазықтықтың бір жақ бөлігінде болатындай орналастырамыз (14.1-сурет).



14.1-сурет

Параллелепипедтің β жазықтығына параллель α жазықтығымен қимасында β жазықтығындағы қабырғалары a, b болатын тіктөртбұрышқа тең тіктөртбұрыш пайда болады. Цилиндрдің осы α жазықтығымен қимасында — цилиндрдің табанына тең дөңгелек алынады. Бұл қималардың аудандары тең. Демек, Кавальери принципі бойынша параллелепипед пен цилиндрдің көлемдері тең болады. Осыдан цилиндрдің көлемі $\pi R^2 \cdot h$ болатыны шығады. ☐

Сұрақтар

1. Цилиндрдің көлемі қалай есептеледі?

Есептер

A

14.1. Цилиндрдің жасаушысы 3 см-ге, ал табанының радиусы 2 см-ге тең. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

14.2. Цилиндрдің осьтік қимасы — қабырғасы a см болатын квадрат. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

14.3. Бір кесе екіншісіне қарағанда 2 есе биіктеу, ал екінші кесе біріншісіне қарағанда 1,5 есе кеңірек. Қандай кесенің сыйымдылығы жоғары?

14.4. Квадраттың қабырғасы a-ға тең. Квадратты қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

14.5. Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі 1 см-ге тең және ол табан жазықтығына 30° бұрыш жасап көлбейді. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

14.6. Бірлік кубқа іштей сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

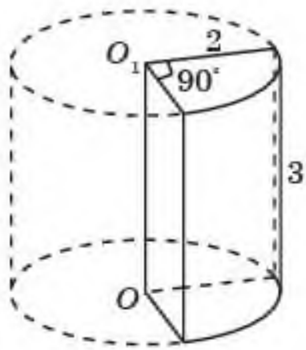
14.7. Тік призманың табаны — қабырғасы 1 см-ге тең квадрат. Призманың бүйір қыры 2 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

B

14.8. Тіктөртбұрышты a және b-ға тең қабырғалары жатқан түзулерден айналдырғанда екі цилиндр пайда болды. Осы цилиндрлердің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

14.9. Дұрыс төртбұрышты призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемі осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің көлемінен неше есе артық?

14.10. 14.2-суреттегі цилиндрдің табанының радиусы 2 см-ге, ал жасаушысы 3 см-ге тең. Осы цилиндрден екіжақты тік бұрыш жасап қиылып алынған бөлігінің көлемін табыңдар.



14.2-сурет

14.11. Цилиндрлік ыдыстың табанының диаметрі 9 см-ге тең. Ыдысқа қандай да бір бөлшекті салғанда оның ішіндегі сұйықтың деңгейі 12 см-ге көтерілді. Бөлшектің көлемін табыңдар.

14.12. Цилиндрлік ыдыстағы сұйықтың деңгейі 16 см-ге тең. Егер осы сұйықты диаметрі бұл ыдыстан 2 есе үлкен болатын екінші ыдысқа құйса, онда сұйықтың деңгейі қандай биіктікте болады?

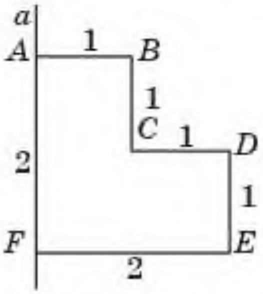
14.13. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы — қабырғалары 1 см және 2 см болатын тіктөртбұрыш. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

14.14. Бірлік сфераға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

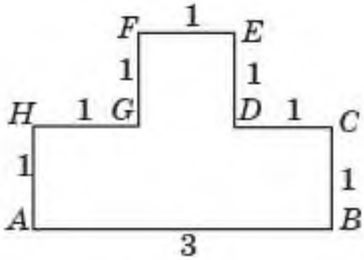
14.15. Екі цилиндр ұқсас болу үшін олардың табандарының радиустары мен жасаушыларына қатысты шарттарды жазыңдар. Олардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

C

14.16. 14.3-суретте барлық бұрыштары тік болатын көпбұрыш кескінделген. Осы көпбұрышты 2 см-ге тең қабырғасы жататын түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.



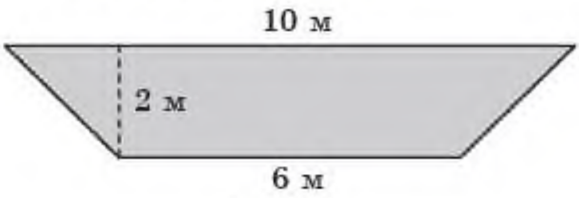
14.3-сурет



14.4-сурет

14.17. 14.4-суретте барлық бұрыштары тік болатын көпбұрыш кескінделген. Осы көпбұрышты 3 см-ге тең қабырғасы жататын AB түзуінен айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

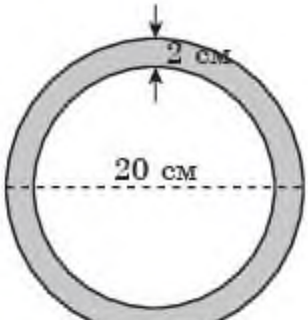
14.18. Өзен арнасының көлденеңінен кесілген кескіні теңбүйірлі трапеция тәріздес. Оның табандары 10 м және 6 м, ал биіктігі — 2 м (14.5-сурет). Өзен ағысының жылдамдығы 1 м/с болса, осы кескіннен 1 мин-та қандай көлемде су өтетінін табыңдар. Жауабын метр кубпен беріңдер.



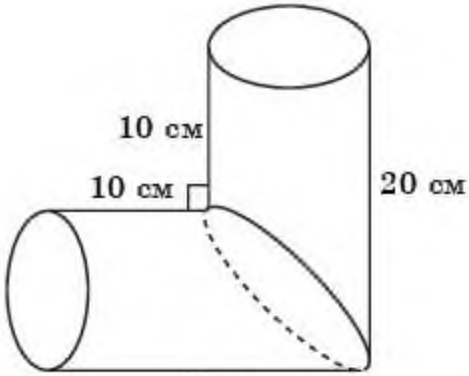
14.5-сурет

14.19. Шойын құбырының ұзындығы 2 м, ал сыртқы диаметрі 20 см-ге тең. Құбыр қабырғасының қалыңдығы 2 см (14.6-сурет). Егер шойынның тығыздығы шамамен 7,5 г/см^3 болса, құбырдың салмағын табыңдар. Жауабын килограммен беріңдер ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

14.20. 14.7-суреттегі $90°$ бұрыш жасайтын цилиндрлердің екі тең бөлігінен тұратын фигураның көлемін табыңдар ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).



14.6-сурет



14.7-сурет

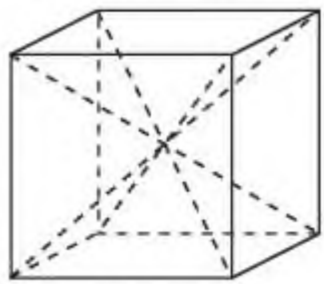
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

14.21. Пирамиданың және қиық пирамиданың анықтамаларын қайталаңдар.

§ 15. Пирамида және қиық пирамида көлемдері

Пирамиданың көлемін есептеу туралы алғашқы мәліметтер б.з.д. 3000 жыл бұрын ежелгі вавилондықтар мен мысырлықтардың папирустарынан табылған.

Бір қызығы, олар пирамиданың көлемін табудың жалпы формуласын қорытып шығармады, бірақ нақты пирамидалардың көлемдерін есептеген. Осылайша биіктігі $\frac{1}{2}$-ге, ал табаны өлшем бірлігіне тең дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемін таба білген. Ол үшін олар қыры өлшем бірлігіне тең кубты алып, оны 6 тең дұрыс төртбұрышты пирамидаларға бөледі. Бұл пирамидалардың табандары кубтың жақтары болады және олардың әрқайсысының төбесі кубтың центрінде орналасады (15.1-сурет). Барлық алты пирамида өзара тең болады. Осыдан олардың әрқайсының көлемі кубтың көлемінің $\frac{1}{6}$-не тең болатынын аламыз.

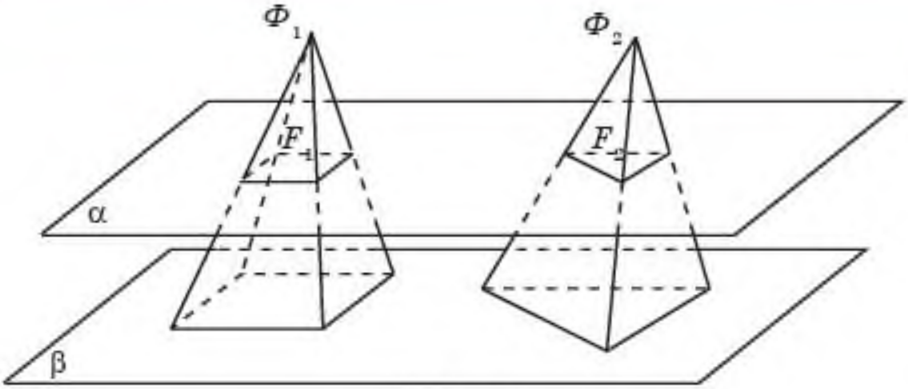


15.1-сурет

Кавальери принципін қолданып, мынадай көмекші теореманы дәлелдейік.

Теорема. ***Егер екі пирамиданың биіктіктері және табандарының аудандары өзара тең болса, онда олардың көлемдері тең болады.***

Дәлелдеуі. Φ_1 және Φ_2 пирамидаларының биіктіктері h-қа тең болсын және аудандары S-ке тең болатын табандары бір β жазықтығында жатсын (15.2-сурет).

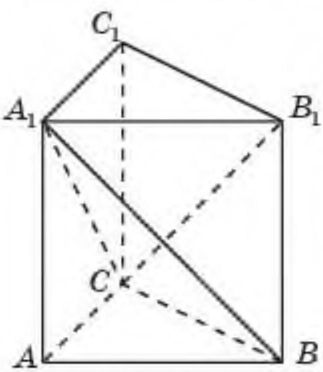


15.2-сурет

β жазықтығына параллель және одан x ($0 \leqslant x \leqslant h$) қашықтықта болатын α жазықтығын жүргіземіз (15.2-сурет). Сонда пирамидалардың осы жазықтықпен қималарында пайда болған F_1 және F_2 фигуралары сәйкесінше табандарына ұқсас болады және екеуінде де k ұқсастық коэффициенті $(h - x) : h$-қа тең болады. Демек, F_1 және F_2 фигураларының S_1 және S_2 аудандары сәйкесінше $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулаларымен өрнектеледі. Ендеше, олар өзара тең болады. Кавальери принципі бойынша пирамидалардың көлемдері тең болатыны шығады.

Енді үшбұрышты пирамиданың көлемі туралы негізгі теореманы дәлелдейік.

