ГЕОМЕТРИЯ

Оқулық

11

Жаратылыстану-математика
бағыты

Шартты белгілер:

— сыни ойлауды дамытуға арналған тапсырмалар

— теориялық материалды өзіндік оқып-үйренуге қажетті тапсырмалар

— теорема дәлелдеуінің аяқталуы

A — барлық оқушыға міндетті жаттығулар

B — орта деңгейлі жаттығулар

C — жоғары деңгейлі жаттығулар

АЛҒЫ СӨЗ

Оқулық 10-сынып геометрия оқулығының жалғасы болып табылады және жаратылыстану-математика бағытында оқитын 11-сынып оқушыларына арналған.

Оқулықта негізгі көпжақтармен және олардың қасиеттерімен таныстыру, арақашықтықтар мен бұрыштарды табу кезінде аналитикалық әдістерді қолдануды үйрету, айналу денелерімен (цилиндр, конус, шар) және олардың қасиеттерімен таныстыру, кеңістіктік фигуралар беттерінің ауданы мен көлемдерін табуды үйрету көзделген.

Оқулықтағы барлық материалдар тарауларға және параграфтарға бөлінген. Олар теориялық материалды, өздігінен орындауға арналған тапсырмаларды, пысықтау сұрақтарын және күрделілігі әртүрлі деңгейдегі есептерді қамтиды.

Теореманы дәлелдеудің аяқталуы (□) белгісімен белгіленген.

Оқулықтағы есептер күрделілігіне қарай А — міндетті деңгей, В — орта деңгей және С — жоғары деңгей болып бөлінген.

Жұлдызшамен (*) белгіленген параграфтар оқу бағдарламасына енбейтін ғылыми-танымдық және қолданбалы сипаттағы қосымша материалдарды қамтиды. Оларды негізгі немесе қосымша сабақтарда (үйірмелерде, таңдау курстарында және т.б.), сонымен бірге оқушылардың жобалық және зерттеушілік жұмыстарын ұйымдастыруда пайдалануға болады.

Әрбір тараудың соңында оқу материалын меңгеру сапасын тексеруге арналған тест тапсырмалары берілген. Оқулықтың соңында есептердің жауаптары ұсынылған.

Геометрияны оқып білуде сәттілік тілейміз!

10-СЫНЫПТЫҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Стереометрия бастамалары

1. Кеңістікте әрбір үшеуі бір түзудің бойында жатпайтын әртүрлі: 1) үш; 2) төрт; 3) бес; 4)* n нүктелердің жұбы арқылы неше түзу жүргізуге болады?
2. Кеңістіктегі үш нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
3. Кеңістікте әрбір төртеуі бір жазықтықта жатпайтын әртүрлі: 1) төрт; 2) бес; 3)* n нүктелер арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
4. 1) Екі жазықтық; 2) үш жазықтық; 3)* төрт жазықтық кеңістікті ең көп дегенде неше бөлікке бөледі?
5. Егер түзудің жазықтықпен ортақ екі нүктесі болса, онда ол түзу сол жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.
6. Түзу және оның бойында жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.
7. Қиылысқан екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.
8. Кубтың неше: 1) төбесі; 2) қыры; 3) жағы болады?
9. Параллелепипедтің неше: 1) төбесі; 2) қыры; 3) жағы болады?
10. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты призманың неше төбесі болады?
11. Призманың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 төбесі болуы мүмкін бе?
12. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты призманың неше қыры болады?
13. Призманың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 қыры болуы мүмкін бе?
14. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты призманың неше жағы болады?
15. Призманың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 жағы болуы мүмкін бе?
16. 1) 12; 2) 15; 3) 18 қыры бар призманың табанында қандай көпбұрыш жатады?
17. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты пирамиданың неше төбесі болады?
18. Пирамиданың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 төбесі болуы мүмкін бе?
19. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты пирамиданың неше қыры болады?
20. Пирамиданың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 қыры болуы мүмкін бе?
21. 1) Үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) бесбұрышты; 4) алтыбұрышты; 5) n-бұрышты пирамиданың неше жағы болады?
22. Пирамиданың: 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 жағы болуы мүмкін бе?
23. 1) 8; 2) 10; 3) 12 қыры бар пирамиданың табанында қандай көпбұрыш жатады?

Кеңістіктегі параллельдік

24. 1) Кубтың; 2) параллелепипедтің; 3) үшбұрышты призманың; 4) алтыбұрышты призманың параллель қырларының қанша жұбы болады?

25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде келесі түзулер параллель болатынын дәлелдеңдер: 1) AB және D_1C_1; 2) AD_1 және BC_1.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмада келесі түзулер параллель болатынын дәлелдеңдер: 1) AB және E_1D_1; 2) AA_1 және DD_1; 3) AC_1 және FD_1.

27. 1) Кубтың; 2) параллелепипедтің; 3) үшбұрышты пирамиданың; 4) алтыбұрышты пирамиданың айқас қырларының қанша жұбы болады?

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының төбелері арқылы өтетін: 1) AB_1 және BC_1; 2) AA_1 және BD_1; 3) AC_1 және BD_1 түзулері қалай орналасқан?

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың төбелері арқылы өтетін: 1) AB_1 және CD_1; 2) AA_1 және BD_1; 3) AC_1 және BF_1 түзулері қалай орналасқан?

30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде: 1) AA_1 және BD; 2) AC_1 және BB_1 түзулері айқас болатынын дәлелдеңдер.

31. $SABCDEF$ пирамидасында SA түзуі мен: 1) BC; 2) CD түзуі айқас болатынын дәлелдеңдер.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында: 1) AA_1 және BC; 2) AC_1 және BD; 3) AB және B_1C_1 түзулері айқас болатынын дәлелдеңдер.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында: 1) AD; 2) AB_1 түзулеріне параллель жақтарын көрсетіңдер.

34. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамидасында AB қыры SDE жағына параллель болатынын дәлелдеңдер.

35. 1) Кубтың; 2) параллелепипедтің; 3) үшбұрышты призманың; 4) алтыбұрышты призманың параллель жақтарының қанша жұбы болады?

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасында: 1) ABB_1 және EDD_1; 2) ACC_1 және FDD_1 жазықтықтары параллель болатынын дәлелдеңдер.

Кеңістіктегі перпендикулярлық

37. 1) Дұрыс тетраэдрдің; 2) кубтың перпендикуляр қырларының қанша жұбы болады?

38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында: 1) AB_1 және BC_1; 2) AC және BD_1; 3) AB_1 және CD_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. Оның: 1) AA_1 және CD_1; 2) AA_1 және BD_1; 3) AC және BE_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында B нүктесінен: 1) A_1D_1; 2) A_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

41. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. Оның B нүктесінен: 1) AC_1; 2) A_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында B нүктесінен: 1) ACC_1; 2) ACB_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. Оның B төбесінен: 1) ACC_1; 2) CDD_1; 3) DEE_1; 4) DFF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

44. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. Оның: 1) ABB_1 және DEE_1; 2) ACC_1 және FDD_1 жазықтықтарының арақашықтығын табыңдар.

45. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамидасының барлық қырлары 1-ге тең. SB түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

46. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамидасы табанының қабырғасы 1-ге, ал бүйір қырлары 2-ге тең. SB түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

47. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. 1) ABB_1 және BCC_1; 2) ABB_1 және ACC_1; 3) ACC_1 және CDD_1; 4) ACC_1 және BEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

48. Дұрыс тетраэдрдің жақтарының арасындағы екіжақты бұрыштың косинусын табыңдар.

49. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның көршілес бүйір жақтарының арасындағы екіжақты бұрышының косинусын табыңдар.

Векторлар және олардың қасиеттері

50. Параллелепипедтің қырлары әртүрлі қанша векторларды құрайды?

51. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. 1) $\overline{AC_1}$; 2) $\overline{AD_1}$ векторының ұзындығын табыңдар.

52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында: 1) $\overline{AB} + \overline{AD_1}$; 2) $\overline{AB_1} + \overline{AD_1}$ векторының ұзындығын табыңдар.

53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $\overline{AC_1}$ векторын $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ және $\overline{AA_1}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

54. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең. $\overline{AD_1}$ векторын $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ және $\overline{AA_1}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

55. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамидасының барлық қырлары 1-ге тең. $\overline{SA}$ векторы мен: 1) $\overline{BC}$; 2) $\overline{EF}$ векторының арасындағы бұрышты табыңдар.

56. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубы берілген. $\overline{AB_1}$ векторы мен: 1) $\overline{CC_1}$; 2) $\overline{CD_1}$; 3) $\overline{BC_1}$; 4) $\overline{BD_1}$ векторының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында денені C төбесінен C_1 төбесіне $\vec{F} = \overline{BD_1}$ күшінің әсерімен орын ауыстырғанда орындалатын жұмысты табыңдар.

Координаталар

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубы тікбұрышты координаталар жүйесінде орналасқан. Оның D төбесі координаталар басында, DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше абсцисса, ордината, аппликата осьтерінде жатыр. Кубтың барлық төбелерінің координаталарын табыңдар.

59. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1-ге тең, ал A төбесі — тікбұрышты координата жүйесінің координаталар басында, ал AB, AE, AA_1 кесінділері сәйкесінше абсцисса, ордината, аппликата осьтерінде жатыр. Призманың төбелерінің координаталарын табыңдар.

60. $A(1;\ 2;\ 3)$ нүктесінен: 1) Ox; 2) Oy; 3) Oz координаталар түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

61. Центрі $A(1;\ 2;\ 2)$ нүктесінде болатын және координаталар басы арқылы өтетін сфераның теңдеуін табыңдар.

62. $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 4 = 0$ теңдеуі кеңістіктегі сфераны анықтайтынын дәлелдеңдер. Оның радиусы мен центрінің координаталарын табыңдар.

63. $\bar{a}_1(1;\ 2;\ 3)$ және $\bar{a}_2(3;\ -1;\ 2)$ векторларының скаляр көбейтіндісін табыңдар.

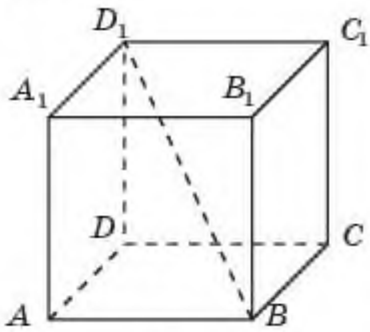
64. $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін табыңдар.

I тарау

КӨПЖАҚТАР

§ 1. Көпжақ ұғымы. Призма және оның элементтері, призма түрлері. Призманың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

Көпжақ деп оның беті көпбұрыштардың шектеулі санынан тұратын денені айтады. Мұндайда, екі көршілес (ортақ қабырғасы бар) көпбұрыштар бір жазықтықта жатпауы тиіс. Осы көпбұрыштар көпжақтың *жақтары*, ал көпбұрыштың қабырғалары мен төбелері көпжақтың сәйкесінше *қырлары* мен *төбелері* деп аталатынын еске саламыз.



1.1-сурет

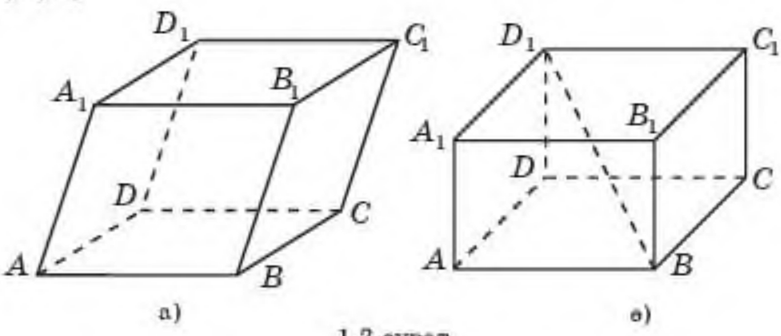
10-сынып геометрия курсында дөңес көпжақтар (куб, параллелепипед, призма, пирамида және т.б.) қарастырылды.

Куб деп алты жағы да квадрат болып келетін көпжақты айтады (1.1-сурет). Әдетте куб оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Қыры 1-ге тең куб *бірлік куб* деп аталады.

Кубтың бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесінді *кубтың диагоналі* деп аталады. 1.1-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BD_1 диагоналі кескінделген.

Параллелепипед деп қарама-қарсы жақтары қос-қостан өзара параллель болатын көпжақты (алтыжақ) айтады (1.2, а-сурет). Параллелепипедтің алты жағы да параллелограмдар болады. Параллелепипед оның төбелерін көрсету арқылы белгіленеді, мысалы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



1.2-сурет

Егер параллелепипедтің бүйір қырлары табан жазықтығына перпендикуляр болса, онда ол *тік параллелепипед* деп аталады. Табандары тіктөртбұрыштар болатын тік параллелепипедті тікбұрышты параллелепипед деп атайды (1.2, ә-сурет). Егер параллелепипедтің бүйір қырлары табан жазықтығына перпендикуляр болмаса, онда ол *көлбеу параллелепипед* деп аталады (1.2, а-сурет).

Параллелепипедтің бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесінді *параллелепипедтің диагоналі* деп аталады. 1.2, ә-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрыштың параллелепипедінің BD_1 диагоналі кескінделген.

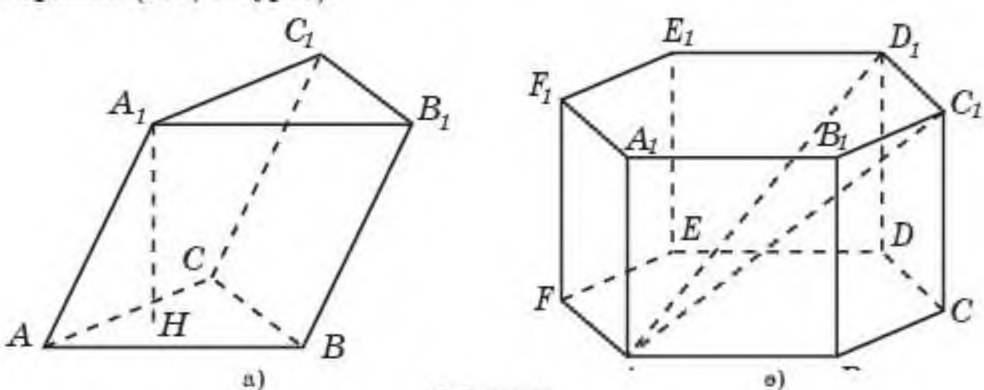
Параллелепипедтің барлық диагональдары бір нүктеде қиылысады және осы нүктеде қақ бөлінетінін дәлелдеңдер.

Призма деп екі жағы параллель жазықтықтарда жататын өзара тең көпбұрыштар, ал қалған жақтары осы көпбұрыштармен ортақ қабырғалары бар параллелограмдардар болатын көпжақты айтады. Көпбұрыштар призманың *табандары*, ал параллелограмдар призманың *бүйір жақтары* деп аталады. Бүйір жақтарынан құрылған бет призманың *бүйір беті* деп аталады. Призманың бүйір жақтарының ортақ қырлары оның *бүйір қырлары* деп аталады.

Призмалар табандарында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

Егер призманың табандары n-бұрыштар болса, онда ол *n-бұрышты призма* деп аталады.

Призма оның төбелерімен белгіленеді, мысалы: $ABCA_1B_1C_1$ — үшбұрышты призма (1.3, а-сурет), $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — алтыбұрышты призма (1.3, ә-сурет).



1.3-сурет

Призманың анықтамасынан оның мынадай қасиеттері шығады:

1) бүйір қырлары тең;

2) табандары тең және параллель болады.

Бұл қасиеттерді өздерің дәлелдеңдер.

Бүйір қырлары табандарына перпендикуляр болатын призма *тік призма* деп аталады. Тік емес призма *көлбеу призма* деп аталады. 1.3, а-суретте үшбұрышты көлбеу призма кескінделген. 1.3, ә-суретте тік алтыбұрышты призма кескінделген.

Қалай ойлайсыңдар, параллелепипед төртбұрышты призма бола ма?

Табандары дұрыс көпбұрыштар болатын тік призма *дұрыс* деп аталады. 1.3, ә-суретте дұрыс алтыбұрышты призма кескінделген.

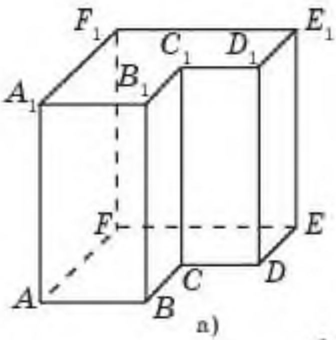
Призманың табан жазықтықтарының арақашықтығын *призманың биіктігі* деп атайды, яғни призманың бір табанының нүктесінен екінші табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр оның *биіктігі* болып табылады. 1.3, а-суретте $ABCA_1B_1C_1$ призмасының A_1H биіктігі кескінделген.

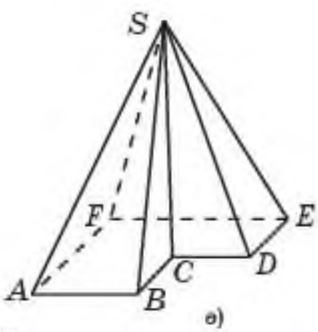
Тік призманың биіктігі оның бүйір қырының ұзындығына тең болатынын дәлелдеңдер.

Призманың бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесінді *призманың диагоналі* деп аталады. 1.3, ә-суретте $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмасының AC_1 және AD_1 диагональдары кескінделген.

Егер көпжақ өзінің кез келген екі нүктесімен бірге оларды қосатын кесіндіні қамтитын болса, онда ол *дөңес көпжақ* деп аталады.

1.3-суретте дөңес көпжақтар кескінделген. 1.4, а, ә-суретте дөңес емес алтыбұрышты призма кескінделген.

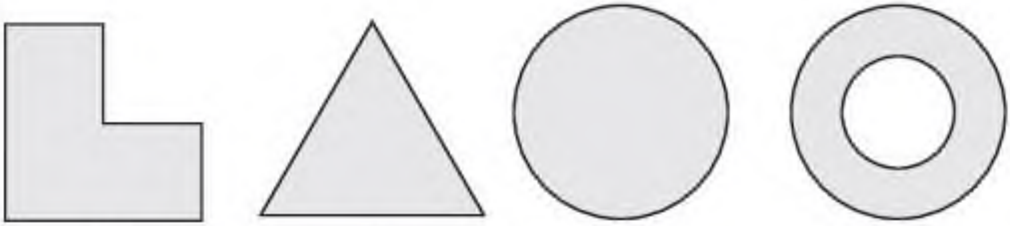




1.4-сурет

«Дөңестік» ұғымы кез келген фигура үшін анықталады. Егер фигурада оның кез келген екі нүктесімен бірге оларды қосатын кесінді жататын болса, онда ол *дөңес фигура* деп аталады.

1.5-суретте дөңес (ә, б) және дөңес емес (а, в) жазық фигуралар кескінделген.



а) ә) б) в)

1.5-сурет

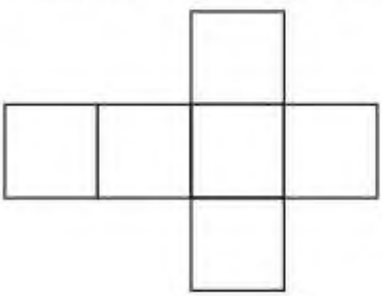
Екі дөңес фигураның қиылысуы (ортақ бөлігі) дөңес фигура болатынын дәлелдеңдер.

Егер көпжақтың бетін қандайда бір қырлары бойымен кесіп, оны жазықтыққа, яғни бетті құрайтын барлық көпбұрыштар берілген жазықтықта жататындай жазатын болсақ, онда *көпжақтың жазбасы* деп аталатын фигура пайда болады.

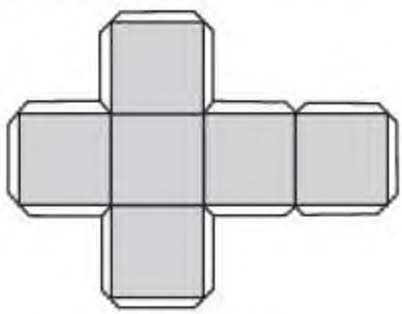
Мысалы, 1.6-суретте кубтың жазбасы кескінделген.

Көпжақтардың модельдерін қатты қағаздан, қатырма қағаздан немесе басқада материалдан дайындау үшін алдымен оның жазбасын әзірлеп, сәйкесінше қырларын желімдеу қажет.

Ыңғайлы болуы үшін көпжақтың жазбасын қақпақшаларымен жасаған дұрыс және олар арқылы желімдеу жүргізіледі. 1.7-суретте кубтың жазбасы қақпақшаларымен көрсетілген.



1.6-сурет



1.7-сурет

Көпжақтарды оның жазбалары арқылы құрастыру туралы толығырақ танысу үшін мынадай кітапты ұсынамыз: Веннинджер М. Модели многогранников. – М.: Мир, 2004.

Анықтама бойынша, *көпжақтың бетінің ауданы* осы беттің құрамындағы көпбұрыштардың аудандарының қосындысы болып есептеледі.

Көпжақ бетінің ауданы оның жазбасының ауданына тең болатыны анық.

Призманың бүйір беті деп осы призманың барлық бүйір жақтарынан құрылған бетті айтады. Сондықтан призманың бүйір бетінің ауданы оның барлық бүйір жақтарының аудандарының қосындысына тең болады.

Теорема. ***Тік призманың бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрі мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады.***

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша $S_{бүйір} = S_1 + S_2 + ... + S_n$, мұндағы S_1, S_2, ..., S_n – бүйір жақтарының аудандары. Тік призманың бүйір жақтары тіктөртбұрыштар болып келеді, оның табандары призманың табанының қабырғалары, ал бүйір қыры призманың h биіктігіне тең және $S_1 = a_1h$, $S_2 = a_2h$, ... , $S_n = a_nh$, мұндағы a_1, a_2, ..., a_n – табан қабырғаларының ұзындықтары. Осыдан призманың бүйір бетінің ауданы мынадай формуламен есептелетіні шығады:

$$S_{бүйір} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = (a_1 + a_2 + ... + a_n)h = ph,$$

мұндағы p — призманың табанының периметрі. ◻

Призманың толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен табанының аудандарының қосындысына тең болады, яғни келесі формуламен анықталады:

$$S_{призма} = S_{бүйір} + 2S_{табан}.$$

Қыры a-ға тең болатын кубтың толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

Бір төбесінен шығатын қырлары a, b, c болатын тікбұрышты параллелепипедтің толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

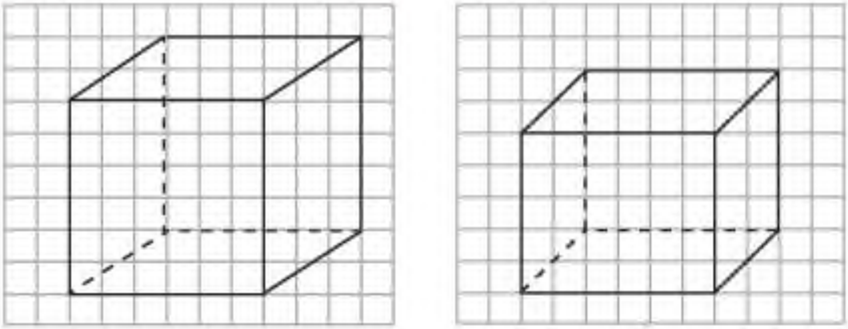
Көпжақтарды моделдеу үшін http://geogebra.org сайтынан жүктеп алуға болатын тегін таратылымды GeoGebra компьютерлік программасын қолдануға болады.

Сұрақтар

1. Көпжақ дегеніміз не?
2. Қандай көпжақ куб деп аталады?
3. Кубтың диагоналі дегеніміз не?
4. Қандай көпжақ параллелепипед деп аталады?
5. Параллелепипедтің диагоналі дегеніміз не?
6. Қандай көпжақ призма деп аталады?
7. Қандай призма дұрыс деп аталады?
8. Призманың биіктігі дегеніміз не?
9. Призманың диагоналі дегеніміз не?
10. Қандай көпжақ дөңес деп аталады?
11. Көпжақтың жазбасы дегеніміз не?
12. Көпжақтың бетінің ауданы дегеніміз не?
13. Призманың бүйір және толық бетінің аудандары қалай есептеледі?

А

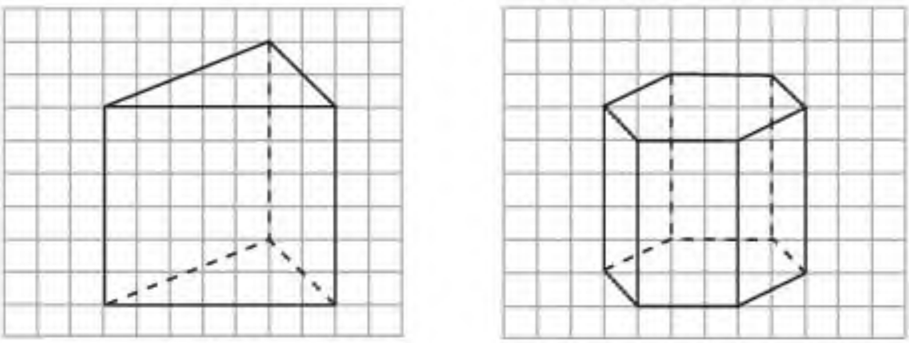
1.1. Торкөз қағазға 1.8-суреттегіге ұқсас кубты және параллелепипедті салыңдар.



а) ә)

1.8-сурет

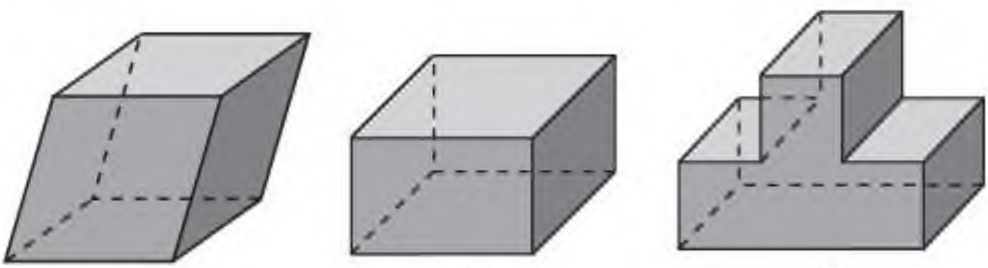
1.2. Торкөз қағазға 1.9-суреттегіге ұқсас призманы салыңдар.



а) ә)

1.9-сурет

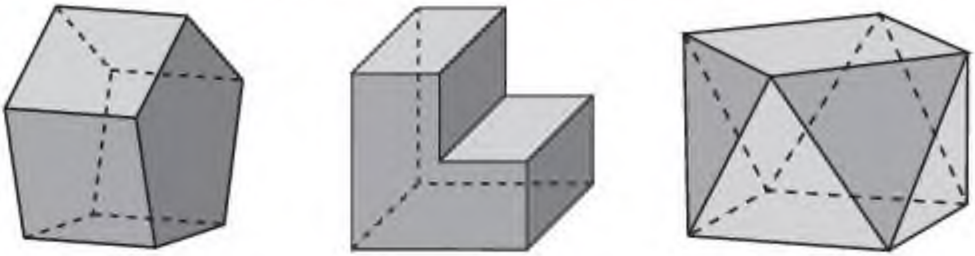
1.3. 1.10-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы параллелепипед болады?



а) ә) б)

1.10-сурет

1.4. 1.11-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы призма болады?



а) ә) б)

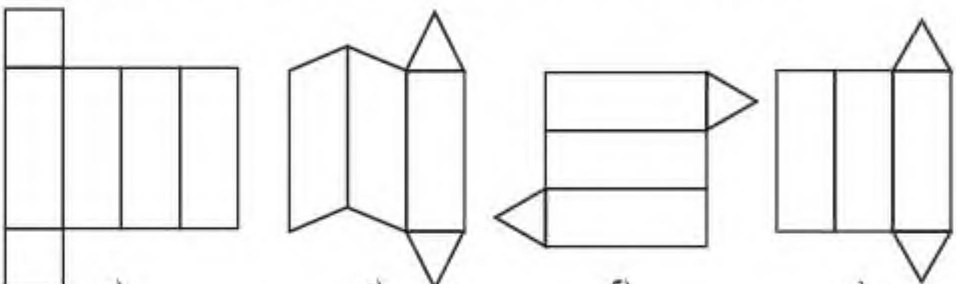
1.11-сурет

1.5. 1.12-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы призманың жазбасы болады? Осы призманың түрін анықтаңдар.

1.6. Қыры 1 см-ге тең болатын кубтың диагоналін табыңдар.

1.7. Бір төбесінен шығатын қырлары 2 см, 3 см және 4 см болатын тікбұрышты параллелепипедтің диагоналін табыңдар.

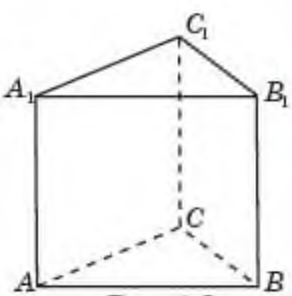
1.8. Призманың бүйір қыры 2 см-ге тең және ол табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Призманың биіктігін табыңдар.



а) ә) б) в)

1.12-сурет

1.9. Егер кубтың барлық қырларын 3 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?



1.13-сурет

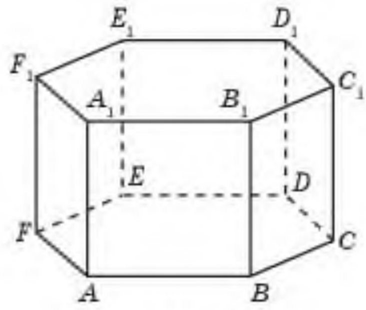
1.10. Егер тікбұрышты параллелепипедтің барлық қырларын 2 есе кемітсе, онда оның бетінің ауданы неше есе кемиді?

1.11. Егер призманың барлық қырларын 2 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

1.12. Бір төбесінен шығатын қырлары сәйкесінше 5 см, 4 см, 3 см болатын тікбұрышты параллелепипедтің бетінің ауданын табыңдар.

1.13. Барлық қырлары 1 см-ге тең болатын дұрыс үшбұрышты призманың бетінің ауданын табыңдар (1.13-сурет).

1.14. Барлық қырлары 1 см-ге тең болатын дұрыс алтыбұрышты призманың бетінің ауданын табыңдар (1.14-сурет).



1.14-сурет

В

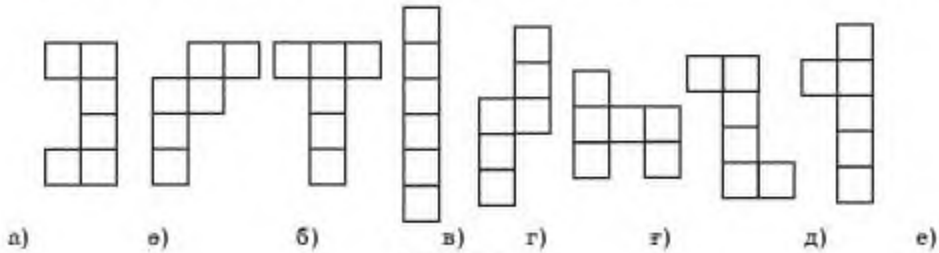
1.15. 1.15-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы кубтың жазбасы болады?

1.16. Кубтың диагоналі 1 см-ге тең. Кубтың қырын табыңдар.

1.17. Дұрыс алтыбұрышты призманың жазбасын салыңдар.

1.18. Дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың диагоналін табыңдар.

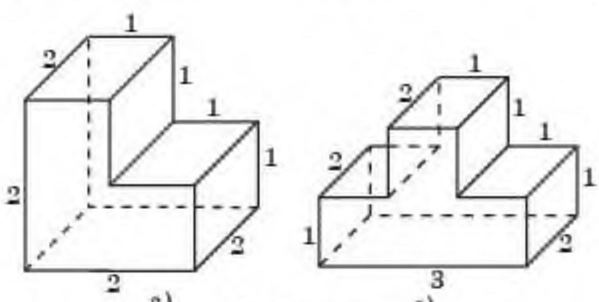
1.19. Дұрыс алтыбұрышты призманың табанының қабырғасы 1 см-ге, ал оның үлкен диагоналі 3 см-ге тең. Призманың биіктігін табыңдар.



1.15-сурет

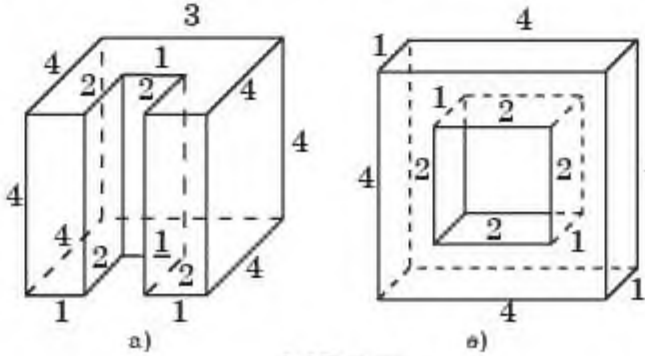
1.20. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см-ге тең. Параллелепипедтің бетінің ауданы 40 см2-қа тең болуы үшін осы төбесінен шығатын үшінші қыры қандай болуы керек?

1.21. 1.16-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигуралар беттерінің ауданын табыңдар.



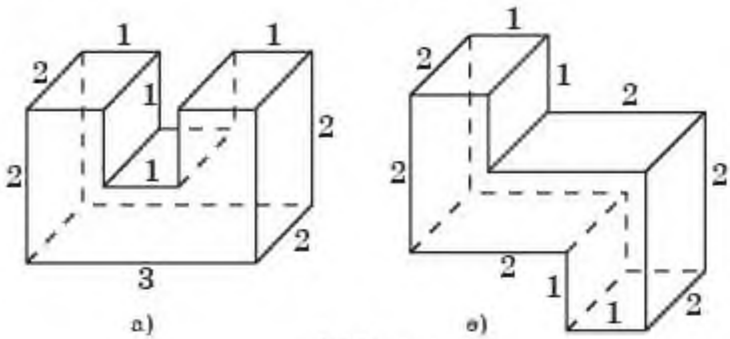
1.16-сурет

1.22. 1.17-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигуралар беттерінің ауданын табыңдар.



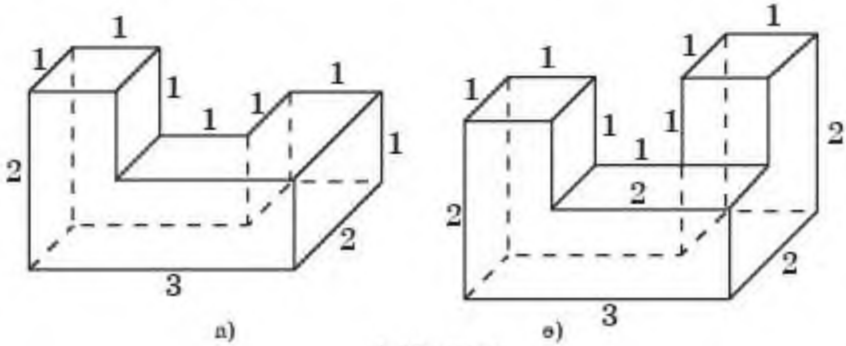
1.17-сурет

1.23. 1.18-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигуралар беттерінің ауданын табыңдар.



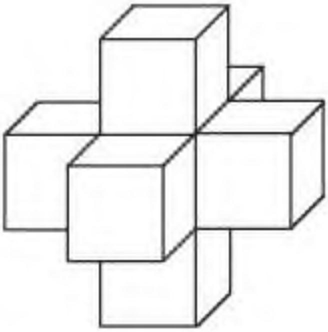
1.18-сурет

1.24. 1.19-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден құралған фигуралар беттерінің ауданын табыңдар.

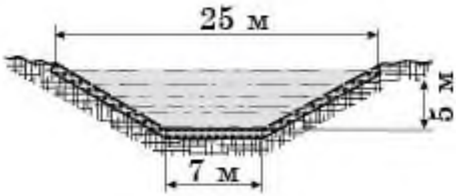


1.19-сурет

1.25. 1.20-суреттегі кеңістіктік денені құраушы кубтардың қырлары 1 см-ге тең деп алып, дененің бетінің ауданын табыңдар.



1.20-сурет

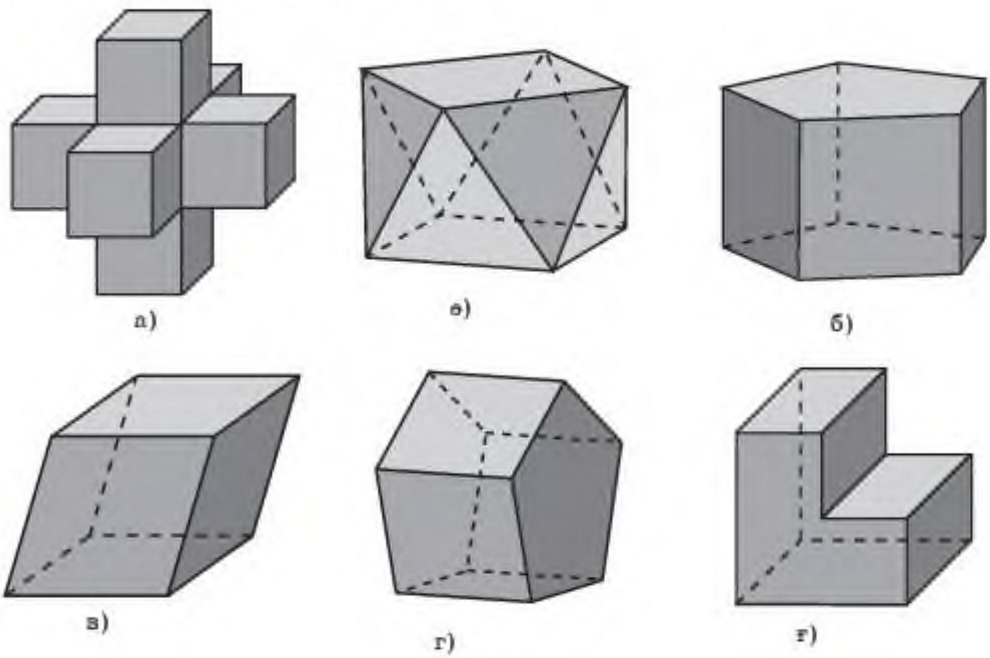


1.21-сурет

1.26. 1.21-суретте су жолы каналының көлденең қимасы көрсетілген. Каналдың төменгі және бүйір жақтары бетондалған. Каналдың әр километрінде бетонмен жабылған ауданды табыңдар.

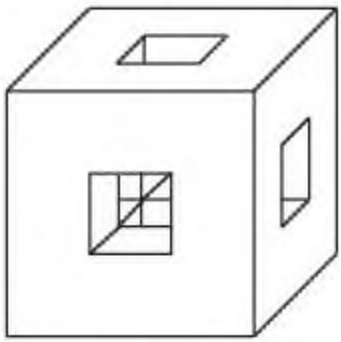
С

1.27. 1.22-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы дөңес және дөңес емес көпжақтар болады?

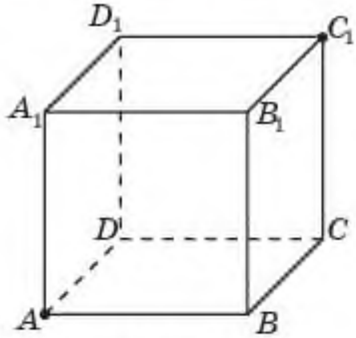


1.22-сурет

1.28. Қыры 6 см-ге тең болатын кубтың әрбір жағынан өтпелі квадратты тесіктер жасалды (1.23-сурет). Квадраттың қабырғасы 2 см-ге тең. Кубтың қалған бөлігінің бетінің ауданын табыңдар.



1.23-сурет



1.24-сурет

1.29. Бірлік кубтың бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейін оның бетіндегі ең қысқа арақашықтықты табыңдар (1.24-сурет).

1.30. Дөңес емес көпбұрыш дөңес көпжақтың бір жағы болады ма?

1.31. Дөңес фигуралар біріксе дөңес фигура пайда бола ма?

1.32. Барлық жақтары дөңес көпбұрыш болатын дөңес емес көпжаққа мысал келтіріңдер.

1.33. Егер көпжақтың жақтары тек қана үшбұрыштар болса, онда жақтарының үш еселенген саны оның қырларының екі еселенген санына тең болатынын дәлелдеңдер. Егер көпжақтың қырларының саны 6-ға тең болса, онда оның жақтарының саны нешеу? Мұндай көпжаққа мысал келтіріңдер.

1.34. Егер көпжақтың жақтары тек қана төртбұрыштар болса, онда жақтарының төрт еселенген саны оның қырларының екі еселенген санына тең болатынын дәлелдеңдер. Егер көпжақтың жақтарының саны 6-ға тең болса, онда оның қырларының саны нешеу? Мұндай көпжаққа мысал келтіріңдер.

1.35. Егер көпжақтың әрбір төбесінен үш қыры шығатын болса, онда төбелерінің үш еселенген саны оның қырларының екі еселенген санына тең болатынын дәлелдеңдер. Егер көпжақтың қырларының саны 15-ке тең болса, онда оның төбелерінің саны нешеу? Мұндай көпжаққа мысал келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

1.36. Пирамида ұғымын анықтап көріңдер. Оның беті қандай көпбұрыштардан тұрады?

§ 2. Пирамида және қиық пирамида. Пирамиданың, қиық пирамиданың жазбасы, бүйір беті және толық бетінің аудандары

Пирамида деп бір жағы кез келген көпбұрыштан, ал қалған жақтары ортақ төбесі бар үшбұрыштардан тұратын көпжақты айтады.

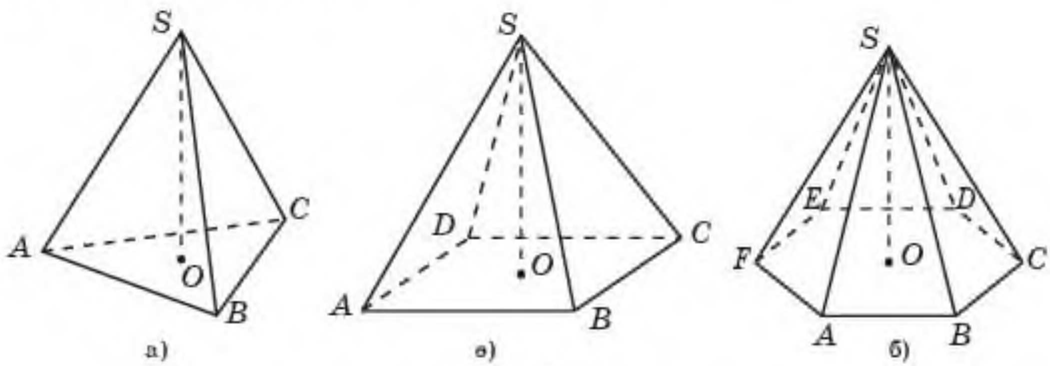
Көпбұрыш пирамиданың *табаны*, ал үшбұрыштар пирамиданың *бүйір жақтары* деп аталады.

Бүйір жақтарының ортақ төбесі пирамиданың *төбесі*, ал төбесінен шығатын қырлары пирамиданың *бүйір қырлары* деп аталады. Пирамиданың төбесінен жүргізілген бүйір жағының биіктігі пирамиданың *апофемасы* деп аталады.

Пирамидалар табанында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

Егер пирамиданың табаны n-бұрышты болса, онда ол *n-бұрышты пирамида* деп аталады.

2.1-суретте үшбұрышты, төртбұрышты және алтыбұрышты пирамидалар кескінделген.



2.1-сурет

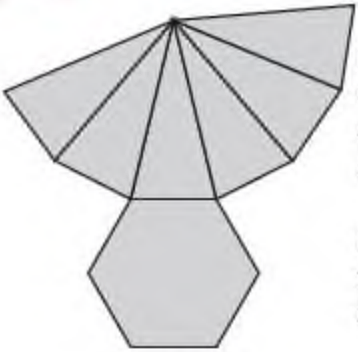
Пирамида оның төбелерімен белгіленеді, мысалы: $SABC$ үшбұрышты пирамида (2.1, а-сурет), $SABCD$ төртбұрышты пирамида (2.1, ә-сурет), $SABCDEF$ алтыбұрышты пирамида (2.1, б-сурет). Бірінші ортақ төбесі көрсетіліп жазылады.

Пирамида төбесінен оның табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр *пирамиданың биіктігі* деп аталады. 2.1-суретте пирамиданың SO биіктігі кескінделген.

Табанында дұрыс көпбұрыш жататын және барлық бүйір қырлары өзара тең болатын пирамида дұрыс деп аталады.

Қалай ойлайсыңдар, тетраэдр үшбұрышты пирамида бола ма?

2.2-суретте дұрыс алтыбұрышты пирамиданың жазбасы кескінделген.



2.2-сурет

Пирамиданың бүйір беті деп осы пирамиданың барлық бүйір жақтарынан құрылған бетті айтады. Сондықтан *пирамиданың бүйір бетінің ауданы* оның барлық бүйір жақтарының аудандарының қосындысына тең болады.

Теорема. ***Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табанының жарты периметрі мен апофемасының көбейтіндісіне тең болады:***

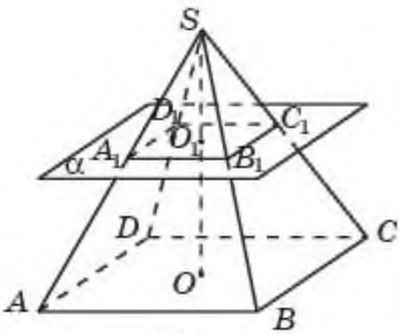
$$S_{\text{бүйір}} = \frac{1}{2}pl,$$

мұндағы l – пирамиданың апофемасы, ал p – табанының периметрі.

Бұл теореманы өздерің дәлелдеңдер.

Пирамиданың толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен табанының аудандарының қосындысына тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

$$S_{\text{пирамида}} = S_{\text{бүйір}} + S_{\text{табан}}.$$



2.3-сурет

Пирамиданың табанына параллель және бүйір қырларын қиып өтетін жазықтықты қарастырайық. Осы жазықтық пен табан жазықтығының арасында шектелген пирамиданың бөлігі *қиық пирамида* деп аталады (2.3-сурет).

Берілген пирамиданың табаны және пирамиданың жазықтықпен қимасынан пайда болған көпбұрыш *қиық пирамиданың табандары* деп аталады.

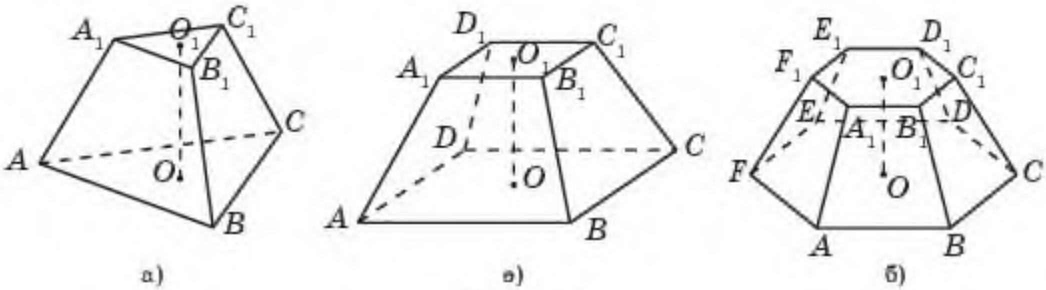
Қиық пирамида оның табандарының төбелерімен белгіленеді, мысалы, 2.3-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ төртбұрышты қиық пирамида кескінделген.

Қиық пирамиданың табандарының қабырғалары қос-қостан параллель, сондықтан *қиық пирамиданың бүйір жақтары* трапециялар болып табылады. Бүйір жақтарынан құрылған бет *қиық пирамиданың бүйір беті* деп аталады.

Қиық пирамиданың бүйір жақтарының ортақ қырлары оның *бүйір қырлары* деп аталады.

Қиық пирамидалар табанында жатқан көпбұрыштарға (үшбұрыштар, төртбұрыштар, бесбұрыштар және т.б.) байланысты сәйкесінше үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты және т.б. болып бөлінеді.

2.4-суретте үшбұрышты қиық пирамида (2.4, а-сурет), төртбұрышты қиық пирамида (2.4, ә-сурет) және алтыбұрышты қиық пирамида (2.4, б-сурет) кескінделген.



2.4-сурет

Дұрыс пирамидадан алынған қиық пирамида *дұрыс* деп аталады.

Бүйір жағының биіктігі дұрыс қиық пирамиданың апофемасы деп аталады.

Бір табанының кез келген нүктесінен екінші табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр *қиық пирамиданың биіктігі* деп аталады. 2.4-суретте қиық пирамиданың OO_1 биіктігі кескінделген.

Қиық пирамиданың жазбасы екі ұқсас көпбұрыштар (қиық пирамиданың табандары) мен трапециялардан (қиық пирамиданың бүйір жақтары) тұрады.

Қиық пирамиданың бүйір беті деп осы қиық пирамиданың барлық бүйір жақтарынан құрылған бетті айтады. Сондықтан қиық *пирамиданың бүйір бетінің ауданы* оның барлық бүйір жақтарының аудандарының қосындысына тең болады.

Теорема. ***Дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табандарының периметрлерінің қосындысының жартысын апофемасына көбейткенге тең болады:***

$$S_{\text{бүйір}} = 1/2\ (p + p_1)l,$$

мұндағы p және p_1 – қиық пирамиданың табандарының периметрлері, ал l – апофемасы.

Бұл теореманы өздерің дәлелдеңдер.

Қиық пирамиданың толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен табандарының аудандарының қосындысына тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

$$S_{\text{қиық пирамида}} = S_{\text{бүйір}} + S_{1\,\text{табан}} + S_{2\,\text{табан}}.$$

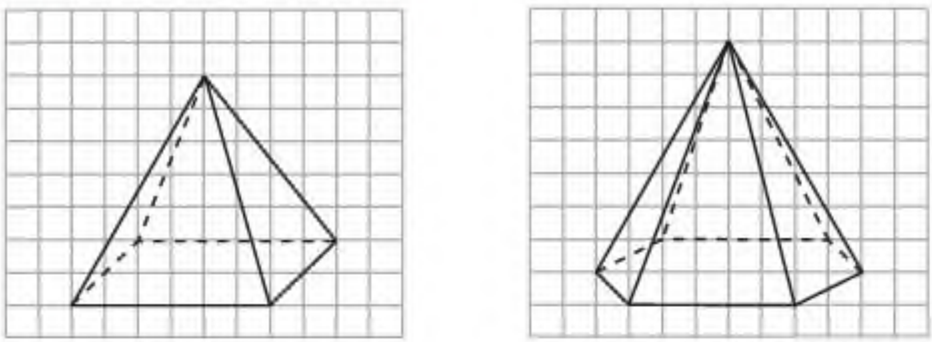
Сұрақтар

1. Қандай көпжақ пирамида деп аталады?
2. Қандай пирамида дұрыс деп аталады?
3. Пирамиданың биіктігі дегеніміз не?
4. Қандай көпжақ қиық пирамида деп аталады?
5. Қандай қиық пирамида дұрыс деп аталады?
6. Қиық пирамиданың биіктігі дегеніміз не?
7. Пирамиданың бетінің ауданы қалай есептеледі?
8. Қиық пирамиданың бетінің ауданы қалай есептеледі?

Есептер

А

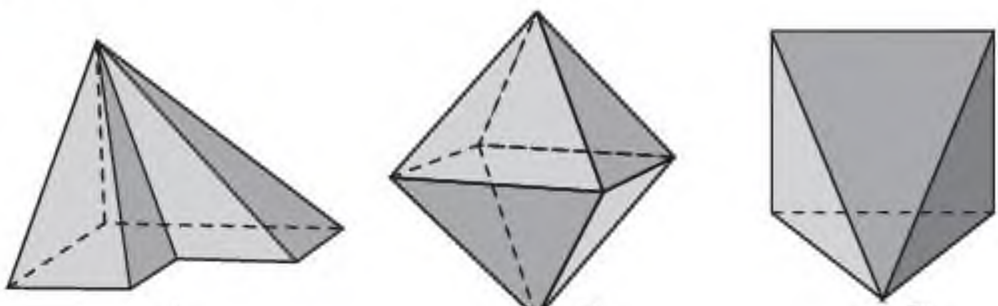
2.1. Торкөз қағазға 2.5-суреттегіге ұқсас пирамиданы салыңдар және оның биіктігін жүргізіңдер.



а) ә)

2.5-сурет

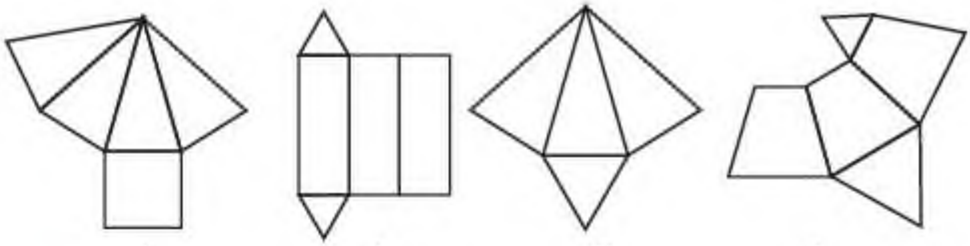
2.2. 2.6-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы пирамида болады?



а) ә) б)

2.6-сурет

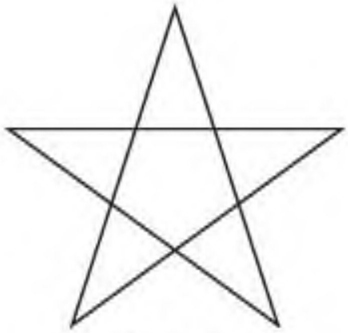
2.3. 2.7-суретте кескінделген фигуралардың қайсысы пирамиданың жазбалары болады? Олардың түрін анықтаңдар.



а) ә) б) в)

2.7-сурет

2.4. 2.8-суретте кескінделген фигура қандай көпжақтың жазбасы болады?



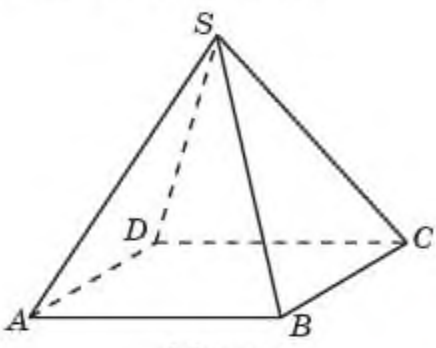
2.8-сурет

2.5. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың жазбасын салыңдар.