Теорема. ***Үшбұрышты пирамиданың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең болады.***



15.3-сурет

Дәлелдеуі. A_1ABC — үшбұрышты пирамида болсын. Оны $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмасына дейін толықтырып саламыз (15.3-сурет).

B, C, A_1 және C, B_1, A_1 нүктелері арқылы өтетін жазықтықтар бұл призманы төбесі A_1 нүктесі болатын A_1ABC, A_1CBB_1 және $A_1CB_1C_1$ пирамидаларына бөледі.

A_1CBB_1 және $A_1CB_1C_1$ пирамидаларының CBB_1 және CB_1C_1 табандары тең болады, өйткені CB_1 диагоналі CBB_1C_1 параллелограмын екі тең үшбұрыштарға бөледі. Сонымен қатар бұл пирамидалардың төбелері ортақ және табандары бір жазықтықта жатыр. Демек, бұл пирамидалардың ортақ биіктігі болады. Осыдан пирамидалардың көлемдері тең болатыны шығады. Енді A_1ABC және $CA_1B_1C_1$ пирамидаларын қарастырайық. Олардың ABC және $A_1B_1C_1$ табандары тең және биіктіктері де тең болады. Демек, бұл пирамидалардың көлемдері тең болады. Сонымен, барлық үш пирамиданың көлемдері тең болады.

Призманың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең екенін ескеріп, үшбұрышты пирамиданың V көлемін табу формуласын аламыз:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

мұндағы S — пирамида табанының ауданы, h — пирамиданың биіктігі.

Енді кез келген пирамиданың көлемін табу мәселесін қарастырайық.

Теорема. ***Пирамиданың көлемі оның табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең болады.***

Дәлелдеуі. Берілген пирамида үшін табанының ауданы мен биіктігі бірдей үшбұрышты пирамиданы қарастырамыз.

Кавальери принципі бойынша бұл пирамидалардың көлемдері тең болады. Демек, мынадай формула орынды болып табылады:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

мұндағы S — пирамида табанының ауданы, h — пирамиданың биіктігі.

Биіктігі h және табанының қабырғалары a болатын дұрыс: а) үшбұрышты; ә) алтыбұрышты пирамиданың көлемін табу формуласын қорытып шығарыңдар.

Қиық пирамиданың көлемін табу формуласын шығарайық.

Теорема. ***Қиық пирамиданың V көлемі мынадай формуламен есептеледі:***

$$V = \frac{1}{3}h_қ(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

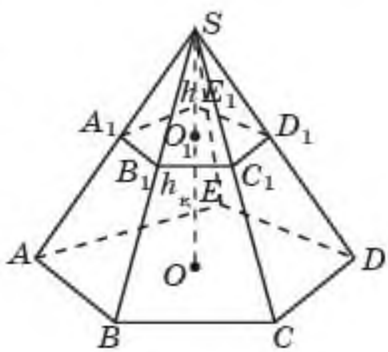
мұндағы S, s — қиық пирамида табандарының аудандары, $h_қ$ — оның биіктігі.

Дәлелдеуі. Қиық пирамида табандарының аудандары S және s-ке тең болсын. Ал оның $h_қ$ биіктігі бастапқы және қиылып түскен пирамидалардың биіктіктерінің $(H - h)$ айырымына тең болсын.

15.4-суретте $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ бесбұрышты қиық пирамида кескінделген.

Қиық пирамиданың V көлемі үшін мынадай формула орынды болады:

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$



15.4-сурет

Қиық пирамиданың $h_қ$ биіктігін оның табандарының S, s аудандары мен бастапқы және қиылып түскен пирамидалардың H, h биіктіктері арқылы өрнектейміз.

Пирамиданың табанына параллель жазықтықпен қимасында оның табанына ұқсас фигура пайда болатынын байқаймыз. Ал ұқсастық коэффициенті пирамиданың төбесінен қима жазықтығына және табан жазықтығына дейінгі қашықтықтардың қатынасына тең, яғни $\frac{h}{H}$-қа тең болады. Сонымен қатар ұқсас фигуралардың аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициенттің квадратына тең болады.

Осыдан мынадай теңдікті аламыз:

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{H - h_қ}{H}\right)^2.$$

Бұл теңдіктен H және h биіктіктерін табамыз:

$$H = \frac{h_қ\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}},\ h = \frac{h_қ\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Табылған H, h мәндерін қиық пирамиданың V көлемі үшін формулаға қойып, ізделінді формуланы табамыз:

$$V = \frac{1}{3}\left(S\frac{h_қ\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} - s\frac{h_қ\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}h_қ \cdot \frac{S\sqrt{s} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} = \frac{1}{3}h_қ(S + \sqrt{S \cdot s} + s).$$

Биіктігі $h_қ$ және табандарының қабырғалары a мен b болатын дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың көлемін табу формуласын қорытып шығарыңдар.

Сұрақтар

1. Үшбұрышты пирамиданың көлемі қалай есептеледі?
2. Кез келген пирамиданың көлемі қалай есептеледі?
3. Қиық пирамиданың көлемі қалай есептеледі?

Есептер

A

15.1. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі h-қа, ал табанының қабырғалары a-ға тең. Осы пирамиданың көлемін табу формуласын қорытып шығарыңдар.

15.2. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 3 м-ге, ал бүйір қырлары 5 м-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

15.3. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі мен табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

15.4. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың биіктігі мен табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

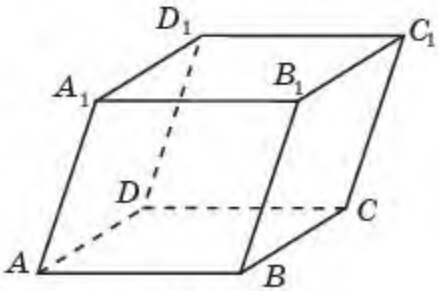
15.5. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

15.6. Тетраэдрдің қыры 1 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

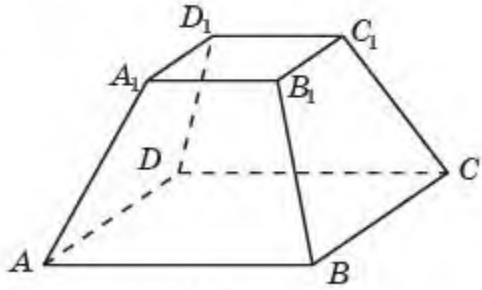
15.7. Егер дұрыс тетраэдрдің барлық қырларын 2 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

15.8. Егер дұрыс пирамиданың биіктігін 3 есе арттырса, ал табанының қабырғаларын 3 есе кемітсе, онда оның көлемі қалай өзгереді?

15.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің көлемі 1 см^3-ге тең. Төбелері: 1) A, B, C, D, B_1; 2) A, B, D, C_1 нүктелері болатын көпжақтың көлемін табыңдар (15.5-сурет).



15.5-сурет



15.6-сурет

15.10. Пирамиданың биіктігінің ортасы арқылы өтетін және табанына параллель жазықтықпен қимасы жүргізілген. Пирамиданың пайда болған бөліктері көлемдерінің қатынасын табыңдар.

15.11. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың биіктігі 3 см-ге, ал табандарының қабырғалары 2 см және 1 см-ге тең. Қиық пирамиданың көлемін табыңдар (15.6-сурет).

B

15.12. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың диагональдық қимасы — қабырғасы 1 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

15.13. Үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары өзара перпендикуляр және олардың әрқайсысы 1 см-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

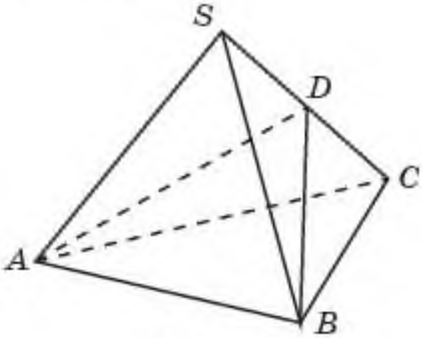
15.14. Үшбұрышты пирамиданың барлық бүйір қырлары 1 см-ге, ал төбесіндегі жазық бұрыштары 60°, 90° және 90°-қа тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

15.15. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың көлемі 6 см^3-ге, табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

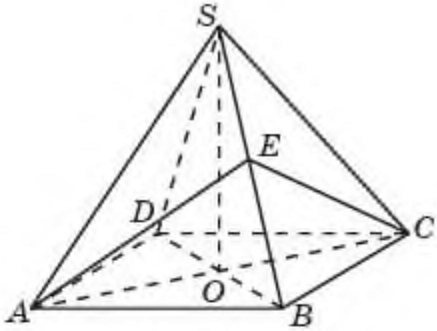
15.16. Параллелепипедтің көлемі 1 см^3-ге тең (15.5-сурет). BDA_1C_1 тетраэдрінің көлемін табыңдар.

15.17. Үшбұрышты пирамиданың табанының бір қабырғасы және оған қарсы жатқан қырының ортасы арқылы жазықтық өтеді

(15.7-сурет). Бұл жазықтық пирамиданың көлемін қандай қатынаста бөледі?

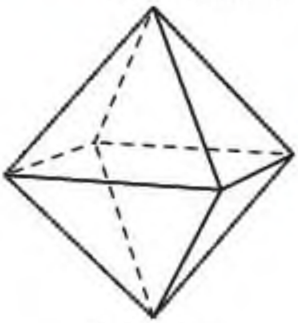


15.7-сурет



15.8-сурет

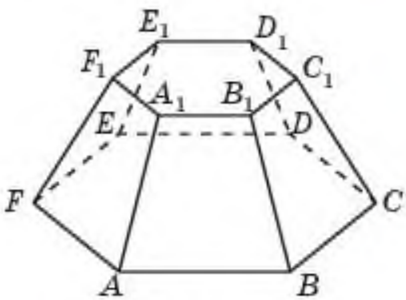
15.18. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемі 12 см^3-ге тең. Пирамиданың табанының AC диагоналі және оған қарсы жатқан бүйір қырының E ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қиылып түскен бөлігінің көлемін табыңдар (15.8-сурет).



15.9-сурет

15.19. Октаэдрдің қырлары 1 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар (15.9-сурет).

15.20. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың биіктігі 3 см-ге, ал табандарының қабырғалары 2 см және 1 см-ге тең (15.10-сурет). Осы пирамиданың көлемін табыңдар.



15.10-сурет

15.11-сурет

15.21. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бейбітшілік пен келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес болып табылады (15.11-сурет). Оның биіктігі мен табанының қабырғасы 62 м-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

15.22. Дұрыс n-бұрышты екі пирамида ұқсас болу үшін олардың бүйір қырлары мен табандарының қабырғаларына қатысты шарттарды жазыңдар. Олардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

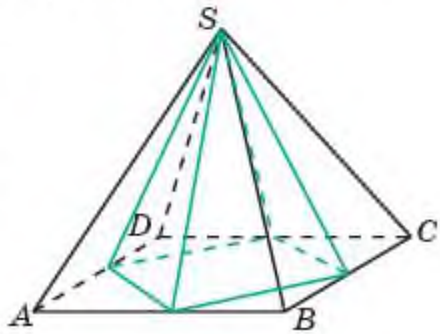
C

15.23. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1 см-ге, ал оның бүйір жағы мен табанының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

15.24. $SABCD$ төртбұрышты пирамидасының көлемі 1 $см^3$-ге тең. Төбесі берілген пирамиданың S төбесімен сәйкес келетін, ал табанының төбелері $ABCD$ табаны қабырғаларының орталары болатын пирамиданың көлемін табыңдар (15.12-сурет).

15.25. Тетраэдрдің көлемі 1 $см^3$-ге тең. Төбелері осы тетраэдрдің қырларының орталары болатын көпжақтың көлемін табыңдар.

15.26. 15.13-суретте ежелгі Мысырдағы ең үлкен ғимараттардың бірі — Хеопс пирамидасы — дұрыс төртбұрышты пирамида кескінделген. Оның биіктігі 146 м-ге, ал бүйір қырлары 230 м-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.



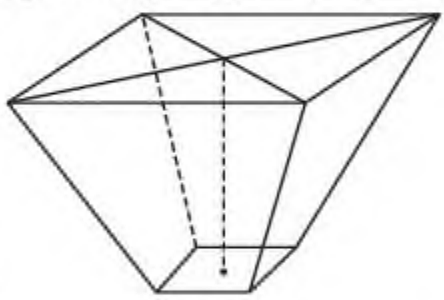
15.12-сурет

15.13-сурет

15.14-сурет

15.27. 15.14-суретте шатыры пирамида пішіндес тұрғын үй бейнеленген және оның табаны — квадрат. Пирамиданың барлық қырлары 12 м-ге тең. Осы үйдің шатырының көлемін табыңдар.

15.28. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида пішіндес көгөністерді сақтауға арналған жәшіктің табандарының қабырғалары сәйкесінше 6 дм және 14,4 дм-ге тең (15.15-сурет). Пирамиданың биіктігі — 4,3 дм. Егер 1 $дм^3$-де



15.15-сурет

0,675 кг көгөніс болса, онда жәшіктің көлемі мен оның ішіндегі көгеністің салмағын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

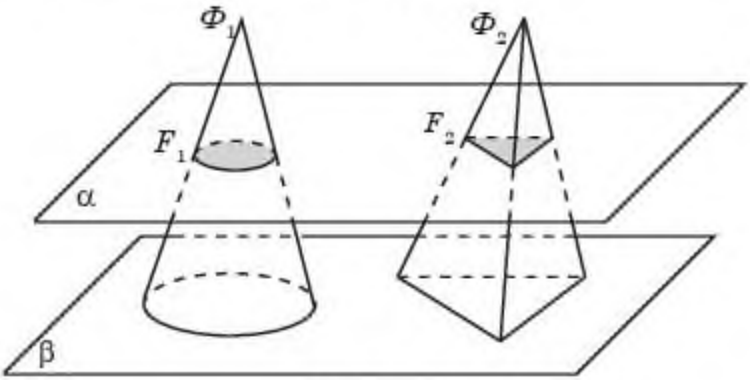
15.29. Конустың және қиық конустың анықтамаларын қайталаңдар.

§ 16. Конус және қиық конус көлемдері

Кавальери принципін конустың көлемін табуда қолданайық.

Теорема. ***Конустың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігі көбейтіндісінің үштен біріне тең болады.***

Дәлелдеуі. Табанының ауданы S және биіктігі h-қа тең конус үшін табанының ауданы және биіктігі дәл сондай болатын қандай да бір пирамиданы қарастырамыз. Оларды табандары β жазықтығында жататындай және өздері осы жазықтықтың бір жақ бөлігінде болатындай орналастырамыз (16.1-сурет).



16.1-сурет

β жазықтығына параллель және одан x қашықтықта болатын α жазықтығын жүргіземіз ($0 < x < h$). Сонда конус пен пирамиданың осы жазықтықпен қималарында пайда болған F_1 және F_2 фигуралары сәйкесінше табандарына ұқсас болады және екеуінде де k ұқсастық коэффициенті $(h - x) : h$-қа тең болады. Демек, F_1 және F_2 фигураларының S_1 және S_2 аудандары сәйкесінше $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулаларымен өрнектеледі. Ендеше, олар өзара тең болады. Кавальери принципі бойынша конус пен пирамиданың көлемдері тең болатыны шығады. Осыдан конустың V көлемін табу үшін мынадай формула орынды болады:

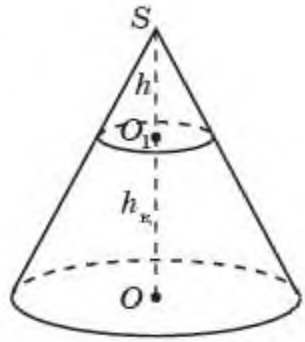
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

мұндағы R — конустың табанының радиусы, h — конустың биіктігі.

Қиық пирамиданың көлемін табу формуласына ұқсас қиық конустың көлемі үшін мынадай формула орынды болады:

$$V = \frac{1}{3}h_{қ}(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

мұндағы S, s — қиық конустың табандарының аудандары, $h_{қ}$ — қиық конустың биіктігі (16.2-сурет).



16.2-сурет

Бұл формуланың дәлелдемесі қиық пирамиданың көлемін табу формуласына ұқсас болады. Оны өздерің дәлелдеңдер.

Қиық конустың табандарының S және s аудандары сәйкесінше πR^2 және πr^2-қа тең екенін ескеріп, оның V көлемін табу үшін мынадай формуланы аламыз:

$$V = \frac{1}{3}\pi h_{қ}(R^2 + \sqrt{R \cdot r} + r^2).$$

мұндағы R және r — қиық конус табандарының радиустары, $h_{қ}$ — қиық конустың биіктігі.

Сұрақтар

1. Конустың көлемі қалай есептеледі?
2. Қиық конустың көлемі қалай есептеледі?

Есептер

A

16.1. Егер конустың: 1) биіктігін 3 есе арттырса; 2) табанының радиусын 2 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

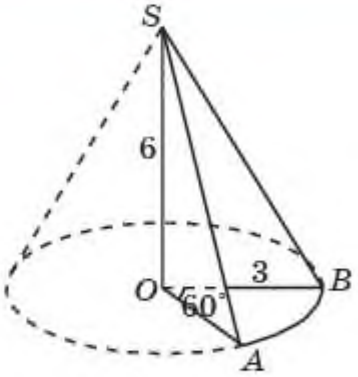
16.2. Егер конустың биіктігін 2 есе кемітсе, ал табанының радиусын 2 есе арттырса, онда оның көлемі өзгере ме?

16.3. Цилиндр мен конустың ортақ табаны бар және биіктігі бірдей. Цилиндрдің көлемі 15 см^3-ге тең деп алып, конустың көлемін табыңдар.

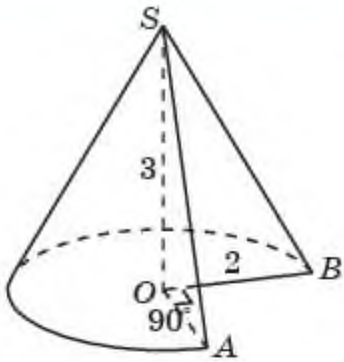
16.4. Конустың көлемі V-ға тең. Конустың биіктігінің ортасы арқылы өтетін және табанына параллель қима жүргізілген. Конустың пайда болған бөліктерінің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

16.5. Конустың биіктігі 3 см-ге, ал жасаушысы 5 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

16.6. Конустың табанының радиусы 3 см-ге, ал биіктігі 6 см-ге тең және $\angle AOB = 60°$. 16.3-суреттегі конустың бөлігінің көлемін табыңдар.



16.3-сурет



16.4-сурет

16.7. Конустың табанының радиусы 2 см-ге, ал биіктігі 3 см-ге тең және $\angle AOB = 90^\circ$. 16.4-суреттегі конустың бөлігінің көлемін табыңдар.

16.8. Қиық конустың табандарының радиустары 1 см және 2 см-ге, ал биіктігі 3 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

B

16.9. Конустың табанының диаметрі 12 см-ге, ал осьтік қимасының төбесіндегі бұрышы 90°-қа тең. Конустың көлемін табыңдар.

16.10. Конустың осьтік қимасы — ауданы 9 $см^2$ болатын тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш. Конустың көлемін табыңдар.

16.11. Қабырғасы 1 см болатын теңқабырғалы үшбұрышты оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

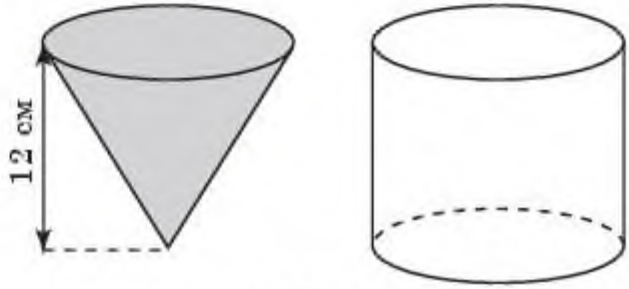
16.12. Теңбүйірлі емес тікбұрышты үшбұрышты оның әрбір катетінен айналдырғанда екі конус пайда болды. Осы конустардың көлемдері тең бола ма?

16.13. Конустың көлемі 1 $см^3$-ге тең. Конустың биіктігі тең үш бөлікке бөлінген және бөліну нүктелері арқылы оның табанына параллель жазықтықтар жүргізілген. Конустың ортаңғы бөлігінің көлемін табыңдар.

16.14. Биіктігі 12 см болатын конустық ыдысқа толтырылған су цилиндрлік ыдысқа аударылып құйылды. Цилиндрлік ыдыстың табанының радиусы конустық ыдыс шеңберінің радиусына тең (16.5-сурет). Цилиндрлік ыдыстағы судың беті оның табанынан қандай биіктікте болады?

16.15. Қиық конустың табандарының радиустары 6 см және 2 см, ал жасаушысы 5 см-ге тең. Осы қиық конустың көлемін табыңдар.

16.16. Теңбүйірлі трапецияның табандары 4 см және 6 см, ал биіктігі 3 см-ге тең. Трапецияны оның табандарының орталары арқылы



16.5-сурет

өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

16.17. Екі конус ұқсас болу үшін олардың жасаушылары мен табандарының радиустарына қатысты шарттарды жазыңдар. Осы конустардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

16.18. Киіз үй — көшпенділердің ежелден келе жатқан тұрғын үйі (16.6-сурет). Киіз үйдің керегесі цилиндр пішіндес, ал осы кереге мен шаңырақты жалғастырып тұратын уықтар қиық конусты жасайды. Цилиндрдің табанының диаметрі 5 м-ге, қиық конустың табандарының диаметрлері 5 м және 1 м-ге, ал цилиндр мен қиық конустың биіктіктері 2 м-ге тең. Киіз үйдің көлемін табыңдар.