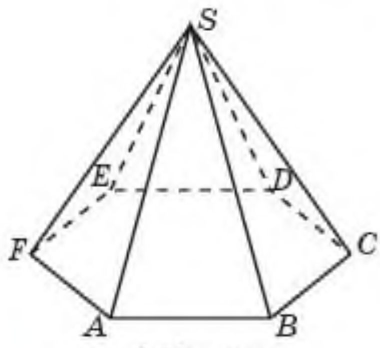
2.6. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

2.7. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар (2.9-сурет).

2.8. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар (2.10-сурет).



2.9-сурет



2.10-сурет

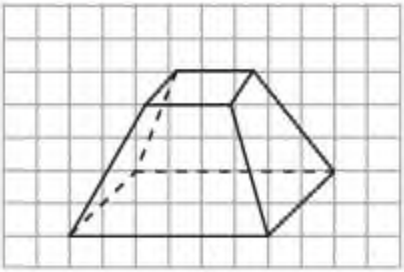
B

2.9. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

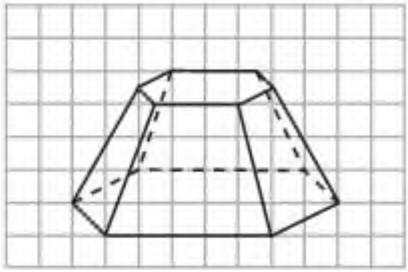
2.10. Егер пирамиданың барлық қырларын 2 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

2.11. Егер пирамиданың барлық қырларын 3 есе кемітсе, онда оның бетінің ауданы неше есе кемиді?

2.12. Торкөз қағазға 2.11-суреттегіге ұқсас қиық пирамиданы салыңдар.



а)



ә)

2.11-сурет

2.13. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың жазбасын салыңдар.

C

2.12-сурет

2.13-сурет

2.14. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың жазбасын салыңдар.

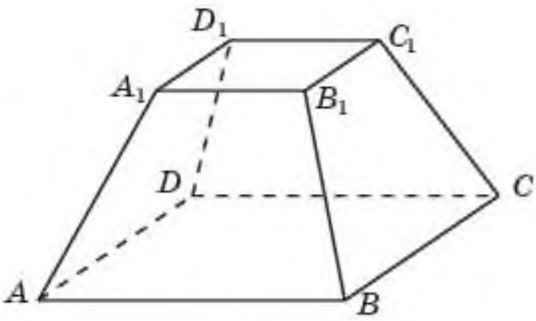
2.15. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 4 см және 2 см-ге, ал бүйір қырлары 3 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

2.16. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 2 см және 1 см-ге, ал биіктігі 3 см-ге тең. Пирамиданың бүйір қырын табыңдар.

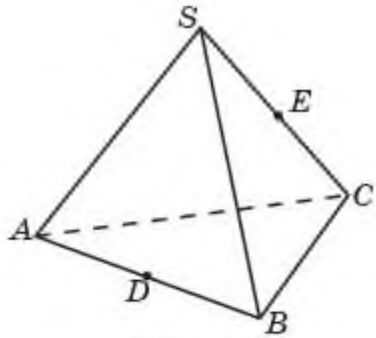
2.17. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бейбітшілік пен келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес болып табылады (2.12-сурет). Оның биіктігі мен табанының қабырғасы 62 м-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

2.18. Ежелгі Мысырдағы ең үлкен ғимараттардың бірі – Хеопс пирамидасы – дұрыс төртбұрышты пирамида. Оның биіктігі шамамен 140 м-ге, ал табанының ауданы 5,3 га-ға тең (2.13-сурет). Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

2.19. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 1 см және 2 см-ге, ал бүйір қырлары 1 см-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар (2.14-сурет).



2.14-сурет



2.15-сурет

2.20. $SABC$ дұрыс пирамидасының AB және SC қырларының орталарын қосатын пирамида бетіндегі ең қысқа арақашықтықты табыңдар (2.15-сурет).

2.21. 2.16-суретте дән сақталатын қорап (бункер) кескінделген. Оның негізгі бөлігінің бетін дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың бүйір беті құрайды. Суретте көрсетілген өлшемдері (см-мен) бойынша қорапты жасау үшін (A және B бөліктерін есептемегенде) қанша квадрат дециметр қаңылтыр қажет екенін есептеңдер.

2.22. Егер көпжақтың әрбір төбесінен төрт қыры шығатын болса, онда төбелерінің төрт еселенген саны оның қырларының екі еселенген санына тең болатынын дәлелдеңдер. Егер көпжақтың төбелерінің саны 6-ға тең болса, онда оның қырларының саны нешеу? Мұндай көпжаққа мысал келтіріңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

2.23. Жазықтықтағы көпбұрыштың анықтамасын және дөңес көпбұрыштың бұрыштарының қосындысы туралы теореманы қайталаңдар.

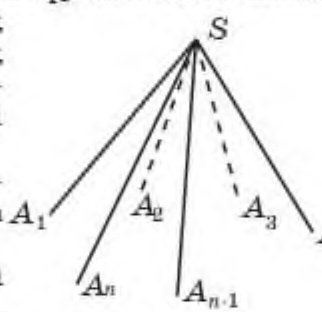
§ 3. Көпжақты бұрыш

«Жазықтықтағы көпбұрыш» ұғымына ұқсас кеңістіктегі «көпжақты бет» пен «көпжақты бұрыш» ұғымдарын анықтаймыз.

Көпжақты бет деп S ортақ төбесі бар A_1SA_2, A_2SA_3, ..., $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 жазық бұрыштарының шектеулі санынан тұратын бетті айтамыз. Мұндайда, көршілес бұрыштардың ортақ қабырғаларының нүктелерінен басқа ортақ нүктелері болмауы, ал көршілес емес бұрыштардың ортақ төбеден басқа ортақ нүктелері болмауы тиіс (3.1-сурет).

Көпжақты беттен және онымен шектелген кеңістіктің бір бөлігінен құралған фигура *көпжақты бұрыш* деп аталады.

Жазық бұрыштардың S ортақ төбесі *көпжақты бұрыштың төбесі* деп аталады.



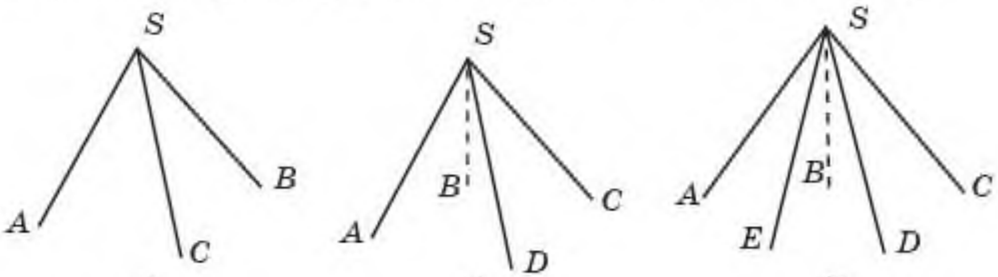
3.1-сурет

SA_1, SA_2, ..., SA_n сәулелері *көпжақты бұрыштың қырлары*, ал A_1SA_2, A_2SA_3, ..., $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 жазық бұрыштары *көпжақты бұрыштың жазық бұрыштары* деп аталады.

Сонымен, көпжақты бұрыштың беті жазық бұрыштардан тұрады. Көпжақты бұрыштың екі көршілес жақтары екіжақты бұрышты құрайды және оны біз *көпжақты бұрыштың екіжақты бұрышы* деп атаймыз. Көпжақты бұрыш оның төбесін және қырларындағы нүктелерді көрсету арқылы белгіленеді: $SA_1A_2...A_n$.

Көпжақты бұрыштар оның жақтарының санына байланысты үшжақты (3.2, а-сурет), төртжақты (3.2, ә-сурет), бесжақты (3.2, б-сурет) және т.б. бұрыштарға бөлінеді.

Көпжақты бұрыштар дөңес және дөңес емес болып бөлінеді.

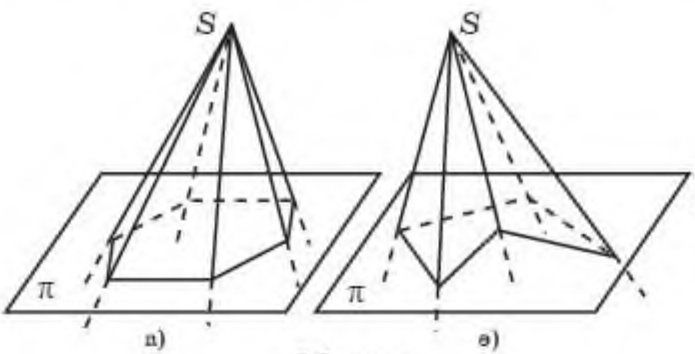


а) ә) б)

3.2-сурет

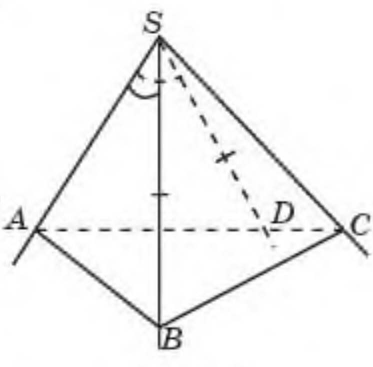
Егер көпжақты бұрыш дөңес фигура болса, яғни фигурада өзінің кез келген екі нүктесімен бірге оларды қосатын кесінді жатса, онда көпжақты бұрыш *дөңес* деп аталады.

3.3-суретте дөңес көпжақты бұрыш (3.3, а-сурет) және дөңес емес көпжақты бұрыш (3.3, ә-сурет) кескінделген.



а) ә)

3.3-сурет



3.4-сурет

Біз тек қана дөңес көпжақты бұрыштарды қарастыратын боламыз.

* Үшжақты бұрыштың жазық бұрыштары үшін үшбұрыш теңсіздігіне ұқсас теңсіздік орынды болады.

1-теорема. ***Үшжақты бұрыштың бір жазық бұрышының өлшемі оның басқадай екі жазық бұрыштары өлшемдерінің қосындысынан кіші болады.***

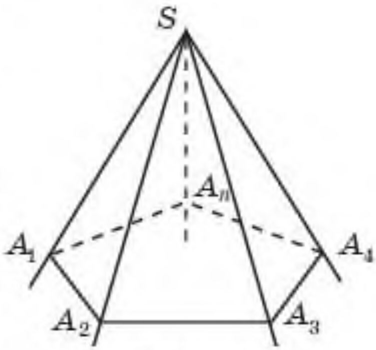
Дәлелдеуі. $SABC$ үшжақты бұрышында жазық бұрыштарының ішіндегі ең үлкені ASC бұрышы болсын (3.4-сурет). Сонда $\angle ASB \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$; $\angle BSC \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$ теңсіздігі орындалады. Сонымен, $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$ теңсіздігін дәлелдеу керек болады.

ASC жағынан ASB бұрышына тең ASD бұрышын саламыз және $SB = SD$ болатындай D нүктесін таңдап аламыз. Сонда ASB және ASD үшбұрыштары тең болады (екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша), демек, $AB = AD$ болады.

ABC үшбұрышын қарастырамыз және үшбұрыштың $AC < AB + BC$ теңсіздігін пайдаланамыз. Теңсіздіктің екі жақ бөлігінен $AD = AB$ азайтып, $DC < BC$ теңсіздігін аламыз. DSC және BSC үшбұрыштарында SC — ортақ қабырға, $SD = SB$ және $DC < BC$. Бұл жағдайда үлкен қабырғасына қарама-қарсы үлкен бұрышы жатады, демек, $\angle DSC < \angle BSC$ болады. Осы теңсіздіктің екі жақ бөлігіне де ASB бұрышына тең ASD бұрышын қосып, ізделінді теңсіздікті аламыз: $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Үшжақты бұрыштың кез келген жазық бұрышының өлшемі оның басқадай екі жазық бұрыштары өлшемдерінің айырымынан үлкен болатынын өздерің дәлелдеңдер.

2-теорема. ***Үшжақты бұрыштың барлық жазық бұрыштарының өлшемдерінің қосындысы 360°-тан кіші болады.***



3.5-сурет

Дәлелдеуі. $SA_1...A_n$ дөңес көпжақты бұрышын қарастырайық (3.5-сурет). Бір жазықтықта жататындай $A_1, ..., A_n$ нүктелерін аламыз және төбелері осы нүктелерде болатын үшжақты бұрыштың жазық бұрыштарының қосындысы туралы теореманы қолданамыз. Сонда

$$\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2S + \angle SA_2A_3, ..., \angle A_nA_1A_2 < \angle A_nA_1S + \angle SA_1A_2.$$

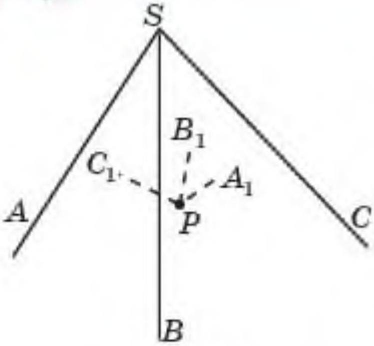
теңсіздігін аламыз.

Бұл теңсіздіктерді мүшелеп қосамыз. Теңсіздіктің сол жақ бөлігінде мәні $180°(n-2)$-ге тең болатын $A_1...A_n$ дөңес n-бұрыштың бұрыштарының қосындысы, ал оң жақ бөлігінде — S төбесіндегі бұрыштардан басқа A_1A_2S, ..., A_nA_1S үшбұрыштарының қосындысы болады.

Осы бұрыштардың қосындысын $\sum$ арқылы белгілейік. Сонда $180°(n-2) < 180°n - \sum$. Ендеше, $\sum < 180° \cdot 2 = 360°$ болады.

Жазық бұрыштарының қосындысы 360°-тан артық болатын көпжақты бұрыштарға мысал келтіріңдер.

3-теорема. ***Үшжақты бұрыштың екіжақты бұрыштарының өлшемдерінің қосындысы 180°-тан үлкен болады.***



3.6-сурет

Дәлелдеуі. $SABC$ — үшжақты бұрыш болсын. Оның ішінен қандай да бір P нүктесін аламыз және осы нүктеден берілген үшжақты бұрыштың жақтарына PA_1, PB_1, PC_1 перпендикулярларын жүргіземіз (3.6-сурет). B_1PC_1, A_1PC_1, A_1PB_1 жазық бұрыштары сәйкесінше SA, SB, SC қырлары болатын екіжақты бұрыштарды 180°-қа дейін толықтырады. Демек, бұл екіжақты бұрыштардың қосындысы $540^\circ - (\angle B_1PC_1 + \angle A_1PC_1 + \angle A_1PB_1)$ болады.

Төбесі P болатын үшжақты бұрыштың барлық жазық бұрыштарының өлшемдерінің қосындысы 360°-тан кіші болатынын ескеріп, бастапқы үшжақты бұрыштың екіжақты бұрыштарының өлшемдерінің қосындысы 180°-тан үлкен болатынын аламыз.

Сұрақтар

1. Көпжақты бет дегеніміз не?
2. Көпжақты бұрыш дегеніміз не?
3. Көпжақты бұрыш қалай белгіленеді?
4. Үшжақты бұрыштың жазық бұрыштары туралы теореманы айтыңдар.
5. Қандай фигура дөңес деп аталады?
6. Қандай көпжақ дөңес деп аталады?
7. Дөңес көпжақты бұрыштың жазық бұрыштары туралы теореманы айтыңдар.
8. Үшжақты бұрыштың екіжақты бұрыштары туралы теореманы айтыңдар.

Есептер

A

3.1. 1) 20°, 60°, 30°; 2) 40°, 40°, 80°; 3) 60°, 45°, 30° жазық бұрыштары бар үшжақты бұрыш бола ма?

3.2. Тек қана үшжақты бұрыштары бар көпжаққа мысал келтіріңдер.

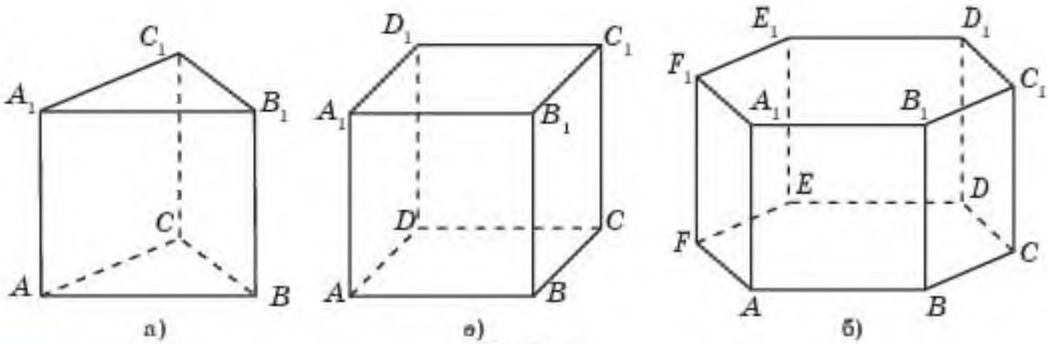
3.3. 1) Төртжақты; 2) бесжақты; 3) алтыжақты бұрышы бар көпжаққа мысал келтіріңдер.

3.4. 1) n-бұрышты призманың; 2) n-бұрышты пирамиданың көпжақты бұрышының түрін анықтаңдар.

B

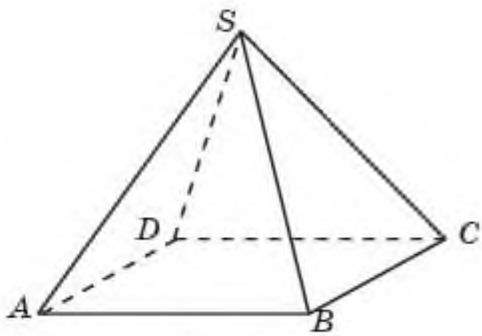
3.5. Үшжақты бұрыштың екі жазық бұрыштары 70° және 80°-қа тең. Үшінші жазық бұрыш қандай аралықта жатады?

3.6. 3.7-суреттегі: 1) дұрыс үшбұрышты призманың; 2) дұрыс төртбұрышты призманың; 3) дұрыс алтыбұрышты призманың үшжақты бұрышының жазық бұрыштарының қосындысын табыңдар.



3.7-сурет

3.7. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең (3.8-сурет). Пирамиданың: 1) үшжақты бұрышының; 2) төртжақты бұрышының жазық бұрыштарының қосындысын табыңдар.



3.8-сурет

C

3.8. Егер үшжақты бұрыштың екі жазық бұрышы тік болса, онда оған қарсы жатқан екіжақты бұрыштары да тік болатынын дәлелдеңдер.

3.9. Төртжақты бұрыштың кез келген жазық бұрышы оның басқадай үш жазық бұрышының қосындысынан кіші болатынын дәлелдеңдер.

3.10. 1) 80°, 130°, 70°, 100°; 2) 20°, 40°, 80°, 160° жазық бұрыштары бар дөңес төртжақты бұрыш бола ма?

3.11. Дөңес n-жақты бұрыштың екіжақты бұрыштарының қосындысы $180^\circ(n-2)$-ден үлкен болатынын дәлелдеңдер.

3.12. 90°, 90°, 90°, 90°-қа тең екіжақты бұрыштары бар дөңес төртжақты бұрыш бола ма?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

3.13. 1) Параллелепипед; 2) призма; 3) пирамида төбелерінің (Т), қырларының (Қ) және жақтарының (Ж) саны үшін Т – Қ + Ж = 2 теңдігі орындалатынын тексеріңдер.

§ 4*. Эйлер теоремасы

Бізге белгілі көпжақтарды қарастырып, олардың төбелерінің (Т), қырларының (Қ) және жақтарының (Ж) саны бойынша кестені толтырамыз.

1-*кесте*

Көпжақтың атауы	Т	Қ	Ж
Параллелепипед	8	12	6
Үшбұрышты пирамида	4	6	4
Төртбұрышты пирамида	5	8	5
Үшбұрышты призма	6	9	5
Төртбұрышты призма	8	12	6
n-бұрышты пирамида	$n + 1$	$2n$	$n + 1$
n-бұрышты призма	$2n$	$3n$	$n + 2$

Осы кестеден қарастырылған барлық көпжақтар үшін Т – Қ + Ж = 2 теңдігі орындалатынын көреміз. Бұл теңдік қарастырылған көпжақтар үшін ғана емес, кез келген дөңес көпжақ үшін де орынды болады.

Дөңес көпжақтардың бұл қасиетін алғашқы болып 1752 жылы Леонард Эйлер дәлелдеген және Эйлер теоремасы атауын алған.

Эйлер теоремасы. ***Кез келген дөңес көпжақтар үшін келесі теңдік орынды болады:***

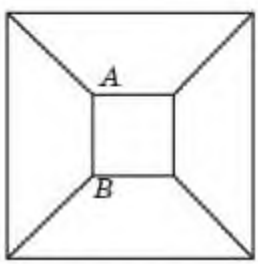
Т – Қ + Ж = 2,

мұндағы Т — берілген көпжақтың төбелерінің саны, Қ — қырларының саны, Ж — жақтарының саны.

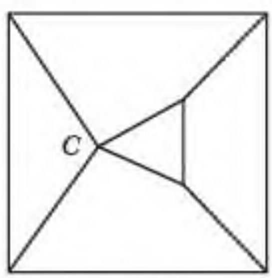
Дәлелдеуі. Көпжақтың бетін қарастырайық. Оның бір жағын кесіп, қалған бетін жазықтыққа жазамыз. Осыдан Т төбелері, Қ қырларынан тұратын сызбаны және осы сызбаның жазықтықты бөлетін Ж аймақтарын аламыз.

Егер торкөздегі екі төбесі бар қандай да бір қырын оның төбелерінің біреуіне осы қыры бойымен қысып жинақтайтын болсақ, онда сызбадағы Т – Қ + Ж мәні өзгермейтінін дәлелдейік.

Мысал ретінде, кубтан алынған 4.1-суреттегі сызбаны қарастырамыз. Мұнда Т = 8, Қ = 12, Ж = 6 болады.



4.1-сурет



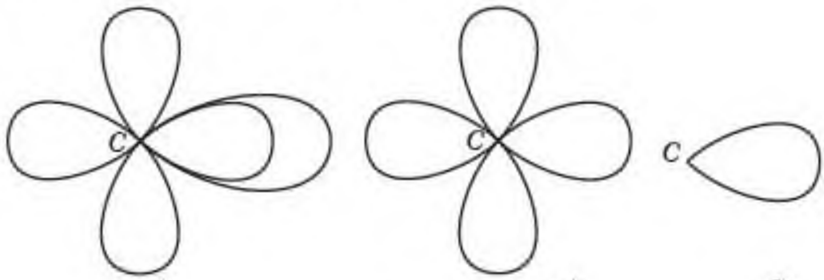
4.2-сурет

AB қырын C нүктесіне қысып жинақтағанда 4.2-суреттегідей сызба пайда болады. Нәтижесінде, Т төбелерінің саны біреуге кеміді, Қ қырларының саны да біреуге кеміді, ал Ж аймақтарының саны өзгермейді. Демек, Т – Қ + Ж мәні де өзгермейтін болады.

Осы қасиеттерді пайдаланып, екі төбесі бар барлық қырларын қысып жинақтаймыз. Осыдан бір төбесі бар, ал қырлары осы төбемен күрмектері болатын сызбаны аламыз (4.3, а-сурет).

Бұл торкөз үшін де Т – Қ + Ж мәні өзгеріссіз бастапқы мән болып қалады.

Енді егер пайда болған сызбадағы қандай да бір күрмекті алып тастасақ, Т – Қ + Ж мәні өзгермейтінін дәлелдейміз.



а) ә) б)

4.3-сурет

Расында да, бұл жағдайда Т төбелерінің саны өзгермейді, ол 1-ге тең. Қ қырларының саны да, Ж аймақтарының саны да 1-ге кемиді (4.3, ә-сурет). Ендеше, Т – Қ + Ж мәні де өзгермейтін болады.

Осы қасиеттерді пайдаланып, біреуден басқа барлық күрмектерді алып тастаймыз. Осыдан бір төбесі және бір қыры (төбесі мен күрмегі) бар сызбаны аламыз (4.3, б-сурет). Бұл сызба үшін Т = 1, Қ = 1, Ж = 2, яғни Т – Қ + Ж = 2 болады. Демек, бұл теңдік бастапқы көпжақ үшін де орынды болып табылады.

Қалай ойлайсыңдар, Эйлер теңдігі: а) дөңес емес призма; ә) дөңес емес пирамида үшін орындала ма?

Мысал. Кез келген дөңес көпжақта үшбұрышты жақ немесе үшжақты бұрыш табылатынын және үшбұрышты жақтардың саны мен үшжақты бұрыштардың санының қосындысы сегізден артық немесе тең болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі. Дөңес көпжақтың i қырлары жинақталатын төбелерінің санын $Т_i$ арқылы белгілейік. Сонда төбелердің жалпы Т саны үшін $Т = Т_3 + Т_4 + Т_5 + \dots$ теңдігі орынды болады.

Осыған ұқсас дөңес көпжақтың i қырлары бар жақтарының санын $Ж_i$ арқылы белгілейік. Сонда жақтарының жалпы Ж саны үшін $Ж = Ж_3 + Ж_4 + Ж_5 + \dots$ теңдігі орынды болады.

Осыдан,

$$3Т_3 + 4Т_4 + 5Т_5 + \dots = 2Қ, \quad 3Ж_3 + 4Ж_4 + 5Ж_5 + \dots = 2Қ.$$

Эйлер теоремасы бойынша, $4Т - 4Қ + 4Ж = 8$ теңдігі орындалады. Т, Қ және Ж орнына өрнектерін қоя отырып, $4Т_3 + 4Т_4 + 4Т_5 + \dots - (3Т_3 + 4Т_4 + 5Т_5 + \dots) - (3Ж_3 + 4Ж_4 + 5Ж_5 + \dots) + 4Ж_3 + 4Ж_4 + 4Ж_5 + \dots = 8$ теңдігін аламыз. Ендеше, $Т_3 + Ж_3 = 8 + Т_5 + \dots + Ж_5 + \dots$. Демек, үшбұрышты жақтардың саны мен үшжақты бұрыштардың санының қосындысы сегізден артық немесе тең болады.

Тарихи деректер

Леонард Эйлер (1707—1783) — әлемге танымал швейцариялық математик. Оның еңбектері математиканың көптеген заманауи бөлімдерінің дамуына үлес қосты.

Ғалымның ғылыми мұралары көп. Қазіргі уақытта оның 800-ден астам еңбектері белгілі болып отыр. Өмірінің соңғы 12 жылында Эйлер ауыр науқастанып, көру қабілетінен айырылды, бірақ науқасына қарамастан жұмыс істеп, нәтижелер алған. Статистикалық есептеулер бойынша, Эйлер аптасына орта есеппен бір жаңалық ашып отырған.

Эйлер еңбектерінде зерттелмеген математикалық мәселелерді табу қиын. Кейінгі ұрпақтың математиктері Эйлерден білім алған. Белгілі француз ғалымы П.С. Лаплас: «Эйлерді оқыңдар, ол — бәріміздің ұстазымыз», — деген.

Математика тарихшылары Эйлер теоремасын *топологияның алғашқы теоремасы* деп атаған. Топология — үздіксіз деформация кезінде өзгермейтін, үзіліссіз немесе қосымша желімдеусіз созылатын және қысылатын фигуралардың қасиеттерін зерттейтін геометрияның бөлімі. Мұндай қасиеттер *топологиялық* деп аталады.

Дөңес көпжақтар үшін Т – Қ + Ж = 2 Эйлер қатынасы осы топологиялық қасиетті сипаттайды. Көпжақты деформациялауға болады, оның қырлары мен жақтары майысуы мүмкін, бірақ олардың саны, яғни Эйлер қатынасы өзгермейді.

Эйлер қатынасын дәлелдеу кезінде біз деформациялауды қолданғанбыз, яғни көпжақтың бетінің бір жағын кесіп, жазықтыққа жазған болатынбыз. Қырлары мен көпбұрыштардың өздері майысуы мүмкін, бірақ бұл Эйлер қатынасына әсер етпейді.

Леонард Эйлердің өмірімен және шығармашылығымен танысу үшін біз келесі кітапты ұсынамыз: Тиле Р. Леонард Эйлер. — Киев: Вища школа, 1983.

Сұрақтар

1. 1) n-бұрышты призманың; 2) n-бұрышты пирамиданың төбелері, қырлары және жақтарының саны нешеге тең?
2. Эйлер теоремасын айтыңдар.
3. Эйлер теоремасы қашан дәлелденді?
4. Топология нені зерттейді?

Есептер

А

4.1. Дөңес көпжақтың 6 төбесі және 12 қыры бар. Оның неше жағы болады?

4.2. Дөңес көпжақтың 8 төбесі және 6 жағы бар. Оның неше қыры болады?

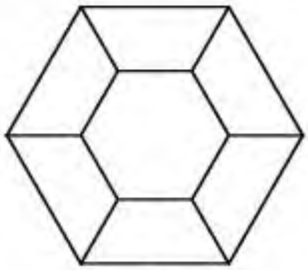
4.3. Дөңес көпжақтың 9 қыры және 5 жағы бар. Оның неше төбесі болады?

B

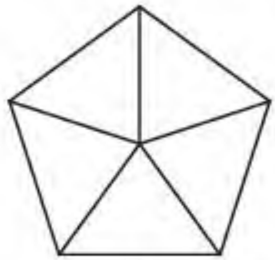
4.4. Эластикалық материалдан жасалған үшбұрышты призманың бір табаны кесіліп алынды және қалған жақтары жазықтыққа жазылды. Пайда болған сызбаның суретін салыңдар.

4.5. Эластикалық материалдан жасалған төртбұрышты пирамиданың табаны кесіліп алынды және қалған жақтары жазықтыққа жазылды. Пайда болған сызбаның суретін салыңдар.

4.6. 4.4-суреттегі сызбаларға сәйкес келетін көпжақтарды айтыңдар.



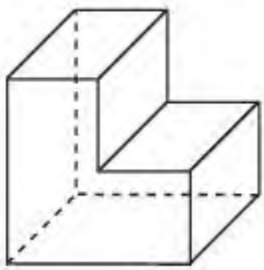
а)



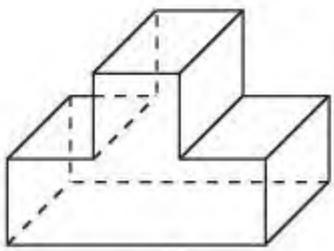
ә)

4.4-сурет

4.7. 4.5-суреттегі көпжақтар үшін Эйлер қатынасының орындалатынын немесе орындалмайтынын тексеріңдер.



а)



ә)

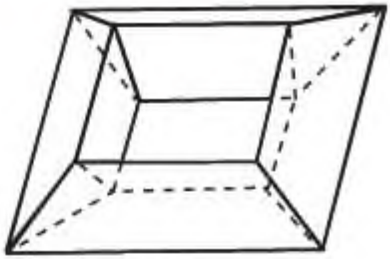
4.5-сурет

C

4.8. Дөңес емес призма үшін Эйлер қатынасы орындала ма?

4.9. Дөңес емес пирамида үшін Эйлер қатынасы орындала ма?

4.10. 4.6-суреттегі көпжақтың төбелерінің, қырларының және жақтарының санын табыңдар. Осы көпжақ үшін Эйлер қатынасы орындала ма?



4.6-сурет

4.7-сурет

4.11. Дөңес көпжақтың әрбір төбесіне бір квадрат және төрт үшбұрыш жинақталады (4.7-сурет). Осы көпжақтың төбелерінің (Т), қырларының (Қ) және жақтарының (Ж) санын табыңдар.

4.12. Кез келген дөңес көпжақтың үшбұрышты немесе төртбұрышты, немесе бесбұрышты жақтары бар болатынын дәлелдеңдер.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

4.13. Дұрыс көпбұрыштың анықтамасын қайталаңдар. Дұрыс көпжақтың анықтамасын айтып көріңдер.

§ 5. Дұрыс көпжақтар

Егер дұрыс көпжақтың жақтары қабырғаларының саны бірдей дұрыс көпбұрыштар болса және әрбір төбесінде бірдей жақтар саны түйісетін болса, онда ол *дұрыс көпжақ* деп аталады.

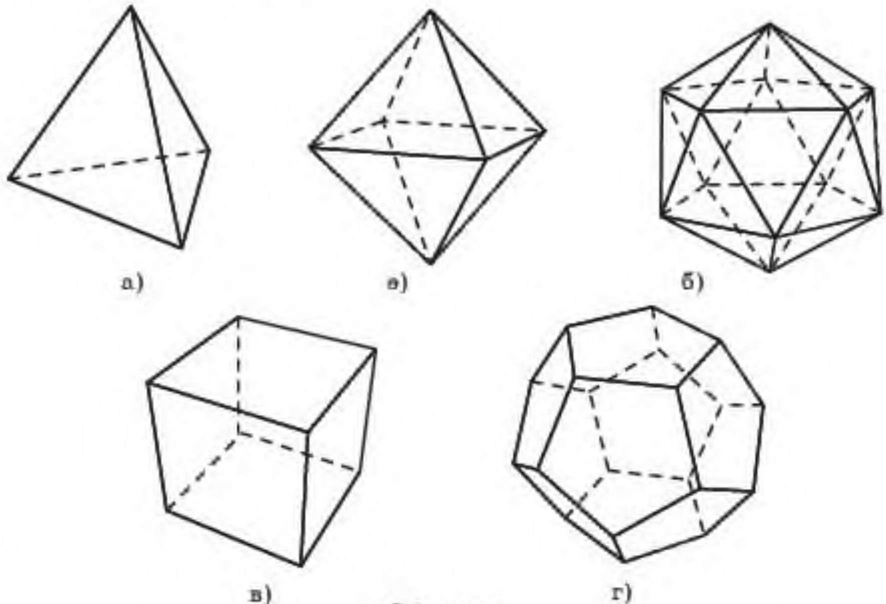
Дұрыс көпжақтың төбелерінде қандай және неше дұрыс көпбұрыш түйісетінін айқындайық.

Дұрыс көпжақтардың ішіндегі ең қарапайымы жақтары төрт дұрыс үшбұрыштан тұратын (5.1, а-сурет) және әрбір төбесінде үш жағы түйісетін көпжақ болып табылады. Бұл көпжақ *дұрыс тетраэдр* деп аталады. Грек тілінен аударғанда «тетраэдр» сөзі «төртжақ» («тетра» — төрт, «эдра» — жақ) дегенді білдіреді.

5.1, ә-суретте жақтары дұрыс үшбұрыштан тұратын және әрбір төбесінде төрт жағы түйісетін көпжақ кескінделген. Оның беті сегіз дұрыс үшбұрыштан тұрады, сондықтан ол *октаэдр* («окта» — сегіз) деп аталады.

5.1, б-суретте әрбір төбесінде бес дұрыс үшбұрыш түйісетін көпжақ кескінделген. Оның беті жиырма дұрыс үшбұрыштан тұрады, сондықтан ол *икосаэдр* («икоси» — жиырма) деп аталады.

Дөңес көпжақтың бір төбесінде бесеуден көп емес дұрыс үшбұрыштардың түйісетінін байқаймыз, өйткені керісінше жағдайда бұл төбедегі жазық бұрыштардың қосындысы 360°-тан артық немесе тең болады. Сондықтан жақтары дұрыс үшбұрыштар болатын басқадай дұрыс көпжақтар болмайды.



5.1-сурет

Осыған ұқсас, дөңес көпжақтың төбелерінде тек қана үш квадрат түйісетін болғандықтан, кубтан (5.1, в-сурет) басқа жақтары квадрат болатын басқадай дұрыс көпжақтар болмайды. Кубтың алты жағы бар, сондықтан ол *гексаэдр* («гекса» — алты) деп те аталады.

5.1, г-суретте жақтары дұрыс бесбұрыштар болатын және әрбір төбесінде үш жағы түйісетін көпжақ кескінделген. Оның беті он екі дұрыс бесбұрыштан тұрады, сондықтан ол *додекаэдр* («додека» — он екі) деп аталады.

Дөңес көпжақтың төбелерінде қабырғасының саны бесеуден артық дұрыс көпбұрыштар түйіспейтіндіктен, басқадай дұрыс көпжақтар болмайды. Сонымен, дөңес дұрыс көпжақтың бес түрі болады: *дұрыс тетраэдр, гексаэдр* (*куб*), *октаэдр, додекаэдр* және *икосаэдр*.

Қалай ойлайсыңдар, неліктен бүйір жақтары квадраттар болып келетін дұрыс үшбұрышты призма дұрыс көпжақ болмайды?

Дөңес көпжақты бұрыштардың қасиеттерін пайдаланып, дөңес көпжақтың төбелерінде қабырғасының саны бесеуден артық дұрыс көпбұрыштардың түйіспейтінін өздерің дәлелдеңдер.

Тарихи деректер

Ежелден бері дұрыс көпжақтар ғалымдардың, құрылысшылардың, сәулетшілердің және тағы басқалардың назарын аударған. Оларды осы көпжақтардың сұлулығы, ерекшелігі және үйлесімділігі таңғалдырған. Пифагорлықтар бұл көпжақтарды құдай берген таңғажайып деп есептеп, оларды әлем туралы философиялық жазбаларында қолданған. Ежелгі грек ғалымы Платон (б.э.д. 429—348) дұрыс көпжақтардың қасиеттерін егжей-тегжейлі сипаттаған. Сол себепті дұрыс көпжақтар *Платон денелері* деп те аталады. Евклидтің танымал «Бастамалары» атты соңғы XIII кітабы дұрыс көпжақтарға арналған.

Қайта өркендеу дәуірінде (XV—XVI ғғ. ғылым мен өнердің қайта өркендеген дәуірі) дұрыс көпжақтарға мүсіншілер, архитекторлар және суретшілер үлкен қызығушылық танытты. Леонардо да Винчи (1452—1519 жж.), мысалы, көпжақтар теориясымен айналысқан және оларды өзінің суреттерінде бейнелеген. Ол өзінің досы монах Лука Пачолидің (1445—1514 жж.) «Таңғажайып пропорциялар туралы» кітабын дұрыс және жартылай дұрыс көпжақтардың суреттерімен сипаттаған.

Қайта өркендеу дәуірінде геометриямен айналысқан тағы бір атақты суретші Альбрехт Дюрер болды. Оның елге танымал «Меланхолия» өрнегінде алдыңғы қатарда додекаэдр салынған. 1525 жылы Дюрер трактат жазды, онда ол беттері болашақтың жақсы моделін көрсететін бес дұрыс көпжақты ұсынды.

Иоганн Кеплер (1571—1630 жж.) өзінің 1596 жылы жарыққа шыққан «Әлемнің құпиясы» атты еңбегінде сфераға (сол кездегі белгілі планеталардың орбитасы) сырттай сызылған дұрыс көпжақтарды пайдаланып, Күн жүйесінің моделін құрастырған.

Ол центрге жердің орбитасын орналастырды. Кеплердің ойынша, Күн жүйесінің геометриясы мынадай болады: «Жер (Жердің орбитасы) — барлық орбиталардың өлшемі. Оған сырттай додекаэдрді саламыз. Додекаэдрге сырттай сызылған сфера — бұл Марс сферасы. Марс сферасына сырттай тетраэдрді саламыз. Тетраэдрге сырттай сызылған сфера Юпитердің сферасы болып табылады. Юпитер сферасына сырттай кубты саламыз. Кубқа сырттай сызылған сфера Сатурн сферасы болып табылады. Жердің сферасына іштей икосаэдрді саламыз. Оған іштей сызылған сфера Венера сферасы болады. Венера сферасына іштей октаэдрді саламыз. Оған іштей сызылған сфера Меркурий сферасы болады. Ол кезде басқа планеталар әлі ашылған жоқ болатын.

Күн жүйесінің мұндай моделін Кеплер «Ғарыштық куб» деп атады.

Сұрақтар

1. Қандай дөңес көпжақ дұрыс деп аталады?
2. Қандай көпжақ: а) дұрыс тетраэдр; ә) октаэдр; б) икосаэдр; в) гексаэдр; г) додекаэдр деп аталады?
3. Дұрыс көпжақтарды зерттеумен кімдер айналысқан?

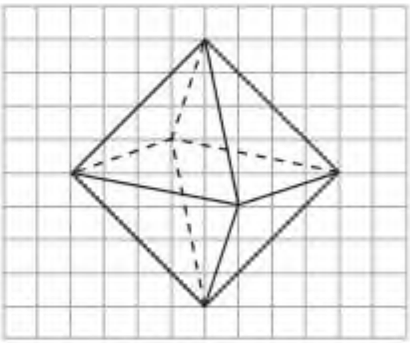
А

5.1. 1) Дұрыс тетраэдрдің; 2) кубтың; 3) октаэдрдің; 4) икосаэдрдің; 5) додекаэдрдің неше төбесі, қыры және жағы болады?

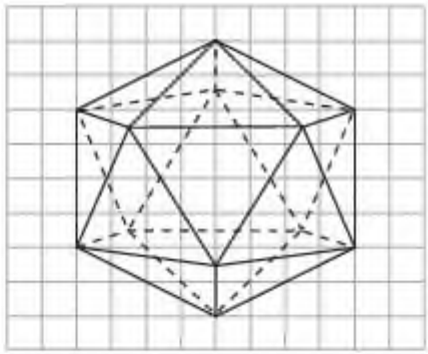
5.2. Үшбұрышты бипирамида екі дұрыс тетраэдрдің беттерін беттестіріп құрастырылды («би» қосымшасы екеу, еселеуді білдіреді). Пайда болған көпжақ дұрыс бола ма? Неліктен?

5.3. Төртбұрышты бипирамида бүйір жақтары дұрыс үшбұрыш болатын екі төртбұрышты пирамиданың табандарын беттестіріп құрастырылды. Пайда болған көпжақ дұрыс бола ма?

5.4. Торкөз қағазға 5.2-суреттегіге ұқсас октаэдрді салыңдар.



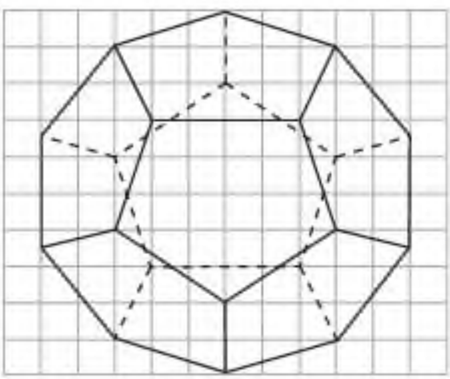
5.2-сурет



5.3-сурет

5.5. Торкөз қағазға 5.3-суреттегіге ұқсас икосоэдрді салыңдар.

5.6. Торкөз қағазға 5.4-суреттегіге ұқсас додекаэдрді салыңдар.



5.4-сурет

5.5-сурет

5.7. 5.5-суретте неше тетраэдр кескінделген?

5.8. 5.6-суретте неше октаэдр кескінделген?

5.6-сурет

5.7-сурет

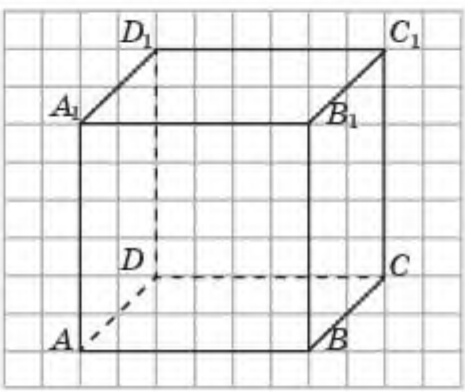
5.9. 5.7-суреттегі көпжақ қандай екі көпжақты біріктіру арқылы салынған?

5.8-сурет

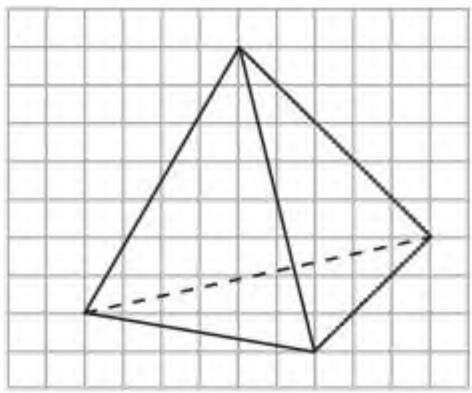
5.10. 5.8-суреттегі көпжақ қандай екі көпжақты біріктіру арқылы салынған?

В

5.11. 5.9-суреттегіге ұқсас кубты торкөз қағазға салыңдар. Кубтың A, C, B_1, D_1 төбелері қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген кубтың қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырының ұзындығын табыңдар.



5.9-сурет



5.10-сурет

5.12. 5.9-суреттегіге ұқсас кубты торкөз қағазға салыңдар. Кубтың жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген кубтың қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырының ұзындығын табыңдар.

5.13. 5.10-суреттегіге ұқсас тетраэдрді торкөз қағазға салыңдар. Тетраэдрдің қырларының орталарын белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген тетраэдрдің қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырын табыңдар.

5.14. Қыры 2 см-ге тең тетраэдрдің әрбір төбесінен қыры 1 см-ге тең тетраэдр қиылып алынса, қалған бөлігі қандай көпжақ болады? Оның қырын табыңдар.

5.15. Октаэдрдің қыры 1-ге тең. Оның қарама-қарсы жатқан төбелерінің арақашықтығын табыңдар.

5.16. Бірлік октаэдрдің қырлары арқылы оның бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейінгі ұзындығы 2-ге тең неше жол болады?

5.17. Бірлік октаэдрдің қырлары арқылы оның бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейінгі ұзындығы 3-ке тең неше жол болады?

C

5.18. 5.10-суреттегіге ұқсас тетраэдрді торкөз қағазға салыңдар. Тетраэдрдің жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген тетраэдрдің қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырын табыңдар.

5.19. 5.2-суреттегіге ұқсас октаэдрді торкөз қағазға салыңдар. Октаэдрдің жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады? Осы көпжақты салыңдар. Берілген октаэдрдің қыры 1-ге тең деп алып, пайда болған көпжақтың қырын табыңдар.

5.20. 5.3-суреттегіге ұқсас икосаэдрді торкөз қағазға салыңдар. Икосаэдрдің жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады?

5.21. 4.5-суреттегіге ұқсас додекаэдрді торкөз қағазға салыңдар. Додекаэдрдің жақтарының центрлерін белгілеңдер. Олар қандай көпжақтың төбелері болады?

5.22. Бірлік икосаэдрдің қырлары арқылы оның бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейінгі ұзындығы 3-ке тең неше жол болады?

5.23. Бірлік додекаэдрдің қырлары арқылы оның бір төбесінен оған қарсы жатқан төбесіне дейінгі ұзындығы 5-ке тең неше жол болады?

5.24. 1) Дұрыс тетраэдрдің; 2) октаэдрдің; 3) икосаэдрдің көршілес жақтары арасындағы екіжақты бұрыштың косинусын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

5.25. Куб, параллелепипед, призма және пирамиданың анықтамаларын қайталаңдар.

§ 6. Көпжақтардың жазықтықпен қималары

10-сынып геометрия курсында кубтың, призманың және пирамиданың жазықтықпен қималары және оларды салу мәселелері қосымша материал ретінде қарастырылған болатын.

Егер көпжақтың нүктелері берілген жазықтыққа қатысты екі жағында орналасқан болса, онда мұндай жазықтықты *қиюшы жазықтық* деп атайды.

Көпжақпен қиюшы жазықтықтың ортақ бөлігі (қиылысуы) болатын көпбұрыш көпжақтың *жазықтықпен қимасы* деп аталады. Оның қабырғалары қиюшы жазықтықтың көпжақтың жақтарын қиып өтетін кесінділер болады.Қиманың әрбір қабырғасы нақтылы жақтағы қиюшы жазықтықтың *ізі* деп аталады.

Тетраэдрдің төрт жағы болғандықтан, оның қимасы үшбұрыш немесе төртбұрыш болуы мүмкін. Параллелепипедтің алты жағы бар. Оның қимасы үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш және алты бұрыш болуы мүмкін.

Дөңес көпжақтың қимасы дөңес көпбұрыш болатыны дұрыс па?

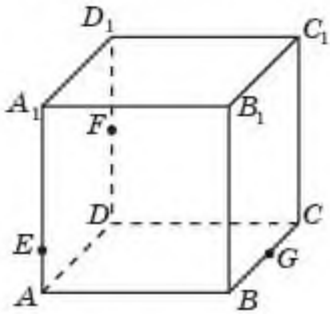
Көпжақтардың жазықтықпен қималарын салу мынадай нақты анықталған қарапайым салуларды орындаудан тұрады: бір жазықтықта жатқан екі нүкте арқылы түзу сызық жүргізу; екі түзудің қиылысу нүктесін анықтау; түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін анықтау; екі жазықтықтың қиылысу сызығын жүргізу.

Параллелепипедтің қимасын салғанда мынаны еске ұстау керек: егер қиюшы жазықтық оның қарама-қарсы жақтарын қандай да болмасын кесінділер бойымен қиып өтсе, онда бұл кесінділер өзара параллель болады.

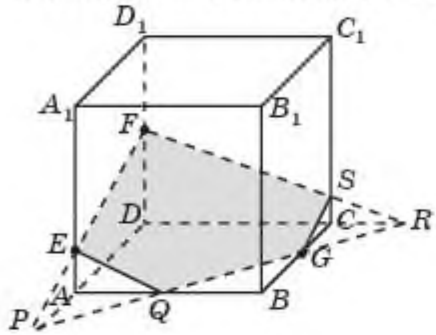
Қиманы салу үшін қиюшы жазықтық пен көпжақтың қырларының қиылысу нүктелерін тауып алсақ жеткілікті. Одан соң бір жағында жатқан екі нүктені кесіндімен қосу арқылы қиманы салып аламыз.

Көпжақтың жазықтықпен қимасын салуға мысалдар қарастырайық.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қырларында жататын E, F, G нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.1-сурет).



6.1-сурет



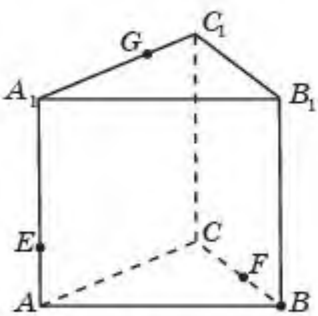
6.2-сурет

Салу. E және F нүктелері кубтың ADD_1A_1 жағына тиісті болғандықтан, осы нүктелер арқылы EF түзуін жүргіземіз. EF кесіндісі қима жазықтығына және кубтың осы жағына да ортақ болады. EF кесіндісін және AD қырын олардың қиылысу нүктесі P-ге дейін созамыз.

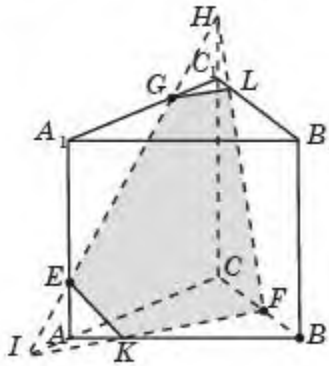
P және G нүктелері кубтың $ABCD$ жағы арқылы өтетін жазықтыққа тиісті болғандықтан, осы нүктелер арқылы PG түзуін жүргіземіз және оның AB және DC түзулерімен қиылысу нүктелерін сәйкесінше Q және R деп белгілейміз.

R және F нүктелері кубтың DCC_1D_1 жағы арқылы өтетін жазықтыққа тиісті болғандықтан, осы нүктелер арқылы RF түзуін жүргізіп, оның CC_1 қырымен қиылысу нүктесін S деп белгілейміз. E және Q, G және S нүктелерін қосамыз. Сонда қиюшы жазықтық кубты EQ, QG, GS, SF және FE кесінділері бойымен қияды. Пайда болған $EFSGQ$ бесбұрышы ізделінді қима болады (6.2-сурет).

2-мысал. $ABCA_1B_1C_1$ призманың қырларында жатқан E, F, G нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.3-сурет).



6.3-сурет

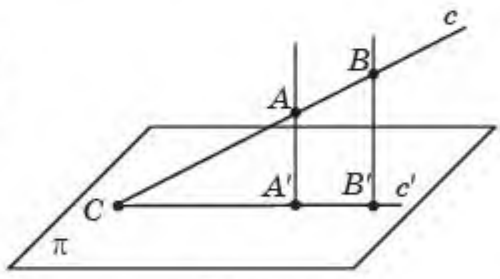


6.4-сурет

Салу. E және G нүктелері призманың ACC_1A_1 жағына тиісті болғандықтан, осы нүктелер арқылы EG түзуін жүргіземіз. EG кесіндісі қима жазықтығына және призманың осы жағына да ортақ болады. EG түзуі мен призманың CC_1 және AC түзулерімен қиылысу нүктелерін сәйкесінше H және I деп белгілейміз.

I және F нүктелері призманың ABC табаны арқылы өтетін жазықтыққа тиісті болғандықтан, осы нүктелер арқылы IF түзуін жүргізіп, оның AB қырымен қиылысу нүктесін K деп белгілейміз.

F және H нүктелері призманың BCC_1B_1 жағы арқылы өтетін жазықтыққа тиісті болғандықтан, осы нүктелер арқылы FH түзуін



6.5-сурет

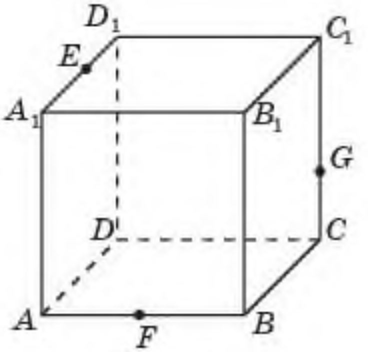
жүргізіп, оның B_1C_1 қырымен қиылысу нүктесін L деп белгілейміз. E және K, G және L нүктелерін қосамыз. Сонда қиюшы жазықтық призманы EK, KF, FL, GL және EG кесінділері бойымен қияды. Пайда болған $EKFLG$ бесбұрышы ізделінді қима болады (6.4-сурет).

Бұдан күрделірек қималарды салу үшін түзудің бойында жатқан екі нүкте мен олардың жазықтықтағы параллель проекциялары арқылы түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін салуға мүмкіндік беретін *іздер әдісін* қолданатын боламыз.

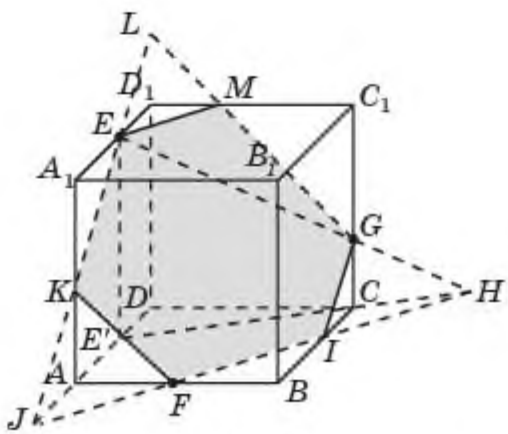
c түзуі A, B нүктелері арқылы өтсін және осы нүктелердің π жазықтығындағы A', B' параллель проекциялары белгілі болсын. Сонда c түзуі мен A', B' нүктелері арқылы өтетін c' түзуінің C қиылысу нүктесі c түзуі мен π жазықтығының ізделінді қиылысу нүктесі болады (6.5-сурет).

Іздер әдісінің мәні — алдымен қиюшы жазықтықтың көпжақтың табан жазықтығындағы ізін салу, кейін көпжақтың бүйір қырларымен және жақтарымен қиылысу нүктелерін, түзулерін салу. Бұл әдісті көпжақтың бір жағында жататын екі нүкте табылмаған жағдайда қолданады, яғни қиманы берілген нүктелерден өтетін түзудің осы нүктелердің проекциялары жатқан жазықтықпен қиылысу нүктелерін табу арқылы салуға мүмкіндік береді.

3-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қос-қостан айқас қырларында жататын E, F, G нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.6-сурет).



6.6-сурет



6.7-сурет

Салу. EG түзуі мен ABC жазықтығының қиылысуын табайық. Ол үшін E нүктесі арқылы D_1D түзуіне параллель түзу жүргіземіз және оның AD қырымен қиылысу нүктесін E' деп белгілейміз. $E'C$ мен EG түзулерін жүргіземіз және олардың қиылысу нүктесін H деп белгілейміз. HF түзуін жүргіземіз және оның BC мен AD қырларымен қиылысу нүктелерін сәйкесінше I, J деп белгілейміз. JE түзуін жүргіземіз және оның AA_1 мен DD_1 түзулерімен қиылысу нүктелерін сәйкесінше K, L деп белгілейміз. LG түзуін жүргіземіз және оның C_1D_1 қырымен қиылысу нүктесін M деп белгілейміз. E және M, F және K, G және I нүктелерін қосамыз. Пайда болған $FIGMEK$ алтыбұрышы ізделінді қима болады (6.7-сурет).

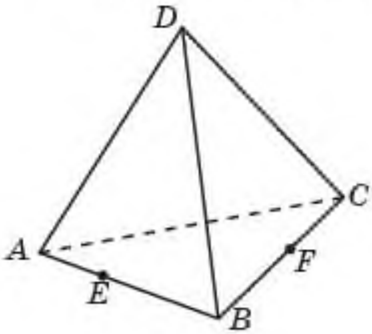
Сұрақтар

1. Қиюшы жазықтық дегеніміз не?
2. Көпжақтың жазықтықпен қимасы дегеніміз не?
3. Қиюшы жазықтықтың ізі дегеніміз не?
4. Іздер әдісінің мәні неде?

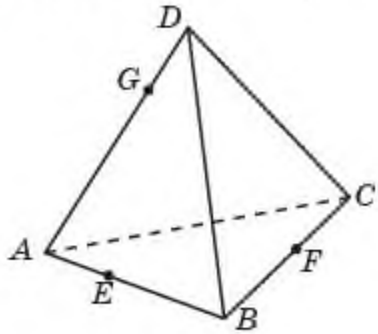
Есептер

А

6.1. $ABCD$ тетраэдрдің E, F нүктелері арқылы өтетін және BD қырына параллель жазықтықпен қимасын салыңдар (6.8-сурет).



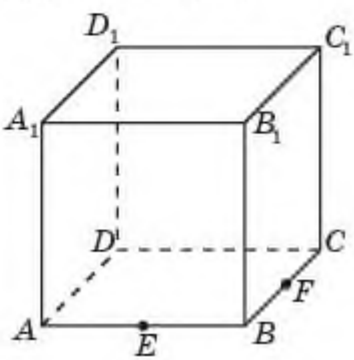
6.8-сурет



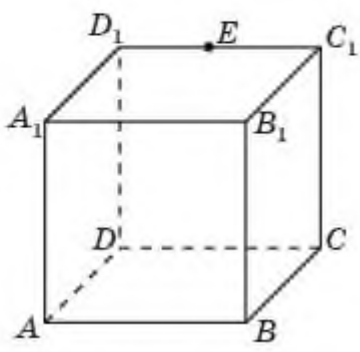
6.9-сурет

6.2. $ABCD$ тетраэдрдің E, F, G нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.9-сурет).

6.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB, BC қырларының орталары арқылы өтетін және CC_1 қырына параллель болатын жазықтықпен қимасын салыңдар (6.10-сурет).



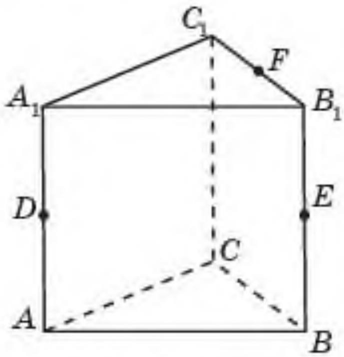
6.10-сурет



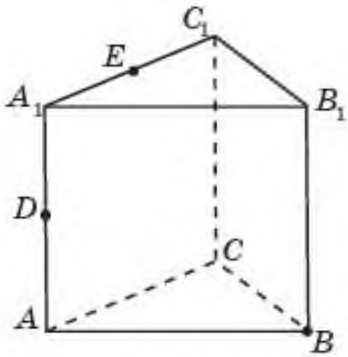
6.11-сурет

6.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A, C төбелері және C_1D_1 қырының ортасы E нүктесі арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.11-сурет).

6.5. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың AA_1, BB_1, B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.12-сурет).



6.12-сурет

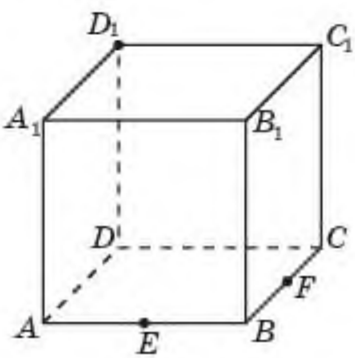


6.13-сурет

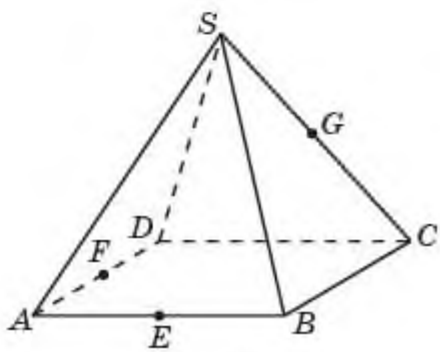
6.6. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың B төбесі және AA_1 мен A_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.13-сурет).

B

6.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB мен BC қырларының орталары және D_1 төбесі арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.14-сурет).



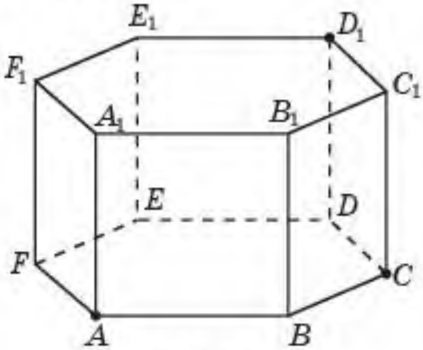
6.14-сурет



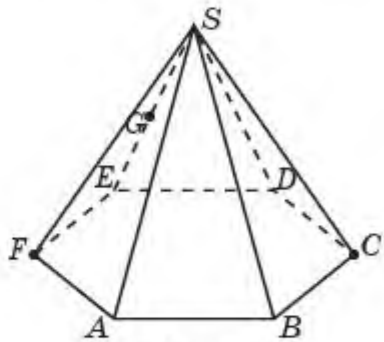
6.15-сурет

6.8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың AB, AD және SC қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.15-сурет).

6.9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың A, C және D_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.16-сурет).



6.16-сурет

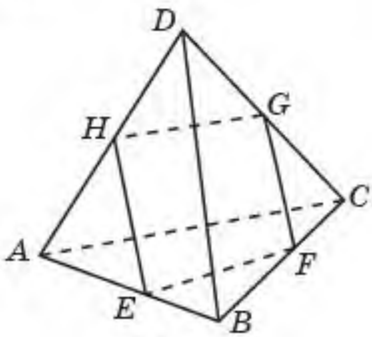


6.17-сурет

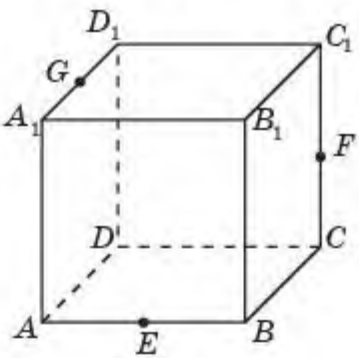
6.10. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың F, C төбелері және SE қырының G ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.17-сурет).

C

6.11. 6.18-суретте кескінделген $EFGH$ төртбұрышы тетраэдрге қима бола ма?



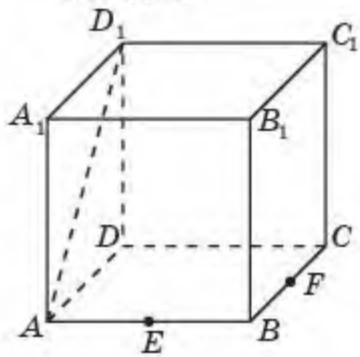
6.18-сурет



6.19-сурет

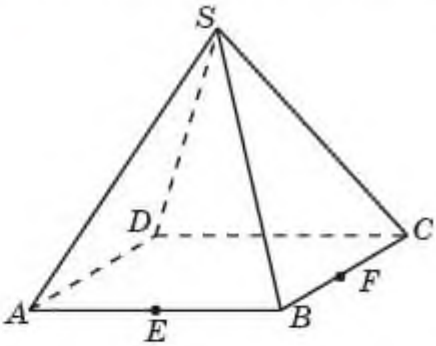
6.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының E, F, G нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.19-сурет).

6.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB мен BC қырларының орталары арқылы өтетін және AD_1 түзуіне параллель болатын жазықтықпен қимасын салыңдар (6.20-сурет).

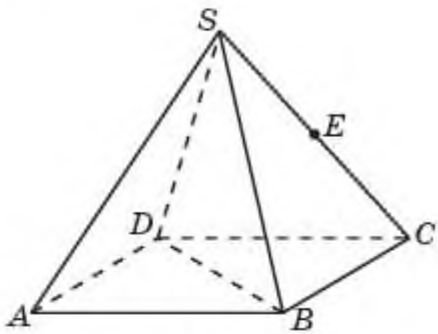


6.20-сурет

6.14. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың AB мен BC қырларының орталары арқылы өтетін және SB түзуіне параллель болатын жазықтықпен қимасын салыңдар (6.21-сурет).



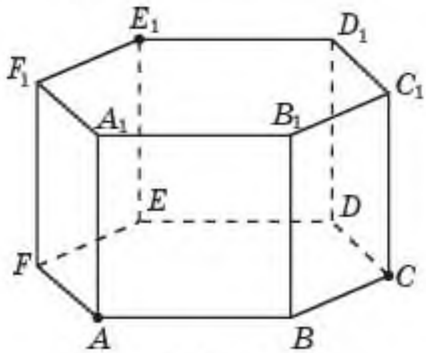
6.21-сурет



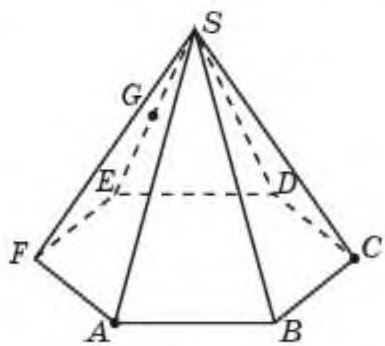
6.22-сурет

6.15. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың A төбесі мен SC қырының E ортасы арқылы өтетін және BD түзуіне параллель болатын жазықтықпен қимасын салыңдар (6.22-сурет).

6.16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың A, C және E_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.23-сурет).



6.23-сурет

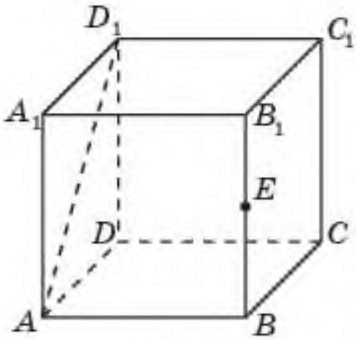


6.24-сурет

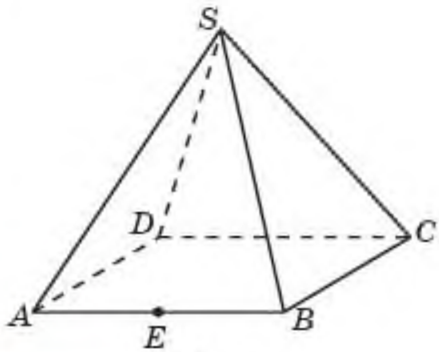
6.17. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың A, C төбелері және SE қырының G ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар (6.24-сурет).

6.18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BB_1 қырының E ортасы арқылы өтетін және AD_1 түзуіне перпендикуляр болатын жазықтықпен қимасын салыңдар (6.25-сурет).

6.19. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1-ге тең. Оның AB қырының E ортасы арқылы өтетін және SD түзуіне перпендикуляр болатын жазықтықпен қимасын салыңдар (6.26-сурет).



6.25-сурет



6.26-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

6.20. Жазықтықтағы центрлік симметрия мен осьтік симметрияның анықтамаларын қайталаңдар.

§ 7*. Көпжақтардың симметриясы

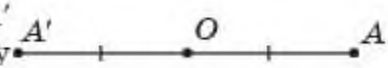
Жазықтықтағы фигуралардың симметриясы ұғымы планиметрия курсында қарастырылды. Центрлік және осьтік симметриялар ұғымдары анықталды. Кеңістіктік фигуралар үшін симметрия ұғымы осыған ұқсас анықталатын болады.

Неміс математигі Г. Вейлдің (1885—1955 жж.) айтуынша: «Симметрия дегеніміз — адамдардың ғасырлар бойы тәртіпті, сұлулық пен кемелдікті түсінуге және жасауға тырысқан идеялары».

Симметрияның әдемі бейнелері өнер туындыларын — архитектура мен көркем суреттерді, мүсіндерді және т.б. суреттейді.

Егер кеңістіктегі O нүктесі AA' кесіндісінің ортасы болса, онда A және A' нүктелері *O нүктесіне қарағанда симметриялы* деп аталады (7.1-сурет). O нүктесі өзіне-өзі симметриялы болып табылады.

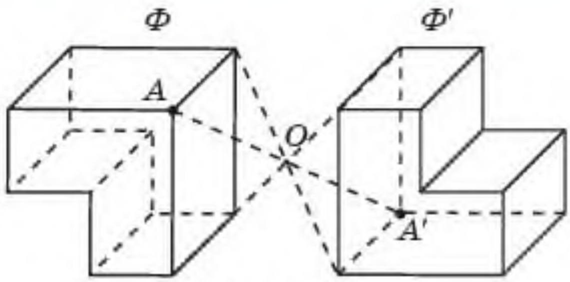
Кеңістіктің әрбір A нүктесін берілген O нүктесіне қарағанда симметриялы A' нүктесіне бейнелейтін кеңістіктегі түрлендіру *центрлік симметрия* деп аталады. O нүктесі *симметрия центрі* деп аталады.



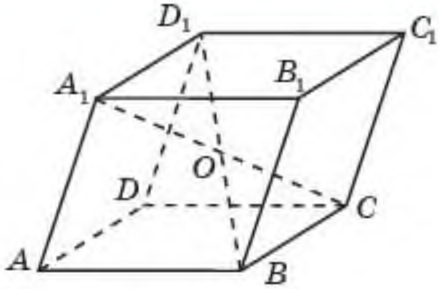
7.1-сурет

Егер кеңістіктегі O нүктесіне қарағанда Φ фигурасының әрбір A нүктесі екінші Φ' фигурасының қандай да бір A' нүктесіне симметриялы болса, онда Φ және Φ' фигуралары O центріне қарағанда *центрлік симметриялы* деп аталады (7.2-сурет).

Егер кеңістіктегі O нүктесіне қарағанда Φ фигурасы өзіне-өзі центрлік симметриялы болса, онда Φ фигурасы O центріне қарағанда *центрлік симметриялы* деп аталады.



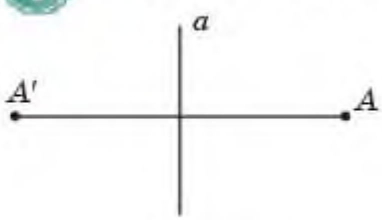
7.2-сурет



7.3-сурет

Мысалы, параллелепипед өзінің диагональдарының қиылысуы O нүктесіне қарағанда *центрлік симметриялы* болады (7.3-сурет).

Қалай ойлайсыңдар, фигурада бірнеше симметрия центрлері бола ма?

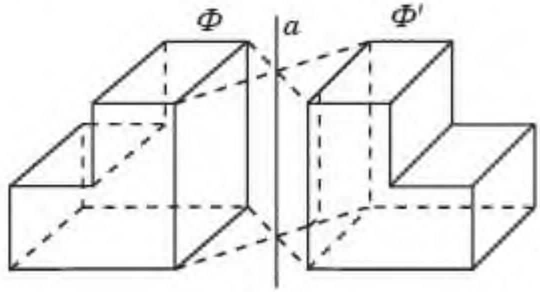


7.4-сурет

Егер кеңістіктегі a түзуі AA' кесіндісіне перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтсе, онда A және A' нүктелері *a түзуіне қарағанда симметриялы* деп аталады (7.4-сурет). a түзуінің әрбір нүктесі өзіне-өзі симметриялы болады.

Кеңістіктің әрбір A нүктесін берілген a түзуіне қарағанда A' нүктесіне бейнелейтін кеңістіктегі түрлендіру *осьтік симметрия* деп аталады. a түзуі *симметрия осі* деп аталады.

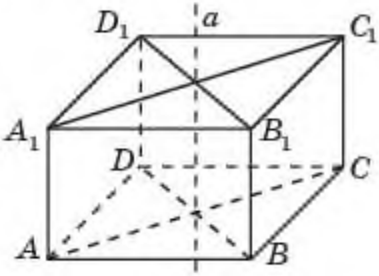
Егер кеңістіктегі a түзуіне қарағанда Φ фигурасының әрбір A нүктесі екінші Φ' фигурасының қандай да бір A' нүктесіне симметриялы болса, онда Φ және Φ' фигуралары a осіне қарағанда *симметриялы фигуралар* деп аталады (7.5-сурет).



7.5-сурет

Егер кеңістіктегі a түзуіне қарағанда Φ фигурасы өзіне-өзі симметриялы болса, онда Φ фигурасы *a осіне қарағанда симметриялы* деп аталады.

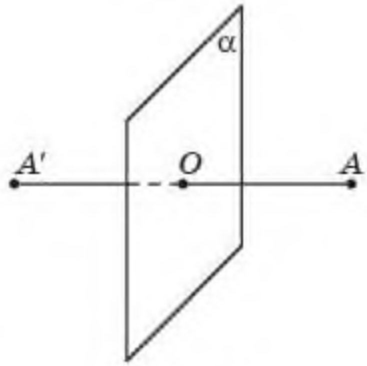
Мысалы, тікбұрышты параллелепипед өзінің қарама-қарсы жатқан жақтарының диагональдарының қиылысу нүктелері арқылы өтетін осіне қарағанда *центрлік симметриялы болады* (7.6-сурет).



7.6-сурет

Қалай ойлайсыңдар, фигурада бірнеше симметрия осьтері бола ма?

Егер кеңістіктегі α жазықтығы AA' кесіндісіне перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтсе, онда A және A' нүктелері *α жазықтығына қарағанда симметриялы* деп аталады (7.7-сурет). α жазықтығының әрбір нүктесі өзіне-өзі симметриялы болады.

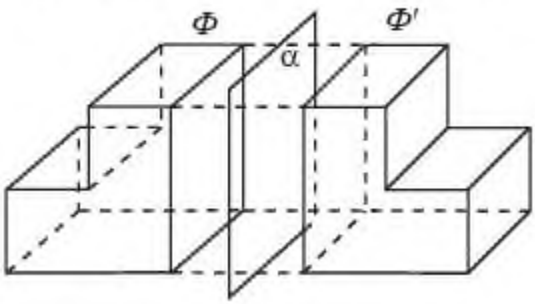


7.7-сурет

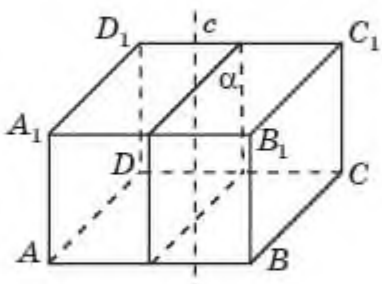
Кеңістіктің әрбір A нүктесін берілген α жазықтығына қарағанда A' нүктесіне бейнелейтін кеңістіктегі түрлендіру *α жазықтығына қарағанда симметрия* деп аталады. α жазықтығы *симметрия жазықтығы* деп аталады.

Жазықтыққа қарағанда симметрия *айналы симметрия* деп те аталады.

Егер кеңістіктегі α жазықтығына қарағанда Φ фигурасының әрбір A нүктесі екінші Φ' фигурасының қандай да бір A' нүктесіне айналы симметриялы болса, онда Φ және Φ' фигуралары α жазықтығына қарағанда *айналы симметриялы фигуралар* деп аталады (7.8-сурет).



7.8-сурет



7.9-сурет

Егер кеңістіктегі α жазықтығына қарағанда Φ фигурасы өзіне-өзі айналы симметриялы болса, онда Φ фигурасы α жазықтығына қарағанда *айналы симметриялы* деп аталады.

Мысалы, тікбұрышты параллелепипед өзінің симметрия осі арқылы өтетін және қарама-қарсы жатқан жақтарының біреуіне параллель болатын жазықтыққа қарағанда айналы симметриялы болады (7.9-сурет).

Қалай ойлайсыңдар, фигурада бірнеше симметрия жазықтықтары бола ма?

Кристалдар — табиғи көпжақтар

Көпжақтардың көптеген пішіндерін адамның өзі ойлап тапқан жоқ, олар табиғи кристалдар түрінде түзілген. Ас тұзының кристалдары текше пішіндес (7.10-сурет), мұздың және сутас (кварц) кристалдары екі жақты қарындаштың ұштарына ұқсас болып келеді, яғни табандарында алтыбұрышты пирамидалар жататын алтыбұрышты призма пішіндес болады (7.11-сурет).

7.10-сурет

7.11-сурет

Алмаз көбінесе октаэдр түрінде кездеседі (7.12-сурет). Кескінді екіге бөлетін исландық шпат көлбеу параллелепипед пішіндес болады (7.13-сурет).

7.12-сурет

7.13-сурет

Кристалдардың сыртқы пішіні — олардың физикалық және химиялық қасиеттерінің көрінісі ғана. Олардың барлығы кристалдардың геометриялық құрылымының ерекшеліктерімен, мысалы кристалдық торда атомдардың симметриялы орналасуы арқылы түсіндіріледі.

Кристалдарға басқа да мысалдар келтіріңдер және олардың пішіндерін көрсетіңдер.

Кристалдармен толығырақ танысу үшін Қазақстан Республикасының геологиялық мұражайы және А.Е. Ферсман атындағы минералогиялық мұражайы сайттарына кіруді ұсынамыз.

Сұрақтар

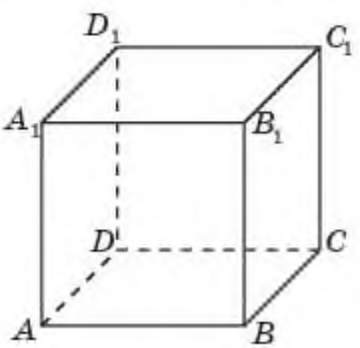
1. Кеңістіктің қандай нүктелері центрлік симметриялы деп аталады?
2. Кеңістіктегі қандай түрлендіру центрлік симметрия деп аталады?
3. Кеңістіктегі қандай екі фигура симметрия центрі бар фигуралар деп аталады?
4. Кеңістіктегі қандай фигура симметрия центрі бар фигура деп аталады?
5. Қандай нүктелер түзуге қарағанда симметриялы деп аталады?
6. Кеңістіктегі қандай түрлендіру түзуге симметрия деп аталады?
7. Кеңістіктегі қандай екі фигура түзуге қарағанда симметриялы деп аталады?
8. Кеңістіктегі қандай фигура түзуге қарағанда симметриялы деп аталады?
9. Кеңістіктегі қандай нүктелер жазықтыққа қарағанда симметриялы деп аталады?
10. Кеңістіктегі қандай түрлендіру айналы симметрия деп аталады?
11. Кеңістіктегі қандай екі фигура айналы симметриялы деп аталады?
12. Кеңістіктегі қандай фигура айналы симметриялы деп аталады?
13. Ас тұзының кристалдары қандай көпжақтың пішінін береді?
14. Сутас (кварц) кристалдары қандай көпжақтың пішінін береді?
15. Алмаз кристалдары көбінесе қандай көпжақтың пішінін береді?
16. Исландық шпат кристалдары қандай көпжақтың пішінін береді?

Есептер

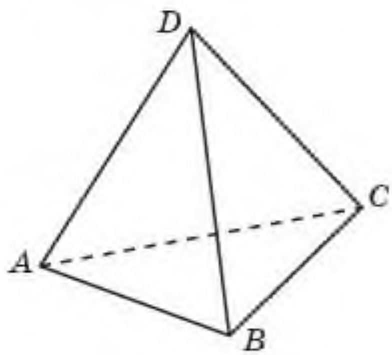
A

7.1. Кеңістіктегі центрлік симметриялы және центрлік симметриялы емес фигураларға мысалдар келтіріңдер.

7.2. 7.14-суреттегі кубтың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?



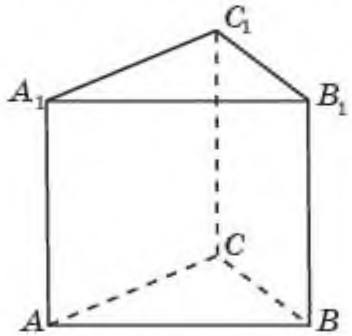
7.14-сурет



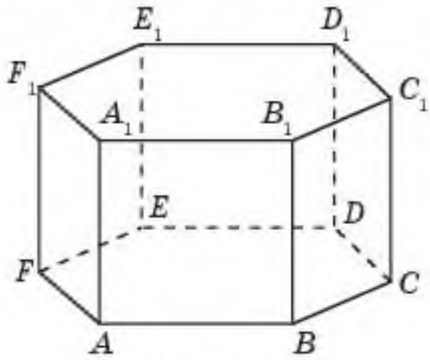
7.15-сурет

7.3. 7.15-суреттегі дұрыс тетраэдрдің: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

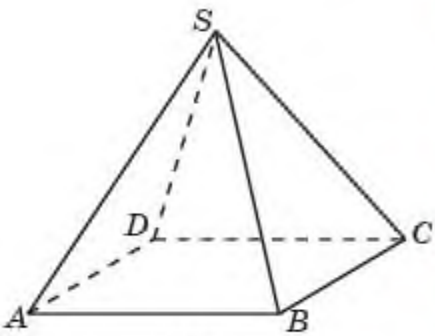
7.4. 7.16-суреттегі дұрыс үшбұрышты призманың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?



7.16-сурет



7.17-сурет

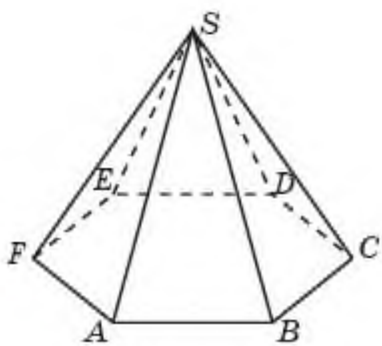


7.18-сурет

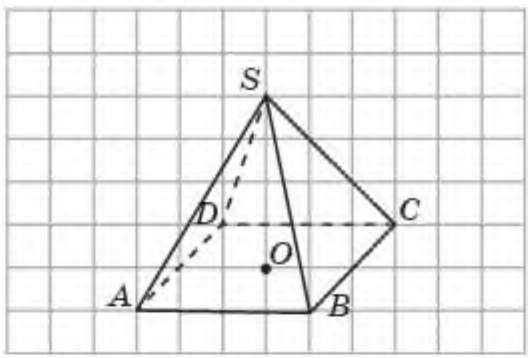
7.5. 7.17-суреттегі дұрыс алтыбұрышты призманың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

7.6. 7.18-суреттегі дұрыс төртбұрышты пирамиданың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

7.7. 7.19-суреттегі дұрыс алтыбұрышты пирамиданың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?



7.19-сурет



7.20-сурет

7.8. Торкөзді қағазға 7.20-суреттегі O нүктесіне қарағанда $SABCD$ пирамидасына симметриялы пирамиданы салыңдар.

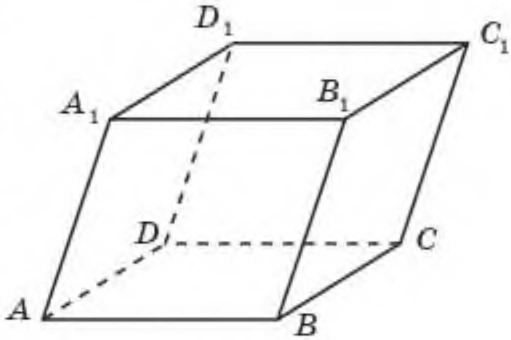
B

7.9. Параллель екі түзуден тұратын фигуралардың симметрия центрін көрсетіңдер.

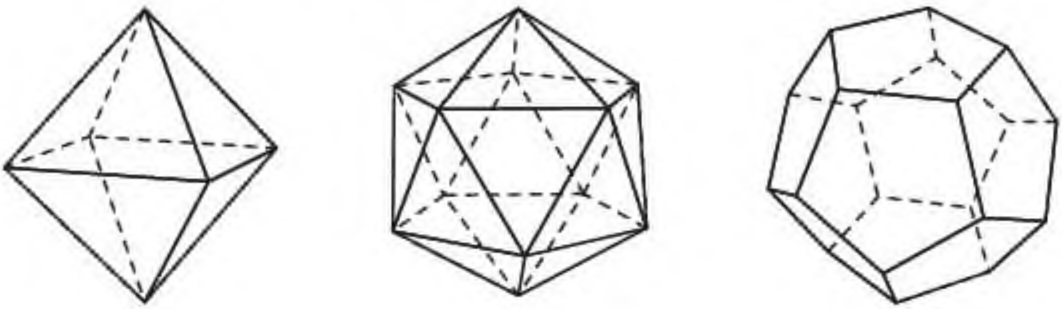
7.10. 1) Қиылысқан екі жазықтықтан; 2) параллель екі жазықтықтан тұратын фигуралардың симметрия центрін көрсетіңдер.

7.11. Көлбеу параллелепипедтің симметрия центрі бола ма (7.21-сурет)?

7.12. 1) Октаэдрдің; 2) икосаэдрдің; 3) додекаэдрдің симметрия центрі бола ма (7.22-сурет)?



7.21-сурет



а) в) б)

7.22-сурет

7.13. Дұрыс: 1) үшбұрышты призманың (7.16-сурет); 2) алтыбұрышты призманың неше симметрия осі болады (7.17-сурет)?

7.14. Дұрыс: 1) үшбұрышты призманың (7.16-сурет); 2) алтыбұрышты призманың неше симметрия жазықтығы болады (7.17-сурет)?

7.15. Дұрыс: 1) төртбұрышты пирамиданың (7.18-сурет); 2) алтыбұрышты пирамиданың неше симметрия осі болады (7.19-сурет)?

7.16. Дұрыс: 1) төртбұрышты пирамиданың (7.18-сурет); 2) алтыбұрышты пирамиданың неше симметрия жазықтығы болады (7.19-сурет)?

C

7.17. Дұрыс: 1) n-бұрышты призманың; 2) n-бұрышты пирамиданың неше симметрия осі болады?

7.18. Дұрыс: 1) n-бұрышты призманың; 2) n-бұрышты пирамиданың неше симметрия жазықтығы болады?

7.19. 1) Октаэдрдің; 2) икосаэдрдің; 3) додекаэдрдің неше симметрия осі болады (7.22-сурет)?

7.20. 1) Октаэдрдің; 2) икосаэдрдің; 3) додекаэдрдің неше симметрия жазықтығы болады (7.22-сурет)?

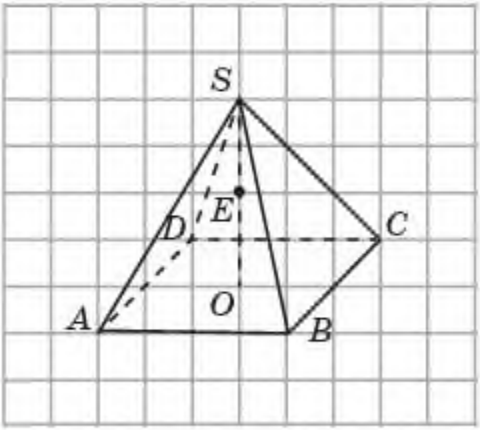
7.21. Кеңістіктегі фигураның симметрия центрі сол фигураға тиісті болмауы мүмкін бе? Мысалдар келтіріңдер.

7.22. Кеңістіктегі: 1) симметрия центрі бар, бірақ симметрия осі жоқ; 2) симметрия осі бар, бірақ симметрия центрі жоқ фигураларға мысалдар келтіріңдер.

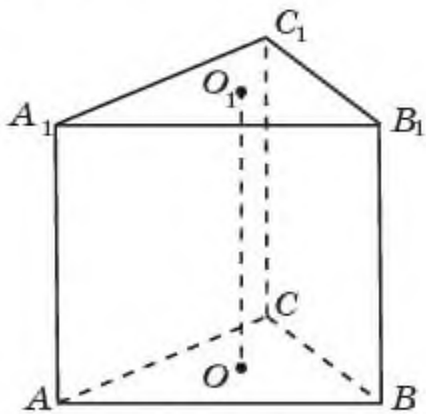
7.23. Кеңістіктегі: 1) симметрия центрі бар, бірақ симметрия жазықтығы жоқ; 2) симметрия осі бар, бірақ симметрия жазықтығы жоқ фигураларға мысалдар келтіріңдер.

7.24. Кеңістіктегі: 1) симметрия жазықтығы бар, бірақ симметрия центрі жоқ; 2) симметрия жазықтығы бар, бірақ симметрия осі жоқ фигураларға мысалдар келтіріңдер.

7.25. Торкөзді қағазға 7.23-суреттегі $SABCD$ пирамидасының SO биіктігінің E ортасына қарағанда осы пирамидаға симметриялы пирамиданы салыңдар. Пирамиданың қырларын тең деп есептеп, бастапқы пирамида мен оған центрлік симметриялы пирамиданың ортақ бөлігі болатын көпжақтың атауын айтыңдар.



7.23-сурет



7.24-сурет

7.26. Дұрыс үшбұрышты призманың табандарының O және O_1 центрлері арқылы өтетін түзуге қарағанда осы призмаға симметриялы призманы салыңдар (7.24-сурет). Бастапқы призма мен оған симметриялы призманың ортақ бөлігі қандай фигура болады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

7.27. Жазықтықтағы түзудің аналитикалық берілуін қайталаңдар. Кеңістіктегі түзудің аналитикалық берілуін көрсетіп көріңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Дөңес көпжақтың әрбір төбесінен үш қыры шығады. Егер оның 12 төбесі бар болса, онда оның неше қыры болады:

A) 12; B) 16;
C) 18; D) 24?

2. Дөңес көпжақтың әрбір төбесінде үш үшбұрышты жақтары түйіседі. Егер оның 4 жағы бар болса, онда оның неше төбесі болады:

A) 4; B) 6;
C) 9; D) 12?

3. Дөңес көпжақтың жақтары — үшбұрыштар. Егер оның 12 қыры бар болса, онда оның неше жағы болады:

A) 6; B) 8;
C) 9; D) 12?

4. Үшжақты бұрыштың екі жазық бұрышы сәйкесінше 60° және 90°-қа тең. Үшінші жазық бұрышы қандай аралықта жатады:

A) 60°-тан үлкен және 90°-тан кіші;
B) 90°-тан үлкен және 150°-тан кіші;
C) 30°-тан үлкен және 90°-тан кіші;
D) 30°-тан үлкен және 150°-тан кіші?

5. Тікбұрышты параллелепипедтің үшжақты бұрышының жазық бұрыштарының қосындысын табыңдар:

A) 90°; B) 180°;
C) 270°; D) 360°.

6. Дөңес көпжақтың 10 төбесі мен 15 қыры бар. Оның неше жағы болады:

A) 5; B) 7;
C) 9; D) 12?

7. Дөңес көпжақтың 6 төбесі мен 5 жағы бар. Оның неше қыры болады:

A) 5; B) 7;
C) 9; D) 12?

8. Дөңес көпжақтың 12 қыры мен 8 жағы бар. Оның неше төбесі болады:

A) 6; B) 7;
C) 8; D) 9?

9. Икосаэдрдің неше жағы болады:

A) 8; B) 12;
C) 16; D) 20?

10. Додекаэдрдің неше төбесі болады:

A) 8; B) 12;
C) 16; D) 20?

11. Дұрыс тетраэдрдің жақтарының орталары қандай көпжақтың төбелері болады:

A) тетраэдр; B) куб;
C) октаэдр; D) икосаэдр?

12. Кубтың жақтарының орталары қандай көпжақтың төбелері болады:

A) тетраэдр; B) куб;
C) октаэдр; D) икосаэдр?

13. Додекаэдрдің жазбасында неше бесбұрыш болады:

A) 8; B) 12;
C) 16; D) 20?

14. Дұрыс тетраэдрдің қырлары 2-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар:

A) $\sqrt{3}$; B) $2\sqrt{3}$;
C) $3\sqrt{3}$; D) $4\sqrt{3}$.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AB, BC және AA_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасы қандай көпбұрыш болады:

A) үшбұрыш; B) төртбұрыш;
C) бесбұрыш; D) алтыбұрыш?

16. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың AB, BC және SD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасы қандай көпбұрыш болады:

A) үшбұрыш; B) төртбұрыш;
C) бесбұрыш; D) алтыбұрыш?

17. Кубтың неше симметрия осі болады:

A) 3; B) 6;
C) 8; D) 9?

18. Дұрыс бесбұрышты призманың неше симметрия осі болады:

A) 5; B) 6;
C) 8; D) 9?

19. Дұрыс тетраэдрдің неше симметрия жазықтығы болады:

A) 3; B) 6;
C) 8; D) 9?

20. Дұрыс алтыбұрышты призманың неше симметрия жазықтығы болады:

A) 3; B) 5;
C) 7; D) 9?

II тарау

КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

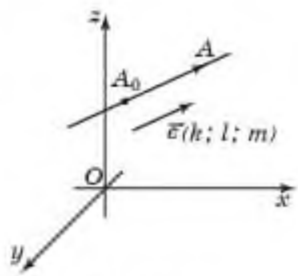
§ 8. Кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрышты табу

10-сынып геометрия курсында кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы, кеңістіктегі түзудің параметрлік және канондық теңдеулері қарастырылған болатын.

Кеңістіктегі *түзудің параметрлік теңдеуі* келесі түрде берілетінін еске салайық:

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt, \end{cases}$$

мұндағы $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $A(x;\ y;\ z)$, — осы түзудің бойында жатқан нүктелер, $(k;\ l;\ m)$ — $\bar{c}$ бағыттаушы векторының, яғни осы түзуге параллель немесе түзудің бойында жатқан вектордың координаталары (8.1-сурет).



8.1-сурет

Егер түзу $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктелері арқылы берілсе, онда бағыттаушы векторы ретінде координаталары $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ болатын $\overline{A_1A_2}$ векторын, ал A_0 нүктесі ретінде A_1 нүктесін алып, түзудің мынадай теңдеуін аламыз:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases}$$

Кеңістіктегі екі түзудің арасындағы φ *бұрышты* олардың $\bar{c}_1(k_1;\ l_1;\ m_1)$, $\bar{c}_2(k_2;\ l_2;\ m_2)$ бағыттаушы векторларының скаляр көбейтіндісінің формуласын пайдаланып табуға болады:

$$\cos\varphi = \frac{|\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2|}{|\bar{c}_1| \cdot |\bar{c}_2|} = \frac{|k_1 \cdot k_2 + l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2|}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}}.$$

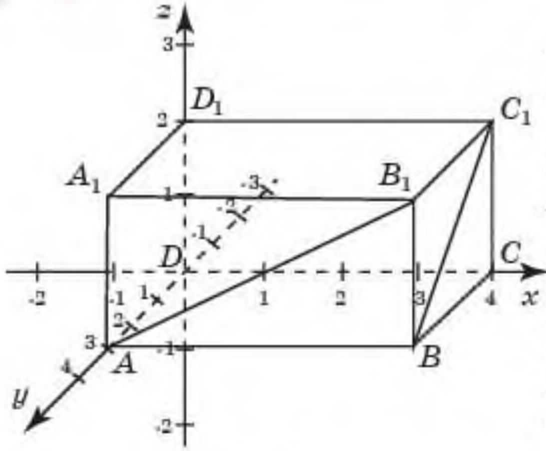
Дербес жағдайда, егер екі түзудің $\bar{c}_1(k_1;\ l_1;\ m_1)$, $\bar{c}_2(k_2;\ l_2;\ m_2)$ бағыттаушы векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, яғни

$$k_1 \cdot k_2 + l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0$$

теңдігі орындалса, онда бұл түзулер өзара перпендикуляр болады.

$\begin{cases} x = x_1 + k_1t, \\ y = y_1 + l_1t, \\ z = z_1 + m_1t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_2 + k_2t, \\ y = y_2 + l_2t, \\ z = z_2 + m_2t, \end{cases}$ теңдеулерімен берілген екі түзу қандай жағдайда өзара параллель болады?

1) Ox; 2) Oy; 3) Oz осіне параллель болатын және $D(a;\ b;\ c)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.



8.2-сурет

Екі түзудің арасындағы бұрышты табуға арналған мысалдарды қарастырайық.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$. AB_1 және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

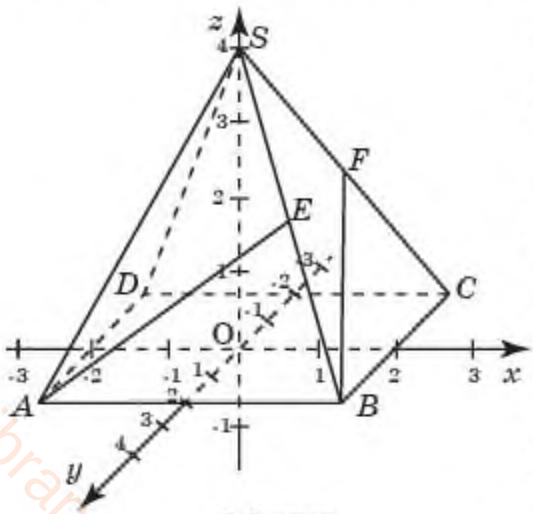
Шешуі. D нүктесі координаталар басы болатын, ал DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше абсцисса, ордината, аппликата осьтерінде жататын координаталар жүйесін қарастырамыз (8.2-сурет).

A нүктесінің координаталары (0; 3; 0), ал B_1 нүктесінің координаталары (4; 3; 2) болады. Демек, AB_1 түзуінің бағыттаушы векторының координаталары (4; 0; 2) болады. Осыған ұқсас B нүктесінің координаталары (4; 3; 0), ал C_1 нүктесінің координаталары (4; 0; 2) болады. Демек, BC_1 түзуінің бағыттаушы векторының координаталары (0; –3; 2) болады.

Бағыттаушы векторлардың координаталарын екі түзудің арасындағы бұрыштың косинусын табуға арналған формулаға қойып, ізделінді φ бұрышының косинусын табамыз:

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{65}}{65}.$$

2-мысал. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғасы және биіктігі 4 см-ге тең. E және F нүктелері — пирамиданың сәйкесінше SB және SC қырларының орталары. AE және BF түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



8.3-сурет

Шешуі. Пирамиданың табанының O центрі координаталар басы, ал абсцисса, ордината осьтері пирамида табанының қабырғаларына параллель болатын координаталар жүйесін қарастырамыз (8.3-сурет).

A нүктесінің координаталары (–2; 2; 0), ал E нүктесінің координаталары (1; 1; 2) болады. Демек, AE түзуінің бағыттаушы векторының координаталары (3; –1; 2) болады. Осыған ұқсас B нүктесінің координаталары (2; 2; 0), ал F нүктесінің координаталары (1; –1; 2) болады. Демек, BF түзуінің бағыттаушы векторының координаталары (–1; –3; 2) болады.

Бағыттаушы векторлардың координаталарын екі түзудің арасындағы бұрыштың косинусын табуға арналған формулаға қойып, ізделінді φ бұрышының косинусын табамыз:

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{2}{7}.$$

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі түзуді қандай түрде беруге болады?
2. Қандай вектор түзудің бағыттаушы векторы деп аталады?
3. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзу қандай параметрлік теңдеумен беріледі?
4. Параметрлік теңдеумен берілген екі түзудің арасындағы бұрыштың косинусын қалай табуға болады?
5. Қандай жағдайда параметрлік теңдеумен берілген екі түзу өзара перпендикуляр болады?

Есептер

A

8.1. $A(1;\ 2;\ -3)$ нүктесі арқылы өтетін және бағыттаушы векторы $\vec{c}(-2;\ 3;\ 1)$ болатын түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.

8.2. $A_1(-2;\ 1;\ 3)$, $A_2(3;\ 4;\ -1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің параметрлік теңдеуін жазыңдар.

8.3. Келесі теңдеулермен берілген l және m түзулерінің өзара орналасуын анықтаңдар:

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases} \quad m: \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = t, \\ z = 4 - 3t. \end{cases}$$

8.4. Параметрлік теңдеулермен берілген l және m түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 - t; \end{cases} \quad m: \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -2t, \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$$

B

8.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 4$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. DB_1 және AC түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

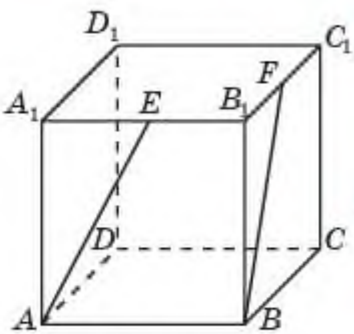
8.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 4$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. BD және AB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

8.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 4$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. AB_1 және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

8.8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 4 см-ге тең. E нүктесі — SB қырының ортасы. AE және SC түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

8.9. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 4 см-ге тең. E нүктесі — SB қырының ортасы. AE және SD түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

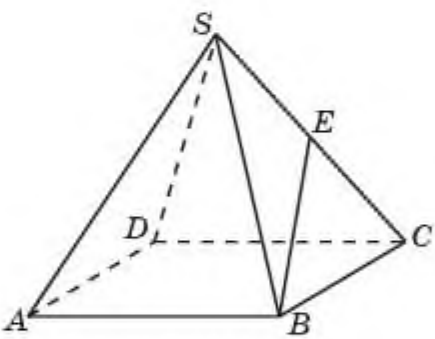
C



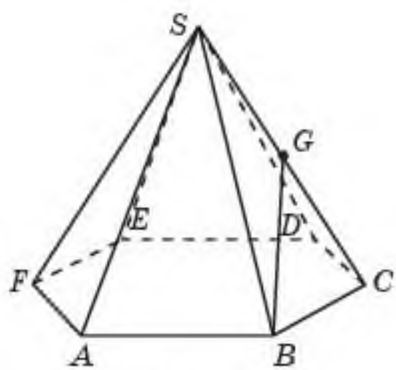
8.4-сурет

8.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қырлары 2 см-ге тең. E және F нүктелері — сәйкесінше A_1B_1 және B_1C_1 қырларының орталары (8.4-сурет). AE және BF түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

8.11. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 2 см-ге тең. E нүктесі — SC қырының ортасы (8.5-сурет). SA және BE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



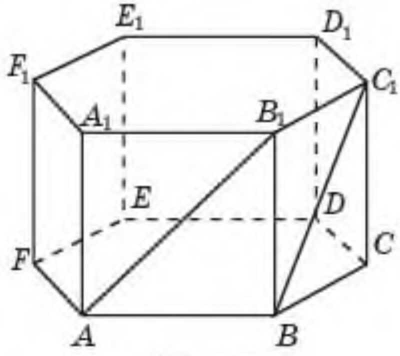
8.5-сурет



8.6-сурет

8.12. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см, ал биіктігі 4 см-ге тең. G нүктесі — SC қырының ортасы (8.6-сурет). SA және BG түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

8.13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 2 см-ге тең (8.7-сурет). AB_1 және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



8.7-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

8.14. Жазықтықтардың арасындағы бұрыштың анықтамасын қайталаңдар.

8.15. Кеңістіктегі жазықтықтың теңдеуінің берілу тәсілдерін қайталаңдар.

§ 9. Екі жазықтықтың арасындағы бұрышты табу

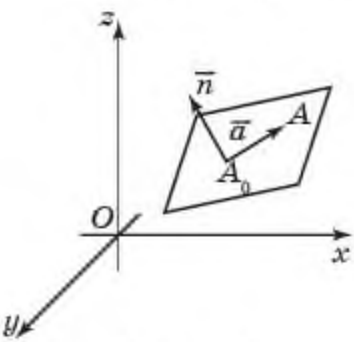
Кеңістіктегі *жазықтықтың теңдеуі* келесі түрде берілетінін еске салайық:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

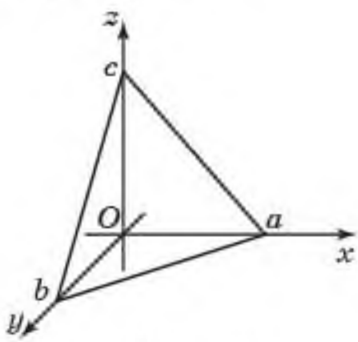
мұндағы a, b, c, d — нақты сандар. a, b, c сандары бір уақытта нөлге тең емес және олар осы жазықтыққа перпендикуляр $\vec{n}$ векторының координаталары болады. Осы вектор *нормаль вектор* деп аталады.

$A_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}(a; b; c)$ нормаль векторы берілген жазықтықтың теңдеуі мынадай түрде беріледі (9.1-сурет):

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$



9.1-сурет



9.2-сурет

$A_0(a; 0; 0)$, $B_0(0; b; 0)$, $C_0(0; 0; c)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі мынадай түрде беріледі:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

мұндағы a, b, c — бір уақытта нөлге тең емес нақты сандар (9.2-сурет).

$A_0(a; 0; 0)$, $B_0(0; b; 0)$ нүктелері арқылы өтетін және Oz осіне параллель болатын жазықтықтың теңдеуін жазыңдар, мұндағы a, b — бір уақытта нөлге тең емес нақты сандар.

$A_0(a; 0; 0)$, $C_0(0; 0; c)$ нүктелері арқылы өтетін және Oy осіне параллель болатын жазықтықтың теңдеуін жазыңдар, мұндағы a, c — бір уақытта нөлге тең емес нақты сандар.

$B_0(0; b; 0)$, $C_0(0; 0; c)$ нүктелері арқылы өтетін және Ox осіне параллель болатын жазықтықтың теңдеуін жазыңдар, мұндағы b, c — бір уақытта нөлге тең емес нақты сандар.

Кеңістіктегі екі жазықтықтың $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ нормаль векторлары коллинеар болса, онда олар параллель болады. Сондықтан қандай да бір t саны үшін келесі теңдік орындалады:

$$\overline{n}_2 = t\overline{n}_1.$$

Ал

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \ \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \qquad (*)$$

теңдеулерімен берілген жазықтықтардың нормаль векторларының координаталары $(a_1; b_1; c_1)$, $(a_2; b_2; c_2)$ болады. Демек, қандай да бір t саны үшін $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$ теңдіктері орындалса, онда бұл жазықтықтар параллель болады.

Егер $d_2 = td_1$ болса, онда (*) теңдеулері бір жазықтықты анықтайды. Егер $d_2 \neq td_1$ болса, онда бұл теңдеулер параллель екі жазықтықты анықтайды.

Егер жазықтықтар параллель болмаса, онда олар түзудің бойымен қиылысады және осы *жазықтықтардың арасындағы бұрышты* олардың нормаль векторларының арасындағы бұрыш арқылы мынадай формуламен есептеуге болады:

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Дербес жағдайда, егер екі жазықтықтың $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ нормаль векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, яғни

$$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

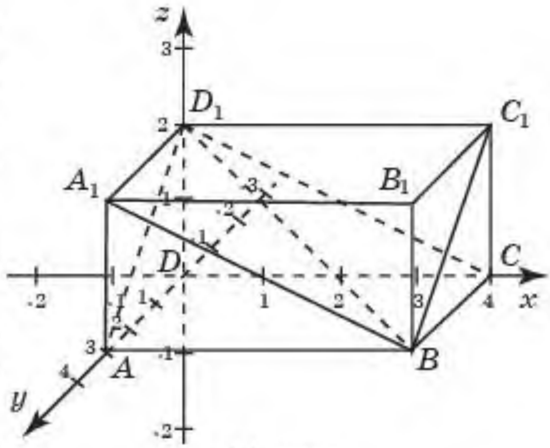
теңдігі орындалса, онда бұл жазықтықтар өзара перпендикуляр болады.

Екі координаталық жазықтықтардың арасындағы бұрыш неге тең?

Екі жазықтықтың арасындағы бұрышты табуға арналған мысалдарды қарастырайық.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$. ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

Шешуі. D нүктесі координаталар басы болатын, ал DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше абсцисса, ордината, аппликата осьтерінде жататын координаталар жүйесін қарастырамыз (9.3-сурет).