16.6-сурет

C

16.19. Тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыштың ұзындығы 3 см-ге тең катеті жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

16.20. Бірлік квадратты оның диагоналі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

16.21. Конустың бүйір бетінің жазбасы — радиусы 2 см-ге тең жарты дөңгелек. Конустың көлемін табыңдар.

16.22. Құрылыс алаңындағы конус пішіндес үйінді құмның табанындағы шеңберінің ұзындығын метрлік таспамен өлшегенде 21,6 м болды (16.7-сурет). Метрлік таспаны үйіндінің төбесі арқылы асыра лақтырып өлшегенде оның екі жасаушысының ұзындығы 7,8 м екені анықталды. Үйінді құмның көлемін табыңдар ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

16.7-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

16.23. Шардың анықтамасын және Кавальери принципін қайталаңдар.

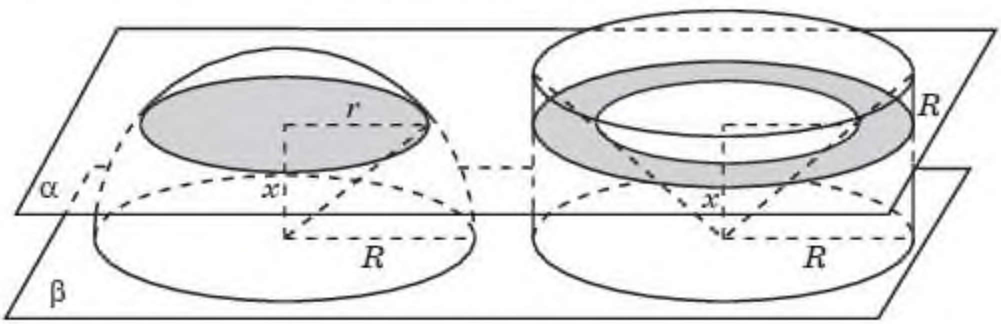
§ 17. Шар көлемі

Кавальери принципін қолданып, шардың көлемін табу формуласын қорытып шығарайық.

Теорема. ***Радиусы R-ге тең шардың V көлемі мынадай формуламен есептеледі:***

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Дәлелдеуі. Радиусы R-ге тең және табаны β жазықтығында жататын жарты шарды қарастырайық. Сонымен қатар табаны осы β жазықтығында жататын цилиндрді алайық және оның табанының радиусы R-ге, биіктігі де R-ге тең болсын (17.1-сурет).



17.1-сурет

Төбесі цилиндрдің төменгі табанының центрінде, ал табаны цилиндрдің жоғарғы табаны болатындай осы цилиндрге іштей конус сызамыз.

Конустың ішінде жатпайтын цилиндрдің нүктелерінен тұратын Φ фигурасы мен берілген жарты шардың көлемдері тең болатынын дәлелдейік.

β жазықтығына параллель және одан x қашықтықта болатын α жазықтығын жүргіземіз ($0 < x < R$). Сонда жарты шардың осы жазықтықпен қимасында радиусы $\sqrt{R^2 - x^2}$ және ауданы $\pi(R^2 - x^2)$ болатын дөңгелек алынады. Φ фигурасының α жазықтығымен қимасында ішкі дөңгелегінің радиусы x-ке, ал сыртқы дөңгелегінің радиусы R-ге тең сақина пайда болады. Бұл сақинаның ауданы $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$-қа тең. Демек, ол жарты шардың қимасы ауданына тең болады.

Кавальери принципі бойынша, жарты шар мен Φ фигурасының көлемдері тең болады. Осы көлемді есептейік. Ол цилиндр мен конустың көлемдерінің айырымына тең болады, яғни

$$V = V_ц - V_к = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Шардың көлемі жарты шардың көлемінен екі есе үлкен болады. Демек, шардың көлемі мынадай формуламен есептеледі:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$ ◻

Сұрақтар

1. Шардың көлемі қалай анықталады?

Есептер

A

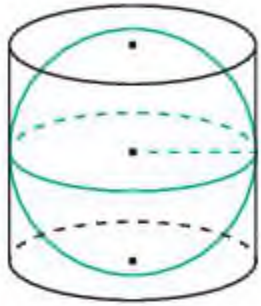
17.1. Шардың диаметрі 6 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

17.2. Егер шардың радиусын: 1) 3 есе; 2) 4 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

17.3. Үш шардың радиустары 3 см, 4 см және 5 см-ге тең. Көлемі осы шарлардың көлемдерінің қосындысына тең шардың радиусын табыңдар.

17.4. Көлемдерінің қосындысы радиусы 6 см болатын шардың көлеміне тең болатындай радиусы 2 см-ге тең неше шар алуға болады?

17.5. Цилиндрдің биіктігі 2 см-ге тең. Цилиндрге іштей сызылған шардың көлемін табыңдар (17.2-сурет).



17.2-сурет

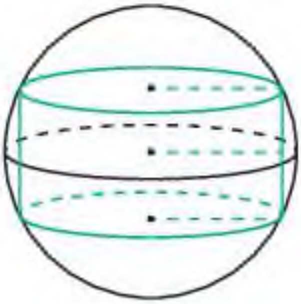
B

17.6. Шардың центрінен 8 см қашықтықтағы жазықтықпен қимасының радиусы 6 см-ге тең. Шардың көлемін табыңдар.

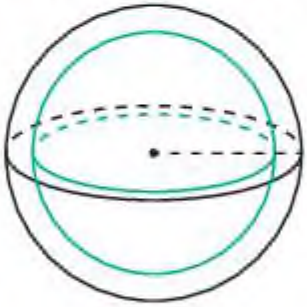
17.7. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусы 1 см-ге тең. Цилиндрге сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар (17.3-сурет).

17.8. Екі шардың беттерінің аудандары $m : n$ қатынасындай. Олардың көлемдері қандай қатынаста болады?

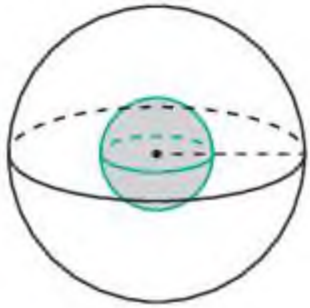
17.9. Центрлері ортақ және радиустары R_1 мен R_2 ($R_1 > R_2$) болатын екі шардың беттерімен шектелген фигура — шарлық сақинаның көлемін табу формуласын табыңдар (17.4-сурет).



17.3-сурет



17.4-сурет



17.5-сурет

17.10. Шиенің мәйегінің қалыңдығы оның ішіндегі сүйегінің диаметріне тең (17.5-сурет). Шие мен оның ішіндегі сүйегін шар тәріздес деп алып, мәйегі мен сүйегінің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

17.11. Апельсин — шар пішіндес жеміс. Оның қабығының қалыңдығы шар радиусының бестен бір бөлігіне тең болады (17.4-сурет). Апельсиннің қабығы оның көлемінің қандай бөлігін құрайды?

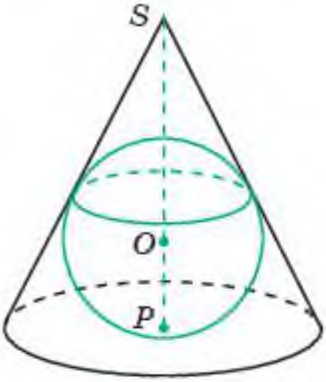
17.12. Нұр-Сұлтан қаласындағы «Бәйтерек» монументі — металдан, шыныдан және бетоннан жасалған әдемі архитектуралық ғимарат, барлық әлемдік бірлестік үшін тәуелсіз Қазақстанның символы (17.6-сурет). Оның төбесінде диаметрі 22 м-ге тең шар бар. Осы шардың көлемін табыңдар.

17.6-сурет

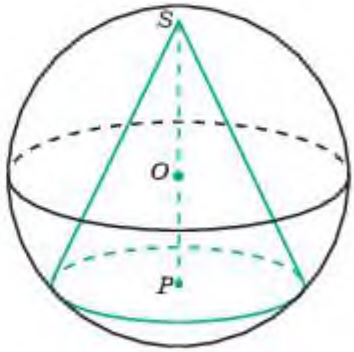
C

17.13. Конус табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Конусқа іштей сызылған шардың көлемін табыңдар (17.7-сурет).

17.14. Конус табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Конусқа сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар (17.8-сурет).

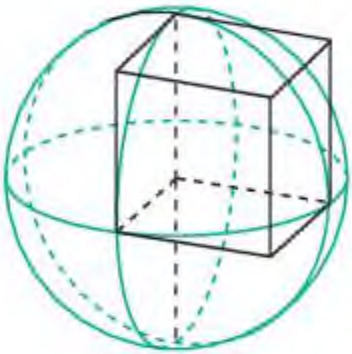


17.7-сурет

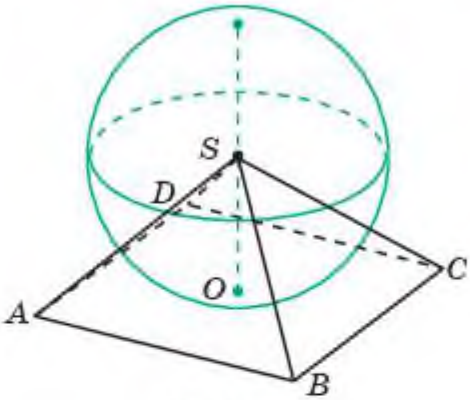


17.8-сурет

17.15. Шардың радиусы 1 см-ге тең. Оның центрінде бірлік кубтың төбесі орналасқан (17.9-сурет). Куб пен шардың ортақ бөлігінің көлемін табыңдар.



17.9-сурет



17.10-сурет

17.16. Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғалары 2 см-ге және оның биіктігі 1 см-ге тең. Радиусы 1 см-ге тең шардың центрінде осы пирамиданың төбесі орналасқан (17.10-сурет). Пирамида пен шардың ортақ бөлігінің көлемін табыңдар.

ӨЗІНДІ ТЕКСЕР!

1. Егер кубтың барлық қырларын 2 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады:

A) 2 есе; B) 4 есе; C) 6 есе; D) 8 есе?

2. Куб бетінің ауданы 12 см^2. Оның көлемін табыңдар:

A) $2\sqrt{2}$ см^3; B) 4 см^3; C) $4\sqrt{2}$ см^3; D) 8 см^3.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының көлемі 6 см^3-ге тең. ACB_1D_1 тетраэдрінің көлемін табыңдар:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Төбелері A, B, C, D, C_1 болатын көпжақтың көлемін табыңдар:

A) 2 см^3; B) 4 см^3; C) 6 см^3; D) 8 см^3.

5. Дұрыс үшбұрышты призманың бүйір қырлары 3 см-ге, ал табанының қабырғалары 2 см-ге тең. Призманың көлемін табыңдар:

A) $\sqrt{3}$ см^3; B) $2\sqrt{3}$ см^3; C) $3\sqrt{3}$ см^3; D) $4\sqrt{3}$ см^3.