9.3-сурет

ABC_1 жазықтығы $\frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ теңдеуімен беріледі және ол $2y + 3z = 6$ теңдеуіне мәндес болады. $\bar{n}_1$ нормаль векторының координаталары (0; 2; 3) болады.

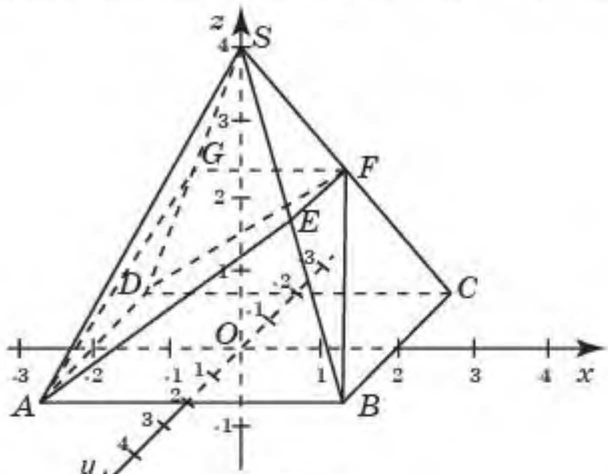
BCD_1 жазықтығы $\frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1$ теңдеуімен беріледі және ол $x + 2z = 4$ теңдеуіне мәндес болады. $\bar{n}_2$ нормаль векторының координаталары (1; 0; 2) болады.

Осы нормаль векторлардың координаталарын екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың косинусын табуға арналған формулаға қойып, ізделінді φ бұрышының косинусын табамыз:

$$\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{65}}{65}.$$

2-мысал. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 4 см-ге тең. F нүктесі — пирамиданың SC қырының ортасы. ABF және ADF жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

Шешуі. Пирамиданың табанының O центрі координаталар басы, ал абсцисса, ордината осьтері пирамида табанының қабырғаларына параллель болатын координаталар жүйесін қарастырамыз (9.4-сурет).



9.4-сурет

F нүктесінің координаталары $(1; -1; 2)$ болады. ABF жазықтығы Oz осін ACS үшбұрышының SO және AF медианаларының H қиылысу нүктесінде қиып өтеді. Демек, H нүктесінің координаталары $(0; 0; \frac{4}{3})$ болады. Бұл жазықтық $\frac{y}{2} + \frac{3z}{4} = 1$ теңдеуімен беріледі және ол $2y + 3z = 4$ теңдеуіне мәндес болады. $\vec{n}_1$ нормаль векторының координаталары $(0; 2; 3)$ болады.

ADF жазықтығы да Oz осін координаталары $(0; 0; \frac{4}{3})$ болатын нүктеде қиып өтеді. Бұл жазықтық $\frac{x}{-2} + \frac{3z}{4} = 1$ теңдеуімен беріледі және ол $2x - 3z = -4$ теңдеуіне мәндес болады. $\vec{n}_2$ нормаль векторының координаталары $(2; 0; -3)$ болады.

Осы нормаль векторлардың координаталарын екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың косинусын табуға арналған формулаға қойып, ізделінді φ бұрышының косинусын табамыз:

$$\cos\varphi = \frac{9}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{9}{13}.$$

Сұрақтар

1. Кеңістіктегі жазықтық қандай теңдеумен беріледі?
2. Қандай вектор жазықтықтың нормаль векторы деп аталады?
3. Қандай жағдайда екі теңдеу параллель жазықтықтарды анықтайды?
4. Теңдеулерімен берілген екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың косинусын қалай табуға болады?
5. Қандай жағдайда теңдеулерімен берілген екі жазықтық өзара перпендикуляр болады?
6. Қандай жағдайда екі теңдеу бір жазықтықты анықтайды?

Есептер

A

9.1. $A_0(-1; 2; 3)$ нүктесі арқылы өтетін және $\vec{n}(0; -3; 2)$ нормаль векторы берілген жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

9.2. $A_0(-1; 0; 0)$, $B_0(0; 2; 0)$, $C_0(0; 0; 3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

9.3. $A_0(1; -2; 3)$ нүктесі арқылы өтетін және: 1) Oxy; 2) Oxz; 3) Oyz координаталық жазықтығына параллель болатын жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

9.4. Төмендегі жазықтықтардың қайсысы өзара параллель болатынын анықтаңдар:

1) $x + 2y + z - 1 = 0,\ \ x + 2y + z + 1 = 0;$
2) $x + y + 3z - 2 = 0,\ \ x + y - 3z - 2 = 0;$
3) $-3x + y + 2z = 0,\ \ 3x - y - 2z - 1 = 0;$
4) $2x + 4y + 6z - 10 = 0,\ \ -x - 2y - 3z + 5 = 0.$

9.5. Төмендегі жазықтықтар өзара перпендикуляр бола ма:
1) $y + z + 2 = 0$ және $y - z + 3 = 0$;
2) $2x - 5y - z + 4 = 0$ және $3x + 2y - 4z - 5 = 0$;
3) $x - y + 3 = 0$ және $y + z - 3 = 0$?

9.6. 1) $x + y + z - 1 = 0$, $x - y + z + 1 = 0$; 2) $2x - 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z + 7 = 0$ теңдеулерімен берілген жазықтықтардың арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

9.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 3$. 1) ABC_1; 2) ADC_1 жазықтығы мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

B

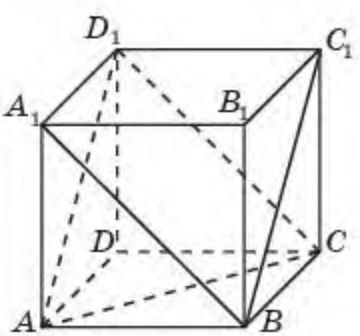
9.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 3$. BCD_1 және ADC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

9.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. 1) ABC; 2) ADD_1; 3) CDD_1 жазықтығы мен ACD_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

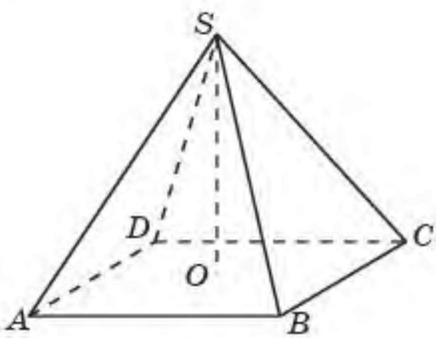
9.10. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 4 см-ге тең. 1) ABC; 2) SBC; 3) SCD жазықтығы мен SAB жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

C

9.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қырлары 1 см-ге тең (9.5-сурет). ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



9.5-сурет

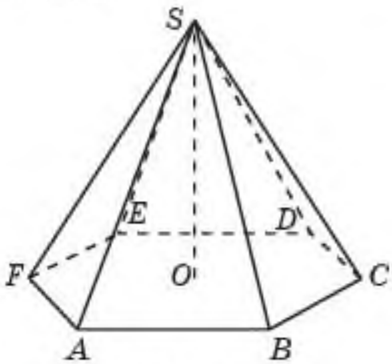


9.6-сурет

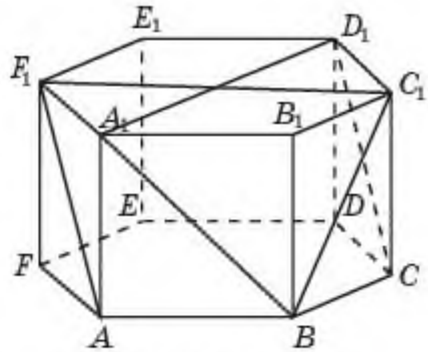
9.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қырлары 1 см-ге тең (9.5-сурет). ACD_1 және ABC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

9.13. *SABCD* дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 2 см-ге тең (9.6-сурет). *SAD* және *SBC* жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

9.14. *SABCDEF* дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см-ге және биіктігі 4 см-ге тең (9.7-сурет). *SAB* және *SDE* жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.



9.7-сурет



9.8-сурет

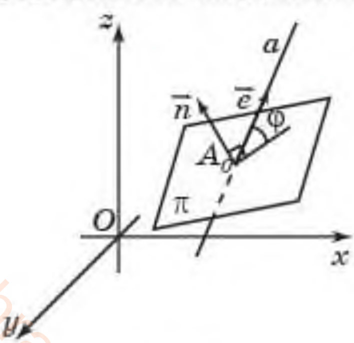
9.15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 2 см-ге тең (9.8-сурет). ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

9.16. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың анықтамасын қайталаңдар.

§ 10. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты табу

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты түзудің бағыттаушы векторы мен жазықтықтың нормаль векторының скаляр көбейтіндісінің формуласын пайдаланып табуға болады. Бұл векторлардың арасындағы бұрыштың косинусы осы түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусына тең болады:



10.1-сурет

$$\sin\varphi = \frac{|\bar{e}\cdot\bar{n}|}{|\bar{e}|\cdot|\bar{n}|},$$

мұндағы $\bar{c}$ — берілген түзудің бағыттаушы векторы, $\bar{n}$ — берілген жазықтықтың нормаль векторы (10.1-сурет).

Егер түзудің $\bar{c}$ бағыттаушы векторының координаталары (k; l; m), ал жазықтықтың

$\bar{n}$ нормаль векторының координаталары (a; b; c) болса, онда бұл формуланы мынадай түрде жазуға болады:

$$\sin\varphi = \frac{|k \cdot a + l \cdot b + m \cdot c|}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Егер түзудің $\bar{c}$ бағыттаушы векторы жазықтықтың $\bar{n}$ нормаль векторына коллинеар болса, яғни қандай да бір t саны үшін $a = tk$, $b = tl$, $c = tm$ теңдіктері орындалса, онда берілген түзу жазықтыққа перпендикуляр болады.

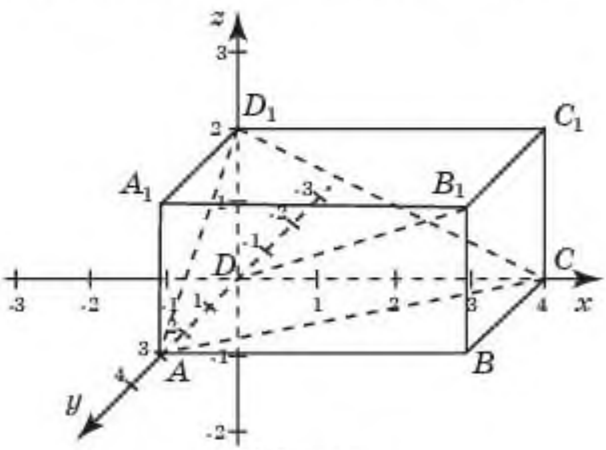
Ox осі мен yOz жазықтығы қандай бұрыш жасайды?

Берілген түзудің жазықтыққа параллель болуы немесе жазықтыққа тиісті болуы шартын табыңдар.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты табуға арналған мысалдарды қарастырайық.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$. DB_1 түзуі мен ACD_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

Шешуі. D нүктесі координаталар басы болатын, ал DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше абсцисса, ордината, аппликата осьтерінде жататын координаталар жүйесін қарастырамыз (10.2-сурет).



10.2-сурет

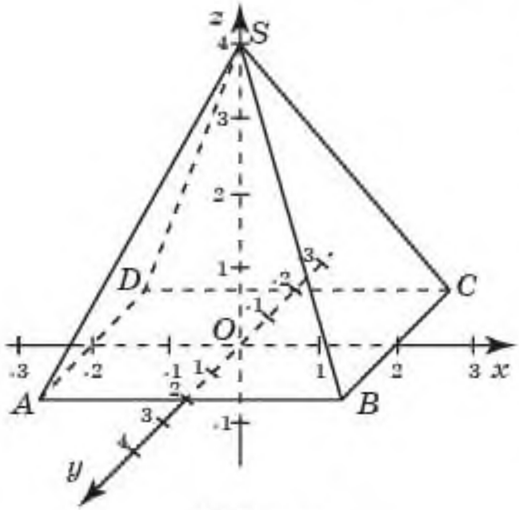
DB_1 түзуінің бағыттаушы векторының координаталары (4; 3; 2) болады. ACD_1 жазықтығы $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ теңдеуімен беріледі және ол $3x + 4y + 6z = 12$ теңдеуіне мәндес болады. Жазықтықтың $\bar{n}$ нормаль векторының координаталары (3; 4; 6) болады.

Осы векторлардың координаталарын екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусын табуға арналған формулаға қойып, ізделінді φ бұрышының синусын табамыз:

$$\sin\varphi = \frac{36}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{61}} = \frac{36\sqrt{1769}}{1769}.$$

2-мысал. *SABCD* дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 4 см-ге тең. *SA* түзуі мен *SBC* жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

Шешуі. Пирамиданың табанының *O* центрі координаталар басы, ал абсцисса, ордината осьтері пирамида табанының қабырғаларына параллель болатын координаталар жүйесін қарастырамыз (10.3-сурет).



10.3-сурет

SA түзуінің бағыттаушы векторының координаталары (–2; 2; –4) болады. *SBC* жазықтығы $\frac{x}{2}+\frac{z}{4}=1$ теңдеуімен беріледі және ол $2x+z=4$ теңдеуіне мәндес. Онда жазықтықтың $\vec{n}$ нормаль векторының координаталары (2; 0; 1) болады.

Осы векторлардың координаталарын екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусын табуға арналған формулаға қойып, ізделінді φ бұрышының синусын табамыз:

$$\sin\varphi = \frac{8}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

Сұрақтар

1. Теңдеулерімен берілген түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусын қалай табуға болады?
2. Қандай жағдайда теңдеулерімен берілген түзу мен жазықтық өзара перпендикуляр болады?

Есептер

А

10.1. Түзудің бағыттаушы векторының координаталары (1; 2; 2) және жазықтықтың нормаль векторының координаталары (–2; 1; 2). Осы түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

10.2. $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 - t \end{cases}$

теңдеулерімен берілген түзу мен $x + 2y - 2z + 1 = 0$ теңдеуімен берілген жазықтықтың арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

10.3. $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - 6t, \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

теңдеулерімен берілген түзу мен келесі теңдеумен берілген жазықтықтың өзара орналасуын анықтаңдар:

1) $x + 3y - 2z + 4 = 0$;

2) $3x - y + 1 = 0$;

3) $2x + z - 3 = 0$.

B

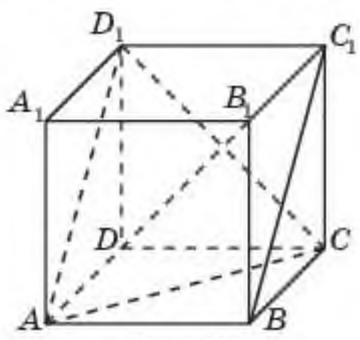
10.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. 1) ABC; 2) ADD_1; 3) CDD_1 жазықтығы мен DB_1 түзуі арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

10.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. 1) DB; 2) DA_1; 3) DC_1 түзуі мен ACD_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

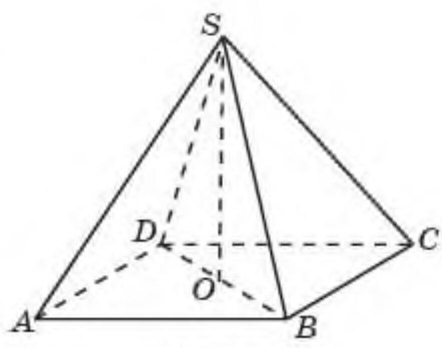
10.6. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 4 см-ге тең. 1) BC; 2) AC; 3) SC түзуі мен SAB жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

C

10.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қырлары 1 см-ге тең (10.4-сурет). 1) ABC_1; 2) ACD_1 жазықтығы мен DB_1 түзуі арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.



10.4-сурет

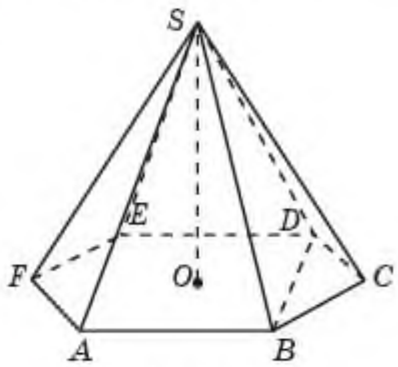


10.5-сурет

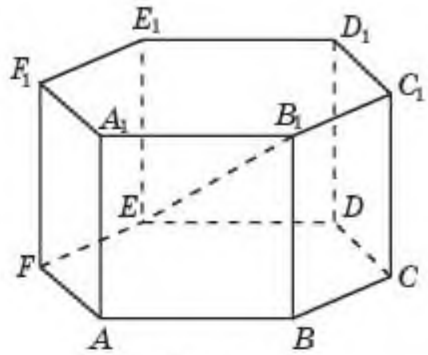
10.8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 2 см-ге тең (10.5-сурет). 1) BD; 2) SC

түзуі мен SAB жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

10.9. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см, ал биіктігі 4 см-ге тең (10.6-сурет). 1) BD; 2) SC түзуі мен SAB жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.



10.6-сурет



10.7-сурет

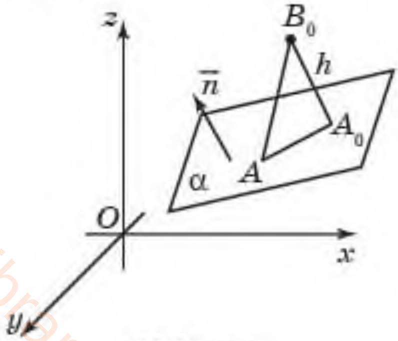
10.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 2 см-ге тең (10.7-сурет). EB_1 түзуі мен ABD_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

10.11. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықтың анықтамасын қайталаңдар.

§ 11. Кеңістіктегі нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық

Кеңістіктегі $B_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінен $ax + by + cz + d = 0$ теңдеуімен берілген α жазықтығына дейінгі қашықтықты табуға арналған формуланы шығарайық.



11.1-сурет

B_0 нүктесінен α жазықтығына дейінгі қашықтық деп берілген нүктеден осы жазықтыққа түсірілген B_0A_0 перпендикулярының ұзындығын айтатынын еске саламыз.

$\overline{A_0B_0}$ векторы берілген жазықтықтың $\overline{n}(a;\ b;\ c)$ нормаль векторына коллинеар екенін байқаймыз (11.1-сурет).

$A(x; y; z)$ нүктесі — α жазықтығының қандай да бір нүктесі болсын. Сонда

$$\cos\angle AB_0A_0 = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{B_0A}|}{|\vec{n}| \cdot |\overline{B_0A}|} = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot |\overline{B_0A}|}.$$

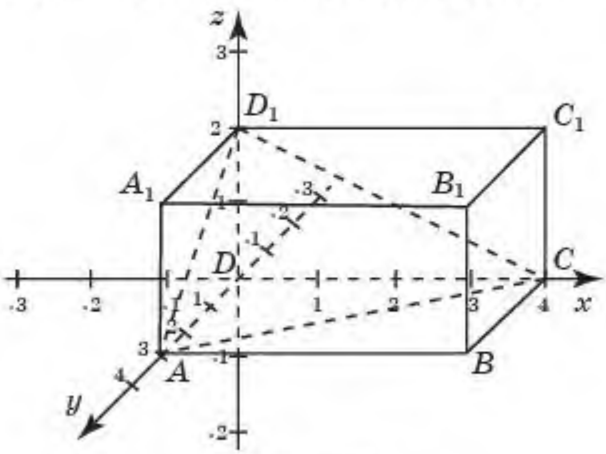
$-ax - by - cz = d$ екенін және ізделінді h қашықтығы $|\overline{B_0A}| \cdot \cos\angle AB_0A$-ге тең болатынын ескеріп, *нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты* табу формуласын аламыз:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Берілген нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты табуға арналған мысалдарды қарастырайық.

1-мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2$. B_1 нүктесінен ACD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

Шешуі. D нүктесі координаталар басы болатын, ал DC, DA, DD_1 қырлары сәйкесінше абсцисса, ордината, аппликата осьтерінде жататын координаталар жүйесін қарастырамыз (11.2-сурет).



11.2-сурет

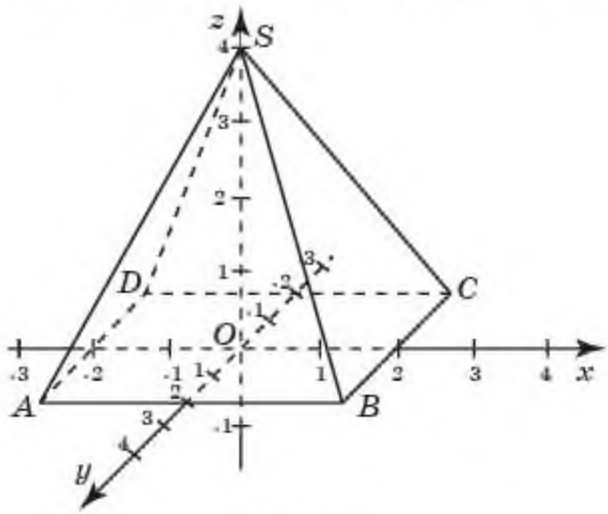
B_1 нүктесінің координаталары (4; 3; 2) болады. ACD_1 жазықтығы $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ теңдеуімен беріледі және ол $3x + 4y + 6z - 12 = 0$ теңдеуіне мәндес болады.

Табылған мәндерді нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты табуға арналған формулаға қойып, ізделінді h қашықтығын табамыз:

$$h = \frac{24\sqrt{61}}{61}.$$

2-мысал. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 4 см-ге тең. A нүктесінен SBC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

Шешуі. Пирамида табанының O центрі координаталар басы, ал абсцисса, ордината осьтері пирамида табанының қабырғаларына параллель болатын координаталар жүйесін қарастырамыз (11.3-сурет).



11.3-сурет

A нүктесінің координаталары $(-2;\ 2;\ 0)$ болады. SBC жазықтығы $\frac{x}{2} + \frac{z}{4} = 1$ теңдеуімен беріледі және ол $2x + z = 4$ теңдеуіне мәндес болады. Осы мәндерді нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты табуға арналған формулаға қойып, ізделінді h қашықтығын табамыз:

$$h = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Сұрақтар

1. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық дегеніміз не?
2. Координаталары берілген нүктеден теңдеуі берілген жазықтыққа дейінгі қашықтықты қалай табуға болады?

Есептер

А

11.1. 1) $x + y = 1$; 2) $x + y + z = 1$ теңдеуімен берілген жазықтықтан $B_0(1;\ 1;\ 1)$ нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

11.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында A_1 нүктесінен ABC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

11.3. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 1 см-ге тең. B нүктесінен SAC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

11.4. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см-ге, ал биіктігі 1 см-ге тең. Пирамиданың табанының O центрінен SBC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

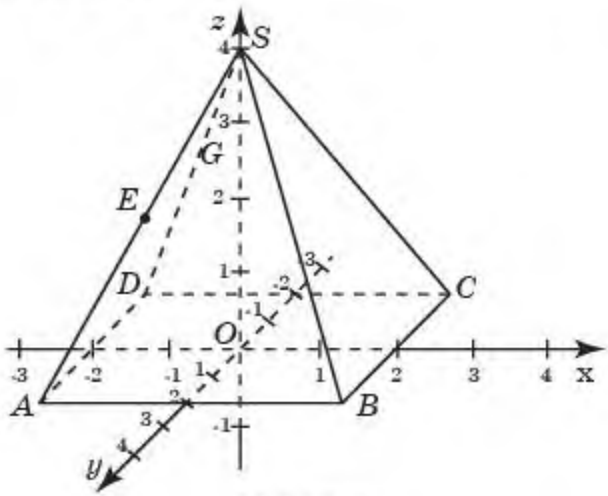
B

11.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. A_1 нүктесінен ABC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

11.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. C_1 нүктесінен BCD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

11.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. 1) B; 2) A_1; 3) C_1 нүктесінен ACD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

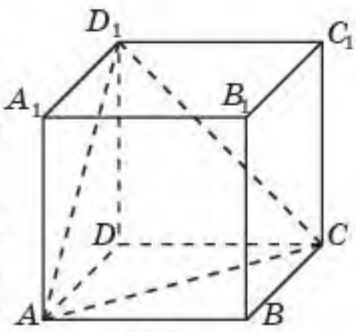
11.8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 4 см-ге тең. E нүктесі — SA қырының ортасы (11.4-сурет). E нүктесінен SBC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.



11.4-сурет

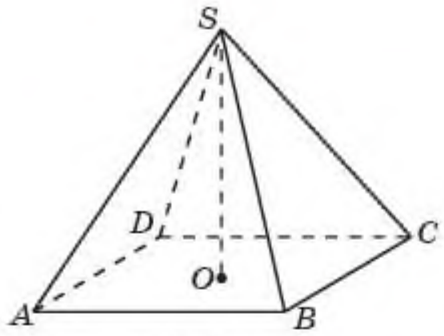
C

11.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қырлары 1 см-ге тең (11.5-сурет). B_1 нүктесінен ACD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

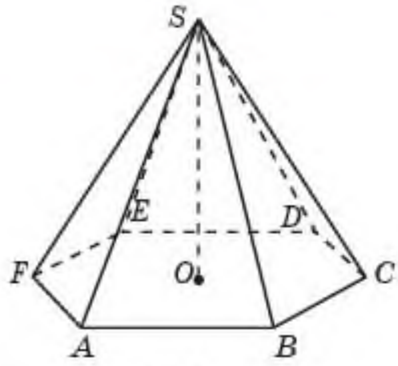


11.5-сурет

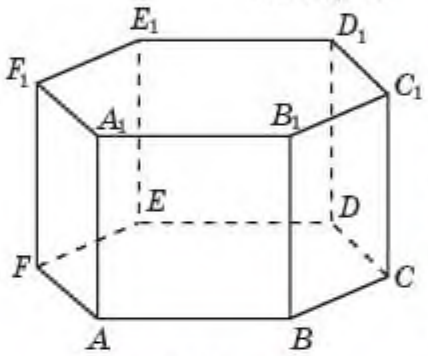
11.10. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары және биіктігі 2 см-ге тең (11.6-сурет). A нүктесінен SBC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.



11.6-сурет



11.7-сурет



11.8-сурет

11.11. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см, ал биіктігі 4 см-ге тең (11.7-сурет). A нүктесінен SBC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

11.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 2 см-ге тең (11.8-сурет). A_1 нүктесінен BCE_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

11.13. Жазықтықтағы бұрыдың анықтамасын қайталаңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. DB_1 және AC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар:

A) 30°; B) 45°;
C) 60°; D) 90°.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. BB_1 және DB_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$;

C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{6}$.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. AB_1 және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{6}$.

4. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал биіктігі 2 см-ге тең. SA және BD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар:

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°.

5. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал биіктігі 2 см-ге тең. SA және BC түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; C) $\frac{1}{6}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см, ал биіктігі 2 см-ге тең. SA және BC түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. ABC_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

A) $\frac{1}{5}$; B) $\frac{2}{5}$; C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{4}{5}$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. ABC_1 және ACD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{30}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{20}}{6}$; C) $\frac{\sqrt{10}}{6}$; D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

9. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал биіктігі 2 см-ге тең. SAB және ABC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{15}}{15}$; B) $\frac{\sqrt{17}}{17}$; C) $\frac{\sqrt{19}}{19}$; D) $\frac{\sqrt{21}}{21}$.

10. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал биіктігі 2 см-ге тең. SAB және SBC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар:

A) $\frac{1}{11}$; B) $\frac{1}{13}$; C) $\frac{1}{15}$; D) $\frac{1}{17}$.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. DB_1 түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{6}$.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. DB_1 түзуі мен ABC_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{5}}{15}$; B) $\frac{2\sqrt{5}}{15}$; C) $\frac{3\sqrt{5}}{15}$; D) $\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. DB_1 түзуі мен ACD_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

14. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1 см-ге, ал биіктігі 2 см-ге тең. SA түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

15. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1 см, ал биіктігі 2 см-ге тең. SC түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. Оның A_1 төбесінен ABC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. Оның A_1 төбесінен ACD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедінде $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. Оның B_1 төбесінен ACD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

19. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал биіктігі 2 см-ге тең. Пирамида табанының O центрінен SBC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар:

A) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ см; B) $\frac{\sqrt{17}}{17}$ см; C) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ см; D) $\frac{\sqrt{15}}{15}$ см.

20. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1 см, ал биіктігі 2 см-ге тең. Оның C төбесінен SAB жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар:

A) $\sqrt{\frac{6}{11}}$ см; B) $\sqrt{\frac{6}{13}}$ см; C) $\sqrt{\frac{6}{19}}$ см; D) $\sqrt{\frac{12}{19}}$ см.

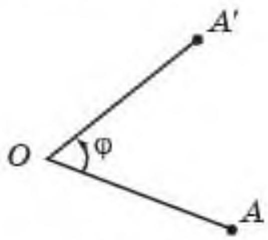
III тарау

АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

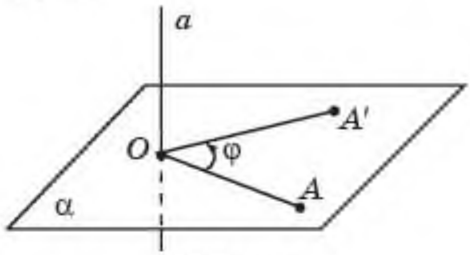
§ 12. Цилиндр және оның элементтері. Цилиндрдің жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

Кеңістіктегі фигуралардың ішінде көпжақтардан басқа *айналу денелері* деп аталатын фигуралар ерекше орын алады.

Егер $OA' = OA$ және $\angle A'OA = \varphi$ болса, онда жазықтықтағы A' нүктесі A нүктесін O нүктесінен φ бұрышқа айналдыра бұру кезінде пайда болатынын еске салайық (12.1-сурет).



12.1-сурет



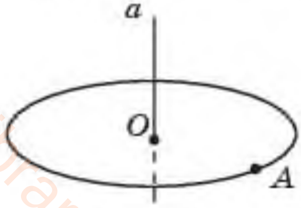
12.2-сурет

Кеңістікте a түзуі және осы түзудің бойында жатпайтын A нүктесі берілсін (12.2-сурет). A нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр α жазықтығын жүргіземіз және a түзуі мен α жазықтығының қиылысу нүктесін O деп белгілейік. Егер α жазықтығында A' нүктесі A нүктесін O нүктесінен айналдыра φ бұрышқа бұру кезінде пайда болса, онда кеңістіктегі A' нүктесі A нүктесін O нүктесінен айналдыра φ бұрышқа бұру арқылы алынды деп айтады.

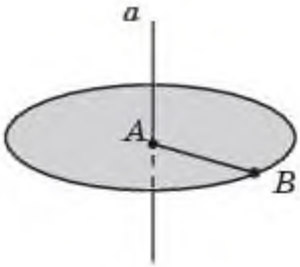
a түзуінің нүктелері орнында қалып, ал қалған барлық нүктелер осы түзуден айнала бірдей бағытта, белгілі φ бұрышқа бұрылатын кеңістіктегі түрлендіру a түзуінен айналдыра *бұру* немесе *айналу* деп аталады. a түзуі *айналу осі* деп аталады.

Егер кеңістіктегі Φ фигурасының барлық нүктелері F фигурасының нүктелерін a осінен айналдыра бірдей бағытта бұру кезінде пайда болса, онда Φ фигурасы F фигурасының a осінен айналуы арқылы алынды деп айтады. Φ фигурасы *айналу денесі* деп аталады.

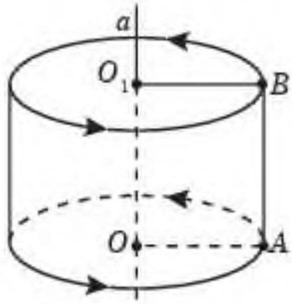
Мысалы, a түзуінде жатпайтын A нүктесінің осы түзуді айналуы кезінде центрі O нүктесі болатын шеңбер пайда болады. O нүктесі — A нүктесі арқылы өтетін және a түзуіне перпендикуляр жазықтықтың осы a түзуімен қиылысу нүктесі болады (12.3-сурет).



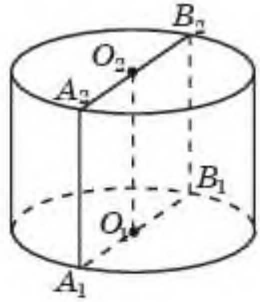
12.3-сурет



12.4-сурет



12.5-сурет



12.6-сурет

Кесіндінің оған перпендикуляр және оның бір ұшы арқылы өтетін түзуді айналуы кезінде радиусы осы кесіндіге тең дөңгелек пайда болады (12.4-сурет).

Цилиндр деп тіктөртбұрышты оның бір қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда алынған фигураны (денені) айтады.

12.5-суретте AOO_1B тіктөртбұрышын OO_1 қабырғасы жатқан a түзуінен айналдырғанда шыққан цилиндр кескінделген. Тіктөртбұрыштың OO_1 қабырғасы *цилиндрдің осі* деп аталады.

Тіктөртбұрыштың OO_1 қабырғасына перпендикуляр болатын OA және O_1B қабырғаларының айналуы кезінде алынған дөңгелектер *цилиндрдің табандары,* ал олардың радиусы *цилиндрдің радиусы* деп аталады.

Тіктөртбұрыштың OO_1 қабырғасына параллель болатын AB қабырғасының айналуы кезінде алынған бет *цилиндрдің бүйір беті* деп аталады.

Цилиндрдің толық беті табандары мен бүйір бетінен тұрады.

Тіктөртбұрыштың OO_1 қабырғасына параллель болатын AB қабырғасының айналуы кезінде алынатын кесінділер *цилиндрдің жасаушысы* деп аталады.

Цилиндрдің табан жазықтықтарының арақашықтығын *цилиндрдің биіктігі* деп атайды.

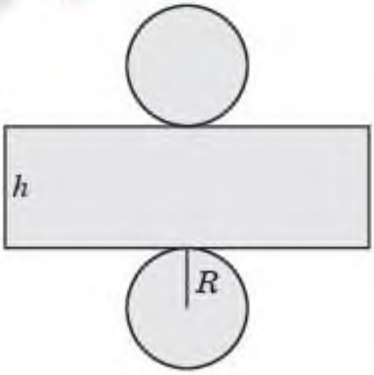
Цилиндрдің биіктігі оның осіне және жасаушысының ұзындығына тең болатынын дәлелдеңдер.

Цилиндрдің осі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *цилиндрдің осьтік қимасы* деп аталады (12.6-сурет).

Цилиндрдің осьтік қимасы тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

Цилиндрді осы тіктөртбұрышты оның қарама-қарсы екі қабырғасының орталары арқылы өтетін түзуден айналдыру арқылы алуға болады.

Цилиндрді тіктөртбұрыштан басқа жазық фигураларды айналдыру арқылы алуға бола ма?



12.7-сурет

Егер цилиндрдің бүйір бетін жасаушысы бойымен кесіп жазықтыққа жазатын болсақ және оған табандарын қоссақ, онда *цилиндрдің жазбасы* деп аталатын фигура пайда болады (12.7-сурет).

Цилиндрдің толық бетінің немесе *бетінің ауданы* деп оның жазбасының ауданын айтады.

Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің жазбасының ауданын айтады.

Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығын оның биіктігіне көбейткенге тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

$$S_{\text{бүйір}} = 2\pi Rh.$$

мұндағы R — цилиндрдің табанының радиусы, h — биіктігі.

Цилиндрдің толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен екі табанының аудандарының қосындысына тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

$$S_{\text{толық}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R).$$

мұндағы R — цилиндрдің табанының радиусы, h — биіктігі.

Көлбеу цилиндр ұғымын анықтап көріңдер.

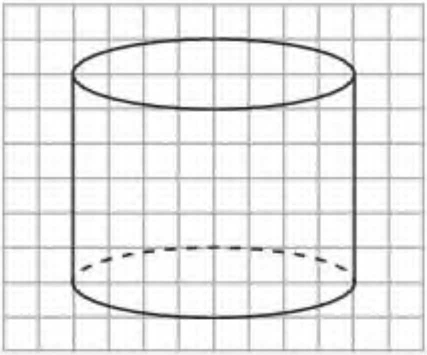
Сұрақтар

1. Кеңістіктегі қандай түрлендіру түзуден айналдыра бұру деп аталады?
2. Қандай фигура айналу фигурасы деп аталады?
3. Қандай фигура цилиндр деп аталады?
4. Цилиндрдің осі дегеніміз не?
5. Цилиндрдің табандары дегеніміз не?
6. Қандай фигура цилиндрдің бүйір беті деп аталады?
7. Қандай кесінділер цилиндрдің жасаушылары деп аталады?
8. Цилиндрдің биіктігі дегеніміз не?
9. Цилиндрдің осьтік қимасы дегеніміз не?
10. Цилиндрдің жазбасы дегеніміз не?
11. Цилиндрдің бетінің ауданы дегеніміз не?
12. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?
13. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.
14. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

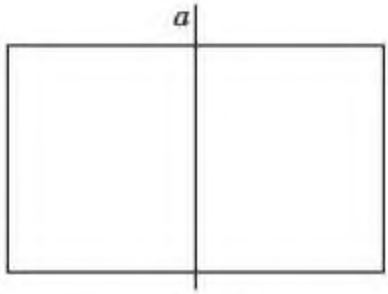
Есептер

А

12.1. Торкөз қағазға 12.8-суреттегіге ұқсас цилиндрді салыңдар. Цилиндрдің осьтік қимасын кескіндеңдер.



12.8-сурет



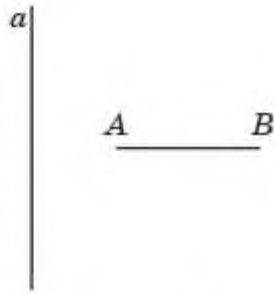
12.9-сурет

12.2. Цилиндрдің қанша жасаушысы болады?

12.3. Цилиндрдің табандарына параллель жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?

12.4. Тіктөртбұрышты оның қарама-қарсы жатқан екі қабырғасының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (12.9-сурет)?

12.5. AB кесіндісін осы кесіндімен бір жазықтықта жатқан, ортақ нүктелері болмайтын және оған перпендикуляр түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (12.10-сурет)?



12.10-сурет

12.6. Цилиндрдің биіктігі 3 см-ге, ал табанының радиусы 2 см-ге тең. Оның осьтік қимасының диагоналін табыңдар.

12.7. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы — қабырғасы 1 см-ге тең квадрат. Цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.

12.8. Цилиндрдің табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Оның: 1) бүйір бетінің; 2) толық бетінің ауданын табыңдар.

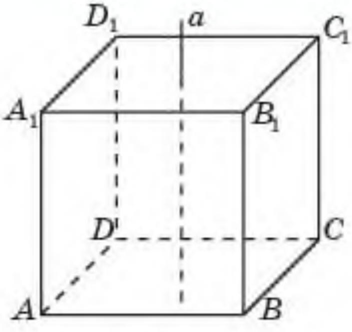
B

12.9. Торкөз қағазға 12.8-суреттегіге ұқсас цилиндрді салыңдар. Осы цилиндрдің табандарына параллель жазықтықпен қимасын кескіндеңдер.

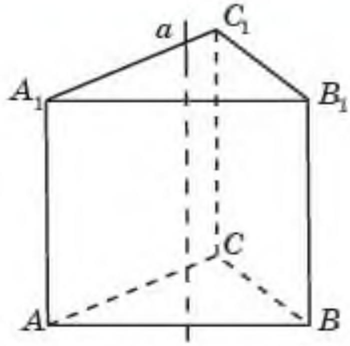
12.10. Торкөз қағазға 12.8-суреттегіге ұқсас цилиндрді салыңдар. Осы цилиндрдің осіне параллель жазықтықпен қимасын кескіндеңдер. Ол қандай фигура болады?

12.11. Цилиндрдің: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

12.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубын: 1) AA_1 түзуінен; 2) қарама-қарсы жақтарының центрлерін қосатын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (12.11-сурет)?



12.11-сурет



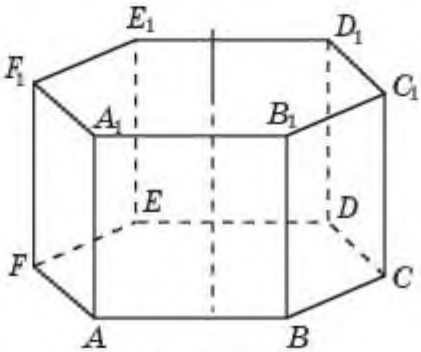
12.12-сурет

12.13. Бірлік кубты: 1) AA_1 түзуінен; 2) қарама-қарсы жақтарының центрлерін қосатын түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

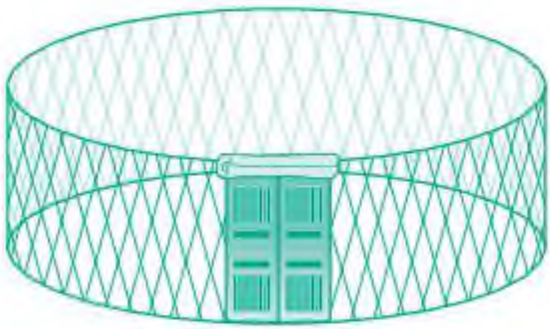
12.14. Дұрыс үшбұрышты призманы оның: 1) бүйір қыры жатқан түзуден; 2) табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (12.12-сурет)?

12.15. Дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы оның: 1) бүйір қыры жатқан түзуден; 2) табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар (12.12-сурет).

12.16. Дұрыс алтыбұрышты призманы оның: 1) бүйір қыры жатқан түзуден; 2) табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (12.13-сурет)?



12.13-сурет



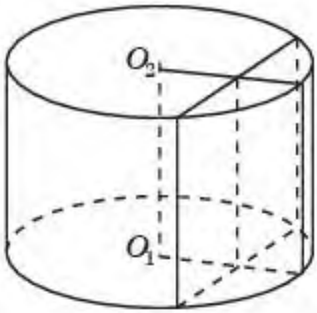
12.14-сурет

12.17. Дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы оның: 1) бүйір қыры жатқан түзуден; 2) табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар (12.13-сурет).

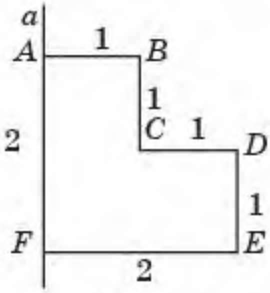
12.18. Киіз үй — көшпенділердің ежелден келе жатқан тұрғын үйі (12.14-сурет). Биіктігі 2 м, ал диаметрі 5 м болатын киіз үйдің керегесінің бетінің ауданын табыңдар.

C

12.19. Цилиндрдің биіктігі 8 дм-ге, ал табанының радиусы 5 дм-ге тең. Оның осіне параллель жазықтықпен қимасы — квадрат (12.15-сурет). Цилиндрдің осінен осы қимаға дейінгі қашықтықты табыңдар.

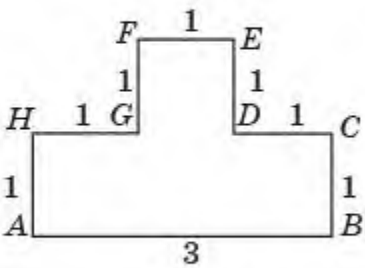


12.15-сурет

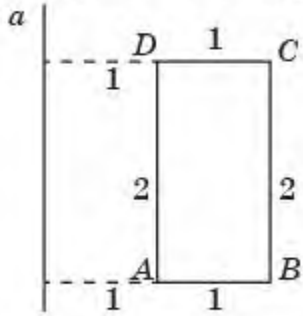


12.16-сурет

12.20. 12.16-суреттегі көршілес қабырғалары тік бұрыш жасайтын *ABCDEF* көпбұрышын *AF* түзуінен айналдырғанда қандай фигура пайда болады? Осы фигураның бетінің ауданын табыңдар.



12.17-сурет

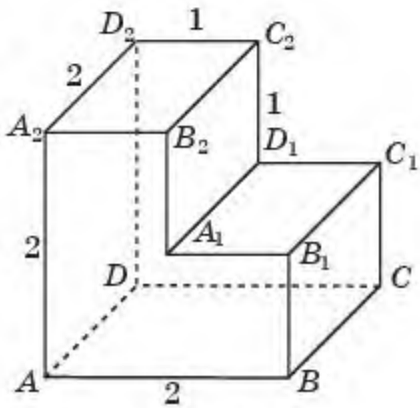


12.18-сурет

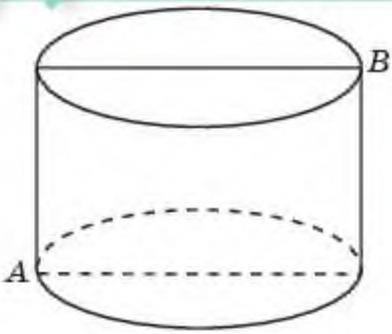
12.21. 12.17-суреттегі көршілес қабырғалары тік бұрыш жасайтын *ABCDEFGH* көпбұрышын *AB* түзуінен айналдырғанда қандай фигура пайда болады? Осы фигураның бетінің ауданын табыңдар.

12.22. 12.18-суреттегі *ABCD* тіктөртбұрышын оның қабырғасына параллель *a* түзуінен айналдырғанда қандай фигура пайда болады? Осы фигураның бетінің ауданын табыңдар.

12.23. 12.19-суреттегі барлық екіжақты бұрыштары тік болатын көпжақты



12.19-сурет

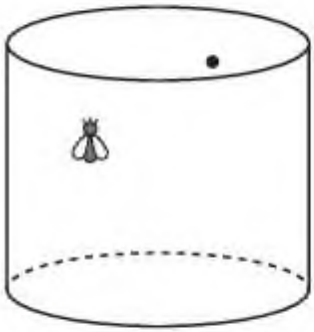


12.20-сурет

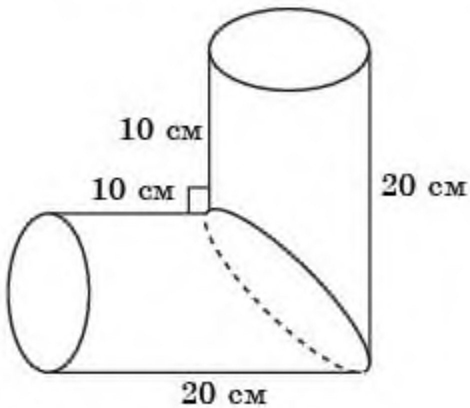
AA_2 түзуінен айналдырғанда қандай фигура пайда болады? Осы фигураның бетінің ауданын табыңдар.

12.24. Цилиндрдің табанының радиусы 2 см-ге, ал жасаушысы 3 см-ге тең. Оның осьтік қимасының A төбесінен оған қарсы жатқан B төбесіне дейінгі бүйір беті бойымен ең қысқа қашықтықты табыңдар (12.20-сурет).

12.25. Табанындағы шеңбердің ұзындығы 24 см болатын цилиндр тәрiздес құтының ішкі қабырғасында жоғарғы ернеуінен 2,5 см жерде бір тамшы бал жабысып тұр, ал оған диаметрлік қарама-қарсы сыртқы қабырғасында шыбын отыр (12.21-сурет). Шыбын балға дейін жылжып бара алатындай ең қысқа жолдың ұзындығын табыңдар.



12.21-сурет



12.22-сурет

12.26. 12.22-суреттегі 90° бұрыш жасайтын цилиндрлердің екі тең бөлігінен тұратын фигураның бетінің ауданын табыңдар.

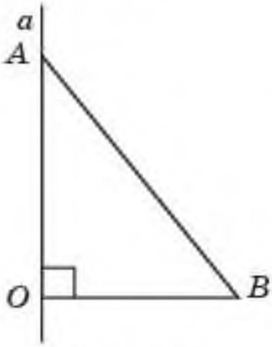
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

12.27. Теңбүйірлі үшбұрыштың және дөңгелек сектордың анықтамаларын қайталаңдар.

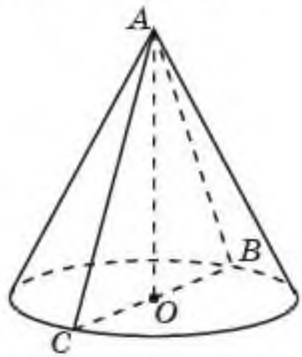
§ 13. Конус және оның элементтері. Конустың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары

Конус деп тікбұрышты үшбұрышты оның бір катеті жатқан түзуден айналдыру арқылы алынған фигураны (денені) айтады.

Бізге ABO тікбұрышты үшбұрышы берілсін (13.1-сурет). Егер осы тікбұрышты үшбұрышты оның AO катеті арқылы өтетін a түзуінен айналдырсақ, нәтижесінде айналу денесі — конусты аламыз. Тікбұрышты үшбұрыштың AO катеті *конустың осі* деп аталады.



13.1-сурет



13.2-сурет

AO катетіне перпендикуляр болатын тікбұрышты үшбұрыштың BO қабырғасының айналуы кезінде алынған дөңгелек *конустың табаны*, ал оның радиусы *конустың радиусы* деп аталады.

Тікбұрышты үшбұрыштың AB гипотенузасының айналуы кезінде пайда болатын бет *конустың бүйір беті* деп аталады.

Конустың толық беті табаны мен бүйір бетінен тұрады.

Тікбұрышты үшбұрыштың AB гипотенузасының AO катетінен айналуы кезінде алынатын кесінділер *конустың жасаушысы* деп аталады.

Конустың осі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *конустың осьтік қимасы* деп аталады (13.2-сурет).

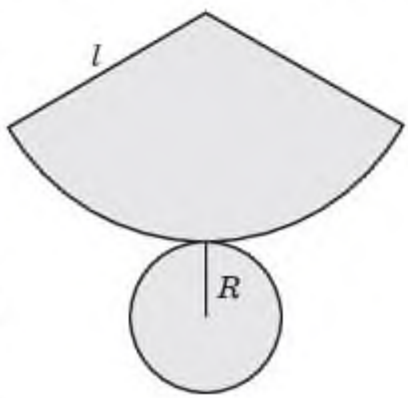
Конустың осьтік қимасы — теңбүйірлі үшбұрыш, оның табаны конустың табанының диаметрі болатынын дәлелдеңдер.

Конусты осы теңбүйірлі үшбұрышты табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдыру арқылы алуға болады. Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына қарсы жатқан төбесі *конустың төбесі* деп аталады.

Конустың төбесінен оның табан жазықтығына түсірілген перпендикулярдың ұзындығы *конустың биіктігі* деп аталады.

Қалай ойлайсыңдар, конусты тікбұрышты емес және теңбүйірлі емес үшбұрышты айналдыру арқылы алуға бола ма?

Егер конустың бүйір бетін жасаушысы бойымен кесіп жазықтыққа жазатын болсақ және оған табанын қоссақ, онда *конустың жазбасы* деп аталатын фигура пайда болады (13.3-сурет).



13.3-сурет

Конустың толық бетінің ауданы деп оның жазбасының ауданын айтады.

Конустың бүйір бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің жазбасының ауданын айтады.

Конустың бүйір бетінің ауданы оның табанындағы шеңберінің ұзындығы мен жасаушысының көбейтіндісінің жартысына тең болады, яғни мынадай формуламен анықталады:

$$S_{\text{бүйір}} = \pi Rl.$$

мұндағы R — конустың табанының радиусы, l — жасаушысы.

Конустың толық бетінің ауданы оның бүйір беті мен табанының аудандарының қосындысына тең болады, яғни мынадай формуламен есептеледі:

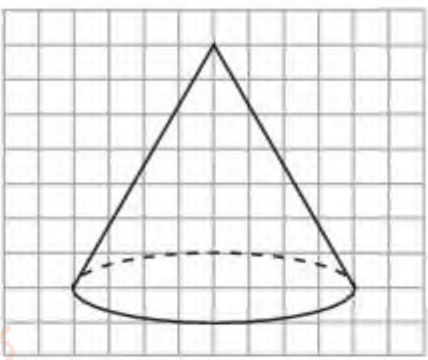
$$S_{\text{толық}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$$

мұндағы R — конустың табанының радиусы, l — жасаушысы.

Сұрақтар

1. Қандай фигура конус деп аталады?
2. Конустың осі дегеніміз не?
3. Конустың табаны дегеніміз не?
4. Қандай фигура конустың бүйір беті деп аталады?
5. Қандай кесінділер конустың жасаушылары деп аталады?
6. Конустың осьтік қимасы дегеніміз не?
7. Конустың төбесі дегеніміз не?
8. Конустың биіктігі дегеніміз не?
9. Қандай фигура конустың жазбасы деп аталады?
10. Конустың бетінің ауданы дегеніміз не?
11. Конустың бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?
12. Конустың бүйір бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.
13. Конустың толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

Есептер



13.4-сурет

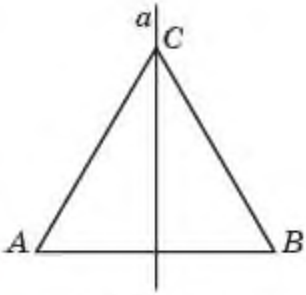
A

13.1. Торкөз қағазға 13.4-суреттегіге ұқсас конусты салыңдар. Конустың осьтік қимасын кескіндеңдер.

13.2. Конустың қанша жасаушысы болады?

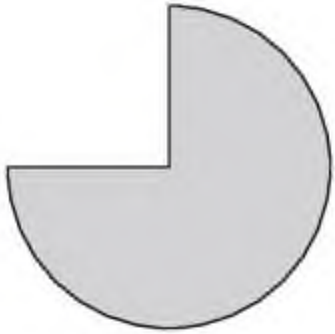
13.3. Конустың табанына параллель жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?

13.4. Теңбүйірлі үшбұрышты оның табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (13.5-сурет)?



13.5-сурет

13.6-сурет



13.7-сурет

13.5. AC кесіндісін C нүктесі арқылы өтетін және оған перпендикуляр емес түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (13.6-сурет)?

13.6. Конустың табанының радиусы 3 см-ге, ал биіктігі 4 см-ге тең. Конустың жасаушысын табыңдар.

13.7. Конустың осьтік қимасы — қабырғасы 10 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш. Конустың: 1) табанының радиусын; 2) биіктігін табыңдар.

13.8. Конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 30° бұрыш жасап көлбейді. Конустың биіктігін табыңдар.

13.9. Конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 60° бұрыш жасап көлбейді. Конустың табанының радиусын табыңдар.

13.10. Конустың табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Конустың бетінің ауданын табыңдар.

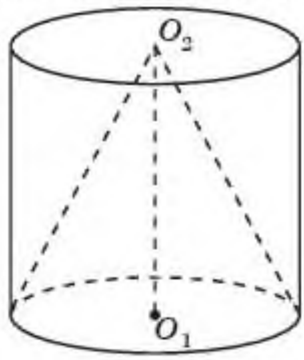
13.11. 13.7-суреттегі дөңгелектің бөлігі конустың бүйір бетінің жазбасы бола ма?

B

13.12. Торкөз қағазға 13.4-суреттегіге ұқсас конусты салыңдар. Осы конустың осіне параллель жазықтықпен қимасын кескіндеңдер.

13.13. Конустың табанының радиусы 1 см-ге тең. Конустың биіктігінің ортасы арқылы өтетін және табан жазықтығына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

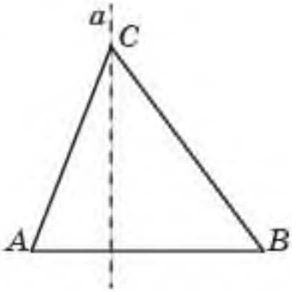
13.14. Цилиндрдің табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Табаны цилиндрдің бір табаны, ал төбесі цилиндрдің екінші табанының центрі болатын конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар (13.8-сурет).



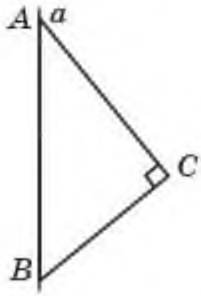
13.8-сурет

13.15. Конустың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

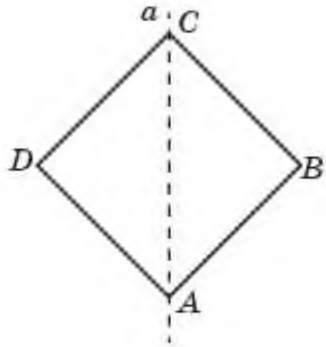
13.16. Сүйірбұрышты теңбүйірлі емес үшбұрышты оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (13.9-сурет)?



13.9-сурет



13.10-сурет



13.11-сурет

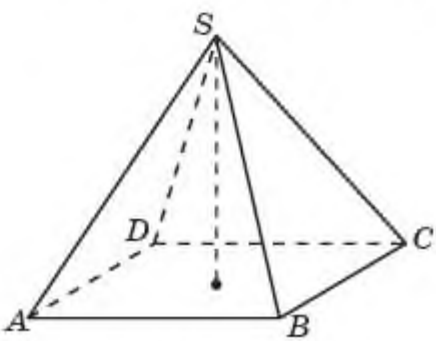
13.17. Тікбұрышты үшбұрышты оның гипотенузасы жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (13.10-сурет)?

13.18. Бірлік квадратты оның диагоналі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (13.11-сурет)? Фигураның бетінің ауданын табыңдар.

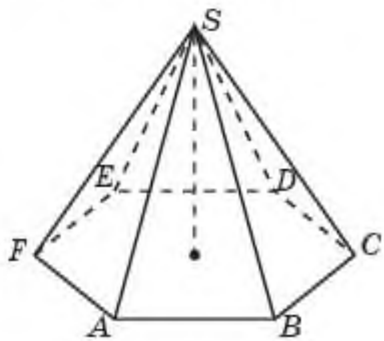
13.19. Дұрыс төртбұрышты пирамиданы оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (13.12-сурет)?

13.20. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамиданы оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда пайда болатын конустың бетінің ауданын табыңдар (13.12-сурет).

13.21. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданы оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (13.13-сурет)?



13.12-сурет

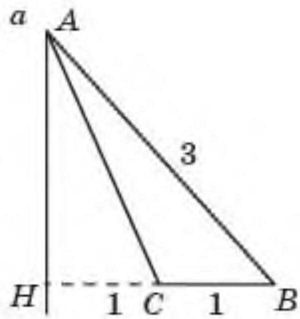


13.13-сурет

13.22. Табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең дұрыс алтыбұрышты пирамиданы оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда пайда болатын конустың бетінің ауданын табыңдар (13.13-сурет).

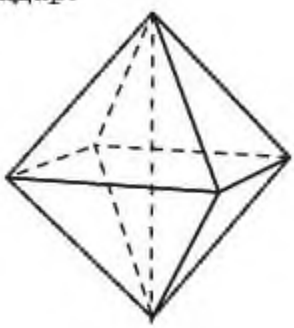
C

13.23. ABC доғалбұрышты үшбұрышты оның AH биіктігі жататын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (13.14-сурет)? Осы фигураның бетінің ауданын табыңдар.

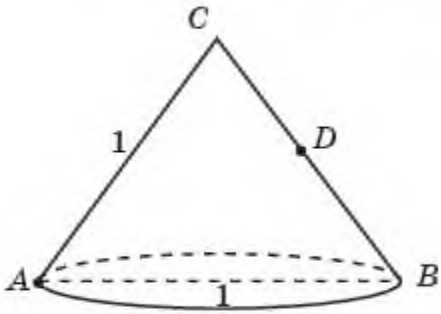


13.14-сурет

13.24. Октаэдрді оның қарама-қарсы жатқан төбелерін қосатын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (13.15-сурет)? Октаэдрдің қыры 1 см-ге тең деп алып, пайда болған фигура бетінің ауданын табыңдар.



13.15-сурет



13.16-сурет

13.25. Конусты және оның биіктігінің ортасына қарағанда центрлік симметриялы конусты салыңдар. Бұл конустардың ортақ бөлігі қандай фигура болады? Бастапқы конустың табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең деп алып, пайда болған фигура бетінің ауданын табыңдар.

13.26. Конустың бүйір бетінің жазбасы — радиусы 1 см болатын жарты дөңгелек. Конустың табанының радиусын табыңдар.

13.27. Конустың табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 3 см-ге тең. Конустың бүйір бетінің жазбасының центрлік бұрышын табыңдар.

13.28. Конустың осьтік қимасы — қабырғасы 1 см болатын ABC теңқабырғалы үшбұрышы. Оның осьтік қимасының A нүктесінен BC қабырғасының ортасы D нүктесіне дейінгі бүйір беті бойымен ең қысқа қашықтықты табыңдар (13.16-сурет).

13.29. Конус пішіндес жиналған шөп үйіндісінің төбесін темір қаңылтырмен жабу қажет. Оның биіктігі 2 м-ге, ал табанының диаметрі 6 м-ге тең. Егер барлық қаңылтыр бетінің 10% -ы оларды жабыстыруға кететін болса, онда төбені жабу үшін $0,7 \times 1,4$ өлшемді қанша қаңылтыр қажет болады? ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

13.30. Құрылыс алаңындағы конус пішіндес үйінді құмның табаны шеңберінің ұзындығын метрлік таспамен өлшегенде 21,6 м болды (13.17-сурет). Метрлік таспаны үйіндінің төбесі арқылы асыра лақтырып өлшегенде оның екі жасаушысының ұзындығы 7,8 м екені анықталды. Үйінді құмның бетінің ауданын табыңдар ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

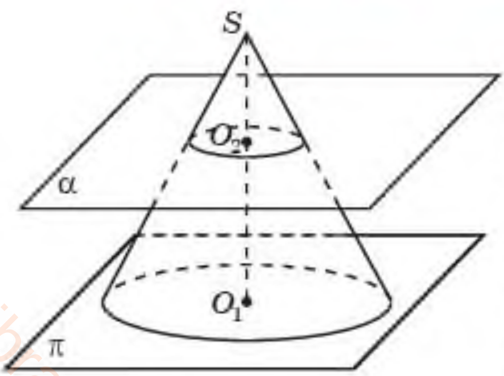
13.17-сурет

13.31. Мөлдір туған күніне орай қағаздан биіктігі 8 см, ал табанының радиусы 6 см болатын конустың бүйір беті тәріздес 8 дана бас киім дайындамақшы болды. Оған бас киімдерді дайындау үшін қанша қағаз ($см^2$-мен) қажет екенін табыңдар ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

13.32. Дөңгелек сақинаның анықтамасын және оның ауданын табу формуласын қайталаңдар.

§ 14. Қиық конус және оның элементтері. Қиық конустың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары



14.1-сурет

Егер конусты табан жазықтығына параллель жазықтықпен қиып өтсе, онда конустың осы жазықтықпен табан жазықтығының арасындағы шектелген бөлігі *қиық конус* деп аталады (14.1-сурет).

Конустың табан жазықтығына параллель жазықтықпен қимасы да *қиық конустың табаны* деп аталады. Сонымен, қиық конусты шектейтін дөңгелектерді оның *табандары* деп атайды.

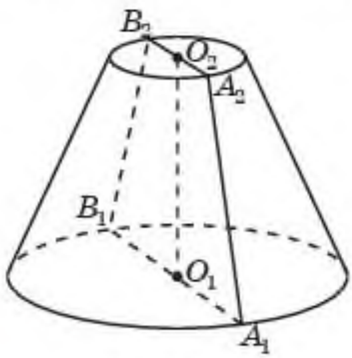
Конустың осі *қиық конустың осі* деп аталады.

Қиық конустың табандарының арасында шектелген конустың бүйір бетінің бөлігі *қиық конустың бүйір беті* деп аталады.

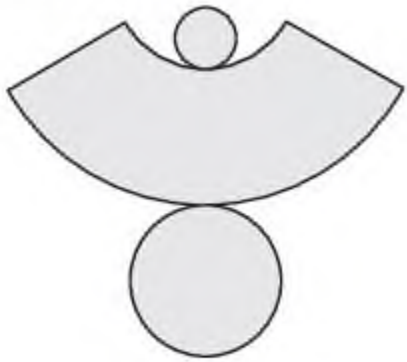
Қиық конустың табандарының арасында шектелген конустың жасаушыларының кесінділері *қиық конустың жасаушылары* деп аталады.

Қиық конустың табан жазықтықтарының арасындағы қашықтық *қиық конустың биіктігі* деп аталады.

Қиық конустың осі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *қиық конустың осьтік қимасы* деп аталады (14.2-сурет).



14.2-сурет



14.3-сурет

Қиық конустың осьтік қимасы теңбүйірлі трапеция болатынын дәлелдеңдер.

Қиық конусты осы теңбүйірлі трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдыру арқылы алуға болады.

Қиық конусты теңбүйірлі емес трапецияны айналдыру арқылы алуға бола ма?

Егер қиық конустың бүйір бетін жасаушысы бойымен кесіп жазықтыққа жазатын болсақ және оған табандарын қоссақ, онда қиық конустың жазбасы деп аталатын фигура пайда болады (14.3-сурет).

Қиық конустың бетінің ауданы деп оның жазбасының ауданын айтады.

Қиық конустың бүйір бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің жазбасының ауданын айтады.

Егер қиық конустың табандарының радиустары R және r, ал жасаушысы l-ға тең болса, онда қиық конустың бүйір бетінің ауданы мынадай формуламен анықталады:

$$S_{\text{бүй}} = \pi(R + r)l.$$

Қиық конустың толық бетінің ауданын алу үшін оның бүйір бетінің ауданына табандарының аудандарын қосу керек болады:

$$S_{\text{толық}} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$

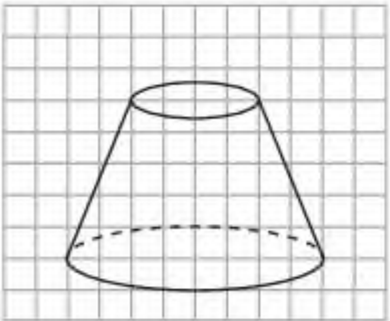
Сұрақтар

1. Қандай фигура қиық конус деп аталады?
2. Қиық конустың табандары дегеніміз не?
3. Қиық конустың биіктігі дегеніміз не?
4. Қиық конустың осі дегеніміз не?
5. Қиық конустың осьтік қимасы дегеніміз не?
6. Қандай фигура қиық конустың жазбасы деп аталады?
7. Қиық конустың бетінің ауданы дегеніміз не?
8. Қиық конустың бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?
9. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.
10. Қиық конустың толық бетінің ауданын табу формуласын жазыңдар.

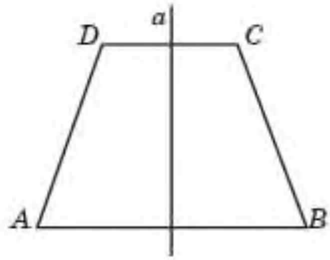
Есептер

A

14.1. Торкөз қағазға 14.4-суреттегіге ұқсас қиық конусты салыңдар. Қиық конустың осьтік қимасын кескіндеңдер.



14.4-сурет

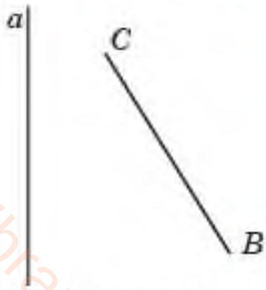


14.5-сурет

14.2. Қиық конустың қанша жасаушысы болады?

14.3. Қиық конустың табанына параллель жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?

14.4. Теңбүйірлі трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (14.5-сурет)?



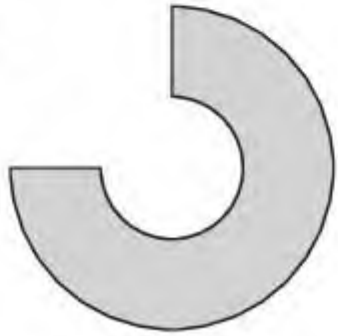
14.6-сурет

14.5. BC кесіндісін осы кесіндімен бір жазықтықта жататын, ортақ нүктесі болмайтын және оған параллель де, перпендикуляр да емес түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (14.6-сурет)?

14.6. Қиық конустың табандарының радиустары 6 см және 2 см, ал биіктігі 3 см-ге тең. Қиық конустың жасаушысын табыңдар.

14.7. Қиық конустың табандарының радиустары 6 см және 2 см, ал жасаушысы 5 см-ге тең. Қиық конустың бетінің ауданын табыңдар.

14.8. 14.7-суреттегі дөңгелектің бөлігі қиық конустың бүйір бетінің жазбасы бола ма?



14.7-сурет

B

14.9. Торкөз қағазға 14.4-суреттегіге ұқсас қиық конусты салыңдар. Осы конустың осіне параллель болатын және табандарымен қиылысатын жазықтықпен қимасын кескіндеңдер.

14.10. Қиық конустың табандарының радиустары 2 см және 4 см. Қиық конустың биіктігінің ортасы арқылы табан жазықтығына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

14.11. Қиық конустың: 1) симметрия центрі; 2) симметрия осі; 3) симметрия жазықтығы бола ма?

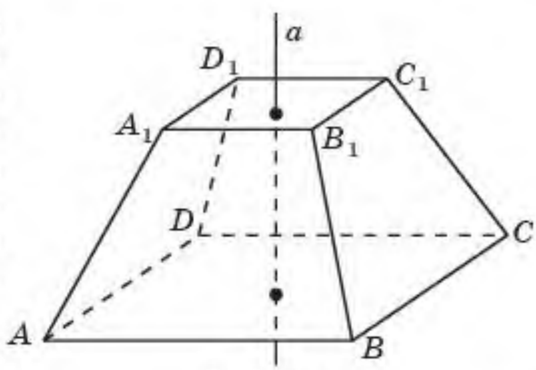
14.12. Қиық конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 30° бұрыш жасап көлбейді. Қиық конустың биіктігін табыңдар.

14.13. Қиық конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 60° бұрыш жасап көлбейді. Қиық конустың кіші табанының радиусы 1 см-ге тең болса, үлкен табанының радиусын табыңдар.

14.14. Теңбүйірлі трапецияның табандары 1 см және 2 см, ал бүйір қабырғалары 2 см. Осы трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның бетінің ауданын табыңдар.

14.15. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданы оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (14.8-сурет)?

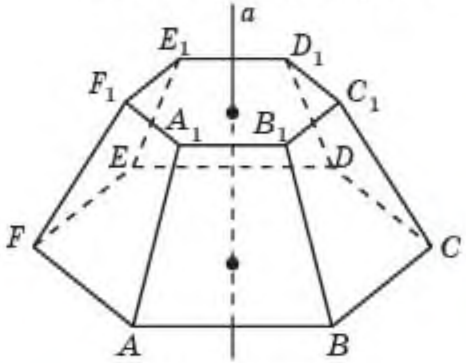
14.16. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 4 см және 2 см, ал бүйір қырлары 3 см-ге тең. Осы пирамиданы оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның бетінің ауданын табыңдар (14.8-сурет)?



14.8-сурет

14.17. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданы оның табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (14.9-сурет)?

14.18. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 2 см және 1 см, ал бүйір қырлары 3 см-ге тең. Осы пирамиданы оның табандарының центрлері арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның бетінің ауданын табыңдар (14.9-сурет).



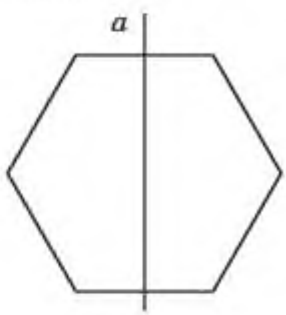
14.9-сурет

14.10-сурет

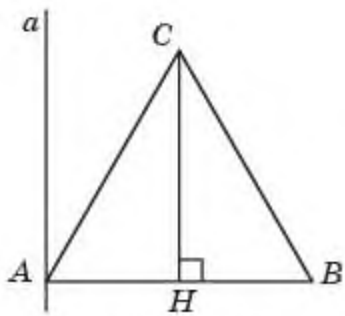
14.19. Киіз үйдің күмбезі қиық конус пішіндес. Оның табандарының диаметрлері 5 м және 1 м, ал биіктігі 2 м-ге тең (14.10-сурет). Киіз үй күмбезінің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

C

14.20. Дұрыс алтыбұрышты оның қарама-қарсы жатқан қабырғаларының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (14.11-сурет)? Дұрыс алтыбұрыштың қабырғалары 1 см-ге тең болса, пайда болған фигураның бетінің ауданын табыңдар.



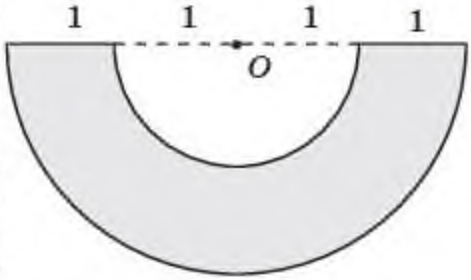
14.11-сурет



14.12-сурет

14.21. ABC теңқабырғалы үшбұрышты оның A төбесі арқылы өтетін және CH биіктігіне параллель болатын түзуден айналдырғанда қандай фигура пайда болады (14.12-сурет)? ABC үшбұрышының қабырғалары 1 см-ге тең деп алып, пайда болған фигура бетінің ауданын табыңдар.

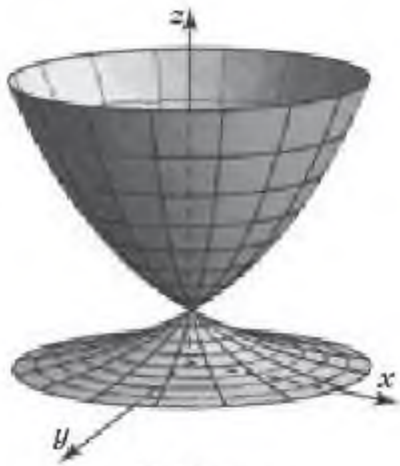
14.22. 14.13-суретте шеңберлерінің радиустары 1 см және 2 см болатын дөңгелек сақинаның жартысы — қиық конустың бүйір бетінің жазбасы кескінделген. Қиық конустың табандарының радиустарын табыңдар.



14.13-сурет

14.23. 14.14-суреттегі бетті қандай функцияның графигін айналдырғанда алуға болады?

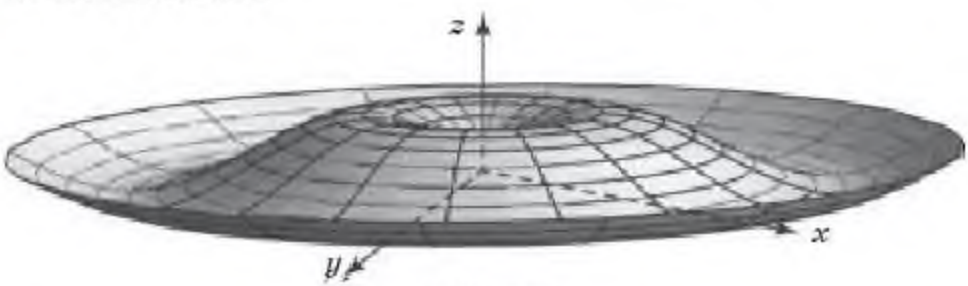
14.14-сурет



14.15-сурет

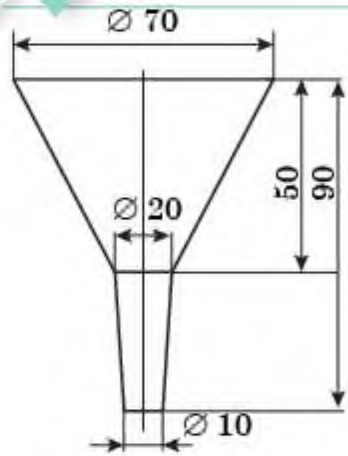
14.24. 14.15-суреттегі бетті қандай функцияның графигін айналдырғанда алуға болады?

14.25. 14.16-суреттегі бетті қандай функцияның графигін айналдырғанда алуға болады?



14.16-сурет

14.26. Шелек қиық конус пішіндес және оның іші-сыртын бояу қажет. Оның табандарының диаметрлері 30 см және 20 см, ал жасаушысы 30 см-ге тең. Егер бояудың орташа шығыны 1 м^2-ге 300 г



14.17-сурет

болса, онда бұл жұмысты орындау үшін қанша бояу қажет болады?

14.27. 14.17-суретте темір қаңылтырдан жасалған сұйық құйғыштың өлшемдері миллиметрмен көрсетілген. Егер барлық қаңылтыр бетінің 10%-ы оларды жабыстыруға кететін болса, онда құйғышты дайындау үшін қанша квадрат дециметр қаңылтыр қажет болады?

14.28. Қиық конус пішіндес шелекті темір қаңылтырдан жасау қажет. Оның табандарының диаметрлері 28 см және 20 см, ал биіктігі 24 см-ге тең. Жабыстыруға кететін шығынды есепке алмағанда шелектің бүйір беті жазбасының өлшемдері қандай?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

14.29. Шеңбердің, дөңгелектің және олардың элементтерінің анықтамаларын, шеңберге жүргізілген жанаманың анықтамасын және шеңбер мен түзудің өзара орналасуы жағдайларын қайталаңдар.

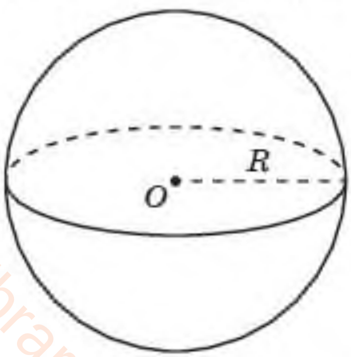
§ 15. Сфера, шар және олардың элементтері

Сфера және шар — жазықтықтағы сәйкесінше шеңбер мен дөңгелектің кеңістіктік аналогтары болып табылады.

Берілген нүктеден белгілі қашықтықта орналасқан кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын фигура *сфера* деп аталады (15.1-сурет).

Берілген нүкте *сфераның центрі*, берілген қашықтық *сфераның радиусы* деп аталады.

Сфераның центрін оның бойында жатқан қандай да бір нүктесімен қосатын кесіндіні *сфераның радиусы* деп атайды.



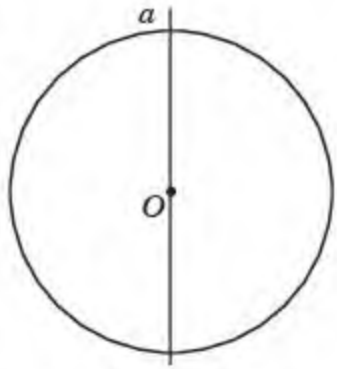
15.1-сурет

Сонымен, центрі O нүктесі және радиусы R болатын сфера осы O нүктесінен арақашықтығы R-ге тең кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын геометриялық фигураны құрайды.

Сфераның бойында жатқан кез келген екі нүктені қосатын кесінді *сфераның хордасы* деп аталады. Сфераның центрі арқылы өтетін хорда осы *сфераның диаметрі* деп аталады.

Сфераның центрі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *үлкен шеңбер* болады.

Сфераны осы шеңберді оның диаметрі жатқан түзуден айналдыру арқылы алуға болады (15.2-сурет).



15.2-сурет

Берілген нүктеден белгілі қашықтықтан аспайтын кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын фигура *шар* деп аталады.

Берілген нүкте *шардың центрі*, ал берілген қашықтық *шардың радиусы* деп аталады.

Шардың центрін оның бетінде жатқан қандай да бір нүктесімен қосатын кесіндіні де *шардың радиусы* деп атайды.

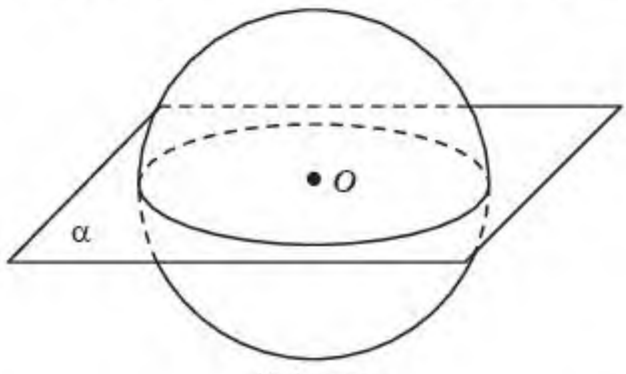
Сонымен, центрі O нүктесі және радиусы R болатын шар осы O нүктесінен арақашықтығы R-ден аспайтын кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын геометриялық фигураны құрайды.

Шардың бетінде жатқан кез келген екі нүктені қосатын кесінді осы *шардың хордасы* деп аталады. Шардың центрі арқылы өтетін хорда осы *шардың диаметрі* деп аталады.

Шардың центрі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы *үлкен дөңгелек* болады. Шарды осы дөңгелекті оның диаметрі жатқан түзуден айналдыру арқылы алуға болады.

Берілген шардың центрімен және радиусымен бірдей болатын сфера осы *шардың беті* деп аталады.

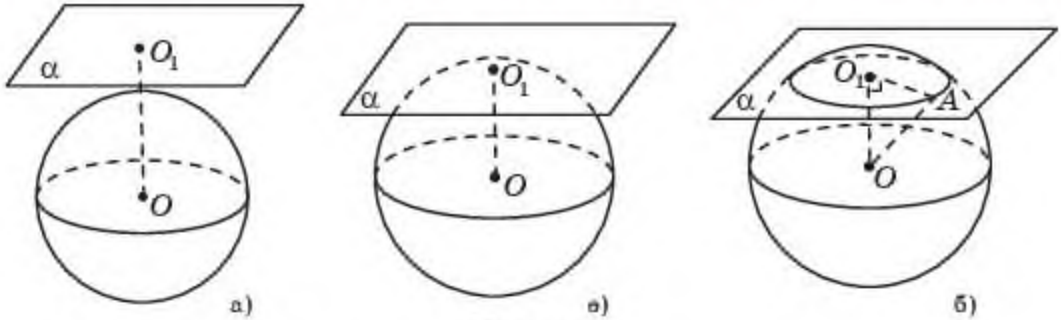
Сфера мен жазықтықтың өзара орналасуы жағдайларын қарастырайық. Егер α жазықтығы сфераның центрі арқылы өтсе, онда сфераның осы жазықтықпен қимасында шеңбер пайда болады (15.3-сурет).



15.3-сурет

Егер α жазықтығы сфераның центрі арқылы өтпесе, онда осы центрден α жазықтығына OO_1 перпендикулярын түсіреміз. Бұл келесі жағдайларда орындалуы мүмкін.

1-жағдай. Егер OO_1 перпендикулярының ұзындығы сфераның R радиусынан үлкен болса, онда O нүктесінен α жазықтығының кез келген нүктесіне дейінгі қашықтық R-ден үлкен болады. Демек, бұл жағдайда сфера мен жазықтықтың ортақ нүктелері болмайды (15.4, а-сурет).



15.4-сурет

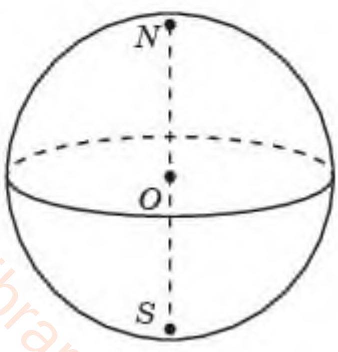
2-жағдай. Егер OO_1 перпендикулярының ұзындығы сфераның R радиусына тең болса, онда сфера мен жазықтықтың тек бір ғана ортақ нүктесі — O_1 нүктесі бар болады (15.4, ә-сурет).

Сферамен бір ғана ортақ нүктесі болатын жазықтық *сфераға жанама жазықтық* деп аталады. Мұндағы сфера мен жазықтықтың ортақ нүктесі *жанасу нүктесі* деп аталады. Сонымен бірге осы нүктеде сфера жазықтықты *жанайды* немесе жазықтық сферамен *жанасады* деп те айтады.

Жанама жазықтық жанасу нүктесіне жүргізілген сфераның радиусына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

3-жағдай. Егер OO_1 перпендикулярының ұзындығы, яғни O нүктесінен α жазықтығына дейінгі d қашықтығы сфераның R радиусынан кіші болса, онда сфера мен жазықтық қиылысады және олардың қиылысуы — центрі O_1 нүктесі және радиусы $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ болатын шеңбер болады (15.4, б-сурет).

Расында да, сфера мен α жазықтығының қиылысуында жататын қандай да бір A нүктесі үшін $OO_1 = d$, $OA = R$ болатын OO_1A тікбұрышты үшбұрышынан $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$ теңдігі шығады. Керісінше, егер α жазықтығында жатқан A нүктесі үшін бұл теңдік орындалса, онда O нүктесінен A нүктесіне дейінгі қашықтық R-ге тең болады, яғни A нүктесі сфераның бойында жатады.



15.5-сурет

Әдетте сфера 15.5-суреттегідей кескінделеді. Бұл суретте шеңберден басқа:

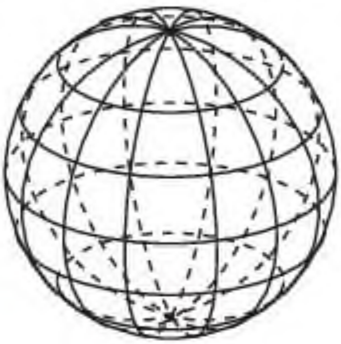
а) сфераның центрі арқылы өтетін жазықтықпен қимасы — *сфераның үлкен шеңбері* немесе *экватор*;

ә) сфераның центрі арқылы өтетін және экватор жазықтығына перпендикуляр түзу — *сфераның осі*;

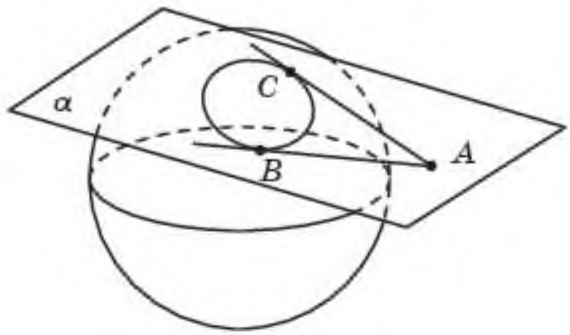
б) осьтің сферамен қиылысу нүктелері — *сфераның полюстері* кескінделген. Әдетте, оларды N (солтүстік полюс) және S (оңтүстік полюс) әріптерімен белгілейді.

Кейде сфераның суретінде полюс пен экватор таңдап алынғаннан кейін параллельдер мен меридиандардың кескінін салуға болады.

Параллельдер — сфераның экватор жазықтығына параллель жазықтықтармен қималары. *Меридиандар* — сфераның осі арқылы өтетін жазықтықтармен қималары (15.6-сурет). Әдетте, дәл осылай жер шарының нобайы (кескіні) — глобус кескінделеді.



15.6-сурет



15.7-сурет

Шардың жазықтықпен қимасы қандай фигура болады?

Сфера мен жазықтықтың өзара орналасуы жағдайларына ұқсас сфера мен түзудің өзара орналасуын өздерің қарастырыңдар.

Сферамен бір ғана ортақ нүктесі болатын түзу сфераға *жанама түзу* деп аталады.

Теорема. ***Сферадан тыс жатқан бір нүктеден осы сфераға жүргізілген жанама түзулердің кесінділері өзара тең болады.***

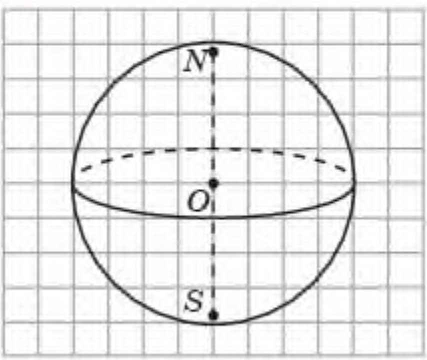
Дәлелдеуі. AB және AC — қандай да бір A нүктесінен сфераға жүргізілген жанамалардың кесінділері болсын, мұндағы B және C — жанасу нүктелері (15.7-сурет).

A, B және C нүктелері арқылы өтетін α жазықтығын қарастырайық. Бұл жазықтық сферамен сәйкесінше B және C нүктелерінде AB және AC түзулерімен жанасатын шеңбер бойымен қиылысады. Шеңберден тыс жатқан нүктеден осы шеңберге жүргізілген жанамалардың кесінділерінің қасиеттері бойынша $AB = AC$ болады.

Сұрақтар

1. Қандай фигура сфера деп аталады?
2. Сфераның радиусы дегеніміз не?
3. Сфераның хордасы дегеніміз не?
4. Сфераның диаметрі дегеніміз не?
5. Қандай фигураны айналдырғанда сфераны алуға болады?
6. Қандай фигура шар деп аталады?
7. Шардың радиусы дегеніміз не?
8. Шардың хордасы дегеніміз не?
9. Шардың диаметрі дегеніміз не?
10. Қандай фигураны айналдырғанда шарды алуға болады?
11. Шардың беті дегеніміз не?
12. Қандай жағдайда сфера мен жазықтықтың ортақ нүктесі болмайды?
13. Қандай жағдайда сфера мен жазықтықтың бір ғана ортақ нүктесі болады?
14. Қандай жағдайда сфера мен жазықтық шеңбер бойымен қиылысады?
15. Қандай жазықтық сфераға жүргізілген жанама жазықтық деп аталады?
16. Қандай түзу сфераға жүргізілген жанама түзу деп аталады?

Есептер



15.8-сурет

A

15.1. Торкөз қағазға 15.8-суреттегіге ұқсас сфераны салыңдар. Қандай да бір параллельдер мен меридиандарды кескіндеңдер.

15.2. Центрі O нүктесі және радиусы R болатын: 1) шардың ішінде жатқан; 2) шардан тыс жатқан A нүктесі қандай теңсіздікті қанағаттандырады?

15.3. Сфераның радиусы 4 см-ге тең. Егер берілген нүктеден сфераның центріне дейінгі қашықтық: 1) 3; 2) 4; 3) 5 болса, онда осы нүкте сфераға қатысты қалай орналасады?

15.4. Сфераның центрі арқылы қанша диаметр жүргізуге болады?

15.5. Сфераның диаметрі оның радиусынан 55 мм-ге үлкен. Осы диаметрді табыңдар.

15.6. A және B нүктелерінің арақашықтығы 2 см-ге тең. Осы нүктелер арқылы өтетін сфераның ең кіші радиусын табыңдар.

15.7. Сфераның радиусы 7 см-ге тең және қандай да бір жазықтық оның центрінен: 1) 6 см; 2) 7 см; 3) 8 см қашықтықта орналасқан. Осы сфера мен жазықтықтың бір-біріне қатысты қалай орналасқанын анықтаңдар.

B

15.8. 1) Сфераның бойында жатқан нүкте арқылы; 2) сфераның ішінде жатқан нүкте арқылы; 3) сферадан тыс жатқан нүкте арқылы осы сфераға қанша жанама жазықтық жүргізуге болады?

15.9. Шардың радиусы 5 см-ге тең. Шардың центрінен 3 см қашықтықта болатын жазықтықпен қимасы — дөңгелектің радиусын табыңдар.

15.10. Сфераның радиусы 3 см-ге тең. Берілген нүктеден осы сфераның центріне дейінгі қашықтық — 5 см. Осы нүктеден сфераға жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

15.11. Сфераның радиусы 3 см-ге тең және оның центрінен қандай да бір түзу: 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 7 см қашықтықта орналасқан. Осы сфера мен түзудің бір-біріне қатысты қалай орналасқанын анықтаңдар.

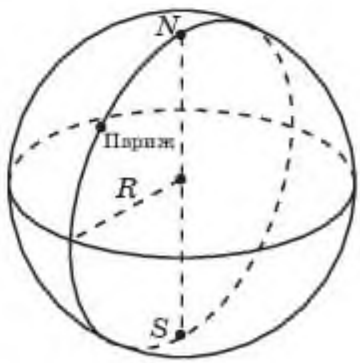
15.12. Сфераның радиусы 3 см-ге тең. Берілген нүктеден осы сфераға жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығы 4 см-ге тең. Осы нүктеден сфераның центріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

15.13. Сфераның радиусы 6 см-ге тең. Берілген нүктеден осы сфераның центріне дейінгі қашықтық — 10 см. Осы нүктеден сфераға жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

15.14. Берілген нүктеден сфераның центріне дейінгі қашықтық 13 см-ге тең. Осы нүктеден сфераға жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындығы 12 см. Сфераның радиусын табыңдар.

15.15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ теңдеуімен берілген сфера мен 1) $z = 1$; 2) $z = 2$; 3) $z = 3$ теңдеуімен берілген жазықтықтың өзара орналасуын анықтаңдар.

15.16. Париж меридианы ұзындығы 40 000 км-ге тең. Жер шарының радиусын табыңдар (15.9-сурет).



15.9-сурет

15.17. Сферамен ортақ нүктелері болмайтын түзу арқылы берілген сфераға қанша жанама жазықтық жүргізуге болады?

15.18. Сфераның радиусы 4 см-ге тең. Берілген нүктеден осы сфераның центріне дейінгі қашықтық — 6 см. Осы нүктеден сфераның бойында жатқан нүктелеріне дейінгі ең ұзын және ең қысқа қашықтықтарды табыңдар.

C

15.19. Сферадан тыс жатқан нүктеден осы сфераның бойында жатқан нүктелеріне дейінгі ең қысқа және ең ұзын қашықтықтар — 4 см және 6 см. Сфераның радиусын табыңдар.

15.20. Шардың радиусы 2 см-ге тең. Радиустың шеткі нүктесі арқылы онымен 60° бұрыш жасайтындай жазықтық жүргізілген. Пайда болған қиманың ауданын табыңдар.

15.21. Біреуі екіншісінің ішінде жатпайтын екі сфераға қанша ортақ жанама жазықтық жүргізуге болады?

15.22. Параллель екі жазықтықпен жанасатын сфералардың центрлерінің геометриялық орнын табыңдар.

15.23. Сфераның бойында жатқан нүкте арқылы осы сфераға жүргізілген жанама түзулердің геометриялық орнын табыңдар.

15.24. Сферадан тыс жатқан нүкте арқылы осы сфераға жүргізілген жанама түзулердің кесінділерінің геометриялық орнын табыңдар.

15.25. 1) $x + y + z = \sqrt{2}$; 2) $x + y + z = \sqrt{3}$; 3) $x + y + z = 2$ теңдеуімен берілген жазықтық пен $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ теңдеуімен берілген сфераның өзара орналасуын анықтаңдар.

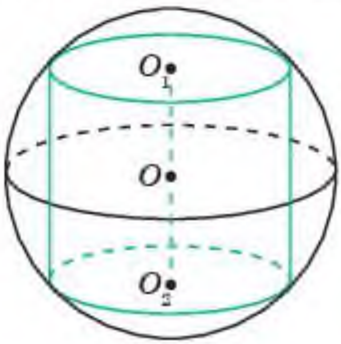
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

15.26. Тіктөртбұрышқа, үшбұрышқа, трапецияға іштей және сырттай сызылған шеңберлердің анықтамаларын және олардың радиустарын табу формулаларын қайталаңдар.

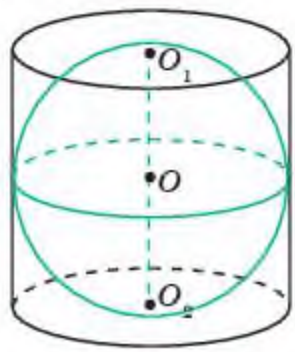
§ 16*. Айналу денелерінің комбинациялары

«Тіктөртбұрышқа сырттай сызылған шеңбер» және «квадратқа іштей сызылған шеңбер» ұғымдарына ұқсас «цилиндрге сырттай сызылған сфера» және «цилиндрге іштей сызылған сфера» ұғымдарын анықтайық.

Егер цилиндрдің табандарының шеңберлері сфераның бойында жатса, онда сфера *цилиндрге сырттай сызылған* немесе *цилиндр сфераға іштей сызылған* деп аталады (16.1-сурет).



16.1-сурет

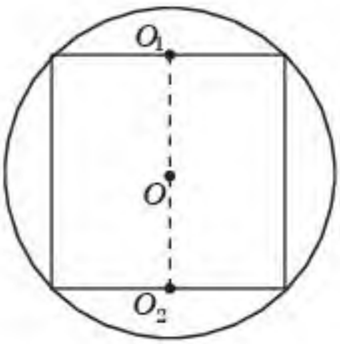


16.2-сурет

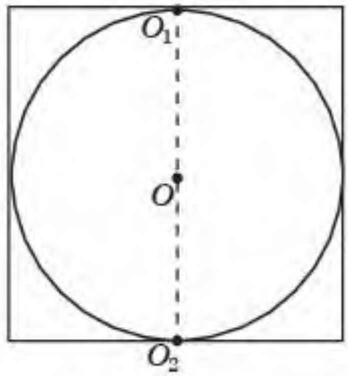
Егер сфера цилиндрдің табандарына және бүйір бетімен (әрбір жасаушысымен) жанасатын болса, онда *сфера цилиндрге іштей сызылған* немесе *цилиндр сфераға сырттай сызылған* деп аталады (16.2-сурет).

Теорема. ***Цилиндрге сырттай сфера сызуға болады. Оның радиусы осы цилиндрдің осьтік қимасы — тіктөртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***

Дәлелдеуі. Цилиндрдің осьтік қимасы — тіктөртбұрышты және оған сырттай сызылған шеңберді қарастырайық (16.3-сурет). Цилиндр осы тіктөртбұрышты оның қарама-қарсы екі қабырғасының O_1, O_2 орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда алынады. Шеңберді осы түзуден айналдырғанда берілген цилиндрге сырттай сызылған сфера пайда болады. Бұл сфераның радиусы тіктөртбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады. ☐



16.3-сурет



16.4-сурет

Егер цилиндрдің табанының радиусы r-ге және биіктігі h-қа тең болса, онда осы цилиндрге сырттай сызылған сфераның R радиусы мынадай формуламен анықталады:

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Теорема. ***Егер цилиндрдің осьтік қимасы квадрат болса, онда оған іштей сфера сызуға болады. Іштей сызылған сфераның радиусы цилиндрдің осьтік қимасына іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***

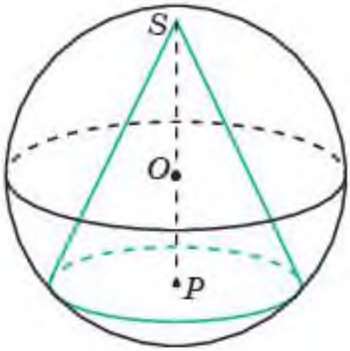
Дәлелдеуі. Цилиндрдің осьтік қимасын қарастырайық (16.4-сурет).

Егер цилиндрдің осьтік қимасы — тіктөртбұрышқа іштей шеңбер сызылған болса, онда осы цилиндрге іштей сфера сызылады. Бұл тіктөртбұрыш квадрат болған жағдайда ғана орындалады. Демек, іштей сызылған сфераның радиусы цилиндрдің осьтік қимасына іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады. ☐

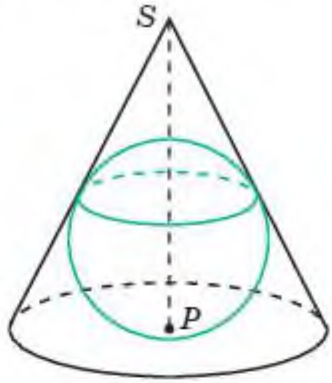
Егер цилиндрдің табанының радиусы R-ге тең болса, онда сфераның радиусы да R-ге тең болады.

«Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер» және «үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер» ұғымдарына ұқсас «конусқа сырттай сызылған сфера» және «конусқа іштей сызылған сфера» ұғымдарын анықтайық.

Егер конустың төбесі мен табанының шеңбері сфераның бойында жатса, онда *сфера конусқа сырттай сызылған* немесе *конус сфераға іштей сызылған* деп аталады (16.5-сурет).



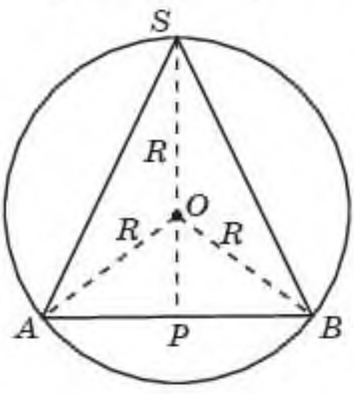
16.5-сурет



16.6-сурет

Егер сфера конустың табанына және бүйір бетіне (әрбір жасаушысына) жанасатын болса, онда *сфера конусқа іштей сызылған* немесе *конус сфераға сырттай сызылған* деп аталады (16.6-сурет).

Теорема. ***Конусқа сырттай сфера сызуға болады. Оның радиусы осы конустың осьтік қимасы — үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***



16.7-сурет

Дәлелдеуі. Конустың осьтік қимасы — теңбүйірлі үшбұрышты және оған сырттай сызылған шеңберді қарастырайық (16.7-сурет). Конус осы үшбұрышты оның табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдырғанда алынады. Шеңберді осы түзуден айналдырғанда берілген конусқа сырттай сызылған сфера пайда болады. Бұл сфераның радиусы теңбүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады.

Қабырғалары a, b, c және ауданы S болатын үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің R радиусы үшін мынадай формула орынды болатынын еске салайық:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

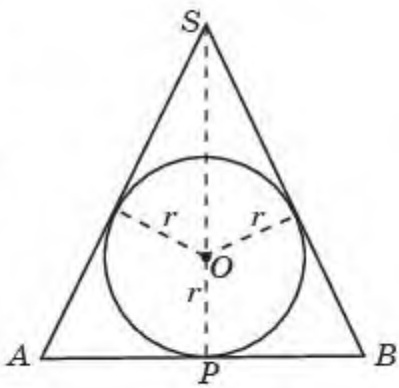
Осы формуламен осьтік қимасы үшбұрыш болатын конусқа сырттай сызылған сфераның R радиусы да анықталады. Мұндағы, a, b, c — үшбұрыштың қабырғалары, S — үшбұрыштың ауданы.

1-мысал. Конустың табанының радиусы 6 см-ге, жасаушысы 10 см-ге тең. Конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

Шешуі. Конустың осьтік қимасы — қабырғалары 12 см, 10 см, 10 см болатын теңбүйірлі үшбұрыш болады. Осы үшбұрыштың табанына түсірілген биіктігі 8 см-ге, ал ауданы 48 $см^2$-ге тең. Демек, конусқа сырттай сызылған сфераның радиусы $6\frac{1}{4}$ см-ге тең болады.

Теорема. ***Конусқа іштей сфера сызуға болады. Іштей сызылған сфераның радиусы конустың осьтік қимасы — үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***

Дәлелдеуі. Конустың осьтік қимасы — теңбүйірлі үшбұрышты және оған іштей сызылған шеңберді қарастырайық (16.8-сурет). Конус осы үшбұрышты оның табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдырғанда алынады. Шеңберді осы түзуден айналдырғанда берілген конусқа іштей сызылған сфера пайда болады. Бұл сфераның радиусы теңбүйірлі үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады. □



16.8-сурет

Қабырғалары a, b, c және ауданы S болатын үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің r радиусы үшін мынадай формула орынды болатынын еске салайық:

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

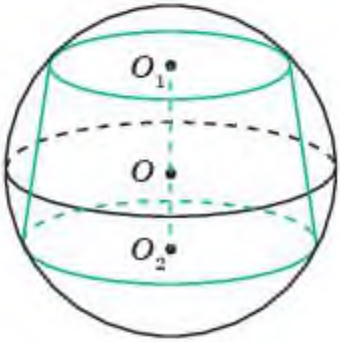
Осы формуламен осьтік қимасы үшбұрыш болатын конусқа іштей сызылған сфераның r радиусы да анықталады. Мұндағы, a, b, c — үшбұрыштың қабырғалары, S — үшбұрыштың ауданы.

2-мысал. Конустың табанының радиусы 6 см-ге, жасаушысы 10 см-ге тең. Конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

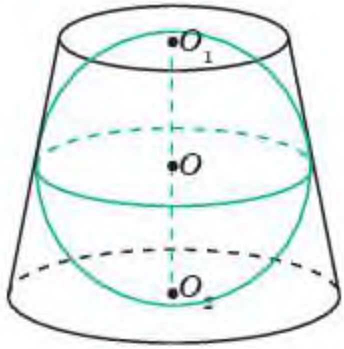
Шешуі. Конустың осьтік қимасы — қабырғалары 12 см, 10 см, 10 см болатын теңбүйірлі үшбұрыш болады. Осы үшбұрыштың табанына түсірілген биіктігі 8 см-ге, ал ауданы 48 $см^2$-ге тең. Демек, конусқа іштей сызылған сфераның радиусы 3 см-ге тең болады.

«Теңбүйірлі трапецияға сырттай сызылған шеңбер» және «теңбүйірлі трапецияға іштей сызылған шеңбер» ұғымдарына ұқсас «қиық конусқа сырттай сызылған сфера» және «қиық конусқа іштей сызылған сфера» ұғымдарын анықтайық.

Егер қиық конустың табандарының шеңберлері сфераның бойында жатса, онда *сфера қиық конусқа сырттай сызылған* немесе *қиық конус сфераға іштей сызылған* деп аталады (16.9-сурет).



16.9-сурет

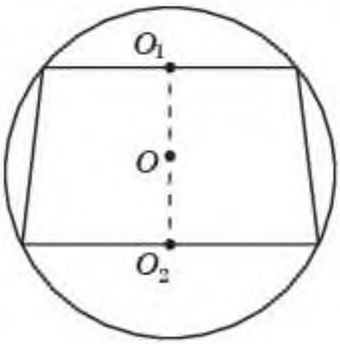


16.10-сурет

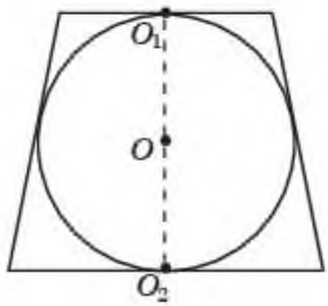
Егер сфера қиық конустың табандарына және бүйір бетіне (әрбір жасаушысына) жанасатын болса, онда *сфера қиық конусқа іштей сызылған* немесе *қиық конус сфераға сырттай сызылған* деп аталады (16.10-сурет).

Теорема. ***Қиық конусқа сырттай сфера сызуға болады. Оның радиусы осы қиық конустың осьтік қимасы — теңбүйірлі трапецияға сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***

Дәлелдеуі. Қиық конустың осьтік қимасы — теңбүйірлі трапецияны және оған сырттай сызылған шеңберді қарастырайық (16.11-сурет).



16.11-сурет



16.12-сурет

Қиық конус осы теңбүйірлі трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда алынады. Шеңберді осы түзуден айналдырғанда берілген қиық конусқа сырттай сызылған сфера пайда болады. Бұл сфераның радиусы теңбүйірлі трапецияға сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең болады.

Теорема. ***Егер қиық конустың осьтік қимасы табандарының қосындысы бүйір қабырғаларының қосындысына тең болатын теңбүйірлі трапеция болса, онда оған іштей сфера сызуға болады. Іштей сызылған сфераның радиусы қиық конустың осьтік қимасына іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады.***

Дәлелдеуі. Қиық конустың осьтік қимасын қарастырайық (16.12-сурет). Егер қиық конустың осьтік қимасы тең болатын теңбүйірлі трапецияға іштей шеңбер сызылған болса, онда осы қиық конусқа іштей сфера сызылады. Бұл осы трапецияның табандарының қосындысы бүйір қабырғаларының қосындысына тең болған жағдайда ғана орындалады. Осыдан, іштей сызылған сфераның радиусы қиық конустың осьтік қимасы — трапецияға іштей сызылған шеңбердің радиусына тең болады. ☐

Сұрақтар

1. Қандай сфера цилиндрге сырттай сызылған деп аталады?
2. Қандай цилиндр сфераға іштей сызылған деп аталады?
3. Цилиндрге сырттай сфераны әрдайым сызуға бола ма?
4. Қандай сфера цилиндрге іштей сызылған деп аталады?
5. Қандай цилиндр сфераға сырттай сызылған деп аталады?
6. Қандай цилиндрге іштей сфера сызуға болады?
7. Қандай сфера конусқа сырттай сызылған деп аталады?
8. Қандай конус сфераға іштей сызылған деп аталады?
9. Конусқа сырттай сфераны әрдайым сызуға бола ма?
10. Қандай сфера конусқа іштей сызылған деп аталады?
11. Қандай конус сфераға сырттай сызылған деп аталады?
12. Конусқа іштей сфераны әрдайым сызуға бола ма?
13. Қандай сфера қиық конусқа сырттай сызылған деп аталады?
14. Қандай қиық конус сфераға іштей сызылған деп аталады?
15. Қиық конусқа сырттай сфераны әрдайым сызуға бола ма?
16. Қандай сфера қиық конусқа іштей сызылған деп аталады?
17. Қандай қиық конус сфераға сырттай сызылған деп аталады?
18. Қандай қиық конусқа іштей сфера сызуға болады?