6. Үшбұрышты призманың табанының орта сызығы арқылы оның бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген. Егер бастапқы призманың көлемі 8 см^3-ге тең болса, онда осы жазықтықпен қиып алынған үшбұрышты призманың көлемін табыңдар:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың көлемі 12 см^3-ге тең. $ABDEA_1B_1D_1E_1$ параллелепипедінің көлемін табыңдар:

A) 2 см^3; B) 4 см^3; C) 6 см^3; D) 8 см^3.

8. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призманың көлемі 6 см^3-ге тең. $A_1BCC_1B_1$ төртбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың көлемі 12 см^3-ге тең. A_1ABCD пирамиданың көлемін табыңдар:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

10. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың қырлары 2 см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар:

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ см^3; B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см^3; D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см^3.

11. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге тең және олар табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Пирамиданың көлемін табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ см^3; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^3; D) $\sqrt{3}$ см^3.

12. Цилиндрлік ыдыстағы сұйықтың деңгейі 8 см-ге жетеді. Егер осы сұйық диаметрі бірінші ыдыстан 2 есе кіші болатын екінші ыдысқа құйылса, онда сұйықтың деңгейі қандай биіктікте болады:

A) 16 см; B) 32 см; C) 48 см; D) 64 см?

13. Бірлік квадратты оның қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемін табыңдар:

A) π см^3; B) 2π см^3; C) 3π см^3; D) 4π см^3.

14. Цилидрдің бүйір бетінің жазбасы — қабырғасы 2 см-ге тең квадрат. Цилиндрдің көлемін табыңдар:

A) $\frac{2}{\pi}$ см^3; B) $\frac{4}{\pi}$ см^3; C) 2π см^3; D) 4π см^3.

15. Теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғасы 2 см-ге тең. Үшбұрышты оның биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{\pi}{3}$ см^3; D) $\pi\sqrt{3}$ см^3.

16. Конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Конустың көлемін табыңдар:

A) π см^3; B) 2π см^3; C) 3π см^3; D) 4π см^3.

17. Конустың бүйір бетінің жазбасы — радиусы 3 см-ге және центрлік бұрышы 120°-қа тең дөңгелек сектор. Конустың көлемін табыңдар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{2\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3.

18. Қиық конустың осьтік қимасы — табандары 4 см және 2 см, ал бүйір қабырғасы 2 см болатын теңбүйірлі трапеция. Қиық конустың көлемін табыңдар:

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3.

19. Шардың бетінің ауданы 36 см^2-ге тең. Шардың көлемін табыңдар:

A) $24\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; B) $36\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; C) $48\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; D) $60\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3.

20. Цилиндрдің осьтік қимасы — бірлік квадрат. Осы цилиндрге сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар:

A) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$; B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

КӨЛЕМ

А

1. Тікбұрышты параллелепипед жағының ауданы 12 $см^2$-ге және осы жағына перпендикуляр қыры 4 см-ге тең. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

2. Тікбұрышты параллелепипедтің көлемі 24 $см^3$-ге, ал бір қыры 3 см-ге тең. Параллелепипедтің осы қырына перпендикуляр жағының ауданын табыңдар.

3. Тікбұрышты параллелепипедтің көлемі 60 $см^3$-ге, ал бір жағының ауданы 12 $см^2$-ге тең. Параллелепипедтің осы жағына перпендикуляр қырын табыңдар.

4. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см және 6 см-ге тең. Параллелепипедтің көлемі 48 $см^3$-ге тең. Параллелепипедтің сол төбесінен шығатын үшінші қырын табыңдар.

5. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын үш қыры 4 см, 6 см, 9 см-ге тең. Осы параллелепипедке теңшамалы кубтың қырын табыңдар.

6. Егер кубтың барлық қырын үш есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

7. Үшбұрышты тік призманың табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш, ал бүйір қыры 5 см-ге тең. Призманың көлемін табыңдар.

8. Үшбұрышты тік призманың табаны — катеттері 3 см және 5 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призманың көлемі 30 $см^3$-ге тең. Оның бүйір қырын табыңдар.

9. Дұрыс алтыбұрышты призма табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары $\sqrt{3}$ см-ге тең. Призманың көлемін табыңдар.

10. Егер дұрыс тетраэдрдің барлық қырын екі есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

11. Пирамиданың биіктігі 6 см-ге тең, ал табаны — қабырғалары 3 см және 4 см болатын тіктөртбұрыш. Пирамиданың көлемін табыңдар.

12. Пирамиданың табаны — қабырғалары 3 см және 4 см болатын тіктөртбұрыш. Пирамиданың көлемі 16 $см^3$-ге тең. Оның биіктігін табыңдар.

13. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал биіктігі $\sqrt{3}$ см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

14. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см-ге, ал көлемі $\sqrt{3}$ $см^3$-ге тең. Оның биіктігін табыңдар.

15. Егер пирамиданың биіктігін төрт есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?
16. Ішінде 6 л су бар цилиндрлік ыдысқа бөлшек салынды. Сонда ыдыстағы сұйықтың деңгейі 1,5 есе көтерілді. Бөлшектің көлемі неге тең?
17. Цилиндрлік ыдыстағы сұйықтың деңгейі 18 см. Егер осы сұйықты диаметрі бірінші ыдыстан 3 есе үлкен болатын екінші ыдысқа құятын болсақ, сұйықтың деңгейі қандай биіктікте болады?
18. Конус табанының ауданы 2 $см^2$-ге, ал жасаушысы 6 см-ге тең және ол табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Конустың көлемін табыңдар.
19. Егер конустың биіктігін үш есе қысқартса, онда оның көлемі неше есе кемиді?
20. Егер конустың табанының радиусын 1,5 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?
21. Цилиндр мен конустың табаны және биіктігі ортақ. Конустың көлемі 10 $см^3$-ге тең. Цилиндрдің көлемін табыңдар.
22. Цилиндр мен конустың табаны және биіктігі ортақ. Цилиндрдің көлемі 150 $см^3$-ге тең. Конустың көлемін табыңдар.
23. Егер шардың радиусын үш есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

B

24. Кубтың диагоналі $\sqrt{12}$ см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.
25. Кубтың көлемі $24\sqrt{3}$ $см^3$-ге тең. Оның диагоналін табыңдар.
26. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см, 4 см-ге, ал диагоналі 6 см-ге тең. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.
27. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см, 3 см-ге, ал көлемі 36 $см^3$-ге тең. Параллелепипедтің диагоналін табыңдар.
28. Егер кубтың әрбір қырын 1 см-ге арттырса, онда оның көлемі 19 $см^3$-ге артады. Кубтың қырын табыңдар.
29. Параллелепипедтің жағы — қабырғасы 1 см-ге және сүйір бұрышы 60°-қа тең болатын ромб. Параллелепипедтің бір қыры осы жағымен 60° бұрыш жасайды және 2 см-ге тең. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.
30. Цилиндр табанының радиусы мен биіктігі 2 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған тікбұрышты параллелепипедтің көлемін табыңдар.
31. Цилиндр табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған тікбұрышты параллелепипедтің көлемі 8 $см^3$-ге тең. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.

32. Сфераның радиусы 2 см-ге тең. Осы сфераға сырттай сызылған кубтың көлемін табыңдар.

33. Сфераға сырттай сызылған кубтың көлемі 216 $см^3$-ге тең. Сфераның радиусын табыңдар.

34. Үшбұрышты призманың көлемі 32 $см^3$-ге тең. Призма табанының орта сызығы арқылы оның бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген. Қиып алынған үшбұрышты призманың көлемін табыңдар.

35. Үшбұрышты призма табанының орта сызығы арқылы оның бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген. Қиып алынған үшбұрышты призманың көлемі 5 $см^3$-ге тең. Бастапқы призманың көлемін табыңдар.

36. Призма табандары — қабырғалары 2 см болатын дұрыс алтыбұрыш. Призманың бүйір қырлары $2\sqrt{3}$ см-ге тең және ол табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Оның көлемін табыңдар.

37. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 6 см-ге, ал бүйір қырлары 10 см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

38. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 12 см-ге, ал көлемі 200 $см^3$-ге тең. Пирамиданың бүйір қырын табыңдар.

39. Пирамиданың табаны — тіктөртбұрыш. Пирамиданың бір бүйір жағы оның табан жазықтығына перпендикуляр, ал басқа үш бүйір жақтары табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Пирамиданың биіктігі 6 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

40. Үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары өзара перпендикуляр және олардың әрқайсысы 3 см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

41. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 2 см-ге, бүйір қырлары 4 см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

42. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың көлемі 6 $см^3$-ге, табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Пирамиданың бүйір қырын табыңдар.

43. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 4 см-ге, ал бүйір жағы мен табанының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің көлемі 12 $см^3$-ге тең. B_1ABC үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының көлемі 12 $см^3$-ге тең. E, F, E_1, F_1 нүктелері — BC, CD, B_1C_1, C_1D_1 қырларының орталары. $CEFC_1E_1F_1$ үшбұрышты призмасының көлемін табыңдар.

46. Кубтың көлемі 12 $см^3$-ге тең. Табаны — кубтың жағы, ал төбесі — кубтың центрінде жататын төртбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

47. $ABCA_1B_1C_1$ призмасының көлемі 6 см^3-ге тең. Осы призмадан C_1ABC үшбұрышты пирамидасы қиып алынған. Қалған бөліктің көлемін табыңдар.
48. *SABCDEF* дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бөлігі болатын *SABC* үшбұрышты пирамидасының көлемі 1 см^3-ге тең. Алтыбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.
49. *SABCD* дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемі 12 см^3-ге тең. *E* нүктесі — *SB* қырының ортасы. *EABC* үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.
50. Үшбұрышты пирамиданың көлемі 12 см^3-ге тең. Осы пирамиданың төбесі арқылы және табанының орта сызығы арқылы өтетін жазықтықпен қиып үшбұрышты пирамида алынған. Қиып алынған үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.
51. *SABC* үшбұрышты пирамиданың көлемі 15 см^3-ге тең. Осы пирамида табанының *AB* қабырғасы арқылы өтетін жазықтық оған қарсы жатқан *SC* бүйір қырын *S* нүктесінен бастап санағанда 1 : 2 қатынаста бөлетін *D* нүктесінде қиып өтеді. *DABC* пирамидасының көлемін табыңдар.
52. Бір цилиндрлік ыдыс екіншісінен екі есе биік, бірақ екінші ыдыстың іші 1,5 есе кең. Екінші ыдыс көлемінің біріншінің көлеміне қатынасын табыңдар.
53. Конустың көлемі 12 см^3-ге тең. Конустың биіктігін қақ бөлетіндей оның табанына параллель қиюшы жазықтық жүргізілген. Қиып алынған конустың көлемін табыңдар.
54. Конустың биіктігі 6 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең. Оның көлемінің π-ге қатынасын табыңдар.
55. Конустың табанының диаметрі 6 см-ге, ал осьтік қимасының төбесіндегі бұрышы 90°-қа тең. Оның көлемінің π-ге қатынасын табыңдар.
56. Теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың катеті 6 см-ге тең. Осы үшбұрышты бір катеті жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған конус көлемінің π-ге қатынасын табыңдар.
57. Үш шардың радиустары 6 см, 8 см және 10 см. Көлемі осы шарлардың көлемдерінің қосындысына тең болатын жаңа шардың радиусын табыңдар.

C

58. Тік призманың табаны — ауданы 3 см^2-ге тең ромб. Диагональдық қималарының аудандары 8 см^2 және 12 см^2. Призманың көлемін табыңдар.
59. Тікбұрышты параллелепипедтің үш жағының аудандары 2, 3, 6. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры 3 см-ге тең. Кубтың $ABCD$ жағының көршілес қабырғаларының орталары арқылы өтетін және AA_1 қырына параллель қиюшы жазықтықтармен төрт үшбұрышты призмалар алынды. Призманың қалған бөлігінің көлемін табыңдар.

61. Дұрыс алтыбұрышты призманың көлемі 12 см^3. Төбелері берілген призманың табандарының қабырғаларының орталары болатын жаңа призманың көлемін табыңдар.

62. Кубтың қыры 6 см-ге тең. Төбелері кубтың төрт төбесімен сәйкес келетіндей кубқа іштей дұрыс тетраэдр сызылған. Тетраэдрдің көлемін табыңдар.

63. Төртбұрышты пирамиданың көлемі 12 см^3-ге тең. Пирамиданың төбесі және табанының көршілес қабырғаларының орталары арқылы өтетін қиюшы жазықтықтармен төрт үшбұрышты пирамидалар қиылып алынды. Пирамиданың қалған бөлігінің көлемін табыңдар.

64. Кубтың қыры 6 см-ге тең. Төбелері осы кубтың жақтарының центрлерінде жататын октаэдрдің көлемін табыңдар.

65. Шардың көлемі 1 см^3-ге тең. Осы шарға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

66. Шардың көлемі 12 см^3-ге тең. Табаны — шардың үлкен дөңгелегі, ал биіктігі осы дөңгелек жазықтығына перпендикуляр радиусы болатын конустың көлемін табыңдар.

БЕТТІҢ АУДАНЫ

А

1. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 1 см, 2 см, 3 см-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.

2. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 3 см және 4 см. Параллелепипедтің бетінің ауданы 52 см^2. Оның сол төбеден шығатын үшінші қырын табыңдар.

3. Егер кубтың барлық қырларын үш есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

4. Егер тетраэдрдің барлық қырларын екі есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

5. Дұрыс алтыбұрышты призманың биіктігі 6 см-ге, ал табанының қабырғалары 3 см-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

6. Үшбұрышты тік призманың биіктігі 10 см-ге тең, ал табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призманың бетінің ауданын табыңдар.

7. Цилиндрдің биіктігі 2 см-ге, ал табанындағы шеңбердің ұзындығы 3 см-ге тең. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

8. Конустың жасаушысы 2 см-ге, ал табанындағы шеңбердің ұзындығы 3 см-ге тең. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

9. Егер конустың жасаушысын 3 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше аса артады?
10. Егер конус табанының радиусын 1,5 есе кемітсе, онда оның бетінің ауданы неше есе кемиді?
11. Шардың үлкен дөңгелегінің ауданы 1 см^2-ге тең. Шар бетінің ауданын табыңдар.
12. Егер шардың радиусын екі есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

B

13. Кубтың диагоналі 1 см-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.
14. Куб бетінің ауданы 8 см^2-ге тең. Оның диагоналін табыңдар.
15. Куб бетінің ауданы 24 см^2-ге тең. Оның көлемін табыңдар.
16. Кубтың көлемі 27 см^3-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.
17. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см және 4 см. Параллелепипедтің диагоналі 6 см-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.
18. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 1 см және 2 см. Параллелепипедтің бетінің ауданы 16 см^2-ге тең. Оның диагоналін табыңдар.
19. Егер кубтың әрбір қырын 1 см-ге арттырса, онда оның бетінің ауданы 30 см^2-ге тең. Кубтың қырын табыңдар.
20. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 1 см және 2 см. Параллелепипедтің көлемі 6 см^3-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.
21. Тік призманың бүйір қыры 5 см-ге тең, ал табаны — диагональдары 3 см және 4 см болатын ромб. Призманың бетінің ауданын табыңдар.
22. Тік призманың табаны — диагональдары 6 см және 8 см болатын ромб. Призма бетінің ауданы 248 см^2-ге тең. Оның бүйір қырын табыңдар.
23. Дұрыс төртбұрышты призма табанының қабырғалары 3 см-ге, бетінің ауданы 66 см^2-ге тең. Оның бүйір қырын табыңдар.
24. Үшбұрышты призманың екі бүйір жақтары өзара перпендикуляр. Олардың ортақ қыры 10 см-ге тең және басқа бүйір қырларынан 6 см және 8 см қашықтықта жатыр. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
25. Үшбұрышты тік призманың табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призма бетінің ауданы 288 см^2-ге тең. Оның биіктігін табыңдар.
26. Үшбұрышты призманың бүйір бетінің ауданы 12 см^2-ге тең. Призма табанының орта сызығы арқылы бүйір қырына параллель

жазықтық жүргізілген. Қиып алынған үшбұрышты призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

27. Үшбұрышты призма табанының орта сызығы арқылы бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген. Қиып алынған үшбұрышты призманың бүйір бетінің ауданы 8 см^2-ге тең. Бастапқы призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

28. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 5 см-ге, ал табанының қабырғалары 6 см-ге тең. Пирамида бетінің ауданын табыңдар.

29. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 4 см-ге, ал табанының қабырғалары 6 см-ге тең. Пирамида бетінің ауданын табыңдар.

30. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 5 см-ге, ал табанының қабырғалары 6 см-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

31. Егер октаэдрдің барлық қырларын 3 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

32. Конустың биіктігі 6 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең. Конус беті ауданының π-ге қатынасын табыңдар.

33. Конустың бүйір бетінің ауданы оның табанының ауданынан екі есе үлкен. Конустың жасаушысы мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

34. Конус бетінің ауданы 12 см^2-ге тең. Оның биіктігін қақ бөлетіндей табанына параллель қима жүргізілген. Қиып алынған конустың бетінің ауданын табыңдар.

35. Шардың көлемі 36π. Оның бетінің ауданының π-ге қатынасын табыңдар.

36. Бір шардың көлемі екінші шардың көлемінен 27 есе үлкен. Бірінші шардың бетінің ауданы екінші шардың бетінің ауданынан неше есе үлкен болады?

37. Екі шардың радиустары 6 см және 8 см. Осы шарлардың беттерінің аудандарының қосындысына тең болатын үшінші шардың радиусын табыңдар.

C

38. Цилиндрдің остік қимасының ауданы 1 см^2-ге тең. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

39. Шарға сырттай сызылған цилиндрдің бетінің ауданы 9 см^2-ге тең. Шардың бетінің ауданын табыңдар.

АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ

Көпбұрыштардың айналуы

А

1. ABC тікбұрышты үшбұрышының катеттері $AC = BC = 1$ см. Осы үшбұрышты AC катеті жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
2. ABC тікбұрышты үшбұрышының катеттері $AC = BC = 1$ см. Осы үшбұрышты CH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
3. ABC теңқабырғалы үшбұрышының қабырғасы 1 см-ге тең. Осы үшбұрышты CH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
4. ABC теңбүйірлі үшбұрышында $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$, CH — биіктігі. Осы үшбұрышты CH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
5. $ABCD$ теңбүйірлі трапецияның AD және BC бүйір қабырғалары 1 см-ге, ал AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең. Осы трапецияны AB және CD табандарының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
6. $ABCD$ тікбұрышты трапецияның AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең, ал кіші бүйір қабырғасы 1 см-ге тең. Осы трапецияны AD қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

В

7. ABC тікбұрышты үшбұрышының катеттері $AC = BC = 1$ см. Осы үшбұрышты AB қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
8. ABC теңқабырғалы үшбұрышының қабырғасы 1 см-ге тең. Осы үшбұрышты AB қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
9. ABC теңбүйірлі үшбұрышында $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Осы үшбұрышты AB қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
10. ABC тікбұрышты үшбұрышында $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. Осы үшбұрышты AB қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
11. $ABCD$ ромбысының қабырғалары 1 см-ге, ал сүйір бұрышы 60°-қа тең. Осы ромбты AC түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

12. $ABCD$ ромбысының қабырғалары 1 см-ге, ал сүйір бұрышы 60°-қа тең. Осы ромбыны BD түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

13. $ABCD$ теңбүйірлі трапецияның AD және BC бүйір қабырғалары 1 см-ге, ал AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең. Осы трапецияны AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

14. $ABCD$ тікбұрышты трапецияның AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең, ал кіші бүйір қабырғасы 1 см-ге тең. Осы трапецияны AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

C

15. ABC теңбүйірлі үшбұрышында $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Осы үшбұрышты AC қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

16. ABC тікбұрышты үшбұрышында $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$, CH — биіктігі. Осы үшбұрышты CH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

17. $ABCD$ ромбысының қабырғалары 1 см-ге, ал сүйір бұрышы 60°-қа тең. Осы ромбыны AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

18. $ABCD$ теңбүйірлі трапецияның AD және BC бүйір қабырғалары 1 см-ге, ал AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең. Осы трапецияны CD түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

19. $ABCD$ теңбүйірлі трапецияның AD және BC бүйір қабырғалары 1 см-ге, ал AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең. Осы трапецияны орта сызығы жатқан c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

20. $ABCD$ тікбұрышты трапецияның AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең, ал кіші бүйір қабырғасы 1 см-ге тең. Осы трапецияны CD түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

21. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы алтыбұрышты AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

22. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы алтыбұрышты AC түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

23. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы алтыбұрышты AD түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
24. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы алтыбұрышты AB және DE қабырғаларының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

Көпжақтардың айналуы

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубын AA_1 түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубын $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ жақтарының центрлері арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы AA_1 түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы ABC және $A_1B_1C_1$ жақтарының центрлері арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы табандарының центрлері арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

B

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубын BC және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
7. $ABCD$ бірлік тетраэдрін оның DH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамиданы SH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
9. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамиданы SH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы AA_1 түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

C

11. $ABCD$ бірлік тетраэдрін AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
12. $S'ABCDS''$ бірлік октаэдрін $S'S''$ түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
13. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы BC және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы BC және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