Есептер

А

16.1. Сфераның радиусы R-ге тең. Сфераға сырттай сызылған цилиндрдің табанының радиусын және биіктігін табыңдар.

16.2. Цилиндрдің биіктігі h-қа тең. Цилиндрге іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

16.3. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусы 1 см-ге тең. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

16.4. Цилиндрдің табанының радиусы 1 см-ге тең. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусы 2 см-ге тең деп алып, цилиндрдің биіктігін табыңдар.

16.5. Цилиндрдің биіктігі 2 см-ге тең. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусы 2 см-ге тең деп алып, цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.

16.6. Цилиндрдің осьтік қимасы — қабырғалары 3 см және 4 см болатын тіктөртбұрыш. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

16.7. Сфераның радиусы 1 см-ге тең. Сфераға сырттай сызылған цилиндр бетінің ауданын табыңдар.

16.8. Қиық конусқа іштей сызылған сфераның радиусы 2 см-ге тең. Қиық конустың биіктігін табыңдар.

B

16.9. Конустың осьтік қимасы — қабырғасы 1 см-ге тең теңқабырғалы үшбұрыш. Конусқа: 1) сырттай сызылған; 2) іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

16.10. Конусқа сырттай сызылған сфераның R радиусын конустың h биіктігі мен табанының r радиусы арқылы өрнектеңдер.

16.11. Конустың табанының радиусы 3 см-ге, ал биіктігі 4 см-ге тең. Конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

16.12. Конусқа іштей сызылған сфераның R радиусын конустың h биіктігі мен табанының r радиусы арқылы өрнектеңдер.

16.13. Конустың табанының радиусы 3 см-ге, ал биіктігі 4 см-ге тең. Конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

16.14. Конустың жасаушысы мен оған сырттай сызылған сфераның радиусы 2 см-ге тең. Конустың табанының радиусын табыңдар.

16.15. Конустың табанының радиусы 1 см-ге тең. Оның жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Конусқа: 1) сырттай сызылған; 2) іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

16.16. Конустың жасаушысы 1 см-ге тең және ол табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Конусқа: 1) сырттай сызылған; 2) іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

C

16.17. Қиық конустың табандарының радиустары 2 см және 1 см, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Қиық конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

16.18. Табандарының радиустары R_1, R_2, ал жасаушысы b-ға тең болатын қиық конусқа іштей сызылған сфераның r радиусы келесі формуламен анықталатынын дәлелдеңдер:

$$r = \frac{\sqrt{b^2 - (R_1 - R_2)^2}}{2}.$$

16.19. Қиық конустың табандарының радиустары 4 см және 1 см, ал жасаушысы 5 см-ге тең. Қиық конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

16.20. Сфераға сырттай сызылған қиық конустың табандарының радиустары 2 см-ге және 3 см-ге тең. Қиық конустың жасаушысын табыңдар.

16.21. Сфераға сырттай сызылған қиық конустың жасаушысы 8 см-ге, ал бір табанының радиусы 5 см-ге тең. Қиық конустың екінші табанының радиусын табыңдар.

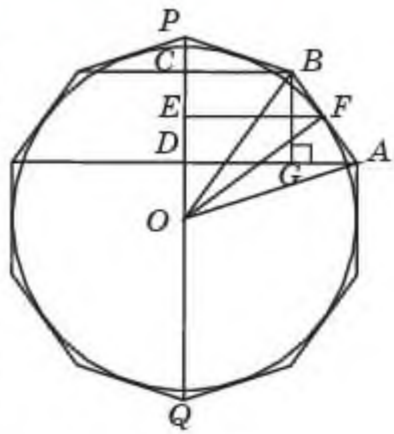
16.22. Шеңбердің ұзындығының анықтамасын және шеңбердің ұзындығын табу формуласын қайталаңдар.

§ 17. Сфераның және оның бөліктерінің аудандары

Сфераның ауданының анықтамасы шеңбердің ұзындығының анықтамасына ұқсас келеді.

Шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының санын шексіз арттырған кездегі көпбұрыш периметрі ұмтылатын сан шеңбер ұзындығының дәл мәнін беретінін еске саламыз.

Шеңберге сырттай сызылған дұрыс көпбұрышты және осы көпбұрышты шеңбердің PQ диаметрі жататын түзуден айналдырғанда пайда болған фигураны қарастырайық (17.1-сурет). Бұл фигураның беті конустың, қиық конустың және цилиндрдің бүйір беттерінен тұрады, ал фигураның өзі шеңберді айналдырғанда пайда болған сфераға сырттай сызылады. Фигураның бетінің ауданы оған тиісті конустың, қиық конустың және цилиндрдің бүйір беттерінің аудандарының қосындысына тең болады.



17.1-сурет

Шеңберді оның диаметрі жататын түзуден айналдырғанда алынған сфераның ауданы осы шеңберге сырттай сызылған дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының санын шексіз арттыра отырып, айналдырғанда пайда болған фигура бетінің ауданы ұмтылатын сан *сфераның ауданы* болып табылады.

Енді радиусы R болатын сфераның ауданын табу формуласын анықтайық.

Сфераның ауданы деп осы сферамен шектелген шардың бетінің ауданын да айтады.

Шеңберге сырттай сызылған M дұрыс көпбұрышының AB қабырғасын айналдырғанда пайда болған бетті қарастырайық. Ол $ABCD$ тікбұрышты трапециясын CD түзуінен айналдырғанда алынған қиық конустың бүйір бетін береді (17.1-сурет).

Осы беттің $S(AB)$ ауданы — радиусы трапецияның EF орта сызығы болатын шеңбердің ұзындығы мен AB бүйір қабырғасының көбейтіндісіне тең болады, яғни

$$S(AB) = 2\pi \cdot EF \cdot AB.$$

$ABCD$ тікбұрышты трапециядан табамыз: $CD = BG = AB \cdot \sin\angle BAD$. Демек,

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD}.$$

$\angle BAD = \angle EOF$ (сәйкесінше перпендикуляр қабырғаларындағы бұрыштар ретінде тең) екенін ескеріп, келесідей теңдікті аламыз:

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle BAD} = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin\angle EOF} = 2\pi \cdot OF \cdot CD = 2\pi R \cdot CD.$$

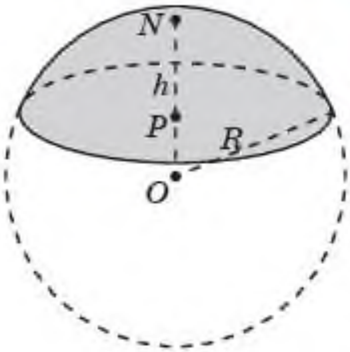
Осыған ұқсас M көпбұрышының басқадай қабырғаларын айналдырғанда пайда болған беттердің аудандарының формулалары алынады. Осы аудандарды қосып, M көпбұрышын айналдырғанда пайда болған беттің $S(M)$ ауданын табамыз:

$$S(M) = 2\pi \cdot OF \cdot PQ = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Шеңберге сырттай сызылған дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының санын шексіз арттыра отырып айналдырғанда пайда болған фигура бетінің ауданы ұмтылатын сан *сфераның ауданы* болып есептеледі. Сонымен, сфераның S ауданын мынадай формуламен табуға болады:

$$S(M) = 4\pi R^2.$$

Сфераның ауданы осы сфераға сырттай сызылған цилиндрдің бүйір бетінің ауданына тең болатынын дәлелдеңдер.



17.2-сурет

Шардың центрі арқылы өтпейтін қандай да бір жазықтықпен кесіп алынған шардың кіші бөлігі *шар сегменті* деп аталады (17.2-сурет).

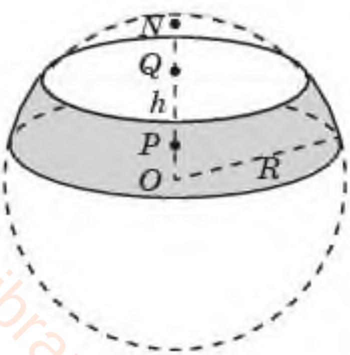
Шардың осы жазықтықпен қимасы — дөңгелек, яғни шар сегментін шектейтін дөңгелек *шар сегментінің табаны* деп аталады.

Шардың осы жазықтықпен кесіп алынған кіші бөлігінің беті *шар сегментінің бүйір беті* деп аталады.

Шар сегментінің табаны мен оның бүйір бетінің қосындысы *шар сегментінің бетін* құрайды.

Шар сегментінің ішінде жататын және оның табанына перпендикуляр болатын шар радиусының бөлігі *шар сегментінің биіктігі* деп аталады.

Шармен қиылысатын параллель екі жазықтықтың арасында шектелген шардың бөлігі *шар белдеуі* деп аталады (17.3-сурет).



17.3-сурет

Шардың осы жазықтықтармен қималары — дөңгелектер, яғни шар белдеуін шектейтін дөңгелектер *шар белдеуінің табандары* деп аталады.

Шармен қиылысатын параллель екі жазықтықтың арасында шектелген шардың бетінің бөлігі *шар белдеуінің бүйір беті* деп аталады.

Шар белдеуінің табандары мен оның бүйір бетінің қосындысы *шар белдеуінің бетін* құрайды.

Шар белдеуінің ішінде жататын және оның табандарына перпендикуляр болатын шар диаметрінің бөлігі *шар белдеуінің биіктігі* деп аталады. Басқаша айтқанда, *шар белдеуінің биіктігі* деп оның табандарының арасындағы қашықтықты айтады.

Жоғарыда келтірілген сфераның ауданын табу формуласын шығару тәсілін шар сегменті мен шар белдеуі үшін де қолдануға болады. Нәтижесінде шар сегменті бетінің ауданы мен шар белдеуі бетінің ауданын табу формулаларын аламыз:

$$S_{\text{сегмент}} = 2\pi R \cdot h, \quad S_{\text{белдеу}} = 2\pi R \cdot h,$$

мұндағы R — шар радиусы, h — шар сегментінің және шар белдеуінің биіктігі.

Сұрақтар

1. Сфераның ауданы қалай анықталады?
2. Шар бетінің ауданы дегеніміз не?
3. Радиусы R болатын сфераның ауданы қандай формуламен есептеледі?
4. Шар сегменті дегеніміз не?
5. Шар сегментінің бүйір бетінің ауданы қандай формуламен есептеледі?
6. Шар белдеуі дегеніміз не?
7. Шар белдеуі бетінің ауданы қандай формуламен есептеледі?

Есептер

A

17.1. Радиусы 1 см-ге тең сфераның ауданын табыңдар.

17.2. Ауданы 1 см^2-ге тең сфераның радиусын табыңдар.

17.3. Шардың үлкен дөңгелегінің ауданы 3 см^2-ге тең. Шардың бетінің ауданын табыңдар.

17.4. Егер шардың радиусы: 1) 2 есе; 2) 3 есе; 3) n есе артатын болса, онда оның бетінің ауданы қалай өзгереді?

17.5. Екі шардың беттерінің аудандары $4:9$ қатынасындай деп алып, олардың радиустарының қатынасын табыңдар.

17.6. Екі шардың радиустары 6 см және 8 см. Бетінің ауданы берілген шарлардың беттерінің аудандарының қосындысына тең болатын шардың радиусын табыңдар.

17.7. Шарға сырттай цилиндр сызылған. Шар бетінің ауданының цилиндрдің бүйір бетінің ауданына қатынасын табыңдар.

17.8. Осьтік қимасы бірлік квадрат болатын цилиндрге іштей сызылған сфера бетінің ауданын табыңдар.

17.9. Осьтік қимасы бірлік квадрат болатын цилиндрге сырттай сызылған сфера бетінің ауданын табыңдар.

17.10. Айдың диаметрі Жер шарының диаметрінен 4 есе кіші. Ай бетінің ауданы Жер шары бетінің ауданынан неше есе кіші болады?

В

17.11. Кубқа іштей сызылған сфера бетінің ауданы осы кубқа сырттай сызылған сфера бетінің ауданынан неше есе кіші болады?

17.12. Конустың осьтік қимасы — теңқабырғалы үшбұрыш. Конусқа сырттай сызылған сфера бетінің ауданы осы конусқа іштей сызылған сфера бетінің ауданынан неше есе үлкен болады?

17.13. Шардың центрінен 8 см қашықтықта жататын жазықтықпен қимасы — дөңгелектің радиусы 6 см. Шар бетінің ауданын табыңдар.

17.14. Шардың радиусының ортасы арқылы осы радиусқа перпендикуляр жазықтық жүргізілген. Осы жазықтық берілген шар бетінің ауданын қандай қатынаста бөледі?

17.15. Шардың радиусы 2 см. Биіктігі 1 см-ге тең шар сегментінің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

17.16. Шардың радиусы 3 см. Биіктігі 1 см-ге тең шар белдеуінің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

17.17. Париж меридианы ұзындығы шамамен 40 000 км-ге тең. Жер шары бетінің ауданын табыңдар.

17.4-сурет

17.18. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бәйтерек монументі шарының диаметрі 22 м-ге тең (17.4-сурет). Осы шар бетінің ауданын табыңдар.

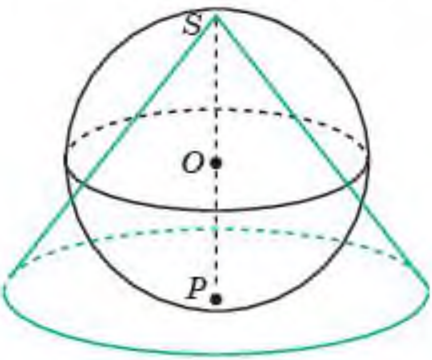
17.19. ЭКСПО-2017 — Қазақстанның елордасында 2017 жылы «Халықаралық көрмелер» бюросы ұйымдастырған халықаралық көрме. Көрменің орталық элементі — әлемдегі ең үлкен сфералық ғимарат болатын «Нұр Әлем» кешені (17.5-сурет). Оның диаметрі — 80 м. Осы сфера бетінің ауданын табыңдар ($\pi \approx 3$).

17.5-сурет

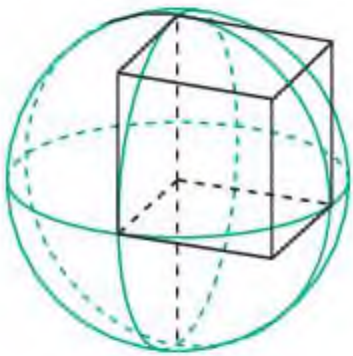
C

17.20. Шардың радиусы 1 см-ге тең. Оның диаметріне перпендикуляр болатын екі жазықтық шарды 1 : 2 : 3 қатынаста бөледі. Қиюшы жазықтықтармен шектелген шар бетінің ауданын табыңдар.

17.21. Конустың осьтік қимасы — теңқабырғалы үшбұрыш (17.6-сурет). Конус бетінің ауданы диаметрі осы конустың биіктігімен бірдей шар бетінің ауданына тең болатынын дәлелдеңдер.



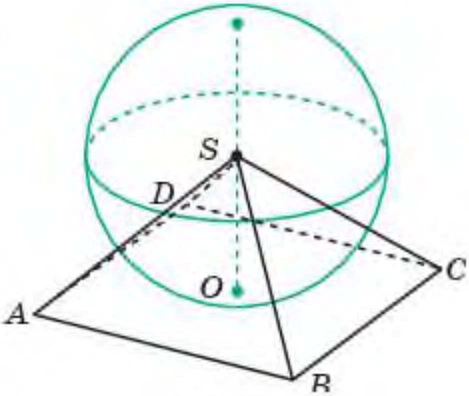
17.6-сурет



17.7-сурет

17.22. Радиусы 1 см-ге тең шардың центрі — бірлік кубтың төбесі (17.7-сурет). Осы кубтың ішінде орналасқан шар беті бөлігінің ауданын табыңдар.

17.23. Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғалары 2 см-ге, ал биіктігі 1 см-ге тең. Радиусы 1 см-ге тең шардың центрі — осы пирамиданың төбесі (17.8-сурет). Пирамиданың ішінде орналасқан шар беті бөлігінің ауданын табыңдар.



17.8-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

17.24. Іштей және сырттай сызылған көпбұрыштардың анықтамаларын қайталаңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Цилиндр табанының радиусы 3 см, ал жасаушысы 8 см. Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналін табыңдар:

A) 6 см; B) 10 см; C) 12 см; D) 16 см.

2. Тіктөртбұрыштың қабырғалары 1 см және 2 см. Осы тіктөртбұрышты оның үлкен қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 4π см^2; D) 6π см^2.

3. Дұрыс үшбұрышты призма табанының қабырғалары 1 см-ге және бүйір қырлары 2 см-ге тең. Осы призманы оның бүйір қыры жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар:

A) 2π см^2; B) 3π см^2; C) 4π см^2; D) 6π см^2.

4. Конус табанының радиусы 6 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең. Конустың биіктігін табыңдар:

A) 6 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $6\sqrt{2}$ см; D) 8 см.

5. Конустың жасаушысы 6 см-ге тең және ол табан жазықтығына 45° бұрыш жасап көлбеген. Осы конус табанының радиусын табыңдар:

A) 3 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $3\sqrt{3}$ см; D) 6 см.

6. Конус табанының радиусы 2 см-ге, ал жасаушысы 3 см-ге тең. Конус бетінің ауданын табыңдар:

A) 6π см^2; B) 8π см^2; C) 10π см^2; D) 12π см^2.

7. Конус табанының радиусы 2 см-ге тең. Конус биіктігінің ортасы арқылы табан жазықтығына параллель жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

8. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны 2 см-ге және бүйір қабырғалары 4 см-ге тең. Осы үшбұрышты оның табанына түсірілген биіктігі жататын түзуден айналдырғанда пайда болған конус бетінің ауданын табыңдар:

A) 3π см^2; B) 4π см^2; C) 5π см^2; D) 6π см^2.

9. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 2 см-ге және бүйір қырлары 3 см-ге тең. Осы пирамиданы оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда пайда болған конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар:

A) 3π см^2; B) 4π см^2; C) 5π см^2; D) 6π см^2.

10. Қиық конустың табандарының радиустары 4 см және 1 см, ал биіктігі 4 см-ге тең. Қиық конустың жасаушысын табыңдар:

A) 3 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 6 см.

11. Қиық конустың жасаушысы 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына 45° бұрыш жасап көлбеген. Конустың үлкен табанының радиусы 2 см-ге тең деп алып, кіші табанының радиусын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ см; D) $2 - \sqrt{2}$ см.

12. Теңбүйірлі трапецияның табандары 2 см және 4 см, ал бүйір қабырғалары 3 см-ге тең. Осы трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигура бетінің ауданын табыңдар:

A) 8π см^2; B) 10π см^2; C) 12π см^2; D) 14π см^2.

13. Сфераның радиусы 4 см-ге тең. Сферадан тыс жатқан нүктеден оның центріне дейінгі қашықтық 5 см-ге тең. Осы нүктеден сфераға жүргізілген жанаманың кесіндісінің ұзындықтарын табыңдар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

14. Шардың радиусы 2 см-ге тең. Шардың центрінен 1 см қашықтықта болатын жазықтықпен қимасы — дөңгелектің ауданын табыңдар:

A) π см^2; B) 2π см^2; C) 3π см^2; D) 4π см^2.

15. Шардың радиусы 6 см-ге тең. Радиустың ұшы арқылы онымен 60° бұрыш жасайтындай жазықтық жүргізілген. Шардың осы жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар:

A) 3π см^2; B) 6π см^2; C) 9π см^2; D) 12π см^2.

16. Сфераның ішінде жатқан нүктеден сфераның бойында жатқан нүктелерге дейінгі ең кіші және ең үлкен қашықтықтар сәйкесінше 4 см-ге және 6 см-ге тең. Сфераның радиусын табыңдар:

A) 2 см; B) 3 см; C) 4 см; D) 5 см.

17. Цилиндрдің осьтік қимасы — қабырғалары 6 см және 8 см болатын тіктөртбұрыш. Цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 5 см; B) 6 см; C) 8 см; D) 10 см.

18. Конустың осьтік қимасы — қабырғалары 2 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш. Осы конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.

19. Радиусы 2 см-ге тең сфераның ауданын табыңдар:

A) 12π см^2; B) 14π см^2; C) 16π см^2; D) 18π см^2.

20. Шардың радиусы 3 см-ге тең. Биіктігі 2 см болатын шар белдеуінің бүйір бетінің ауданын табыңдар:

A) 6π см^2; B) 8π см^2; C) 10π см^2; D) 12π см^2.

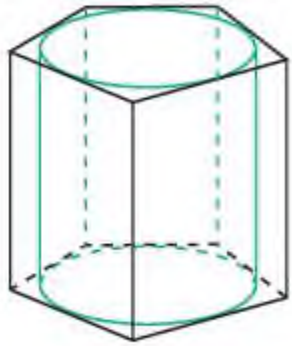
V тарау*

ІШТЕЙ ЖӘНЕ СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН КӨПЖАҚТАР

§ 18. Цилиндр және призма. Конус және пирамида

Егер тік призманың табандары цилиндрдің табандарына іштей сызылған болса, онда *призма цилиндрге іштей сызылған* немесе *цилиндр призмаға сырттай сызылған* деп аталады (18.1-сурет).

18.1-сурет



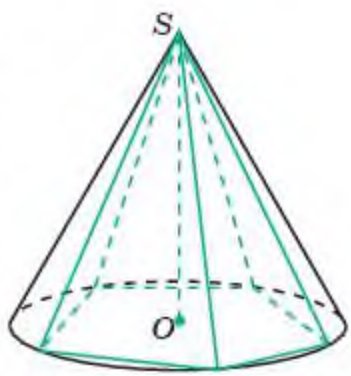
18.2-сурет

Егер тік призманың табандарына сырттай шеңбер сызылған болса, онда призмаға сырттай цилиндр сызуға болатынын дәлелдеңдер.

Егер тік призманың табандары цилиндрдің табандарына сырттай сызылған болса, онда *призма цилиндрге сырттай сызылған* немесе *цилиндр призмаға іштей сызылған* деп аталады (18.2-сурет).

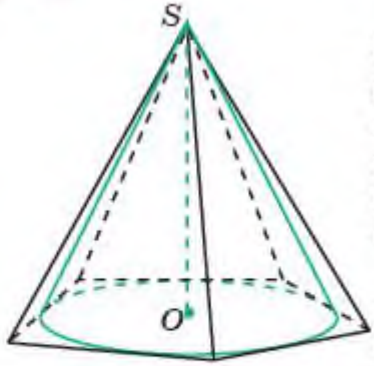
Егер тік призманың табандарына іштей шеңбер сызылған болса, онда призмаға іштей цилиндр сызуға болатынын дәлелдеңдер.

Егер пирамиданың төбесі конустың төбесімен сәйкес келіп, ал табаны конустың табанына іштей сызылған болса, онда *пирамида конусқа іштей сызылған* немесе *конус пирамидаға сырттай сызылған* деп аталады (18.3-сурет).



18.3-сурет

Теорема. ***Егер пирамиданың табанына сырттай шеңбер сызылған болса және оның биіктігінің табаны осы шеңбердің центрі болса, онда пирамидаға сырттай конусты сызуға болады.***



18.4-сурет

Дәлелдеуі. Егер пирамида биіктігінің табаны осы пирамиданың табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі болса, онда төбесі пирамиданың төбесімен сәйкес келетін, ал табаны осы шеңбермен шектелген дөңгелек болатын конус осы пирамидаға сырттай сызылады (18.3-сурет).

Керісінше, егер конус пирамидаға сырттай сызылған болса, онда пирамиданың табанына сырттай шеңбер сызылады. Пирамиданың биіктігі конустың биіктігі болады. Демек, пирамиданың биіктігінің табаны осы пирамиданың табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі болып табылады. ◻

Егер пирамиданың төбесі конустың төбесімен сәйкес келіп, ал табаны конустың табанына сырттай сызылған болса, онда *пирамида конусқа сырттай сызылған* немесе *конус пирамидаға іштей сызылған* деп аталады (18.4-сурет).

Теорема. ***Егер пирамиданың табанына іштей шеңбер сызылған болса және оның биіктігінің табаны осы шеңбердің центрі болса, онда пирамидаға іштей конусты сызуға болады.***

Дәлелдеуі. Егер пирамиданың табанына іштей шеңбер сызылған болса және оның биіктігінің табаны осы шеңбердің центрі болса, онда төбесі пирамиданың төбесімен сәйкес келетін, ал табаны осы шеңбермен шектелген дөңгелек болатын конус осы пирамидаға іштей сызылады (18.4-сурет).

Керісінше, егер конус пирамидаға іштей сызылған болса, онда пирамиданың табанына іштей шеңбер сызылады. Пирамиданың биіктігі конустың биіктігі болады. Демек, пирамида биіктігінің табаны осы пирамиданың табанына іштей сызылған шеңбердің центрі болып табылады. ◻

Сұрақтар

1. Қандай призма цилиндрге іштей сызылған деп аталады?
2. Қандай призмаға сырттай цилиндр сызуға болады?
3. Қандай призма цилиндрге сырттай сызылған деп аталады?
4. Қандай призмаға іштей цилиндр сызуға болады?
5. Қандай пирамида конусқа іштей сызылған деп аталады?
6. Қандай пирамидаға сырттай конус сызуға болады?
7. Қандай пирамида конусқа сырттай сызылған деп аталады?
8. Қандай пирамидаға іштей конус сызуға болады?

A

18.1. 1) Кубқа; 2) тікбұрышты параллелепипедке; 3) көлбеу параллелепипедке; 4) тік үшбұрышты призмаға; 5) дұрыс n-бұрышты призмаға сырттай цилиндр сызуға бола ма?

18.2. 1) Кубқа; 2) жақтары квадрат емес тікбұрышты параллелепипедке; 3) көлбеу параллелепипедке; 4) тік үшбұрышты призмаға; 5) дұрыс n-бұрышты призмаға іштей цилиндр сызуға бола ма?

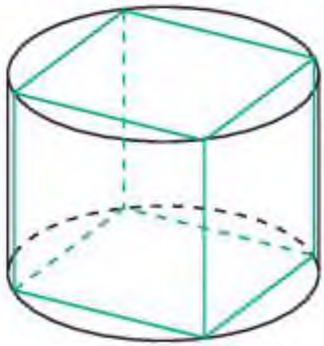
18.3. Дұрыс пирамидаға сырттай конус сызуға бола ма?

18.4. Дұрыс пирамидаға іштей конус сызуға бола ма?

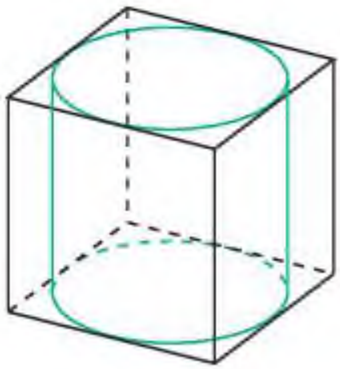
18.5. Қандай жағдайда тікбұрышты параллелепипедке іштей цилиндр сызуға болады?

18.6. Бірлік кубқа сырттай сызылған цилиндрдің биіктігін және табанының радиусын табыңдар (18.5-сурет).

18.7. Бірлік кубқа іштей сызылған цилиндрдің биіктігін және табанының радиусын табыңдар (18.6-сурет).



18.5-сурет



18.6-сурет

B

18.8. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 1 см, 2 см, 3 см-ге тең. Осы параллелепипедке сырттай сызылған цилиндрдің биіктігін және табанының радиусын табыңдар. Мұндай цилиндрлер нешеу болады?

18.9. Дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің биіктігін және табанының радиусын табыңдар.

18.10. Дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің биіктігін және табанының радиусын табыңдар.

18.11. Дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндр табанының радиусын және биіктігін табыңдар.

18.12. Дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің биіктігін және табанының радиусын және биіктігін табыңдар.

18.13. Дұрыс пирамиданың бүйір қырлары 1 см-ге тең және олар табан жазықтығымен: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° бұрыш жасайды. Осы пирамидаға сырттай сызылған конустың табанының радиусын табыңдар.

C

18.14. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған конустың биіктігін және табанының радиусын табыңдар.

18.15. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған конустың биіктігін және табанының радиусын табыңдар.

18.16. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған конустың биіктігін және табанының радиусын табыңдар.

18.17. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған конустың биіктігін және табанының радиусын табыңдар.

18.18. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған конустың биіктігін және табанының радиусын табыңдар.

18.19. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған конустың биіктігін және табанының радиусын табыңдар.

18.20. Егер төртбұрышты призмаға сырттай цилиндр сызылған болса, онда осы призманың бүйір қырларындағы қарама-қарсы жатқан екіжақты бұрыштарының қосындылары өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

18.21. Егер төртбұрышты пирамидаға іштей конус сызылған болса, онда осы пирамиданың төбесіндегі төртжақты бұрыштың қарама-қарсы жатқан жазық бұрыштарының қосындылары өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

18.22. Егер төртбұрышты пирамидаға сырттай конус сызылған болса, онда осы пирамиданың төбесіндегі төртжақты бұрыштың қарама-қарсы жатқан екіжақты бұрыштарының қосындылары өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

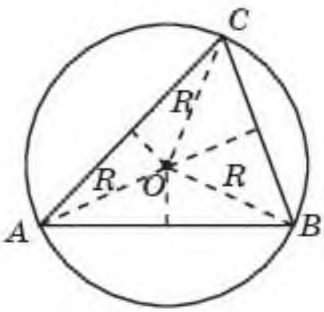
18.23. Шеңберге іштей сызылған көпбұрыштың анықтамасын қайталаңдар.

§ 19. Сфераға іштей сызылған көпжақтар. Призма

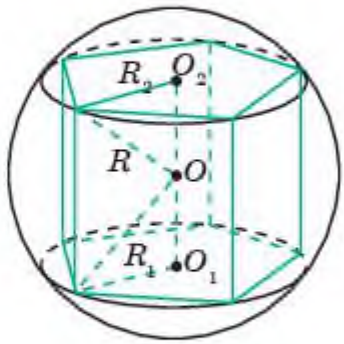
Көпбұрыштар мен шеңберге қатысты ұғымдарды еске түсірейік.

Егер көпбұрыштың барлық төбелері шеңбердің бойында жатса, онда *көпбұрыш шеңберге іштей сызылған* немесе *шеңбер көпбұрышқа сырттай сызылған* деп аталады.

Планиметрия курсында кез келген үшбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатыны дәлелденген еді. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі оның қабырғаларына жүргізілген орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі болады (19.1-сурет).



19.1-сурет



19.2-сурет

Енді кеңістіктік фигураларға көшейік.

Егер көпжақтың барлық төбелері сфераның бойында жатса, онда *көпжақ сфераға іштей сызылған* немесе *сфера көпжаққа сырттай сызылған* деп аталады.

Теорема. ***Егер тік призманың табанына сырттай шеңбер сызылған болса, онда осы призмаға сырттай сфера сызуға болады.***

Дәлелдеуі. Табанына сырттай шеңбер сызылған тік призманы қарастырайық. Шеңбердің центрі O_1 нүктесі және радиусы R_1 болсын. Сонда призманың екінші табанына центрі O_2 нүктесі және радиусы $R_2 = R_1$ болатын сырттай шеңбер сызуға болады. O_1O_2 кесіндісі призманың биіктігі болады. $O_1O_2 = h$, O нүктесі — O_1O_2 кесіндісінің ортасы болсын. Осыдан центрі O нүктесі және радиусы $R = \sqrt{R_1^2 + \frac{h^2}{4}}$ болатын сфера ізделінді сфера болып табылады (19.2-сурет).

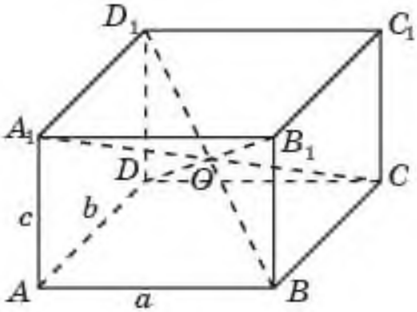
Керісінше, егер тік призмаға сырттай сфера сызуға болса, онда осы призманың табанының барлық төбелері сфераның бойында жатады. Демек, олар сфера мен призманың табан жазықтығының қиылысу сызығы болатын шеңбердің бойында жатады. Ендеше, осы тік призманың табанына сырттай шеңбер сызуға болады.

1-салдар. Призмаға сырттай сызылған сфера осы призмаға сырттай сызылған цилиндрге сырттай сызылған сфера болып табылады.

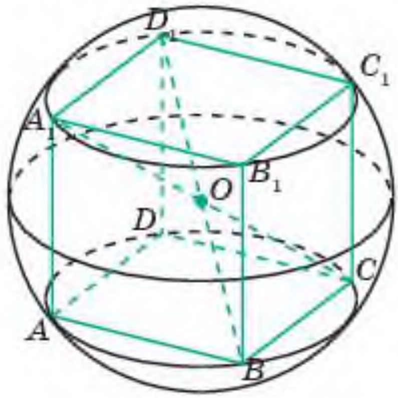
2-салдар. Тікбұрышты параллелепипедке сырттай сфера сызуға болады.

Расында да, тікбұрышты параллелепипедті табаны тіктөртбұрыш болатын тік призманың дербес жағдайы ретінде қарастыруға болады. Тіктөртбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатындықтан тікбұрышты параллелепипедке сырттай сфера сызуға болады.

Тікбұрышты параллелепипедтің диагональдары бір нүктеде қиылысады және сол нүктеде қақ бөлінеді. Демек, бұл нүкте осы параллелепипедтің барлық төбелерінен бірдей қашықтықта жатады, яғни сырттай сызылған сфераның центрі болып табылады (19.3-сурет).



19.3-сурет



19.4-сурет

Егер тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары a, b, c болса, онда оның диагональдары $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$-қа тең болады. Осыдан тікбұрышты параллелепипедке сырттай сызылған сфераның R радиусы мынадай формуламен анықталады:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Дербес жағдайда қыры a болатын кубқа сырттай сызылған сфераның радиусы $\frac{\sqrt{3}}{2}a$-ға тең болады.

19.4-суретте сфераға іштей сызылған куб кескінделген.

Сырттай сфера сызуға болмайтын призмаға мысал келтіріңдер.

Сұрақтар

1. Қандай көпжақ сфераға іштей сызылған деп аталады?
2. Қандай сфера көпжаққа сырттай сызылған деп аталады?
3. Тікбұрышты параллелепипедке сырттай сфера сызуға бола ма?
4. Тікбұрышты параллелепипедке сырттай сызылған сфераның центрі қайда орналасады?
5. Қандай тік призмаға сырттай сфера сызуға болады?

Есептер

A

19.1. 1) Кубқа; 2) тікбұрышты параллелепипедке; 3) бір жағы параллелограмм болатын параллелепипедке сырттай сфера сызуға бола ма?

19.2. Бірлік кубқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

19.3. Радиусы 1 см-ге тең сфераға іштей сызылған кубтың қырын табыңдар.

19.4. Тікбұрышты параллелепипедтің қырлары 1 дм, 2 дм және 2 дм-ге тең. Осы параллелепипедке сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

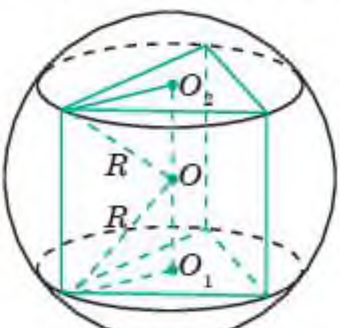
B

19.5. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см және 4 см-ге тең. Параллелепипедке сырттай сызылған сфераның радиусы 3 см-ге тең. Параллелепипедтің сол төбесінен шығатын үшінші қырын табыңдар.

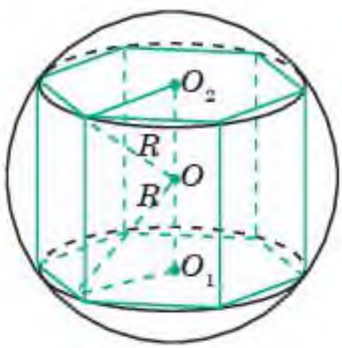
19.6. Сырттай сфера сызуға болмайтын тік призмаға мысал келтіріңдер.

19.7. Призмаға сырттай сызылған сфераның центрі әрдайым призманың ішінде жата ма?

19.8. Дұрыс үшбұрышты призманың биіктігі 2 см-ге, табанының қабырғасы 1 см-ге тең (19.5-сурет). Призмаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.



19.5-сурет



19.6-сурет

19.9. Дұрыс алтыбұрышты призманың биіктігі 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең (19.6-сурет). Осы призмаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

C

19.10. Қандай жағдайда тік үшбұрышты призмаға сырттай сызылған сфераның центрі: 1) призманың ішінде; 2) призманың бір бүйір жағында; 3) призмадан тыс жатады?

19.11. Тік призманың биіктігі 24 см-ге тең, ал табаны — қабырғалары 6 см, 8 см және 10 см болатын үшбұрыш. Осы призмаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

19.12. Дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған сфераның радиусы 1 см-ге тең. Призманың биіктігін табыңдар.

19.13. Призманың табаны — қабырғалары 1 см және 2 см болатын тіктөртбұрыш. Осы призмаға сырттай сызылған сфераның радиусы 2 см-ге тең. Призманың биіктігін табыңдар.

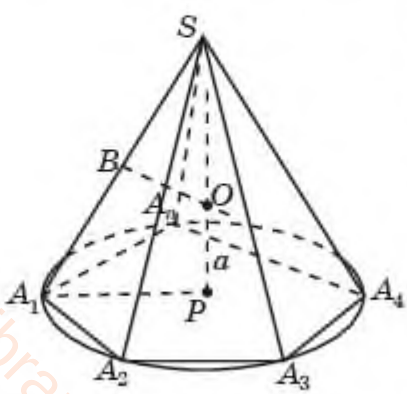
19.14. Егер төртбұрышты призмаға сырттай сфера сызуға болса, онда осы призманың бүйір қырларындағы қарама-қарсы жатқан екіжақты бұрыштарының қосындылары өзара тең болатынын дәлелдеңдер.

§ 20. Сфераға іштей сызылған көпжақтар. Пирамида

Теорема. ***Егер пирамиданың табанына сырттай шеңбер сызуға болса, онда осы пирамидаға сырттай сфера сызуға болады.***

Дәлелдеуі. $SA_1...A_n$ пирамидасын қарастырайық және оның $A_1...A_n$ табанына сырттай шеңбер сызылған болсын (20.1-сурет). Шеңбердің центрін P деп белгілейік.

A_1, ..., A_n нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орны — P нүктесі арқылы өтетін және пирамиданың α жазықтығына перпендикуляр болатын a түзуі болып табылады. A_1, S нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орны — пирамиданың SA_1 қырына перпендикуляр және оның ортасы B нүктесі арқылы өтетін β жазықтығы болады. β жазықтығы α жазықтығына перпендикуляр емес. Демек, ол a түзуімен пирамиданың барлық төбелерінен бірдей қашықтықта жатқан қандай да бір O нүктесінде қиылысады. Осыдан O нүктесі берілген пирамидаға сырттай сызылған сфераның центрі болып табылады.



20.1-сурет

Керісінше, егер пирамидаға сырттай сфера сызуға болса, онда осы пирамиданың табанының барлық төбелері сфераның бойында жатады. Демек, олар сфера мен пирамиданың табан жазықтығының қиылысу сызығы болатын шеңбердің бойында жатады. Ендеше, осы пирамиданың табанына сырттай шеңбер сызуға болады. ◻

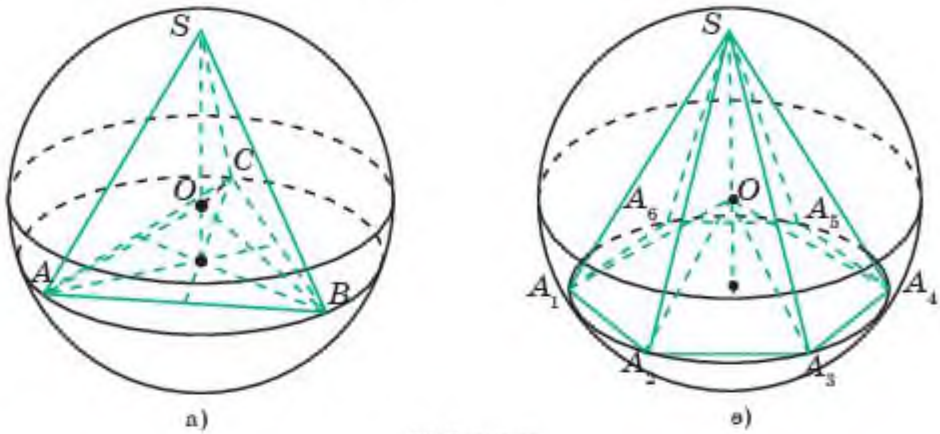
1-салдар. Кез келген үшбұрышты пирамидаға сырттай сфера сызуға болады.

Расында да, үшбұрышты пирамиданың табаны — үшбұрыш және кез келген үшбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болатындықтан, кез келген үшбұрышты пирамидаға сырттай сфера сызуға болады.

Егер пирамиданың табанына сырттай шеңбер сызуға болса және шеңбердің центрі пирамиданың биіктігінің табаны болса, онда осы пирамидаға сырттай конус сызуға болатынын байқаймыз. Осы конусқа сырттай сызылған сфера пирамидаға да сырттай сызылады.

2-салдар. Дұрыс пирамидаға сырттай сфера сызуға болады.

20.2-суретте дұрыс үшбұрышты және алтыбұрышты пирамидаларға сырттай сызылған сфералар кескінделген.

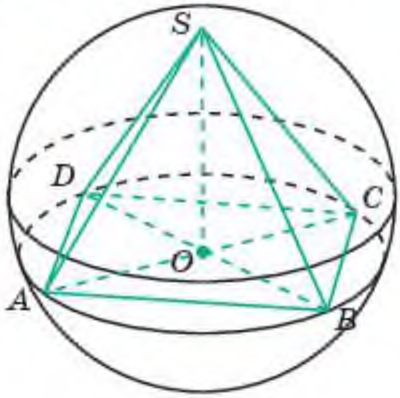


20.2-сурет

3-салдар. Егер пирамидаға сырттай конус сызуға болса, онда оған сырттай сфера сызуға болады. Бұл сфера осы пирамидаға сырттай сызылған конусқа сырттай сызылады.

Сонымен, пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табу үшін осы пирамидаға сырттай сызылған конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табуға арналған формуланы пайдалануға болады.

Мысал. $SABCD$ пирамидасының табаны — қабырғалары 1 см және 2 см болатын $ABCD$ тіктөртбұрышы. Пирамиданың биіктігі 2 см-ге тең және оның табаны $ABCD$ тіктөртбұрышының диагональдарының қиылысу нүктесі болады. Осы пирамидаға сырттай сфера сызуға болатынын дәлелдеңдер және оның радиусын табыңдар.



20.3-сурет

Шешуі. $ABCD$ тіктөртбұрышына сырттай шеңбер сызуға болады және оның центрі — тіктөртбұрыштың диагональдарының қиылысу O нүктесі, ал радиусы $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см-ге тең. SAC үшбұрышын оның табанына түсірілген биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған конус $SABCD$ пирамидасына сырттай сызылады. Осы конусқа сырттай сызылған сфера берілген пирамидаға сырттай сызылған болады (20.3-сурет).

Конустың осьтік қимасы болатын SAC үшбұрышында $AC = \sqrt{5}$, $SO = 2$, $SA = SC = \frac{\sqrt{21}}{2}$ см және ауданы $\sqrt{5}$ см^2-ге тең болады. Табылған мәндерді конусқа сырттай сызылған сфераның R радиусы үшін $R = \frac{abc}{4S}$ формуласына қойып, табамыз: $R = 1\frac{5}{16}$. Сонымен, берілген пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусы $1\frac{5}{16}$ см-ге тең болады.

Пирамидаға сырттай сызылған сфераның R радиусын оның h биіктігі мен пирамиданың табанына сырттай сызылған шеңбердің r радиусы арқылы өрнектеңдер.

Сұрақтар

1. Қандай пирамидаға сырттай сфера сызуға болады?
2. Қандай үшбұрышты пирамидаға сырттай сфера сызуға болады?
3. Дұрыс пирамидаға сырттай сфера сызуға бола ма?
4. Пирамидаға сырттай сызылған сфера мен конустың радиустары өзара қалай байланысады?

Есептер

A

20.1. Берілген екі нүктеден бірдей қашықтықта жатқан кеңістіктегі нүктелердің геометриялық орнын көрсетіңдер.

20.2. 20.2, 20.3-суреттерге ұқсас сфераға іштей сызылған: 1) үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) алтыбұрышты пирамиданы салыңдар.

20.3. Дұрыс пирамиданың биіктігі 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.4. Дұрыс пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусы 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.5. Дұрыс пирамиданың биіктігі 2 см-ге, ал табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусы 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

B

20.6. Дұрыс тетраэдрдің қырлары 1 см-ге тең. Осы тетраэдрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.7. Бірлік сфераға іштей сызылған дұрыс тетраэдрдің қырын табыңдар.

20.8. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.9. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 1 см-ге, ал табанының қабырғалары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.10. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.11. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың биіктігі және табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.12. Дұрыс пирамиданың бүйір қырлары 1 см-ге тең және ол табан жазықтығымен: 1) 30°;2) 45°; 3) 60° бұрыш жасайды. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.13. Сырттай сфера сызуға болмайтын пирамидаға мысал келтіріңдер.

C

20.14. Пирамидаға сырттай сызылған сфераның центрі: 1) пирамиданың ішінде; 2) пирамиданың табанында; 3) пирамидадан тыс жата ма? Сфераға іштей сызылған пирамидаларды салыңдар.

20.15. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі $\sqrt{3}$ см-ге, ал табанының қабырғалары 3 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның центрінің орналасуын көрсетіңдер және оның радиусын табыңдар.

20.16. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 1 см-ге, ал төбесіндегі жазық бұрыштары 90°-қа тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

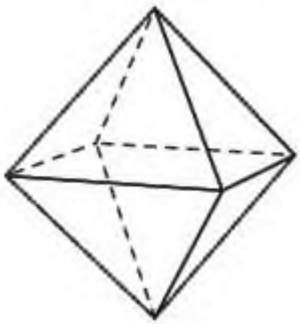
20.17. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның центрінің орналасуын көрсетіңдер.

20.18. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың биіктігі және табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның центрінің орналасуын көрсетіңдер.

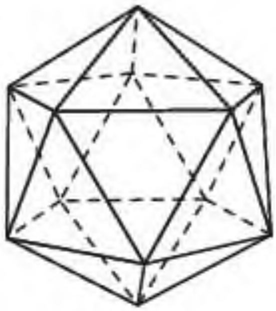
20.19. *SABCD* пирамидасының табаны — қабырғалары 1 см және 2 см болатын тіктөртбұрыш. *SD* қыры 2 см-ге тең және ол пирамиданың биіктігі болып табылады. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.20. *SABCDEF* пирамидасының табаны — қабырғалары 2 см-ге тең дұрыс алтыбұрыш. *SA* қыры 3 см-ге тең және ол пирамиданың биіктігі болып табылады. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

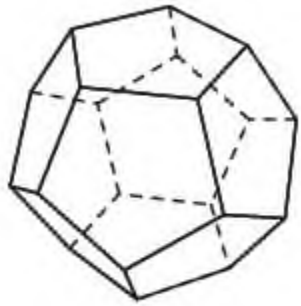
20.21. Октаэдрдің қырлары 1 см-ге тең (20.4-сурет). Октаэдрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.



20.4-сурет



20.5-сурет



20.6-сурет

20.22. Икосаэдрдің қырлары 1 см-ге тең (20.5-сурет). Икосаэдрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

20.23. Додекаэдрдің қырлары 1 см-ге тең (20.6-сурет). Додекаэдрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

20.24. Призмаға іштей сызылған цилиндрдің және цилиндрге іштей сызылған сфераның анықтамаларын қайталаңдар.

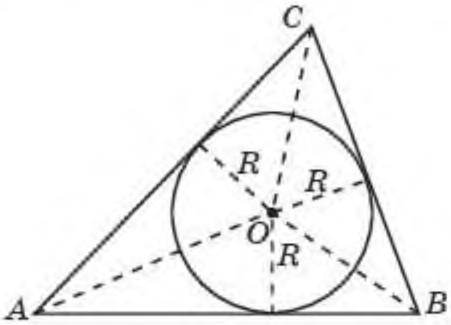
§ 21. Сфераға сырттай сызылған көпжақтар. Призма

Көпбұрыштар мен шеңберлерге қатысты ұғымдарды еске түсірейік.

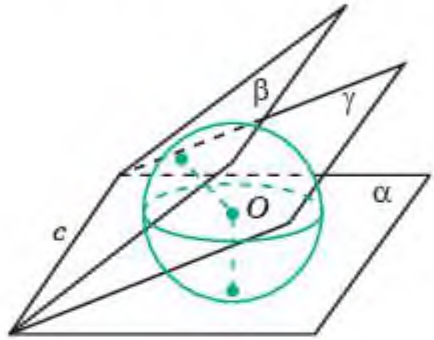
Егер көпбұрыштың барлық қабырғалары шеңбермен жанасатын болса, онда *көпбұрыш шеңберге сырттай сызылған* немесе *шеңбер көпбұрышқа іштей сызылған* деп аталады.

Планиметрия курсында кез келген үшбұрышқа іштей шеңбер сызуға болатыны дәлелденген. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрін табу үшін оның бұрыштарының биссектрисаларын жүргізу керек.

Олардың қиылысу O нүктесі үшбұрыштың барлық қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатады. Демек, O нүктесі іштей сызылған шеңбердің центрі болады (21.1-сурет).



21.1-сурет



21.2-сурет

Енді кеңістіктік фигураларға көшейік.

Егер көпжақтың барлық жақтары сферамен жанасатын болса, онда *көпжақ сфераға сырттай сызылған* немесе *сфера көпжаққа іштей сызылған* деп аталады.

Алдымен, қандай сфералар екіжақты бұрыштың жақтарымен жанасатынын анықтайық.

c ортақ түзуімен шектелген α және β жарты жазықтықтарымен жасалған екіжақты бұрыш берілсін. c түзуі арқылы осы екіжақты бұрышты қақ бөлетіндей γ жарты жазықтығын жүргіземіз (21.2-сурет). Мұндай жарты жазықтық екіжақты бұрыштың *биссекторлық жарты жазықтығы* деп аталады.

c түзуінде жатпайтын γ жарты жазықтығындағы нүктелер α және β жарты жазықтықтарынан бірдей қашықтықта болады.

Егер осы қашықтықты сфераның r радиусы деп алсақ, онда центрі биссекторлық жарты жазықтықта жататын және радиусы r болатын сфера α және β жазықтықтарымен жанасатын болады.

c түзуінсіз биссекторлық жарты жазықтықтың өзі екіжақты бұрыштың ішінде жатқан және α, β жазықтықтарымен жанасатын сфералардың центрлерінің геометриялық орнын береді.

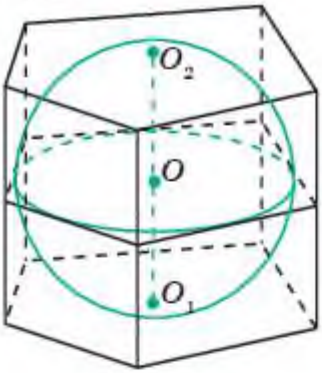
Қандай жағдайда тік призмаға іштей сфера сызуға болатынын анықтайық.

Теорема. ***Егер тік призманың табанына іштей шеңбер сызуға болса және призманың биіктігі осы шеңбердің диаметріне тең болса, онда осы призмаға іштей сфера сызуға болады.***

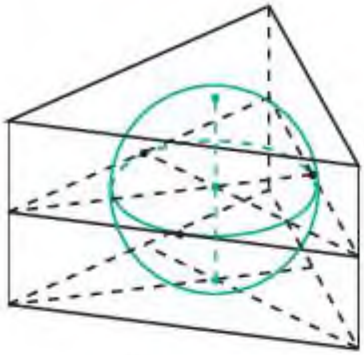
Дәлелдеуі. Тік призмаға іштей центрі O нүктесінде және радиусы r болатын сфера сызылған болсын (21.3-сурет).

Сонда призманың биіктігі $2r$-ге тең болады. O нүктесі арқылы призманың табандарына параллель қима жүргіземіз. Призманың қимасы сфераның жазықтықпен қимасы болатын шеңберге сырттай сызылған табанындағы көпбұрышқа тең көпбұрыш болады. Сонымен, призманың табанына іштей шеңбер сызуға болады.

Керісінше, тік призманың табандарына іштей радиусы r болатын шеңберлер сызылған және призманың биіктігі $2r$-ге тең болсын деп ұйғарайық. O нүктесі — табандарына іштей сызылған шеңберлердің центрлерін қосатын кесіндінің ортасы болсын. Сонда центрі O нүктесі және радиусы r болатын сфера осы призмаға іштей сызылған ізделінді сфера болады.



21.3-сурет



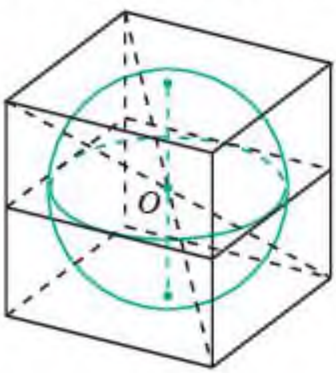
21.4-сурет

21.4-суретте дұрыс үшбұрышты призмаға іштей сызылған сфера кескінделген.

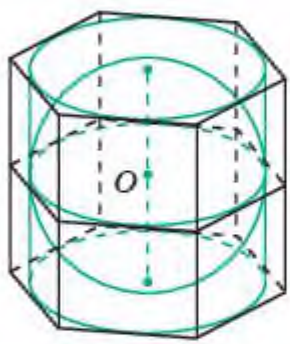
Салдар. Егер тікбұрышты параллелепипед куб болса, онда оған іштей сфера сызуға болады.

Кубқа іштей сызылған сфераның центрі осы кубтың диагональдарының қиылысу нүктесі болып табылады. Егер кубтың қыры a-ға тең болса, онда оған іштей сызылған сфераның радиусы $\frac{a}{2}$-ге тең болады.

21.5-суретте кубқа іштей сызылған сфера кескінделген.