ПӘНДІК АТАУ КӨРСЕТКІШТЕРІ

ЖАУАПТАРЫ

10-СЫНЫПТЫҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

1. 1) 3; 2) 6; 3) 10; 4)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.** Біреу немесе шексіз көп. **3.** 1) 4; 2) 10; 3)* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **4.** 1) 4; 2) 8; 3)* 15. **8.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **9.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **10.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) $2n$. **11.** 1), 4) Жоқ; 2), 3) иә. **12.** 1) 9; 2) 12; 3) 15; 4) 18; 5) $3n$. **13.** 1), 3), 4) Иә; 2) Жоқ. **14.** 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) $n+2$. **15.** 1), 2), 3), 4) Иә. **16.** 1) Төртбұрыш; 2) бесбұрыш; 3) алтыбұрыш. **17.** 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) $n+1$. **18.** 1), 2), 3), 4) Иә. **19.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) $2n$. **20.** 1), 4) Жоқ; 2), 3) иә. **21.** 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) $n+1$. **22.** 1), 2), 3), 4) Да. **23.** 1) Төртбұрыш; 2) бесбұрыш; 3) алтыбұрыш. **24.** 1) 18; 2) 18; 3) 6; 4) 27. **27.** 1) 24; 2) 24; 3) 3; 4) 24. **28.** 1), 2) Айқас түзулер; 3) қиылысады. **29.** 1), 2) Айқас түзулер, 3) қиылысады. **33.** 1) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, BCC_1B_1, EFF_1E_1; 2) DEE_1D_1. **35.** 1) 3; 2) 3; 3) 1; 4) 4. **37.** 1) 3; 2) 48. **38.** 1) $60°$; 2) $90°$; 3) $90°$. **39.** 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $90°$. **40.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **41.** 1) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **42.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **43.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $1\frac{1}{2}$. **44.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **45.** $45°$. **46.** $60°$. **47.** 1) $60°$; 2) $30°$; 3) $90°$; 4) $90°$. **48.** $\frac{1}{3}$. **49.** $-\frac{1}{3}$. **50.** 6. **51.** 1) 2; 2) $\sqrt{5}$; **52.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6}$. **53.** $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. **54.** $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$. **55.** 1) $120°$; 2) $60°$. **56.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; г) 0. **57.** 1. **58.** $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(0;\ 1;\ 1)$, $B_1(1;\ 1;\ 1)$, $C_1(1;\ 0;\ 1)$, $D_1(0;\ 0;\ 1)$. **59.** $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(1{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $D(1;\ \sqrt{3};\ 0)$, $E(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, $F(-0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 1)$, $B_1(1;\ 0;\ 1)$, $C_1(1{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1)$, $D_1(1;\ \sqrt{3};\ 1)$, $E_1(0;\ \sqrt{3};\ 1)$, $F_1(-0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1)$. **60.** 1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{5}$. **61.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$. **62.** $R = 3$, $O(2;\ -1;\ 0)$. **63.** 7. **64.** $6x + 3y + 2z = 6$.

I тарау. КӨПЖАҚТАР

§ 1

3. а), ә). **4.** а), ә). **5.** а), ә), б), г). **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\sqrt{29}$. **8.** 1. **9.** 9 есе. **10.** 4 есе. **11.** 4 есе. **12.** 94. **13.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$. **14.** $6 + 3\sqrt{3}$. **15.** б), г), д). **16.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **18.** 2 және $\sqrt{5}$. **19.** $\sqrt{5}$. **20.** 4. **21.** а) 22; ә) 28. **22.** а) 92; ә) 48. **23.** а), ә) 34. **24.** а) 22; ә) 26. **25.** 30. **26.** ≈ 27600 м². **27.** ә), б), в), г) — дөңес; а), ғ) — дөңес емес. **28.** 288 см². **29.** $\sqrt{5}$. **30.** Жоқ. **31.** Жоқ.

§ 2

2. а), б). **3.** а), б). **4.** Бесбұрышты пирамида. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **7.** $1 + \sqrt{3}$. **8.** $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{2}$. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** 4 есе. **11.** 9 есе. **15.** $\sqrt{7}$. **16.** $\sqrt{10}$. **17.** ≈ 8595 м². **18.** $\approx 8{,}3$ га. **19.** $5 + 3\sqrt{3}$. **20.** 1. **21.** ≈ 1710 дм².

§ 3

1. 8. **2.** 12. **3.** 6. **6.** а) Алтыбұрышты призма; ә) бесбұрышты пирамида. **7.** Орындалады. **8.** Иә. **9.** Иә. **10.** Т = 12, Қ = 24, Ж = 12; Т − Қ + Ж = 0. **11.** Т = 6, Қ = 12, Ж = 8. **11.** Т = 20, Қ = 30, Ж = 12.

§ 4

1. 1) Т = 4, Қ = 6, Ж = 4; 2) Т = 8, Қ = 12, Ж = 6; 3) Т = 6, Қ = 12, Ж = 8; 4) Т = 12, Қ = 30, Ж = 20; 5) Т = 20, Қ = 30, Ж = 12. **2.** Жоқ. Жақтарының әртүрлі саны түйісетін төбелері бар болады. **3.** Иә, бұл октаэдр. **7.** 5. **8.** 3. **9.** Куб және октаэдр. **10.** Икосаэдр және додекаэдр. **11.** Тетраэдр, $\sqrt{2}$. **12.** Октаэдр, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.** Октаэдр, $\frac{1}{2}$. **14.** Октаэдр, 1 см. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 4. **17.** 8. **18.** Тетраэдр, $\frac{1}{3}$. **19.** Куб, $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **20.** Додекаэдр. **21.** Икосаэдр. **22.** 10. **23.** 6.

§ 5

2. 1), 2), 3) Иә. **3.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **4.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **5.** 1), 2), 3) Иә. **6.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **7.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **9.** Берілген түзулердің жазықтығында жататын, оларға параллель болатын және олардан бірдей қашықтықта жататын түзудің нүктелері. **10.** 1) Берілген жазықтықтардың қиылысу түзуінің нүктелері; 2) берілген жазықтықтарға параллель және олардан бірдей қашықтықта жататын жазықтықтың нүктелері. **11.** Иә. **12.** 1), 2), 3) Иә. **13.** 1) 3; 2) 7. **14.** 1) 4; 2) 7. **15.** 1), 2) 1. **16.** 1) 4; 2) 6. **17.** 1) n, егер n — тақ сан, $n + 1$, егер n — жұп сан; 2) 0, егер n — тақ сан, 1, егер n — жұп сан. **18.** 1) $n + 1$; 2) n. **19.** 1) 9; 2), 3) 15. **20.** 1) 9; 2), 3) 15. **21.** Иә, мысалы, сфераның симметрия центрі оның бойында жатпайды. **22.** 1) Жақтары параллелограмдар болатын параллелепипедте симметрия центрі бар, бірақ симметрия осі жоқ; 2) дұрыс төртбұрышты пирамиданың симметрия осі бар, бірақ симметрия центрі жоқ. **23.** 1) Жақтары параллелограмдар болатын параллелепипедте симметрия центрі бар, бірақ симметрия жазықтығы жоқ; 2) табаны — параллелограмм болатын төртбұрышты пирамиданың симметрия осі бар, бірақ симметрия жазықтығы жоқ. **24.** 1) дұрыс төртбұрышты пирамиданың симметрия жазықтығы бар, бірақ симметрия центрі жоқ; 2) дұрыс үшбұрышты пирамиданың симметрия жазықтығы бар, бірақ симметрия осі жоқ.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	A)	B)	B)	C)	A)	D)	D)	A)	C)	B)	D)	C)	D)	D)	A)	B)	C)	A)	D)

§ 6

2. Шексіз көп. **3.** Дөңгелек. **4.** Цилиндр. **5.** Сақина. **6.** 5 см. **7.** $\frac{1}{2\pi}$ см. **8.** 1) 4π см^2; 2) 6π см^2. **10.** Тіктөртбұрыш. **11.** 1), 2), 3) Иә. **12.** 1), 2) Цилиндр. **13.** 1) $2\sqrt{2}\pi$; 2) $\sqrt{2}\pi$. **14.** 1), 2) Цилиндр. **15.** 1) 2π; 2) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$. **16.** 1), 2) Цилиндр. **17.** 1) 12π; 2) 4π. **18.** $10\pi \approx 31,4$ (м^2). **19.** Табандарының радиустары 2 және 1, ал биіктіктері 1 болатын екі цилиндрден тұратын фигура. Бұл фигураның бетінің ауданы 14 π-ге тең. **20.** Табандарының радиустары 2, 1, 1, ал биіктіктері 1 болатын үш цилиндрден тұратын фигура. Бұл фигураның бетінің ауданы 16 π-ге тең. **21.** 350π см^2.

§ 7

2. Шексіз көп. **3.** Дөңгелек. **4.** Конус. **5.** Конустың бүйір беті. **6.** 5. **7.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. **8.** 1 см. **9.** 1 см. **10.** 3π см^2. **11.** Иә. **13.** $\frac{\pi}{4}$ см^2. **14.** $\sqrt{5}\pi$ см^2. **15.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **16.** Табандары ортақ болатын екі конустан тұратын фигура. **17.** Табандары ортақ болатын екі конустан тұратын фигура; Оның бетінің ауданы $\sqrt{2}\pi$-ге тең. **18.** Конус. **19.** $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$. **20.** Конус. **21.** 3π см^2. **22.** Табандары ортақ болатын екі тең конустардан тұратын фигура. Оның бетінің ауданы $\sqrt{2}\pi$ см^2-ге тең. **23.** 0,5 см. **24.** 120°. **25.** 37. **26.** 42,12 м^2. **27.** 1440 см^2.

§ 8

2. Шексіз көп. **3.** Дөңгелек. **4.** Қиық конус. **5.** Қиық конустың бүйір беті. **6.** 5 см. **7.** 80π см^2. **8.** Иә. **10.** 9π см^2. **11.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **12.** 1 см. **13.** 2 см. **14.** $\frac{17\pi}{4}$ см^2. **15.** Қиық конус. **16.** $(10 + 9\sqrt{2})\pi$ см^2. **17.** Қиық конус. **18.** 14π см^2. **19.** $6\sqrt{2}\pi \approx 26{,}6$ (м^2). **20.** Табандары ортақ болатын екі тең қиық конустардан тұратын фигура. Оның бетінің ауданы $3{,}5\pi$ см^2-ге тең. **21.** 1 см және 0,5 см. **22.** $\approx$ 161 г. **23.** $\approx$ 1,1 дм^2. **24.** $\approx$ 88 см, $\approx$ 63 см, $\approx$ 24,3 см, $\approx$ 21 дм^2.

§ 9

2. 1) $OA < R$; 2) $OA > R$. **3.** 1) Сфераның ішінде жатады; 2) сфераның бойында жатады; 3) сферадан тыс жатады. **4.** Шексіз көп. **5.** 110 мм. **6.** 1 см. **7.** 1) Қиылысады; 2) жанасады; 3) ортақ нүктелері болмайды. **8.** 1) Біреу; 2) біреу де емес; 3) шексіз көп. **9.** 4 см. **10.** 4 см. **11.** 1) Қиылысады; 2) жанасады; 3) ортақ нүктелері болмайды. **12.** 5 см. **13.** 8 см. **14.** 5 см. **15.** 1) Қиылысады; 2) жанасады; 3) ортақ нүктелері болмайды. **16.** $\approx$ 6369 км. **17.** 2 см және 10 см. **18.** 1 см. **19.** 1) Қиылысады; 2) жанасады; 3) ортақ нүктелері болмайды.