21.5-сурет



21.6-сурет

Егер призмаға іштей сфера сызуға болса, онда осы призмаға іштей цилиндр сызуға болатынын дәлелдеңдер (21.6-сурет).

Призмаға іштей сызылған сфера осы призмаға іштей сызылған цилиндрге де іштей сызылған болады.

Сұрақтар

1. Қандай көпжақ сфераға сырттай сызылған деп аталады?
2. Қандай сфера көпжаққа іштей сызылған деп аталады?
3. Қандай тік призмаға іштей сфера сызуға болады?
4. Қандай тікбұрышты параллелепипедке іштей сфера сызуға болады?
5. Кубқа іштей сызылған сфераның центрі қайда орналасады?
6. Қыры a-ға тең кубқа іштей сызылған сфераның радиусы неге тең?

Есептер

A

21.1. Кубтың қыры 1 см-ге тең. Осы кубқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

21.2. Сфераның радиусы 1 см-ге тең. Осы сфераға сырттай сызылған кубтың қырын табыңдар.

21.3. Дұрыс призманың биіктігі 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

21.4. Дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сфера сызылған. Призманың биіктігін табыңдар.

21.5. Егер призмаға іштей цилиндр сызуға болса, онда оған іштей сфера сызуға болатыны ақиқат па?

21.6. Іштей сфера сызуға болмайтын дұрыс призмаға мысал келтіріңдер.

B

21.7. Дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

21.8. Дұрыс үшбұрышты призмаға іштей сфера сызылған. Сфераның радиусы 1 см-ге тең. Осы призманың табанының қабырғаларын табыңдар.

21.9. Дұрыс төртбұрышты призманың табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

21.10. Дұрыс төртбұрышты призмаға іштей сфера сызылған. Сфераның радиусы 1 см-ге тең. Осы призманың табанының қабырғаларын табыңдар.

21.11. Дұрыс алтыбұрышты призманың табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сфера сызылған (21.6-сурет). Призманың биіктігін табыңдар.

21.12. Дұрыс алтыбұрышты призмаға іштей сфера сызылған. Сфераның радиусы 1 см-ге тең. Осы призманың табанының қабырғаларын табыңдар.

C

21.13. Қиылысқан екі жазықтықтан бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнын табыңдар.

21.14. Үшбұрышты тік призманың табаны — катеттері 3 см және 4 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Осы призмаға іштей сфера сызылған. Призманың биіктігін табыңдар.

21.15. Төртбұрышты тік призманың табаны — қабырғалары 1 см-ге және сүйір бұрышы 60°-қа тең ромб. Осы призмаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

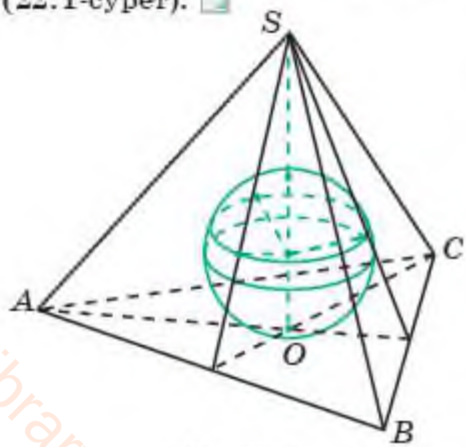
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

21.16. Пирамидаға іштей сызылған конустың және конусқа іштей сызылған сфераның анықтамаларын қайталаңдар.

§ 22. Сфераға сырттай сызылған көпжақтар. Пирамида

Теорема. ***Кез келген үшбұрышты пирамидаға іштей сфера сызуға болады.***

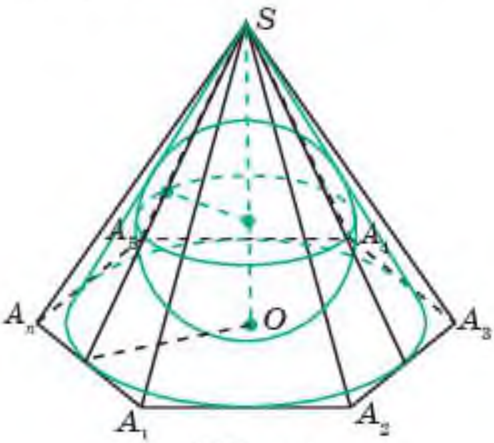
Дәлелдеуі. Үшбұрышты пирамидаға іштей сызылған сфераның центрі — оның барлық жақтарынан бірдей қашықтықта жатқан нүкте болып табылады. Бұл нүктені табу үшін пирамиданың бүйір жақтары мен табанының арасындағы екіжақты бұрыштардың үш биссекторлық жарты жазықтықтарын қарастырамыз. Олар пирамиданың бүйір жақтары мен табанынан бірдей қашықтықта жатқан нүктеде қиылысады, яғни ол нүкте іштей сызылған сфераның ізделінді центрі болады (22.1-сурет). □



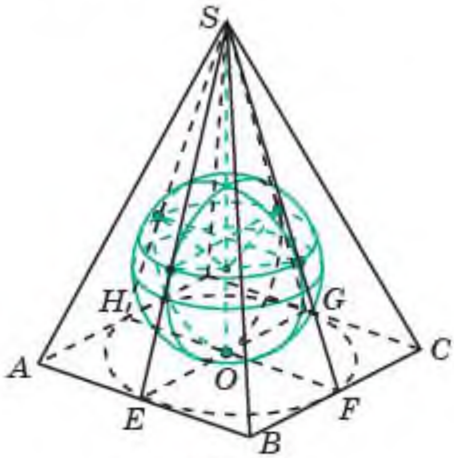
22.1-сурет

Теорема. ***Егер пирамиданың табанына іштей шеңбер сызуға болса және осы шеңбердің центрі пирамиданың биіктігінің табаны болса, онда осы пирамидаға іштей сфера сызуға болады.***

Дәлелдеуі. Егер пирамиданың табанына іштей шеңбер сызуға болса және осы шеңбердің центрі пирамиданың биіктігінің табаны болса, онда осы пирамидаға іштей конус сызуға болады (22.2-сурет). Бұл конусқа іштей сызылған сфера пирамидаға іштей сызылған ізделінді сфера болады. ◻



22.2-сурет



22.3-сурет

Салдар. Кез келген дұрыс пирамидаға іштей сфера сызуға болады.

Расында да, кез келген дұрыс пирамидаға іштей конус сызуға болады. Демек, оған іштей сфера сызуға болады.

Пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табу үшін осы пирамидаға іштей сызылған конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табуға арналған формуланы пайдалануға болады.

Мысал. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі мен табанының қабырғалары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

Шешуі. Пирамиданың табанына іштей сызылған шеңбердің радиусы 1 см-ге тең. Бүйір жақтарының SE, SF, SG, SH биіктіктері $\sqrt{5}$ см-ге тең. SEG үшбұрышын оның табанына түсірілген SO биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған конус $SABCD$ пирамидасына іштей сызылады. SEG үшбұрышы осы конустың осьтік қимасы болады. SEG үшбұрышында $EG = 2$ см, $SE = SG = \sqrt{5}$ см және ауданы 2 см^2-ге тең болады. Табылған мәндерді конусқа іштей сызылған сфераның r радиусы үшін $r = \frac{2S}{a+b+c}$ формуласына қойып, табамыз: $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Сонымен, берілген пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусы $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ см-ге тең болады (22.3-сурет).

Сұрақтар

1. Қандай үшбұрышты пирамидаға іштей сфера сызуға болады?
2. Қандай дұрыс пирамидаға іштей сфера сызуға болады?
3. Үшбұрышты пирамидаға іштей сызылған сфераның центрі не болады?
4. Дұрыс пирамидаға іштей сызылған сфераның центрі не болады?

Есептер

B

22.1. Дұрыс пирамиданың биіктігі 2 см-ге және оның табанына іштей сызылған шеңбердің радиусы 1 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

22.2. Дұрыс пирамиданың бүйір жағының биіктігі 2 см-ге және оның табанына іштей сызылған шеңбердің радиусы 1 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

22.3. Дұрыс пирамиданың биіктігі 1 см-ге, ал бүйір жағының биіктігі 2 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

22.4. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі h-қа, ал табанының қабырғалары a-ға тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табу формуласын жазыңдар.

22.5. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі мен табанының қабырғалары 3 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

22.6. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см-ге тең, ал бүйір жақтары табан жазықтығымен: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° бұрыш жасайды. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

C

22.7. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі h-қа, ал табанының қабырғалары a-ға тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табу формуласын жазыңдар.

22.8. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі 1 см-ге, ал табанының қабырғалары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

22.9. Дұрыс тетраэдрдің қыры 1 см-ге тең. Тетраэдрге іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

22.10. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың биіктігі h-қа, ал табанының қабырғалары a-ға тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табу формуласын жазыңдар.

22.11. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың биіктігі 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

22.12. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 1 см-ге, ал төбесіндегі жазық бұрыштары 90°-қа тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

22.13. Төртбұрышты пирамиданың табаны — қабырғалары 1 см-ге және сүйір бұрышы 60°-қа тең болатын ромб. Пирамиданың биіктігі 1 см-ге тең және оның табаны ромбының диагональдарының қиылысу нүктесі болып табылады. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

22.14. Іштей сфера сызуға болмайтын пирамидаға мысал келтіріңдер.

22.15. Октаэдрдің қырлары 1 см-ге тең. Октаэдрге іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

22.16. Жазықтықтағы фигуралардың аудандары мен қасиеттерін қайталаңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Цилиндрдің табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге іштей сызылған дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғасын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

2. Цилиндрдің табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғасын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

3. Цилиндрдің табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге іштей сызылған дұрыс алтыбұрышты призманың табанының қабырғасын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

4. Цилиндрдің табанының радиусы 3 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған дұрыс алтыбұрышты призманың табанының қабырғасын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

5. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған конустың биіктігін табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

6. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған конустың биіктігін табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

7. Кубтың қыры 2 см-ге тең. Осы кубқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

8. Дұрыс төртбұрышты призманың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 1 см; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ см.

9. Дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір қырлары 6 см-ге, ал табанының қабырғалары 4 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 4 см; B) 5 см; C) 6 см; D) 8 см.

10. Тікбұрышты параллелепипедтің қырлары 1 см, 2 см, 3 см-ге тең. Осы параллелепипедке сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см; B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см; C) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ см.

11. Тік үшбұрышты призманың табаны — қабырғалары 3 см, 4 см, 5 см болатын үшбұрыш. Осы призмаға сырттай сызылған сфера центрінің қайда орналасатынын табыңдар:

A) призманың ішінде жатады;
B) призманың жағында жатады;
C) призманың қырында жатады;
D) призмадан тыс жатады.

12. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

13. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

14. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 3 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның центрінің қайда орналасатынын табыңдар:

A) пирамиданың ішінде жатады;
B) пирамиданың бүйір жағында жатады;

C) пирамиданың табанында жатады;
D) пирамидадан тыс жатады.

15. Кубтың қыры 2 см-ге тең. Осы кубқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

16. Сфераның радиусы 2 см-ге тең. Осы сфераға сырттай сызылған кубтың қырын табыңдар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

17. Сфераның радиусы 1 см-ге тең. Осы сфераға сырттай сызылған призманың биіктігін табыңдар:

A) 1 см; B) 2 см; C) 3 см; D) 4 см.

18. Дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғалары 6 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) $\sqrt{2}$ см; B) $2\sqrt{2}$ см; C) $\sqrt{3}$ см; D) $2\sqrt{3}$ см.

19. Дұрыс алтыбұрышты призмаға іштей радиусы 3 см-ге тең сфера сызылған. Осы призманың табанының қабырғасын табыңдар:

A) $2\sqrt{2}$ см; B) $2\sqrt{3}$ см; C) $3\sqrt{2}$ см; D) $3\sqrt{3}$ см.

20. Дұрыс тетраэдрдің қырлары 4 см-ге тең. Осы тетраэдрге іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ см; B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см; C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ см; D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ см.

V тарау

ДЕНЕЛЕРДІҢ КӨЛЕМДЕРІ

§ 23. Денелер көлемдерінің жалпы қасиеттері

Көлем — геометриялық фигуралардың кеңістіктегі бөлігін сипаттайтын шама. Көлем геометриялық денелерге байланысты негізгі шамалардың бірі болып табылады.

Көлемнің өлшем бірлігі ретінде қырының ұзындығы 1-ге тең куб алынады. Ол *бірлік куб* деп аталады.

Мысалы, егер ұзындықтың өлшем бірлігі 1 мм, 1 см немесе 1 м болса, онда көлемнің өлшем бірлігі ретінде қырының ұзындығы сәйкесінше 1 мм, 1 см немесе 1 м-ге тең куб алынады. Мұндай куб сәйкесінше *кубтық миллиметр*, *кубтық сантиметр* немесе *кубтық метр* деп аталады.

Қарапайым жағдайда фигураның көлемі осы фигура ішіне сиятын бірлік кубтардың және оның бөліктерінің санымен өлшенеді. Бұл сан натурал, рационал немесе иррационал болуы мүмкін. Фигураның көлемі ө лшем бірлігіне байланысты болғандықтан, түсінікті болу үшін іс жүзінде осы саннан кейін көлемнің өлшем бірлігі көрсетіледі. Мысалы, V мм^3, V см^3, V м^3.

Кеңістіктегі фигураның көлемі үшін мынадай қасиеттер орынды болады:

1) кеңістіктегі фигураның көлемі оң сан;

2) бірдей фигуралардың көлемдері тең;

3) егер Φ фигурасы Φ_1 және Φ_2 фигураларынан құралса, онда Φ фигурасының көлемі Φ_1 және Φ_2 фигураларының көлемдерінің қосындысына тең болады, яғни

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

4. Бір төбесінен шығатын қырлары a, b, c болатын *тікбұрышты параллелепипедтің V көлемі* мынадай формуламен есептеледі:

$$V(\Phi) = a \cdot b \cdot c.$$

Кейде *тікбұрышты параллелепипедтің көлемі* оның сызықтық өлшемдерінің көбейтіндісіне тең немесе оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең дейді. Соңғы тұжырым кез келген параллелепипед үшін де дұрыс.

Дербес жағдайда қыры a-ға тең кубтың V көлемі мынадай формуламен есептеледі:

$$V = a^3.$$

? Қалай ойлайсыңдар, фигураның көлемі нөлге тең бола ма?

Көлемдері тең екі фигура *тең шамалас фигуралар* деп аталады.

Нүктелерінің арақашықтығы бірдей оң санға көбейтілетін жазықтықты түрлендіру *ұқсастық* деп аталатынын еске саламыз. Яғни ұқсастық түрлендіру кезінде кез келген A, B нүктелері сәйкесінше A', B' нүктелеріне көшсе, $A'B' = k \cdot AB$ болады, мұндағы k — *ұқсастық коэффициент* деп аталатын оң сан.

Егер кеңістіктегі екі фигураның біреуін екіншісіне көшіретін ұқсастық түрлендіру бар болса, онда осы екі фигура *ұқсас* деп аталады.

Ұқсас фигураларға мысалдар:

1) екі кубтың ұқсастық коэффициенті осы кубтардың қырлары ұзындықтарының қатынасына тең болады;

2) екі тікбұрышты параллелепипедтердің a', b', c' пен a, b, c қырлары үшін мынадай теңдіктер орындалады:

$$a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc,$$

мұндағы k — қандай да бір тұрақты сан;

3) екі шардың ұқсастық коэффициенті осы шарлардың радиустарының қатынасына тең болады.

Екі ұқсас көпжақ беттерінің аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең болатынын дәлелдеңдер.

Екі ұқсас шар беттерінің аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең болатынын тексеріңдер.

Екі тікбұрышты параллелепипед көлемдерінің қатынасы ұқсастық коэффициентінің кубына тең болатынын тексеріңдер.

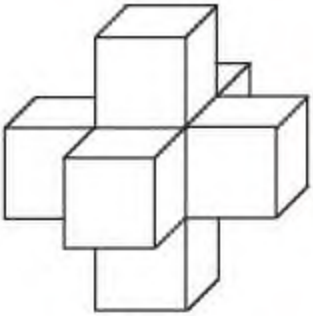
Екі ұқсас фигура көлемдерінің қатынасы ұқсастық коэффициентінің кубына тең болатынын дәлелдеусіз береміз, яғни егер k ұқсастық коэффициенті бойынша Φ_2 фигурасы Φ_1 фигурасына ұқсас болса, онда осы фигуралардың көлемдері үшін мынадай формула орынды болады:

$$V(\Phi_2) = k^3 V(\Phi_1).$$

Сұрақтар

1. Көлем қандай шаманы сипаттайды?
2. Көлемнің өлшем бірлігі ретінде не алынады?
3. Көлемнің қасиеттерін айтыңдар.
4. Кеңістіктегі қандай фигуралар теңшамалы деп аталады?
5. Кеңістіктегі қандай түрлендіру ұқсастық деп аталады?
6. Кеңістіктегі қандай фигуралар ұқсас деп аталады?
7. Ұқсас фигуралардың көлемдері өзара қалай байланысқан?
8. Кеңістіктегі ұқсас фигураларға мысалдар келтіріңдер.

Есептер



23.1-сурет

A

23.1. Кубтың көлемі 27 $см^3$-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.

23.2. Кубтың бетінің ауданы 24 $см^2$-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

23.3. Кубтың диагоналі $\sqrt{12}$ см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

23.4. 23.1-суреттегі кеңістіктік фигураны құрайтын кубтардың қырлары 1 см-ге тең. Осы фигураның көлемін табыңдар.

23.5. Егер кубтың барлық қырларын 3 есе арттырсақ, онда оның көлемі неше есе артады?

23.6. Егер тікбұрышты параллелепипедтің барлық қырларын 2 есе қысқартсақ, онда оның көлемі неше есе кемиді?

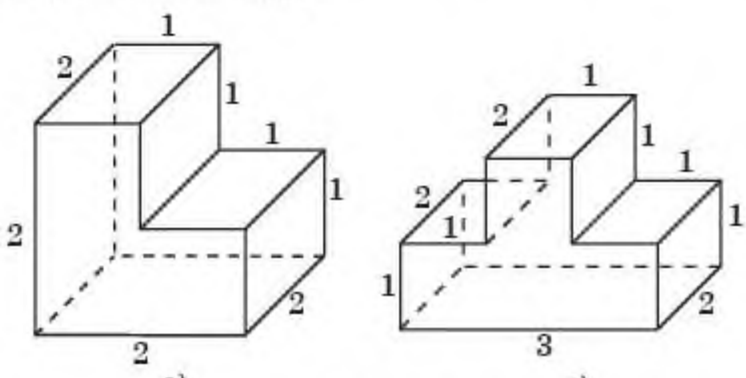
23.7. Егер тікбұрышты параллелепипедтің: 1) бір сызықтық өлшемін 2 есе арттырса; 2) екі сызықтық өлшемін 3 есе қысқартса, онда оның көлемі қалай өзгереді?

23.8. Құрылыс кірпішінің салмағы 4 кг. Барлық сызықтық өлшемдері осы кірпіштің өлшемдерінен төрт есе кіші болатын ойыншық кірпіштің салмағы қанша грамм болады?

B

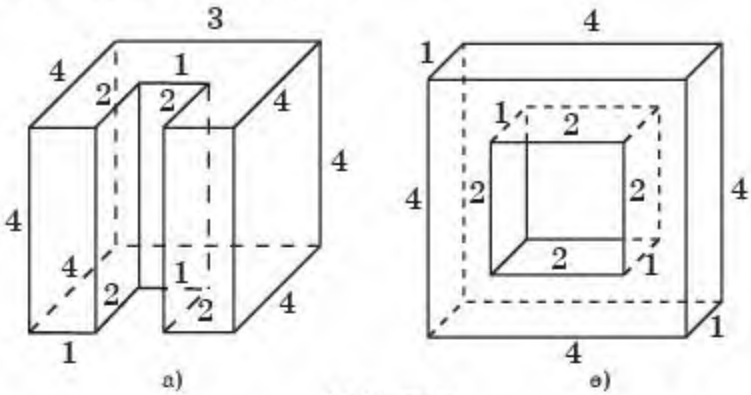
23.9. Мектептегі сынып бөлмесінің биіктігі 3,5 м-ге тең. Егер әрбір оқушыға 7,5 $м^3$ ауа қажет болса, онда 28 оқушыға арналған сынып бөлмесінің ауданы қандай болуы керек?

23.10. 23.2-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден тұратын фигураның көлемін табыңдар.



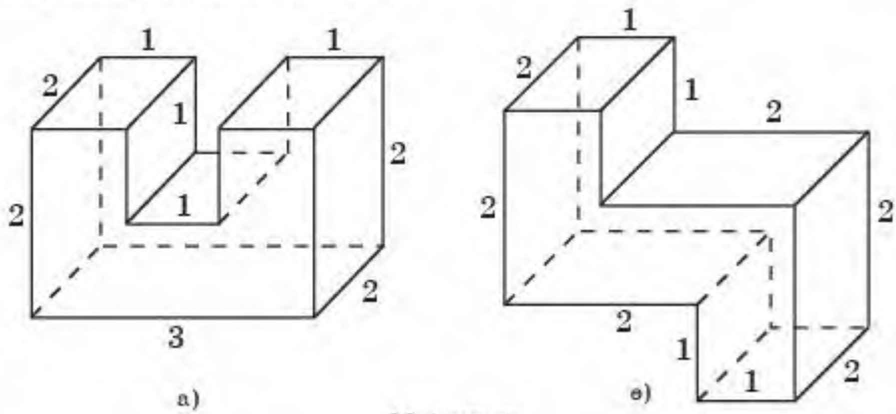
23.2-сурет

23.11. 23.3-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден тұратын фигураның көлемін табыңдар.



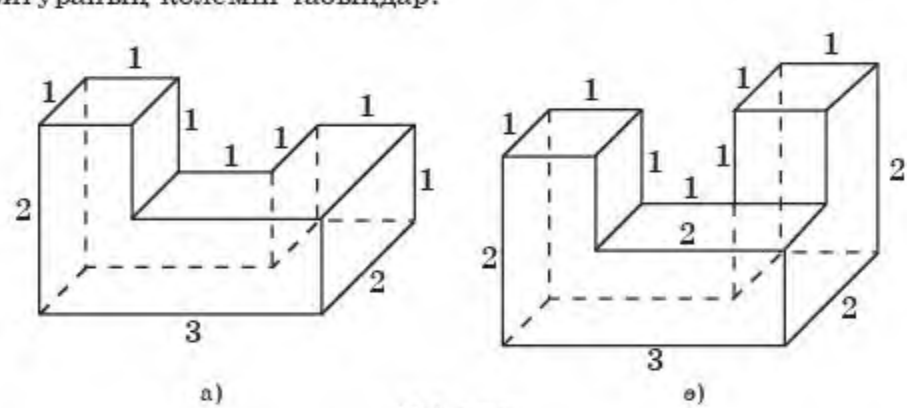
23.3-сурет

23.12. 23.4-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден тұратын фигураның көлемін табыңдар.



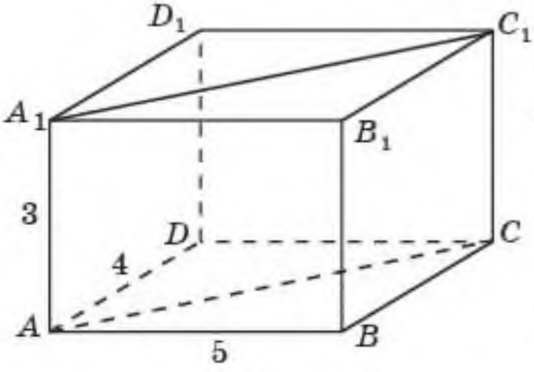
23.4-сурет

23.13. 23.5-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтерден тұратын фигураның көлемін табыңдар.

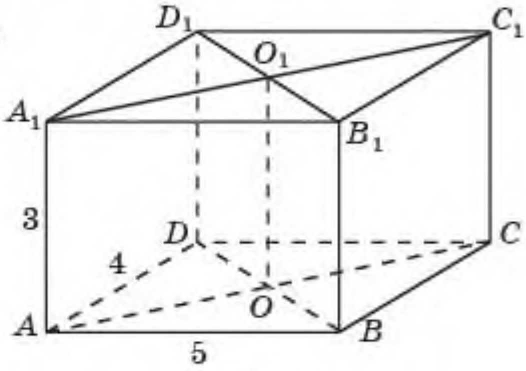


23.5-сурет

23.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 5 см, 4 см, 3 см-ге тең. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призманың көлемін табыңдар (23.6-сурет).



23.6-сурет

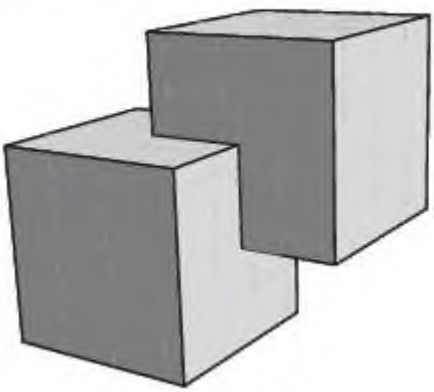


23.7-сурет

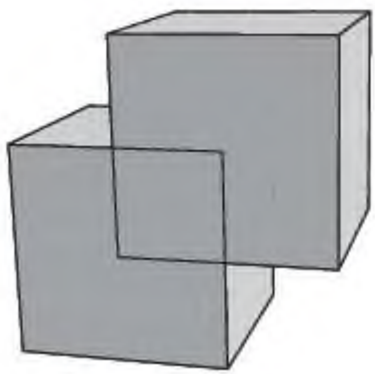
23.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 5 см, 4 см, 3 см-ге тең. $ABOA_1B_1O_1$ үшбұрышты призманың көлемін табыңдар (23.7-сурет).

23.16. Балықты өсіруге арналған аквариумның табаны — қабырғалары 40 см және 50 см болатын тіктөртбұрыш. Аквариумдегі судың тереңдігі 80 см-ді құрайды. Бұл су екінші аквариумге құйылып алынды. Екінші аквариумның түбі — қабырғалары 80 см және 100 см-ге тең тіктөртбұрыш. Мұндағы судың тереңдігі қандай болады?

23.17. Бірінің төбесі екіншісінің центрінде орналасқан екі бірлік кубтардың ортақ (қиылысқан) бөлігінің көлемін табыңдар (23.8-сурет).



23.8-сурет



23.9-сурет

23.18. Бірінің екі төбесі екіншісінің қарама-қарсы жағының центрлерінде орналасқан екі бірлік кубтардан құрылған фигураның көлемін табыңдар (23.9-сурет).

23.19. Құрылыс кірпішінің өлшемі 25 см × 12 см × 6 см. Цемент ерітіндісі көлемді 15%-ға арттыратын болса, 10000 кірпіштен қаланған қабырғаның көлемін табыңдар.

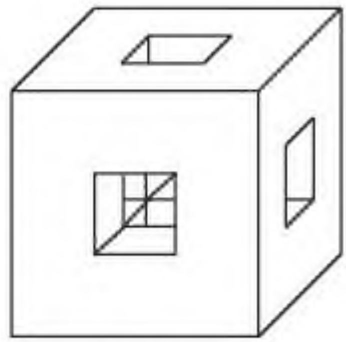
23.20. Қырлары 1 см, 6 см және 8 см болатын үш қорғасын кубты балқытып бір куб жасалды. Алынған кубтың қырының ұзындығын табыңдар.

C

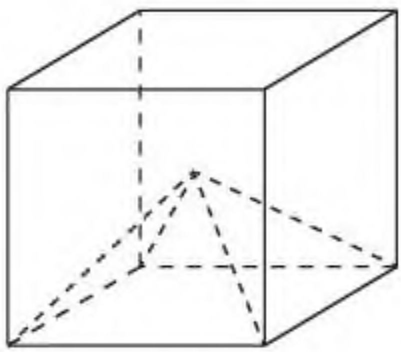
23.21. Егер кубтың әрбір қырын 2 см-ге арттырса, онда оның көлемі 98 $см^3$-ге артады. Кубтың қырын табыңдар.

23.22. Қыры 6 см-ге тең болатын кубтың әрбір жағынан өтпелі квадратты тесіктер жасалды (23.10-сурет). Квадраттың қабырғасы 2 см-ге тең. Кубтың қалған бөлігінің көлемін табыңдар.

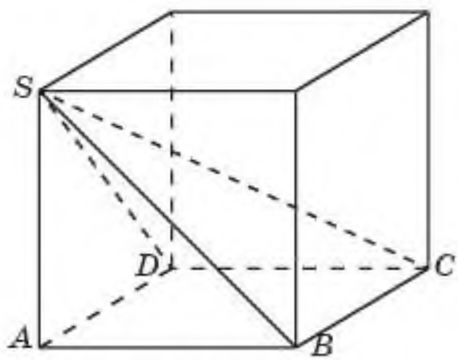
23.23. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табаны — бірлік кубтың бір жағы, ал төбесі осы кубтың центрі болып табылады (23.11-сурет). Пирамиданың көлемін табыңдар.



23.10-сурет



23.11-сурет

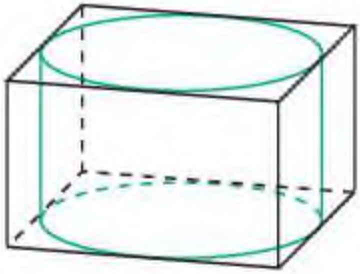


23.12-сурет

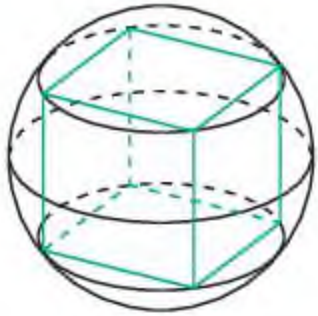
23.24. Төртбұрышты пирамиданың табаны — бірлік кубтың бір жағы, ал төбесі — осы жағында жатпайтын кубтың төбесі болып табылады (23.12-сурет). Пирамиданың көлемін табыңдар.

23.25. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған тікбұрышты параллелепипедтің көлемін табыңдар (23.13-сурет).

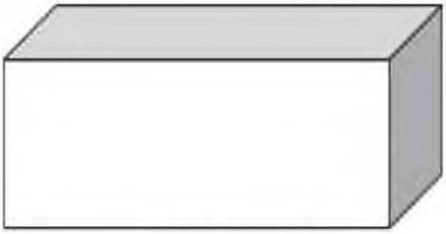
23.26. Сфераның радиусы 1 см-ге тең. Осы сфераға іштей сызылған кубтың көлемін табыңдар (23.14-сурет).



23.13-сурет



23.14-сурет



23.15-сурет

23.27. Кубтың центрі арқылы өтетін жазықтық оны теңшамалы екі бөлікке бөлетінін дәлелдеңдер.

23.28. Параллелепипед пішіндес ыдыс берілген (23.15-сурет). Ыдыстың көлемінің тең жартысы сумен толтырылған. Суретін салып көрсетіңдер және түсіндіріңдер. Егер ыдыстың ұзындығы 4 м, ені биіктігінен 0,5 м-ге артық, ал биіктігі ұзындығының 37,5%-ын құрайтын болса, құйылған судың көлемін табыңдар.

23.29. Аквариумның ұзындығы — 80 см, ені — 45 см, ал биіктігі — 55 см. Су деңгейі аквариумның жоғарғы жиегінен 10 см төмен болуы үшін осы аквариумға неше литр су құю керек болады?

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

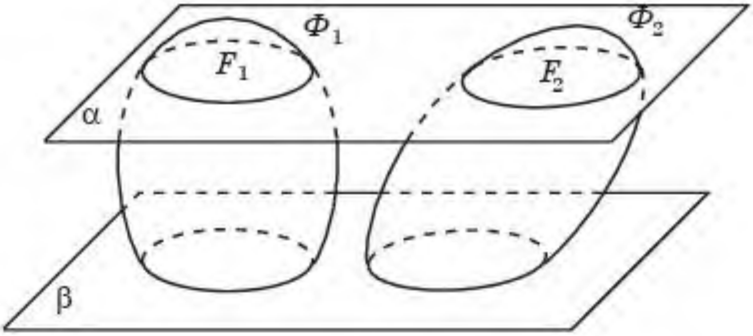
23.30. Призманың, іштей сызылған және сырттай сызылған призмалардың анықтамаларын қайталаңдар.

§ 24. Призма көлемі

Итальяндық математик Бонавентура Кавальери (1598—1647 жж.) ұсынған кеңістіктік фигуралардың көлемін есептеу әдісін қарастырайық.

Кавальери принципі. ***Егер кеңістіктегі Φ_1 және Φ_2 фигураларының бір жазықтыққа параллель жазықтықтармен қималарында аудандары бірдей F_1 және F_2 фигуралары пайда болса, онда берілген кеңістіктік фигуралардың көлемдері тең болады*** (24.1-сурет).

Кавальери принципін негіздеу үшін Φ_1 және Φ_2 фигураларын қалыңдығы бірдей жұқа қабаттардан құрастырылған деп аламыз. Олар Φ_1 және Φ_2 фигураларының қандай да бір жазықтыққа параллель



24.1-сурет

жазықтықтармен қиылысуы кезінде пайда болады (24.1-сурет). Осы қабаттардың қалыңдығы мен аудандарының теңдігінен олардың көлемдерінің теңдігі шығады. Демек, осы қабаттардан құрылған Φ_1 және Φ_2 фигураларының көлемдері де тең болады.

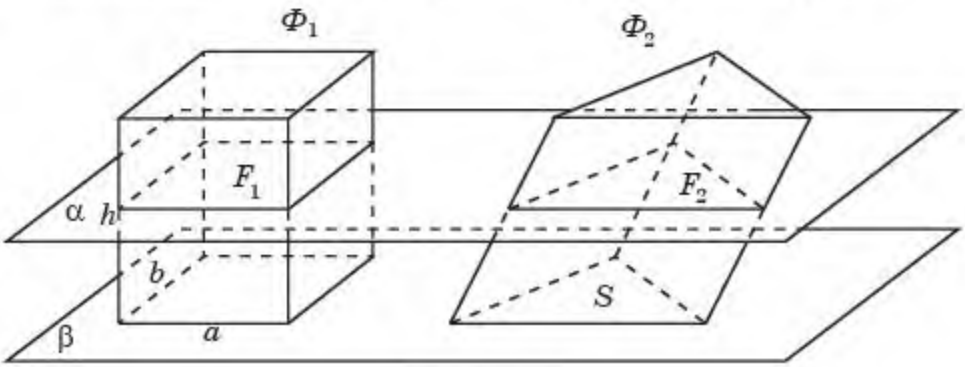
Кавальери принципін қолданып, кез келген призманың көлемін табу формуласын қорытуға болады.

Теорема. ***Призманың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады*:**

$$V = S \cdot h,$$

мұндағы S — призманың табанының ауданы, h — призманың биіктігі.

Дәлелдеуі. Табанының ауданы S және биіктігі h болатын призма үшін тікбұрышты параллелепипедті қарастырамыз. Оның бір төбесінен шығатын қырлары a, b, h-қа тең және $a \cdot b = S$ болсын. Призма мен параллелепипедті оның a, b қабырғалары жатқан жағы призма табанының β жазықтығында жататындай және өздері осы жазықтықтың бір жақ бөлігінде болатындай орналастырамыз (24.2-сурет).



24.2-сурет

Параллелепипедтің β жазықтығына параллель α жазықтығымен қимасында β жазықтығындағы қабырғалары a, b болатын тіктөртбұрышқа тең тіктөртбұрыш пайда болады. Призманың осы α жазықтығымен қимасында призманың табанына тең көпбұрыш алынады. Бұл қималардың аудандары тең. Демек, Кавальери принципі бойынша параллелепипед пен призманың көлемдері тең болады. Осыдан призманың көлемі $V = S \cdot h$ болатыны шығады. ◻

Тік призманың биіктігі оның бүйір қырымен беттеседі, ал көлемі табанының ауданы мен бүйір қырының көбейтіндісіне тең болады.

Биіктігі h және табанының қабырғалары a болатын дұрыс: а) үшбұрышты; ә) алтыбұрышты призманың көлемін табу формуласын қорытып шығарыңдар.

Сұрақтар

1. Кавальери принципі қалай тұжырымдалады?
2. Призманың көлемі қалай есептеледі?

Есептер

A

24.1. Үшбұрышты призманың табаны — катеттері 3 см және 4 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призманың биіктігі 10 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

24.2. Дұрыс үшбұрышты призманың биіктігі 5 см-ге, ал табанының қабырғалары 4 см-ге тең. Осы призманың көлемін табыңдар.

24.3. Дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір қырлары 3 см-ге, ал табанының қабырғалары 2 см-ге тең. Осы призманың көлемін табыңдар.

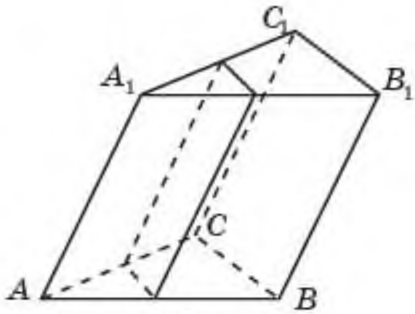
24.4. Төртбұрышты призманың табаны — қабырғалары 1 см-ге тең квадрат. Призманың бүйір қырлары 2 см-ге тең және олар табан жазықтығына 60° бұрыш жасап көлбеген. Призманың көлемін табыңдар.

24.5. Параллелепипедтің жағы — қабырғалары 1 см және сүйір бұрышы 60° болатын ромб. Параллелепипедтің бір қыры 1 см-ге тең және осы жағымен 60° бұрыш жасайды. Оның көлемін табыңдар.

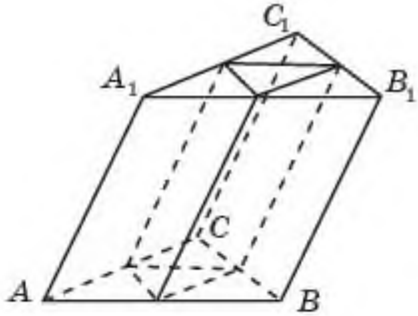
B

24.6. Дұрыс үшбұрышты призманың көлемі 4800 см^3-ге, ал табанының қабырғалары 20 см-ге тең. Призманың биіктігін табыңдар.

24.7. Үшбұрышты призманың табанының орта сызығы арқылы оның бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген (24.3-сурет). Бұл жазықтық призманың көлемін қандай қатынаста бөледі?



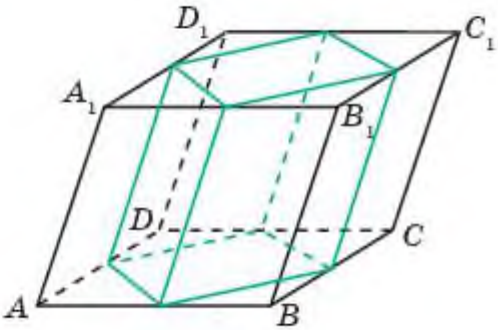
24.3-сурет



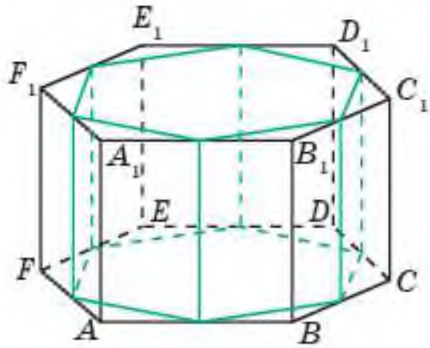
24.4-сурет

24.8. Үшбұрышты призманың көлемі 12 $см^3$-ге тең. Табанының төбелері берілген призманың табанының қабырғаларының орталары болатын екінші призманың көлемін табыңдар (24.4-сурет).

24.9. Төртбұрышты призманың көлемі 10 $см^3$-ге тең. Табанының төбелері берілген призманың табанының қабырғаларының орталары болатын екінші призманың көлемін табыңдар (24.5-сурет).



24.5-сурет



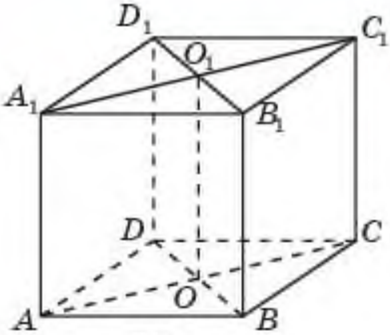
24.6-сурет

24.10. Алтыбұрышты призманың көлемі 12 $см^3$-ге тең. Табанының төбелері берілген призманың табанының қабырғаларының орталары болатын екінші призманың көлемін табыңдар (24.6-сурет).

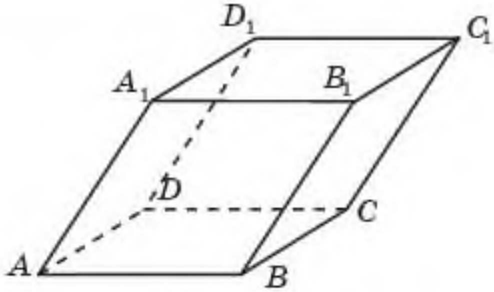
24.11. Дұрыс n-бұрышты екі призма ұқсас болуы үшін олардың бүйір қырлары мен табанының қабырғаларына қатысты шарттарды тұжырымдаңдар. Осы призмалардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

C

24.12. Тік призманың табаны — ауданы 1 $м^2$-ге тең болатын ромб. Оның диагональдық қималарының аудандары 3 $м^2$ және 6 $м^2$-ге тең (24.7-сурет). Призманың көлемін табыңдар.



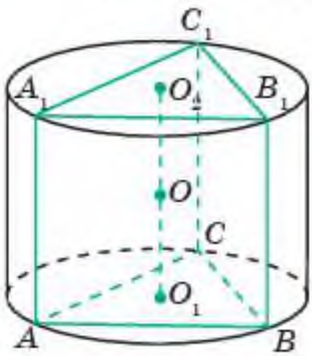
24.7-сурет



24.8-сурет

24.13. Параллелепипедтің ортақ төбесі бар үш жағы — қабырғалары 1 см және төбесіндегі сүйір бұрыштары 60°-қа тең ромбтар (24.8-сурет). Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

24.14. Параллелепипедтің көршілес екі жағының аудандары S_1 және S_2, ал олардың ортақ қыры a-ға тең және арасындағы екіжақты бұрышы 150°-қа тең (24.8-сурет). Параллелепипедтің көлемін табыңдар.



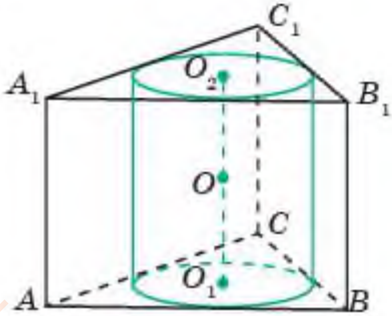
24.9-сурет

24.15. Кеңістікте үш параллелепипед берілген. Әрбір параллелепипедті екі теңшамалы бөліктерге бөлу үшін қиюшы жазықтықты қалай жүргізуге болады?

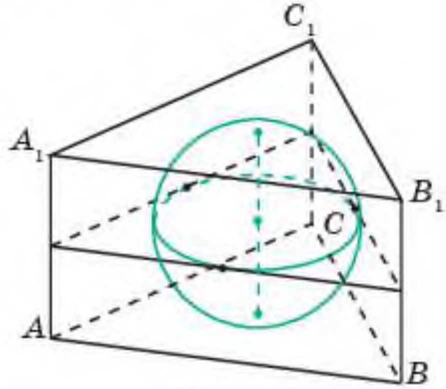
24.16. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге іштей сызылған дұрыс үшбұрышты призманың көлемін табыңдар (24.9-сурет).

24.17. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған дұрыс үшбұрышты призманың көлемін табыңдар (24.10-сурет).

24.18. Бірлік сфераға сырттай сызылған дұрыс үшбұрышты призманың көлемін табыңдар (24.11-сурет).

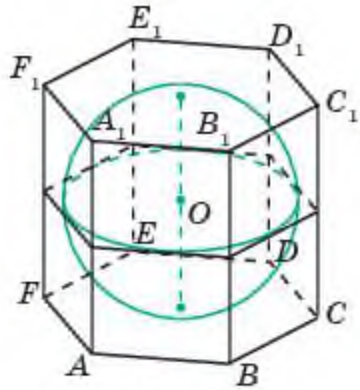


24.10-сурет



24.11-сурет

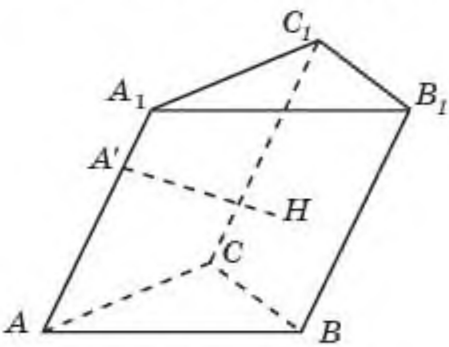
24.19. Бірлік сфераға сырттай сызылған дұрыс алтыбұрышты призманың көлемін табыңдар (24.12-сурет).



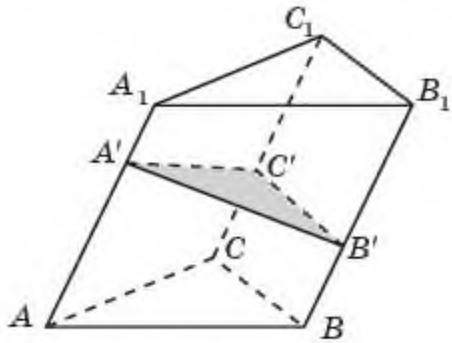
24.12-сурет

24.20. Үшбұрышты көлбеу призманың бір бүйір жағының ауданы Q-ға, ал осы бүйір жағынан оған қарсы жатқан қырына дейінгі қашықтық d-ға тең. Призманың көлемін табыңдар (24.13-сурет).

24.21. Көлбеу призманың көлемі оның бүйір қыры мен осы қырына перпендикуляр және барлық қырларымен қиылысатын жазықтықпен қимасының ауданының көбейтіндісіне тең болатынын дәлелдеңдер (24.14-сурет).



24.13-сурет



24.14-сурет

24.22. Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қырлары 6 см-ге және олардың арақашықтықтары 3 см, 4 см және 5 см-ге тең. Призманың көлемін табыңдар.

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

24.23. Айналу денелерінің және цилиндрдің анықтамаларын қайталаңдар.

§ 25. Цилиндр көлемі

Кавальери принципін цилиндрдің көлемін табуда қолданайық.

Теорема. ***Цилиндрдің көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады:***

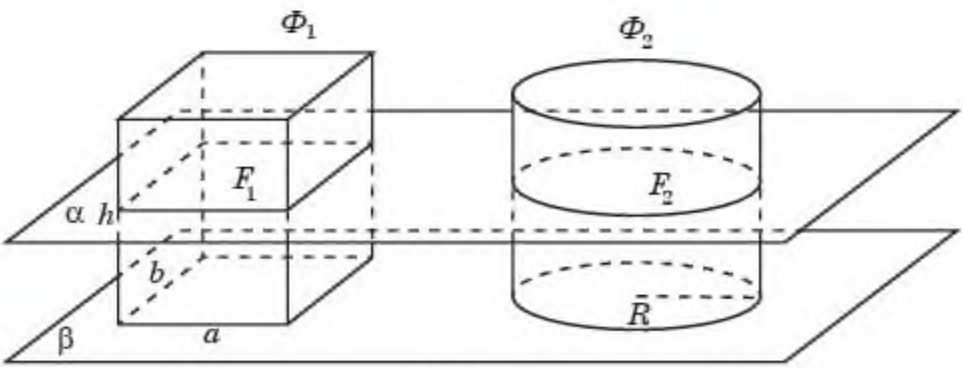
$$V = S \cdot h = \pi R^2 \cdot h,$$

мұндағы S — цилиндрдің табанының ауданы, R — табанының радиусы, h — цилиндрдің биіктігі.

Дәлелдеуі. Теореманың дәлелдемесі призманың көлемін табу формуласының дәлелдемесіне ұқсас болады. Табанының радиусы R және биіктігі h болатын цилиндр үшін тікбұрышты параллелепипедті қарастырамыз. Оның бір төбесінен шығатын қырлары a, b, h-қа тең және $a \cdot b = \pi R^2$ болсын.

Цилиндр мен параллелепипедті оның a, b қабырғалары жатқан жағы цилиндр табанының β жазықтығында жататындай және өздері осы жазықтықтың бір жақ бөлігінде болатындай орналастырамыз (25.1-сурет).

Параллелепипедтің β жазықтығына параллель α жазықтығымен қимасында β жазықтығындағы қабырғалары a, b болатын тіктөртбұрышқа тең тіктөртбұрыш пайда болады. Цилиндрдің осы α жазықтығымен қимасында — цилиндрдің табанына тең дөңгелек алынады. Бұл қималардың аудандары тең. Демек, Кавальери принципі бойынша параллелепипед пен цилиндрдің көлемдері тең болады. Осыдан цилиндрдің көлемі $\pi R^2 \cdot h$ болатыны шығады.



25.1-сурет

Сұрақтар

1. Цилиндрдің көлемі қалай есептеледі?

Есептер

А

25.1. Цилиндрдің жасаушысы 3 см-ге, ал табанының радиусы 2 см-ге тең. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

25.2. Цилиндрдің осьтік қимасы — қабырғасы a см болатын квадрат. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

25.3. Бір кесенің екіншісіне қарағанда 2 есе биіктеу, ал екінші кесенің біріншісіне қарағанда 1,5 есе кеңірек. Қандай кесенің сыйымдылығы жоғары?

25.4. Квадраттың қабырғасы a-ға тең. Квадратты қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

25.5. Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі 1 см-ге тең және ол табан жазықтығына 30° бұрыш жасап көлбейді. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

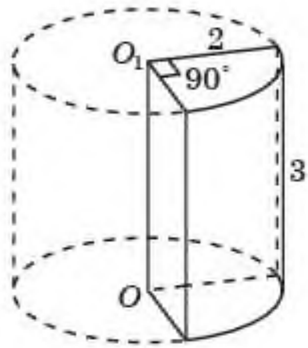
25.6. Бірлік кубқа іштей сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

25.7. Тік призманың табаны — қабырғасы 1 см-ге тең квадрат. Призманың бүйір қыры 2 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

B

25.8. Тіктөртбұрышты a және b-ға тең қабырғалары жатқан түзулерден айналдырғанда екі цилиндр пайда болды. Осы цилиндрлердің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

25.9. Дұрыс төртбұрышты призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемі осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің көлемінен неше есе артық?



25.2-сурет

25.10. 25.2-суреттегі цилиндрдің табанының радиусы 2 см-ге, ал жасаушысы 3 см-ге тең. Осы цилиндрден екіжақты тік бұрыш жасап қиылып алынған бөлігінің көлемін табыңдар.

25.11. Цилиндрлік ыдыстың табанының диаметрі 9 см-ге тең. Ыдысқа қандайда бір бөлшекті салғанда оның ішіндегі сұйықтың деңгейі 12 см-ге көтерілді. Бөлшектің көлемін табыңдар.

25.12. Цилиндрлік ыдыстағы сұйықтың деңгейі 16 см-ге тең. Егер осы сұйықты диаметрі бұл ыдыстан 2 есе үлкен болатын екінші ыдысқа құйса, онда сұйықтың деңгейі қандай биіктікте болады?

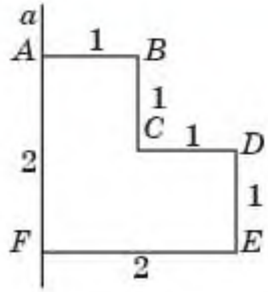
25.13. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы — қабырғалары 1 см және 2 см болатын тіктөртбұрыш. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

25.14. Бірлік сфераға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

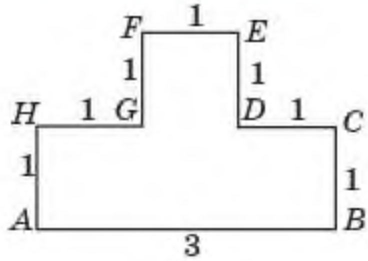
25.15. Екі цилиндр ұқсас болуы үшін олардың жасаушылары мен табандарының радиустарына қатысты шарттарды жазыңдар. Осы цилиндрлердің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

C

25.16. 25.3-суретте барлық бұрыштары тік болатын көпбұрыш кескінделген. Осы көпбұрышты 2 см-ге тең қабырғасы жататын түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.



25.3-сурет



25.4-сурет

25.17. 25.4-суретте барлық бұрыштары тік болатын көпбұрыш кескінделген. Осы көпбұрышты 3 см-ге тең қабырғасы жататын AB түзуінен айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

25.18. Призманың бүйір қырлары 2 см-ге тең, ал табаны — қабырғасы 1 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш. Осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

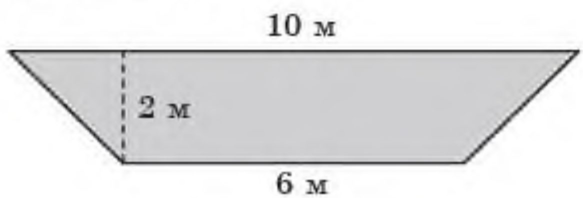
25.19. Призманың бүйір қырлары 5 см-ге тең, ал табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

25.20. Дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

25.21. Дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

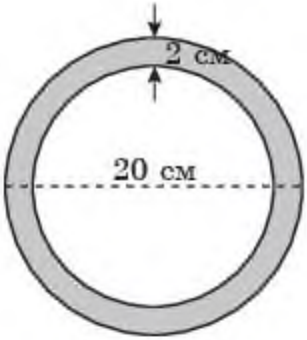
25.22. Цилиндрдің табандарының центрлерін қосатын кесіндінің ортасы арқылы өтетін кез келген жазықтық осы цилиндрді екі теңшамалы бөліктерге бөлетінін дәлелдеңдер.

25.23. Өзен арнасының көлденеңінен кесілген кескіні теңбүйірлі трапеция тәріздес. Оның табандары 10 м және 6 м, ал биіктігі — 2 м (25.5-сурет). Өзен ағысының жылдамдығы 1 м/с болса, осы кескіннен 1 мин-та қандай көлемде су өтетінін табыңдар. Жауабын метр кубпен беріңдер.