§ 10*

1. R және $2R$. **2.** $\frac{h}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **4.** $2\sqrt{3}$ см. **5.** $\sqrt{3}$ см. **6.** 2,5 см. **7.** 6π см^2. **8.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **9.** $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$. **10.** $3\frac{1}{8}$ см. **11.** $R = \frac{r(\sqrt{r^2 + h^2} - r)}{h}$. **12.** $1\frac{1}{2}$ см. **13.** $\sqrt{3}$ см. **14.** 1) 1 см; 2) $\sqrt{3} - 1{,}5$ см. **15.** 1) 1 см; 2) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$ см.

§ 11

1. 4π см^2. **2.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$ см. **3.** 12 см^2. **4.** 1) 4; 2) 9; 3) n^2 есе артады. **5.** 2 : 3. **6.** 10 см. **7.** 1. **8.** π. **9.** 2π. **10.** 160000 есе. **11.** 3 есе. **12.** 4 есе. **13.** 400π см^2. **14.** $\approx$ 509 554 140 км^2. **15.** $\approx$ 1520 м^2. **16.** 19200 м^2. **18.** $\frac{\pi}{2}$ см^2. **19.** $\frac{2\pi}{3}$ см^2.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B)	C)	C)	D)	B)	C)	A)	C)	D)	C)	D)	D)	C)	D)	A)	D)	C)	B)	C)	D)

§ 12

1. 54 см^2. **2.** 8 см^3. **3.** 8 см^3. **4.** 7 см^3. **5.** 27 есе. **6.** 8 есе. **7.** 1) 2 есе артады; 2) 9 есе кемиді. **8.** 62,5 г. **9.** 60 м^2. **10.** а) 6; ә) 8. **11.** а) 40; ә) 12. **12.** а), ә) 10. **13.** а) 5; ә) 6. **14.** 30 см^3. **15.** 15 см^3. **16.** 20 см. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** $1\frac{3}{4}$. **19.** $\approx$ 21 м^3. **20.** 9 см. **21.** 3 см. **22.** 160 см^3. **23.** $\frac{1}{6}$. **24.** $\frac{1}{3}$. **25.** 6 м^2. **26.** 162 л.

§ 13

1. 60 см^3. **2.** $20\sqrt{3}$ см^3. **3.** $18\sqrt{3}$ см^3. **4.** $\sqrt{3}$ см^3. **5.** 0,75 см^3. **6.** $16\sqrt{3}$ см. **7.** 1 : 3. **8.** 3 см^3. **9.** 5 см^3. **10.** 9 см^3. **12.** 3 м^3. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см^3.

§ 14

1. 12π см³. **2.** $\frac{\pi a^3}{4}$ см³. **3.** Екінші. **4.** πa^3. **5.** $\frac{3\pi}{32}$ см³. **6.** $\frac{\pi}{4}$. **7.** π см³. **8.** $\frac{a}{b}$ немесе $\frac{b}{a}$. **9.** Екі есе. **10.** 3π см³. **11.** 243π см³. **12.** 4 см. **13.** Цилиндрдің табанын таңдап алуымызға байланысты болады. $\frac{1}{\pi}$ см³ немесе $\frac{1}{2\pi}$ см³. **14.** 2π. **16.** 5π см³. **17.** 6π см³. **18.** 960 м³. **19.** 162 кг. **20.** 2250 см³.

§ 15

1. $\frac{1}{3}a^2h$. **2.** 32 м³. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см³. **5.** $1\frac{1}{2}$ см³. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ см³. **7.** 8 есе. **8.** 3 есе кемиді. **9.** 1) $\frac{1}{3}$ см³; 2) $\frac{1}{6}$ см³. **10.** 1 : 7. **11.** 7 см³. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **13.** $\frac{1}{6}$ см³. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **15.** $4\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{1}{3}$ см³. **17.** 1 : 1. **18.** 3 см³. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ см³. **20.** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ см³. **21.** $\approx$ 79443 м³. **23.** $\frac{3}{4}$ см³. **24.** $\frac{1}{2}$ см³. **25.** $\frac{1}{2}$ см³. **26.** 3074176 м³. **27.** $\approx$ 407 м³. **28.** 473 дм³, 319 кг.

§ 16

1. 1) Үш; 2) төрт есе артады. **2.** 2 есе артады. **3.** 5 см³. **4.** 1 : 7. **5.** 16π см³. **6.** 3π см³. **7.** 3π см³. **8.** 7π см³. **9.** 72π см³. **10.** 9π см³. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см³. **12.** Жоқ. **13.** $\frac{7}{27}$ см³. **14.** 4 см. **15.** 52π см³. **16.** 19π см³. **18.** $\approx$ 55,5 м³. **19.** 9π см³. **20.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см³. **22.** V = 19,44 м³.

§ 17

1. 36π см³. **2.** 1) 27; 2) 64 есе артады. **3.** 6 см. **4.** 27. **5.** $\frac{4\pi}{3}$ см³. **6.** $\frac{4000\pi}{3}$ см³. **7.** $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ см³. **8.** $m^{\frac{3}{2}} : n^{\frac{3}{2}}$. **9.** $\frac{4\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3)$. **10.** 26 : 1. **11.** $\approx$ 0,5. **12.** $\frac{5324\pi}{3} \approx 5572$ (м³). **13.** $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **14.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **15.** $\frac{\pi}{6}$ см³. **16.** $\frac{2\pi}{9}$ см³.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	B)	D)	C)	B)	D)	D)	B)	B)	C)	B)	A)	A)	A)	A)	D)	C)	B)	A)

ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

КӨЛЕМ

1. 48 см³. **2.** 8 см². **3.** 5 см. **4.** 4 см. **5.** 6 см. **6.** 27. **7.** 120 см³. **8.** 4 см. **9.** 4,5 см³. **10.** 8. **11.** 24 см³. **12.** 4 см. **13.** 0,25 см³. **14.** 3 см. **15.** 4. **16.** 3. **17.** 2 см. **18.** 2 см³. **19.** 3. **20.** 2,25. **21.** 30 см³. **22.** 50 см³. **23.** 27. **24.** 8 см³. **25.** 6 см. **26.** 32 см³. **27.** 7 см. **28.** 2 см. **29.** 1,5 см³. **30.** 32 см³. **31.** 2 см. **32.** 64 см³. **33.** 3 см. **34.** 8 см³. **35.** 20 см³. **36.** 18 см³. **37.** 256 см³. **38.** 13 см. **39.** 48 см³. **40.** 4,5 см³. **41.** 12 см³. **42.** 7 см. **43.** 48 см³. **44.** 2 см³. **45.** 1,5 см³. **46.** 2 см³. **47.** 4 см³. **48.** 6 см³. **49.** 3 см³. **50.** 3 см³. **51.** 10 см³. **52.** 1,125. **53.** 1,5 см³. **54.** 128 см³. **55.** 9 см³. **56.** 72 см³. **57.** 12 см³. **58.** 12 см³. **59.** 6 см³. **60.** 13,5 см³. **61.** 9 см³. **62.** 72 см³. **63.** 6 см³. **64.** 36 см³. **65.** 1,5 см³. **66.** 3 см³.

БЕТТІҢ АУДАНЫ

1. 22 см². **2.** 2 см. **3.** 9. **4.** 4. **5.** 108 см². **6.** 288 см². **7.** 6 см². **8.** 3 см². **9.** 3. **10.** 1,5. **11.** 4 см². **12.** 4. **13.** 2 см². **14.** 2 см. **15.** 8 см³. **16.** 54 см². **17.** 64 см². **18.** 3 см. **19.** 2 см.

20. 22 см². **21.** 62 см². **22.** 10 см. **23.** 4 см. **24.** 240 см². **25.** 10 см. **26.** 6 см². **27.** 16 см². **28.** 84 см². **29.** 96 см². **30.** 72 см². **31.** 9. **32.** 144. **33.** 60. **34.** 3 см². **35.** 36. **36.** 9. **37.** 10 см. **38.** π см². **39.** 6 см².

АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ

Көпбұрыштардың айналуы

1. $\frac{\pi}{3}$ см³ және $(\sqrt{2}+1)\pi$ см². **2.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см³ және $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см². **3.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см³ және $0,75\pi$ см². **4.** $\frac{\pi}{8}$ және $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{4}$. **5.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{48}$ см³ және $2,75\pi$ см². **6.** $\frac{7\pi}{3}$ см³ және $(3\sqrt{2}+5)\pi$ см². **7.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ см³ және $\sqrt{2}\pi$ см². **8.** $\frac{\pi}{4}$ см³ және $\sqrt{3}\pi$ см². **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ және π. **10.** $9,6\pi$ және $16,8\pi$. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ см³ және π см². **12.** $0,25\pi$ см³ және $\sqrt{3}\pi$ см². **13.** π см³ және $2\sqrt{3}\pi$ см². **14.** $\frac{4\pi}{3}$ см³ және $(\sqrt{2}+3)\pi$ см². **15.** $\frac{\pi}{4}$ және $\frac{(\sqrt{3}+3)\pi}{2}$. **16.** $8,192\pi$ және $23,04\pi$. **17.** $0,75\pi$ см³ және $2\sqrt{3}\pi$ см². **18.** $1,25\pi$ см³ және $3\sqrt{3}\pi$ см². **19.** $\frac{11\pi}{32}$ см³ және $\frac{5\sqrt{3}\pi}{14}$ см². **20.** $\frac{5\pi}{3}$ см³ және $(\sqrt{2}+5)\pi$ см². **21.** $4,5\pi$ см³ және $6\sqrt{3}\pi$ см². **22.** $\frac{19\sqrt{3}\pi}{12}$ см³ және 7π см². **23.** π см³ және $2\sqrt{3}\pi$ см². **24.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{12}$ см³ және $3,5\pi$ см².

Көпжақтардың айналуы

1. 2π және $(2\sqrt{2}+4)\pi$. **2.** $0,5\pi$ және $(\sqrt{2}+1)\pi$. **3.** π см³ және 4π см². **4.** $\frac{\pi}{3}$ см³ және $\frac{(2\sqrt{3}+2)\pi}{2}$ см². **5.** π см³ және 4π см². **6.** $1,25\pi$ және $(\sqrt{5}+2,5)\pi$. **7.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ және $\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см³ және $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см². **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см³ және 3π см². **10.** 4π см³ және 12π см². **11.** $0,25\pi$ және $\sqrt{3}\pi$. **12.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ және $\sqrt{2}\pi$. **13.** $0,75\pi$ см³ және $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{2}$ см². **14.** $3,25\pi$ см³ және $\frac{(2\sqrt{13}+13)\pi}{2}$ см².

МАЗМҰНЫ