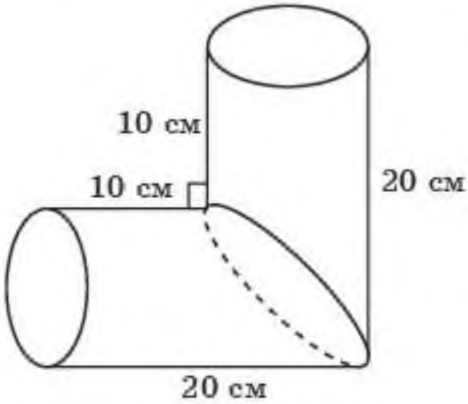


25.5-сурет

25.24. Шойын құбырының ұзындығы 2 м, ал сыртқы диаметрі 20 см-ге тең. Құбыр қабырғасының қалыңдығы 2 см (25.6-сурет). Егер шойынның тығыздығы шамамен 7,5 г/см^3 болса, құбырдың салмағын табыңдар. Жауабын килограммен беріңдер ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).



25.6-сурет



25.7-сурет

25.25. 25.7-суреттегі 90° бұрыш жасайтын цилиндрлердің екі тең бөлігінен тұратын фигураның көлемін табыңдар ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

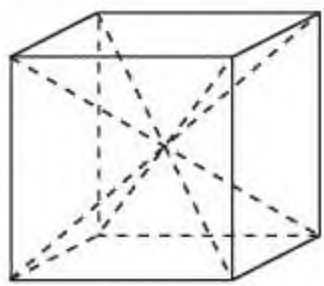
Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

25.26. Пирамиданың және қиық пирамиданың анықтамаларын қайталаңдар.

§ 26. Пирамида және қиық пирамида көлемдері

Пирамиданың көлемін есептеу туралы алғашқы мәліметтер б.з.д. 3000 жыл бұрын ежелгі вавилондықтар мен мысырлықтардың папирустарынан табылған.

Бір қызығы, олар пирамиданың көлемін табудың жалпы формуласын қорытып шығармады, бірақ нақты пирамидалардың көлемдерін есептеген. Осылайша биіктігі $\frac{1}{2}$-ге, ал табаны өлшем бірлігіне тең дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемін таба білген. Ол үшін олар қыры өлшем бірлігіне тең кубты алып, оны 6 тең дұрыс төртбұрышты пирамидаларға бөледі. Бұл пирамидалардың табандары кубтың жақтары болады және олардың әрқайсысының төбесі кубтың центрінде орналасады (26.1-сурет). Барлық алты пирамида өзара тең болады. Осыдан олардың әрқайсының көлемі кубтың көлемінің $\frac{1}{6}$-не тең болатынын аламыз.

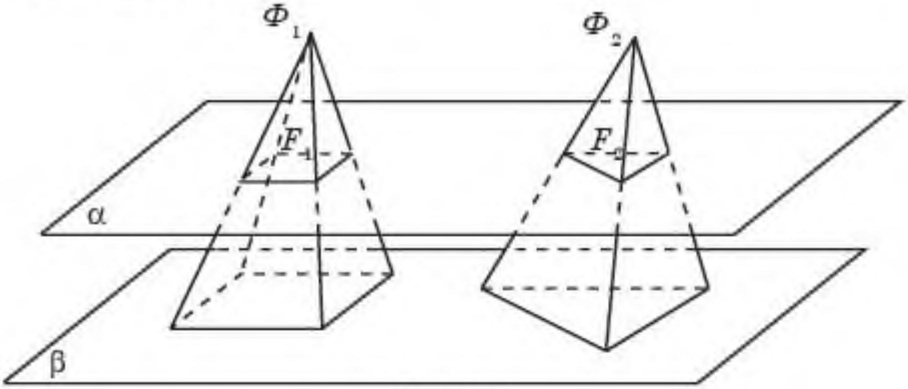


26.1-сурет

Кавальери принципін қолданып, мынадай көмекші теореманы дәлелдейік.

Теорема. ***Егер екі пирамиданың биіктіктері және табандарының аудандары өзара тең болса, онда олардың көлемдері тең болады.***

Дәлелдеуі. Φ_1 және Φ_2 пирамидаларының биіктіктері h-қа тең болсын және аудандары S-ке тең болатын табандары бір β жазықтығында жатсын (26.2-сурет).



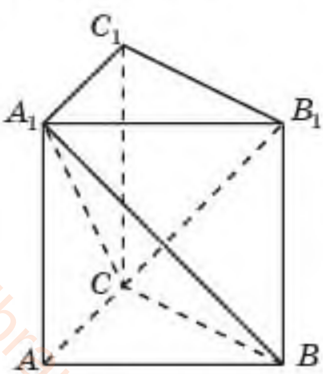
26.2-сурет

β жазықтығына параллель және одан x қашықтықта болатын α жазықтығын жүргіземіз ($0 \leqslant x \leqslant h$). Сонда пирамидалардың осы жазықтықпен қималарында пайда болған F_1 және F_2 фигуралары сәйкесінше табандарына ұқсас болады және екеуінде де k ұқсастық коэффициенті $(h - x) : h$-қа тең болады. Демек, F_1 және F_2 фигураларының S_1 және S_2 аудандары сәйкесінше $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулаларымен өрнектеледі. Ендеше, олар өзара тең болады. Кавальери принципі бойынша пирамидалардың көлемдері тең болатыны шығады.

Енді үшбұрышты пирамиданың көлемі туралы негізгі теореманы дәлелдейік.

Теорема. ***Үшбұрышты пирамиданың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең болады.***

Дәлелдеуі. A_1ABC — үшбұрышты пирамида болсын. Оны $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмасына дейін толықтырып саламыз (26.3-сурет).



26.3-сурет

B, C, A_1 және C, B_1, A_1 нүктелері арқылы өтетін жазықтықтар бұл призманы төбесі A_1 нүктесі болатын A_1ABC, A_1CBB_1 және $A_1CB_1C_1$ пирамидаларына бөледі.

A_1CBB_1 және $A_1CB_1C_1$ пирамидаларының CBB_1 және CB_1C_1 табандары тең болады, өйткені CB_1 диагоналі CBB_1C_1 параллелограмын екі тең үшбұрыштарға бөледі. Сонымен қатар бұл пирамидалардың төбелері ортақ және табандары бір жазықтықта жатыр. Демек, бұл пирамидалардың ортақ биіктігі болады. Осыдан пирамидалардың көлемдері тең болатыны шығады. Енді A_1ABC және $CA_1B_1C_1$ пирамидаларын қарастырайық. Олардың ABC және $A_1B_1C_1$ табандары тең және биіктіктері де тең болады. Демек, бұл пирамидалардың көлемдері тең болады. Сонымен, барлық үш пирамиданың көлемдері тең болады.

Призманың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең екенін ескеріп, үшбұрышты пирамиданың V көлемін табу формуласын аламыз:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

мұндағы S — пирамида табанының ауданы, h — пирамиданың биіктігі. ☐

Енді кез келген пирамиданың көлемін табу мәселесін қарастырайық.

Теорема. ***Пирамиданың көлемі оның табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең болады.***

Дәлелдеуі. Берілген пирамида үшін табанының ауданы мен биіктігі бірдей үшбұрышты пирамиданы қарастырамыз.

Кавальери принципі бойынша бұл пирамидалардың көлемдері тең болады. Демек, мынадай формула орынды болып табылады:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

мұндағы S — пирамида табанының ауданы, h — пирамиданың биіктігі. ☐

Биіктігі h және табанының қабырғалары a болатын дұрыс: а) үшбұрышты; ә) алтыбұрышты пирамиданың көлемін табу формуласын қорытып шығарыңдар.

Қиық пирамиданың көлемін табу формуласын шығарайық.

Теорема. ***Қиық пирамиданың V көлемі мынадай формуламен есептеледі:***

$$V = \frac{1}{3}h_қ(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

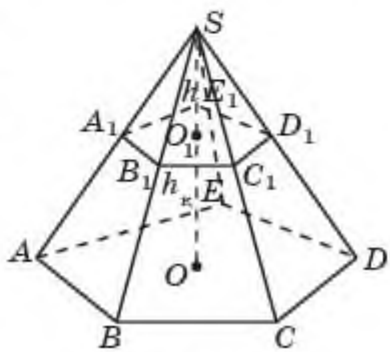
мұндағы S, s — қиық пирамиданың табандарының аудандары, $h_қ$ — оның биіктігі.

Дәлелдеуі. Қиық пирамиданың табандарының аудандары S және s-ке тең болсын. Ал оның $h_қ$ биіктігі бастапқы және қиылып түскен пирамидалардың биіктіктерінің $(H - h)$ айырымына тең болсын.

26.4-суретте $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ бесбұрышты қиық пирамида кескінделген.

Қиық пирамиданың V көлемі үшін мынадай формула орынды болады:

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$



26.4-сурет

Қиық пирамиданың $h_қ$ биіктігін оның табандарының S, s аудандары мен бастапқы және қиылып түскен пирамидалардың H, h биіктіктері арқылы өрнектейміз.

Пирамиданың табанына параллель жазықтықпен қимасында оның табанына ұқсас фигура пайда болатынын байқаймыз. Ал ұқсастық коэффициенті пирамиданың төбесінен қима жазықтығына және табан жазықтығына дейінгі қашықтықтардың қатынасына тең, яғни $\frac{h}{H}$-қа тең болады. Сонымен қатар ұқсас фигуралардың аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициенттің квадратына тең болады.

Осыдан мынадай теңдікті аламыз:

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{H - h_қ}{H}\right)^2.$$

Бұл теңдіктен H және h биіктіктерін табамыз:

$$H = \frac{h_қ\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}, \; h = \frac{h_қ\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Табылған H, h мәндерін қиық пирамиданың V көлемі үшін формулаға қойып, ізделінді формуланы табамыз:

$$V = \frac{1}{3}\left(S\frac{h_қ\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} - s\frac{h_қ\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}h_қ \cdot \frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} = \frac{1}{3}h_қ(S + \sqrt{S \cdot s} + s).$$ □

Биіктігі $h_қ$ және табандарының қабырғалары a мен b болатын дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың көлемін табу формуласын қорытып шығарыңдар.

Сұрақтар

1. Үшбұрышты пирамиданың көлемі қалай есептеледі?
2. Кез келген пирамиданың көлемі қалай есептеледі?
3. Қиық пирамиданың көлемі қалай есептеледі?

Есептер

А

26.1. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі h-қа, ал табанының қабырғалары a-ға тең. Осы пирамиданың көлемін табу формуласын қорытып шығарыңдар.

26.2. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 3 м-ге, ал бүйір қырлары 5 м-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

26.3. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі мен табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

26.4. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың биіктігі мен табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

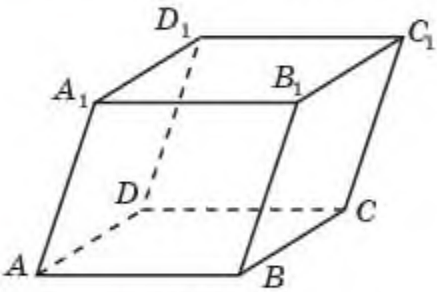
26.5. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

26.6. Тетраэдрдің қыры 1 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

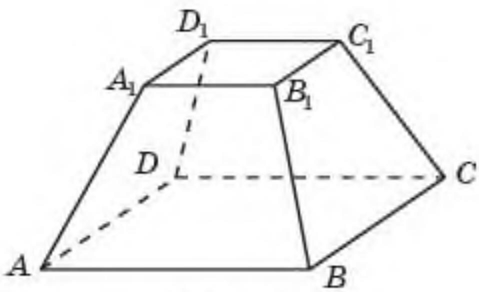
26.7. Егер дұрыс тетраэдрдің барлық қырларын 2 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

26.8. Егер дұрыс пирамиданың биіктігін 3 есе арттырса, ал табанының қабырғаларын 3 есе кемітсе, онда оның көлемі қалай өзгереді?

26.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің көлемі 1 см^3-ге тең. Төбелері: 1) A, B, C, D, B_1; 2) A, B, D, C_1 нүктелері болатын көпжақтың көлемін табыңдар (26.5-сурет).



26.5-сурет



26.6-сурет

26.10. Пирамиданың биіктігінің ортасы арқылы өтетін және табанына параллель жазықтықпен қимасы жүргізілген. Пирамиданың пайда болған бөліктері көлемдерінің қатынасын табыңдар.

26.11. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың биіктігі 3 см-ге, ал табандарының қабырғалары 2 см және 1 см-ге тең. Қиық пирамиданың көлемін табыңдар (26.6-сурет).

B

26.12. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың диагональдық қимасы — қабырғасы 1 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

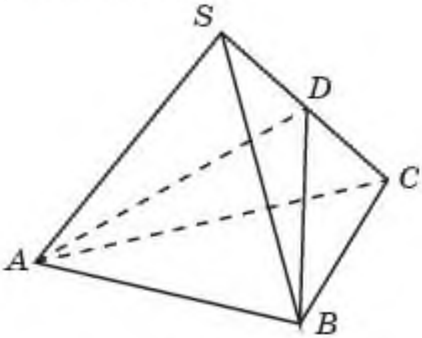
26.13. Үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары өзара перпендикуляр және олардың әрқайсысы 1 см-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

26.14. Үшбұрышты пирамиданың барлық бүйір қырлары 1 см-ге, ал төбесіндегі жазық бұрыштары 60°, 90° және 90°-қа тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

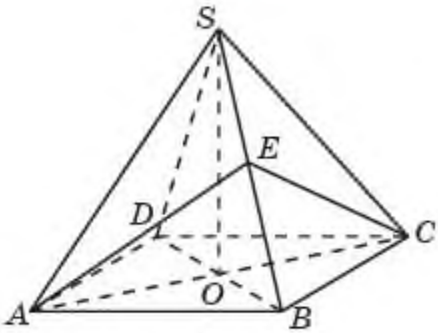
26.15. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың көлемі 6 см^3-ге, табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

26.16. Параллелепипедтің көлемі 1 см^3-ге тең (26.5-сурет). BDA_1C_1 тетраэдрінің көлемін табыңдар.

26.17. Үшбұрышты пирамиданың табанының бір қабырғасы және оған қарсы жатқан қырының ортасы арқылы жазықтық өтеді (26.7-сурет). Бұл жазықтық пирамиданың көлемін қандай қатынаста бөледі?



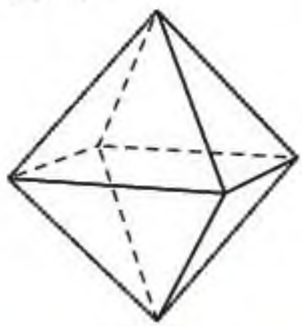
26.7-сурет



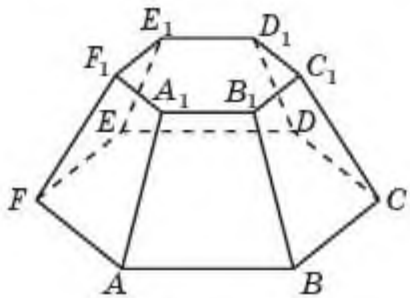
26.8-сурет

26.18. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемі 12 $см^3$-ге тең. Пирамиданың табанының AC диагоналі және оған қарсы жатқан бүйір қырының E ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қиылып түскен бөлігінің көлемін табыңдар (26.8-сурет).

26.19. Октаэдрдің қырлары 1 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар (26.9-сурет).



26.9-сурет



26.10-сурет

26.11-сурет

26.20. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың биіктігі 3 см-ге, ал табандарының қабырғалары 2 см және 1 см-ге тең (26.10-сурет). Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

26.21. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бейбітшілік пен келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес болып табылады (26.11-сурет). Оның биіктігі мен табанының қабырғасы 62 м-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

26.22. Дұрыс n-бұрышты екі пирамида ұқсас болу үшін олардың бүйір қырлары мен табандарының қабырғаларына қатысты шарттарды жазыңдар. Осы пирамидалардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

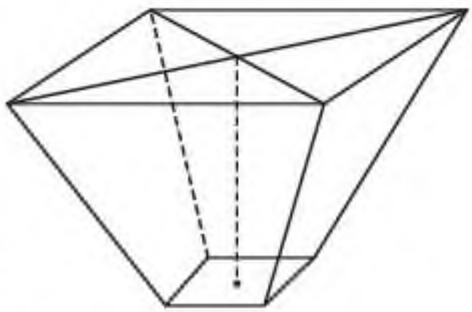
26.23. 26.12-суретте ежелгі Мысырдағы ең үлкен ғимараттардың бірі — Хеопс пирамидасы — дұрыс төртбұрышты пирамида кескінделген. Оның биіктігі 146 м-ге, ал бүйір қырлары 230 м-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

26.12-сурет

26.13-сурет

26.24. 26.13-суретте шатыры пирамида пішіндес және табаны квадрат болатын тұрғын үй бейнеленген. Пирамиданың барлық қырлары 12 м-ге тең. Осы үйдің шатырының көлемін табыңдар.

26.25. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида пішіндес көгөністерді сақтауға арналған жәшіктің табандарының қабырғалары сәйкесінше 6 дм және 14,4 дм-ге тең (26.14-сурет). Пирамиданың биіктігі — 4,3 дм. Егер 1 дм^3-де 0,675 кг көгөніс болса, онда жәшіктің көлемі мен оның ішіндегі көгөністің салмағын табыңдар.

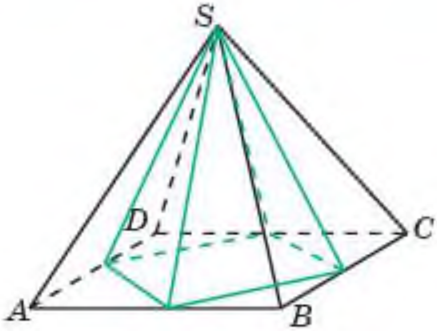


26.14-сурет

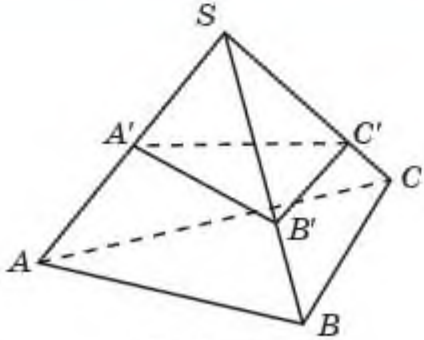
C

26.26. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал оның бүйір жағы мен табанының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

26.27. $SABCD$ төртбұрышты пирамидасының көлемі 1 см^3-ге тең. Төбесі берілген пирамиданың S төбесімен сәйкес келетін, ал табанының төбелері $ABCD$ табаны қабырғаларының орталары болатын пирамиданың көлемін табыңдар (26.15-сурет).



26.15-сурет



26.16-сурет

26.28. Тетраэдрдің көлемі 1 см^3-ге тең. Төбелері осы тетраэдрдің қырларының орталары болатын көпжақтың көлемін табыңдар.

26.29. Тетраэдрдің қарама-қарсы жатқан екі қыры өзара перпендикуляр және ұзындықтары 3 см-ге тең. Олардың арақашықтығы 2 см-ге тең. Тетраэдрдің көлемін табыңдар.

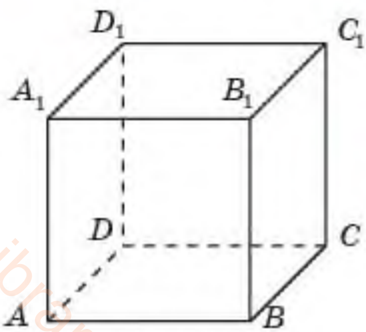
26.30. Тетраэдрдің қарама-қарсы жатқан екі қырының арасындағы бұрыш 60° және олардың ұзындықтары 2 см-ге тең. Олардың арақашықтығы 3 см-ге тең. Тетраэдрдің көлемін табыңдар.

26.31. $SABC$ үшбұрышты пирамидасының SA, SB, SC қырларын жазықтық сәйкесінше A', B', C' нүктелерінде қиып өтеді (26.16-сурет) және $SA' : SA = k$, $SB' : SB = l$, $SC' : SC = m$. $SA'B'C'$ пирамидасының көлемі $SABC$ пирамидасы көлемінің $k \cdot l \cdot m$-ге көбейтіндісіне тең болатынын дәлелдеңдер. Бастапқы пирамиданың көлемі 1 см^3-ге тең және $SA' : SA = 1 : 2$, $SB' : SB = 2 : 3$, $SC' : SC = 3 : 4$ деп алып, $SA'B'C'$ пирамидасының көлемін табыңдар.

26.32. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы ADA_1BCB_1 және ABA_1DCD_1 призмаларының ортақ бөлігінің көлемін табыңдар (26.17-сурет).

26.33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы ADA_1BCB_1 және $BA_1B_1CD_1C_1$ призмаларының ортақ бөлігінің көлемін табыңдар (26.17-сурет).

26.34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы A_1ABCD және C_1ABCD призмаларының ортақ бөлігінің көлемін табыңдар (26.17-сурет).



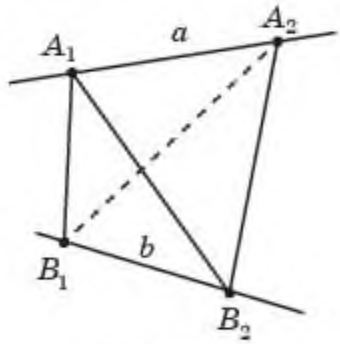
26.17-сурет

26.35. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубындағы A_1ABCD және $DBCC_1B_1$ пирамидаларының ортақ бөлігінің көлемін табыңдар (26.17-сурет).

26.36. Бір үшбұрышты пирамиданың көлемі 1 см^3-ге тең. Осы пирамиданың биіктігінің ортасы арқылы өтетін және табанына параллель жазықтыққа қарағанда айналы симметриялы екінші пирамида алынған. Пирамидалардың ортақ бөлігінің көлемін табыңдар.

26.37. Бір дұрыс тетраэдрдің көлемі 1 $см^3$-ге тең. Осы тетраэдрдің екі қарама-қарсы жатқан қырларының орталарын қосатын кесіндінің ортасына қарағанда центрлік симметриялы екінші дұрыс тетраэдр алынған. Тетраэдрлердің ортақ бөлігінің көлемін табыңдар.

26.38. a және b айқас түзулерінен сәйкесінше A_1A_2 және B_1B_2 кесінділері алынған (26.18-сурет). $A_1A_2B_1B_2$ тетраэдрінің көлемі түзулердегі осы кесінділердің орналасуына емес, тек олардың ұзындықтарына байланысты екенін дәлелдеңдер.



26.18-сурет

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

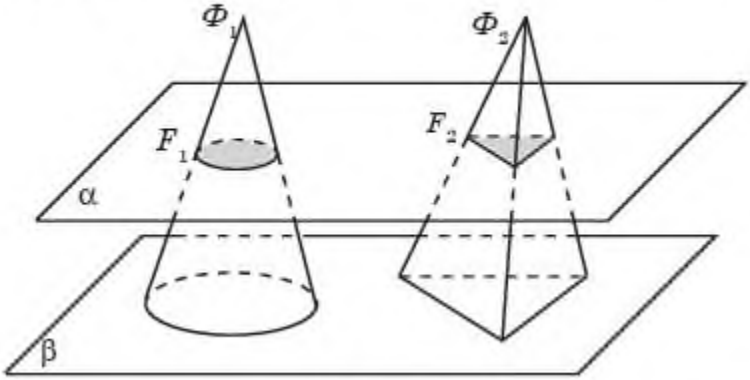
26.39. Конустың және қиық конустың анықтамаларын қайталаңдар.

§ 27. Конус және қиық конус көлемдері

Кавальери принципін конустың көлемін табуда қолданайық.

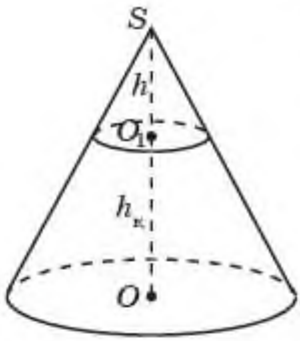
Теорема. ***Конустың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігі көбейтіндісінің үштен біріне тең болады.***

Дәлелдеуі. Табанының ауданы S және биіктігі h-қа тең конус үшін табанының ауданы және биіктігі дәл сондай болатын қандай да бір пирамиданы қарастырамыз. Оларды табандары β жазықтығында жататындай және өздері осы жазықтықтың бір жақ бөлігінде болатындай орналастырамыз (27.1-сурет).



27.1-сурет

β жазықтығына параллель және одан x қашықтықта болатын α жазықтығын жүргіземіз ($0 < x < h$). Сонда конус пен пирамиданың осы жазықтықпен қималарында пайда болған F_1 және F_2 фигуралары сәйкесінше табандарына ұқсас болады және екеуінде де k ұқсастық коэффициенті $(h - x) : h$-қа тең болады. Демек, F_1 және F_2 фигураларының S_1 және S_2 аудандары сәйкесінше $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулаларымен өрнектеледі. Ендеше, олар өзара тең болады. Кавальери принципі бойынша конус пен пирамиданың көлемдері тең болатыны шығады. Осыдан конустың V көлемін табу үшін мынадай формула орынды болады:



27.2-сурет

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

мұндағы R — конустың табанының радиусы, h — конустың биіктігі.

Қиық пирамиданың көлемін табу формуласына ұқсас қиық конустың көлемі үшін мынадай формула орынды болады:

$$V = \frac{1}{3}h_қ(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

мұндағы S, s — қиық конус табандарының аудандары, $h_қ$ — қиық конустың биіктігі (27.2-сурет).

Бұл формуланың дәлелдемесі қиық пирамиданың көлемін табу формуласына ұқсас болады. Оны өздерің дәлелдеңдер.

Қиық конустың табандарының S және s аудандары сәйкесінше πR^2 және πr^2-қа тең екенін ескеріп, оның V көлемін табу үшін мынадай формуланы аламыз:

$$V = \frac{1}{3}\pi h_қ(R^2 + \sqrt{R \cdot r} + r^2).$$

мұндағы R және r — қиық конустың табандарының радиустары, $h_қ$ — оның биіктігі.

Сұрақтар

1. Конустың көлемі қалай есептеледі?
2. Қиық конустың көлемі қалай есептеледі?

Есептер

A

27.1. Егер конустың: 1) биіктігін 3 есе арттырса; 2) табанының радиусын 2 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

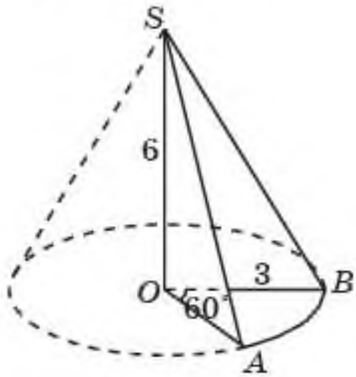
27.2. Егер конустың биіктігін 2 есе кемітсе, ал табанының радиусын 2 есе арттырса, онда оның көлемі өзгере ме?

27.3. Цилиндр мен конустың ортақ табаны бар және биіктігі бірдей. Егер цилиндрдің көлемі 15 $см^3$-ге тең болса, онда конустың көлемін табыңдар.

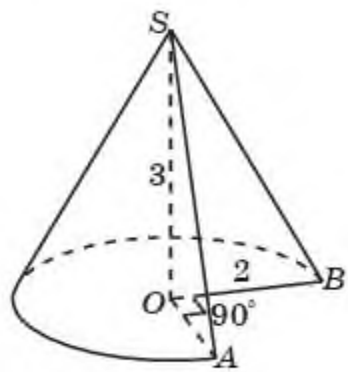
27.4. Конустың көлемі V-ға тең. Конустың биіктігінің ортасы арқылы өтетін және табанына параллель қима жүргізілген. Конустың пайда болған бөліктерінің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

27.5. Конустың биіктігі 3 см-ге, ал жасаушысы 5 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

27.6. Конустың табанының радиусы 3 см-ге, ал биіктігі 6 см-ге тең және $\angle AOB = 60^\circ$. 27.3-суреттегі конустың бөлігінің көлемін табыңдар.



27.3-сурет



27.4-сурет

27.7. Конустың табанының радиусы 2 см-ге, ал биіктігі 3 см-ге тең және $\angle AOB = 90^\circ$. 27.4-суреттегі конустың бөлігінің көлемін табыңдар.

27.8. Қиық конустың табандарының радиустары 1 см және 2 см-ге, ал биіктігі 3 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

B

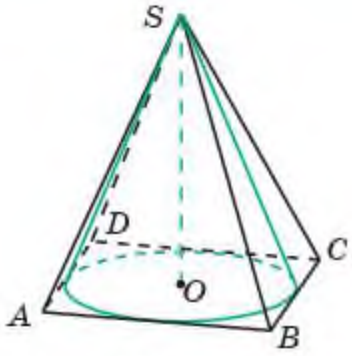
27.9. Конустың табанының диаметрі 12 см-ге, ал осьтік қимасының төбесіндегі бұрышы 90°-қа тең. Конустың көлемін табыңдар.

27.10. Конустың осьтік қимасы — ауданы 9 $см^2$ болатын тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш. Конустың көлемін табыңдар.

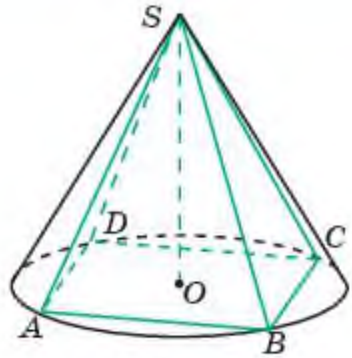
27.11. Қабырғасы 1 см болатын теңқабырғалы үшбұрышты оның биіктігі жататын түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

27.12. Теңбүйірлі емес тікбұрышты үшбұрышты оның әрбір катетінен айналдырғанда екі конус пайда болды. Осы конустардың көлемдері тең бола ма?

27.13. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 6 см-ге, ал табанының қабырғалары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған конустың көлемін табыңдар (27.5-сурет).



27.5-сурет

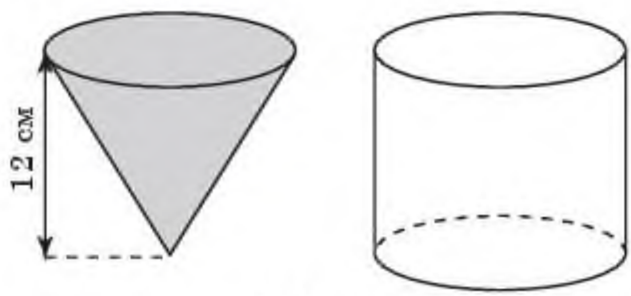


27.6-сурет

27.14. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған конустың көлемін табыңдар (27.6-сурет).

27.15. Конустың көлемі 1 см^3-ге тең. Конустың биіктігі тең үш бөлікке бөлінген және бөліну нүктелері арқылы оның табанына параллель жазықтықтар жүргізілген. Конустың ортаңғы бөлігінің көлемін табыңдар.

27.16. Биіктігі 12 см болатын конустық ыдысқа толтырылған су цилиндрлік ыдысқа аударылып құйылды. Цилиндрлік ыдыстың табанының радиусы конустық ыдыс шеңберінің радиусына тең (27.7-сурет). Цилиндрлік ыдыстағы судың беті оның табанынан қандай биіктікте болады?



27.7-сурет

27.17. Қиық конустың табандарының радиустары 6 см және 2 см, ал жасаушысы 5 см-ге тең. Осы қиық конустың көлемін табыңдар.

27.18. Теңбүйірлі трапецияның табандары 4 см және 6 см, ал биіктігі 3 см-ге тең. Трапецияны оның табандарының орталары арқылы өтетін түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

27.19. Екі конус ұқсас болу үшін олардың жасаушылары мен табандарының радиустарына қатысты шарттарды жазыңдар. Осы конустардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

27.20. Киіз үй — көшпенділердің ежелден келе жатқан тұрғын үйі (27.8-сурет). Киіз үйдің керегесі цилиндр пішіндес, ал осы кереге мен шаңырақты жалғастырып тұратын уықтар қиық конусты жасайды. Цилиндрдің табанының диаметрі 5 м-ге, қиық конустың табандарының диаметрлері 5 м және 1 м-ге, ал цилиндр мен қиық конустың биіктіктері 2 м-ге тең. Киіз үйдің көлемін табыңдар.

27.8-сурет

C

27.21. Тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыштың катеті 3 см-ге тең. Тікбұрышты үшбұрышты осы катеті осы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

27.22. Бірлік квадратты оның диагоналі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

27.23. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғалары 1 см-ге, ал олардың арасындағы бұрыш 120°-қа тең. Үшбұрыштың бір бүйір қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

27.24. Конустың бүйір бетінің жазбасы — радиусы 2 см-ге тең жарты дөңгелек. Осы конустың көлемін табыңдар.

27.25. Бір конустың көлемі 1 см-ге тең. Осы конустың биіктігінің ортасы арқылы өтетін және табанына параллель жазықтыққа қарағанда айналы симметриялы екінші конус алынған. Конустардың ортақ бөлігінің көлемін табыңдар.

27.26. Теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғалары 2 см-ге тең. Үшбұрыштың бір төбесі арқылы өтетін және биіктігіне параллель түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар.

27.27. Құрылыс алаңындағы конус пішіндес үйінді құмның табанындағы шеңберінің ұзындығын метрлік таспамен өлшегенде 21,6 м болды (27.9-сурет). Метрлік таспаны үйіндінің төбесі арқылы асыра

27.9-сурет

лақтырып өлшегенде оның екі жасаушысының ұзындығы 7,8 м екені анықталды. Үйінді құмның көлемін табыңдар ($\pi \approx 3$ деп алыңдар).

Жаңа білімді меңгеруге дайындалыңдар

27.28. Шардың анықтамасын және Кавальери принципін қайталаңдар.

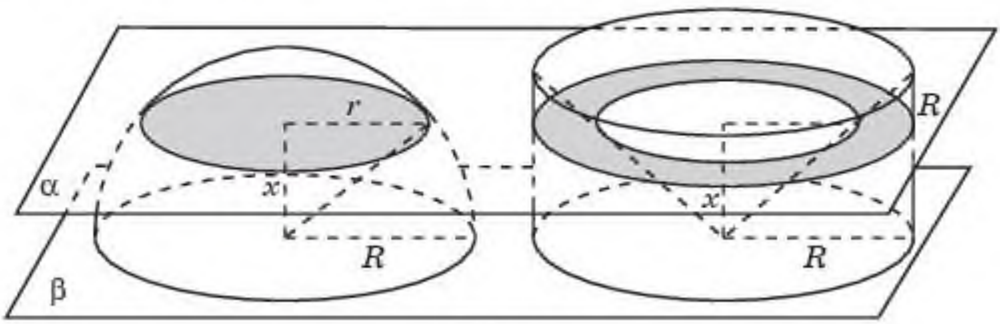
§ 28. Шар және оның бөліктерінің көлемдері

Кавальери принципін қолданып, шардың көлемін табу формуласын қорытып шығарайық.

Теорема. ***Радиусы R-ге тең шардың V көлемі мынадай формуламен есептеледі:***

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Дәлелдеуі. Радиусы R-ге тең және табаны β жазықтығында жататын жарты шарды қарастырайық. Сонымен қатар табаны осы β жазықтығында жататын цилиндрді алайық және оның табанының радиусы R-ге, биіктігі де R-ге тең болсын (28.1-сурет).



28.1-сурет

Төбесі цилиндрдің төменгі табанының центрінде, ал табаны цилиндрдің жоғарғы табаны болатындай осы цилиндрге іштей конус сызамыз.

Конустың ішінде жатпайтын цилиндрдің нүктелерінен тұратын Φ фигурасы мен берілген жарты шардың көлемдері тең болатынын дәлелдейік.

β жазықтығына параллель және одан x қашықтықта болатын α жазықтығын жүргіземіз ($0 < x < R$). Сонда жарты шардың осы жазықтықпен қимасында радиусы $\sqrt{R^2 - x^2}$ және ауданы $\pi(R^2 - x^2)$ болатын дөңгелек алынады. Φ фигурасының α жазықтығымен қимасында ішкі дөңгелегінің радиусы x-ке, ал сыртқы дөңгелегінің радиусы R-ге тең сақина пайда болады. Бұл сақинаның ауданы $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$-қа тең. Демек, ол жарты шардың қимасы ауданына тең болады.

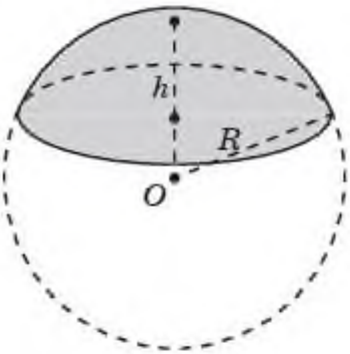
Кавальери принципі бойынша, жарты шар мен Φ фигурасының көлемдері тең болады. Осы көлемді есептейік. Ол цилиндр мен конустың көлемдерінің айырымына тең болады, яғни

$$V = V_{ц} - V_{к} = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

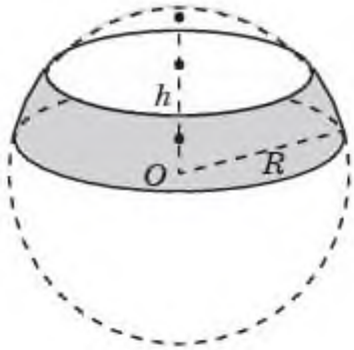
Шардың көлемі жарты шардың көлемінен екі есе үлкен болады. Демек, шардың көлемі мынадай формуламен есептеледі:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Енді шардың центрі арқылы өтпейтін қандай да бір жазықтықпен қиып алынған шардың кіші бөлігі — шар сегментінің көлемін табу формуласын қорытып шығарамыз (28.2-сурет).



28.2-сурет



28.3-сурет

Теорема. ***Радиусы R-ге тең шардан қиып алынған шар сегментінің көлемі мынадай формуламен есептеледі:***

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

мұндағы h — шар сегментінің биіктігі.

Дәлелдеуі. Шардың көлемін табу формуласын дәлелдеуі бойынша жарты шардан α жазықтығымен қиып алынған шар сегментінің көлемі Φ фигурасының α жазықтығымен қиылып түскен бөлігінің көлеміне тең болатыны шығады (28.1-сурет).

Егер шар сегментінің биіктігі h-қа тең болса, онда цилиндрден қиып алынған бөлігінің көлемі $\pi R^2 h$-қа тең болады. Конустың қиылып түскен бөлігінің көлемі $\frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(R - h)^3 = \pi R^2 h - \pi h^2 R + \frac{1}{3}\pi h^3$-қа тең болады. Осыдан шар сегментінің V көлемін табудың ізделінді формуласы алынады.

Шармен қиылысатын параллель екі жазықтықтың арасында шектелген шардың бөлігі — шар белдеуінің көлемін табу формуласын өздерің қорытып шығарыңдар (28.3-сурет).

Сұрақтар

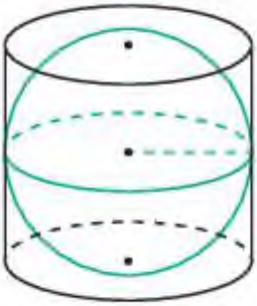
1. Шардың көлемі қалай есептеледі?
2. Шар сегментінің көлемі қалай есептеледі?

Есептер

А

28.1. Шардың диаметрі 6 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.

28.2. Егер шардың радиусын: 1) 3 есе; 2) 4 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?



28.4-сурет

28.3. Үш шардың радиустары 3 см, 4 см және 5 см-ге тең. Көлемі осы шарлардың көлемдерінің қосындысына тең шардың радиусын табыңдар.

28.4. Көлемдерінің қосындысы радиусы 6 см болатын шардың көлеміне тең болатындай радиусы 2 см-ге тең неше шар алуға болады?

28.5. Кубтың қыры 1 см-ге тең. Кубқа іштей сызылған шардың көлемін табыңдар.

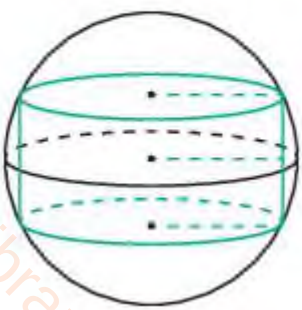
28.6. Цилиндрдің биіктігі 2 см-ге тең. Цилиндрге іштей сызылған шардың көлемін табыңдар (28.4-сурет).

В

28.7. Шардың центрінен 8 см қашықтықтағы жазықтықпен қимасының радиусы 6 см-ге тең. Шардың көлемін табыңдар.

28.8. Кубтың қыры 1 см-ге тең. Кубқа сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар.

28.9. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусы 1 см-ге тең. Цилиндрге сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар (28.5-сурет).

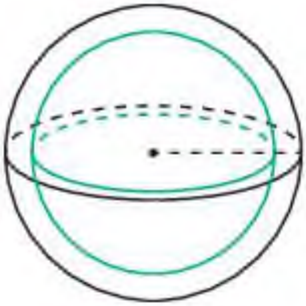


28.5-сурет

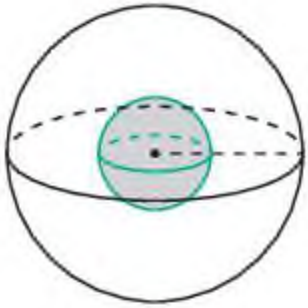
28.10. Дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Призмаға іштей сызылған шардың көлемін табыңдар.

28.11. Екі шардың беттерінің аудандары $m : n$ қатынасындай. Олардың көлемдері қандай қатынаста болады?

28.12. Центрлері ортақ және радиустары R_1 мен R_2 ($R_1 > R_2$) болатын екі шардың беттерімен шектелген фигура — шарлық сақинаның көлемін табу формуласын табыңдар (28.6-сурет).



28.6-сурет



28.7-сурет

28.13. Шиенің мәйегінің қалыңдығы оның ішіндегі сүйегінің диаметріне тең (28.7-сурет). Шие мен оның ішіндегі сүйегін шар тәріздес деп алып, мәйегі мен сүйегінің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

28.14. Апельсин — шар пішіндес жеміс. Оның қабығының қалыңдығы шар радиусының бестен бір бөлігіне тең болады (28.6-сурет). Апельсиннің қабығы оның көлемінің қандай бөлігін құрайды?

28.15. Нұр-Сұлтан қаласындағы «Бәйтерек» монументі — металдан, шыныдан және бетоннан жасалған әдемі архитектуралық ғимарат, барлық әлемдік бірлестік үшін тәуелсіз Қазақстанның символы (28.8-сурет). Оның төбесінде диаметрі 22 метрге тең шар бар. Осы шардың көлемін табыңдар.

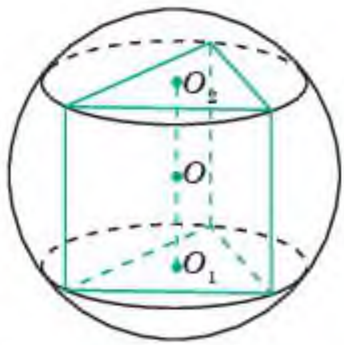
28.8-сурет

C

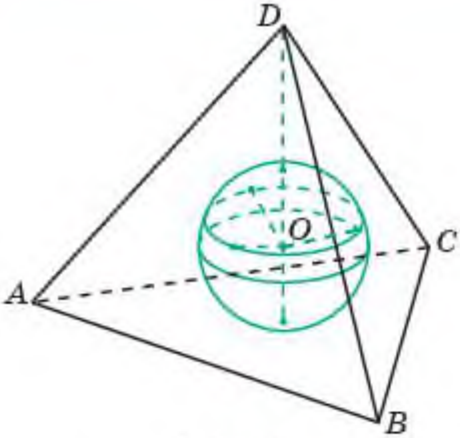
28.16. Дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призмаға сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар (28.9-сурет).

28.17. Дұрыс тетраэдрдің қырлары 1 см-ге тең. Тетраэдрге іштей сызылған шардың көлемін табыңдар (28.10-сурет).

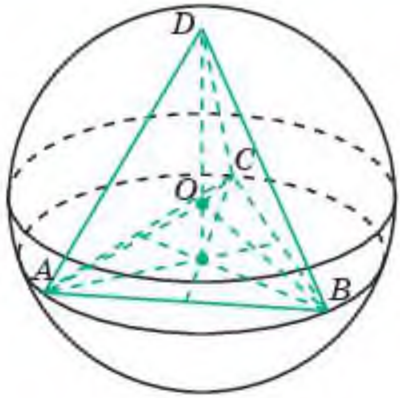
28.18. Дұрыс тетраэдрдің қырлары 1 см-ге тең. Тетраэдрге сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар (28.11-сурет).



28.9-сурет

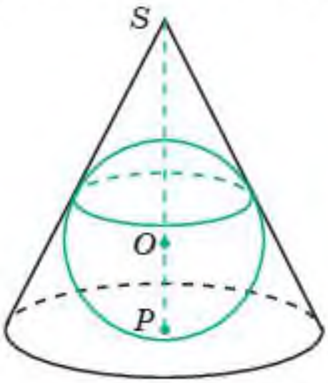


28.10-сурет

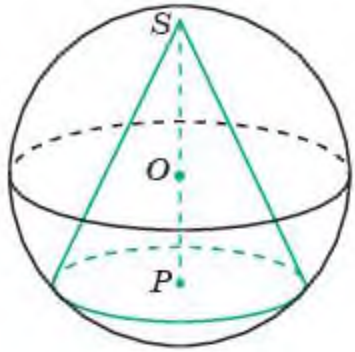


28.11-сурет

28.19. Конус табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Конусқа іштей сызылған шардың көлемін табыңдар (28.12-сурет).

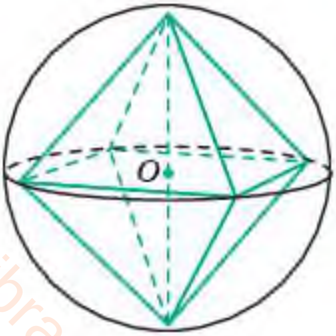


28.12-сурет



28.13-сурет

28.20. Конус табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Конусқа сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар (28.13-сурет).

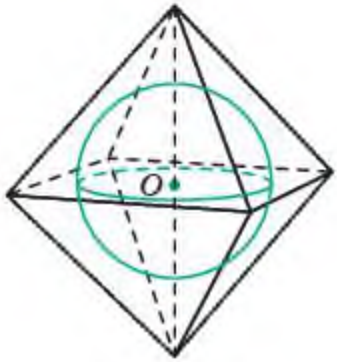


28.14-сурет

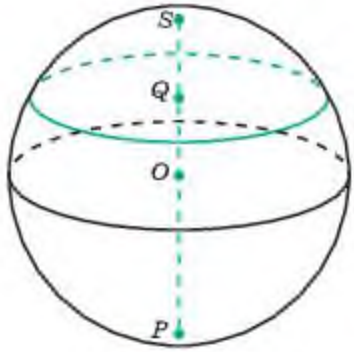
28.21. Октаэдрдің қыры 1 см-ге тең. Октаэдрге сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар (28.14-сурет).

28.22. Октаэдрдің қыры 1 см-ге тең. Октаэдрге іштей сызылған шардың көлемін табыңдар (28.15-сурет).

28.23. Шардың радиусының ортасы арқылы осы радиусқа перпендикуляр жазықтық жүргізілген (28.16-сурет). Осы жазықтықпен қиып алынған шар сегментінің көлемі шардың көлемінің қандай бөлігін құрайды?



28.15-сурет



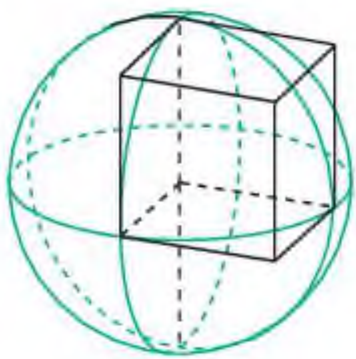
28.16-сурет

28.24. Шар сегменті табанындағы шеңбердің радиусы 60 см-ге, ал шардың радиусы 75 см-ге тең. Шар сегментінің көлемін табыңдар.

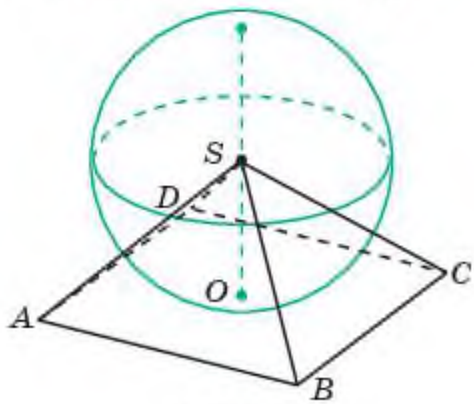
28.25. Шар белдеуі табандарының радиустары 3 см және 4 см-ге, ал шардың радиусы 5 см-ге тең. Шар белдеуінің көлемін табыңдар.

28.26. Шардың радиусы 1 см-ге тең. Оның центрінде бірлік кубтың төбесі орналасқан (28.17-сурет). Куб пен шардың ортақ бөлігінің көлемін табыңдар.

28.27. Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғалары 2 см-ге және оның биіктігі 1 см-ге тең. Радиусы 1 см-ге тең шардың центрінде осы пирамиданың төбесі орналасқан (28.18-сурет). Пирамида пен шардың ортақ бөлігінің көлемін табыңдар.



28.17-сурет



28.18-сурет

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

1. Егер кубтың барлық қырларын 2 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артатынын табыңдар:

A) 2 есе; B) 4 есе; C) 6 есе; D) 8 есе.

2. Куб бетінің ауданы 12 см². Оның көлемін табыңдар:

A) $2\sqrt{2}$ см³; B) 4 см³; C) $4\sqrt{2}$ см³; D) 8 см³.

3. Сфераның радиусы 2 см-ге тең. Сфераға сырттай сызылған кубтың көлемін табыңдар:

A) 32 см³; B) 64 см³; C) 128 см³; D) 256 см³.

4. Үшбұрышты призманың табанының орта сызығы арқылы оның бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген. Егер бастапқы призманың көлемі 8 см³-ге тең болса, онда осы жазықтықпен қиып алынған үшбұрышты призманың көлемін табыңдар:

A) 1 см³; B) 2 см³; C) 3 см³; D) 4 см³.

5. Алтыбұрышты призманың табаны — қабырғалары 2 см-ге тең дұрыс алтыбұрыш. Призманың бүйір қырлары 3 см-ге тең және олар табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Призманың көлемін табыңдар:

A) $6\sqrt{3}$ см³; B) 9 см³; C) 27 см³; D) $9\sqrt{3}$ см³.

6. Цилиндр табанының радиусы мен биіктігі 2 см-ге тең. Цилиндрге іштей сызылған дұрыс төртбұрышты призманың көлемін табыңдар:

A) 8 см³; B) $8\sqrt{2}$ см³; C) 16 см³; D) $16\sqrt{2}$ см³.

7. Цилиндрлік ыдыстағы сұйықтың деңгейі 8 см-ге жетеді. Егер осы сұйық диаметрі бірінші ыдыстан 2 есе кіші болатын екінші ыдысқа құйылса, онда сұйықтың деңгейі қандай биіктікте болатынын табыңдар:

A) 16 см; B) 32 см; C) 48 см; D) 64 см.

8. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы — қабырғасы 2 см-ге тең квадрат. Цилиндрдің көлемін табыңдар:

A) $\frac{2}{\pi}$ см³; B) $\frac{4}{\pi}$ см³; C) 2π см³; D) 4π см³.

9. Үшбұрышты призманың қырлары 3 см-ге тең. Призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар:

A) 3π; B) 6π; C) 9π; D) 12π.

10. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призманың көлемі 6 см³-ге тең. $A_1BCC_1B_1$ төртбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар:

A) 1 см³; B) 2 см³; C) 3 см³; D) 4 см³.

11. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың қырлары 2 см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар:

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ см³; B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см³; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см³; D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см³.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының көлемі 6 см^3-ге тең. ACB_1D_1 тетраэдрінің көлемін табыңдар:

A) 1 см^3; B) 2 см^3; C) 3 см^3; D) 4 см^3.

13. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге тең және олар табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Пирамиданың көлемін табыңдар:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ см^3; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^3; D) $\sqrt{3}$ см^3.

14. Теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғасы 2 см-ге тең. Үшбұрышты оның биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған фигураның көлемін табыңдар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{\pi}{3}$ см^3; D) $\pi\sqrt{3}$ см^3.

15. Конустың бүйір бетінің жазбасы — радиусы 3 см-ге және центрлік бұрышы 120°-қа тең дөңгелек сектор. Конустың көлемін табыңдар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{2\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3.

16. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың биіктігі мен табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Пирамидаға сырттай сызылған конустың көлемін табыңдар:

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; C) $\frac{\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{2\pi}{3}$ см^3.

17. Қиық конустың остік қимасы — табандары 4 см және 2 см, ал бүйір қабырғасы 2 см болатын теңбүйірлі трапеция. Қиық конустың көлемін табыңдар:

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3; D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3.

18. Шардың бетінің ауданы 36 см^2-ге тең. Шардың көлемін табыңдар:

A) $24\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; B) $36\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; C) $48\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3; D) $60\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^3.

19. Кубтың қыры 2 см-ге тең. Кубқа сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар:

A) $\sqrt{3}\pi$ см^3; B) $2\sqrt{3}\pi$ см^3; C) $3\sqrt{3}\pi$ см^3; D) $4\sqrt{3}\pi$ см^3.

20. Шардың радиусы 5 см-ге, оның сегменті табанының радиусы 4 см-ге тең. Шар сегментінің көлемін табыңдар:

A) $\frac{52\pi}{3}$ см^3; B) $\frac{43\pi}{3}$ см^3; C) $\frac{32\pi}{3}$ см^3; D) $\frac{22\pi}{3}$ см^3.

10-11-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

БҰРЫШТАР

Түзулердің арасындағы бұрыш

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AB және CD_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында BC_1 және DA_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AC және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. AC_1 және BB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
5. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. SB және CD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

B

6. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. SB және CD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AB және C_1D_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AC және BE_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AB және CA_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
10. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — CD қырының ортасы. BC және AE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. AB және CA_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
12. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең және E нүктесі — SD қырының ортасы. SB және AE түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AB және FE_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AB_1 және BC_1 түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
15. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. SB және AE түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
16. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. SB және AD түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AB_1 түзуі мен BCC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AB_1 түзуі мен BCD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында CA_1 түзуі мен AB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AB түзуі мен ACC_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
5. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. SB түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

B

6. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. SC түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AB түзуі мен CDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AC түзуі мен CDD_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AC_1 түзуі мен BDD_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында AB түзуі мен CB_1D_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

11. $ABCD$ дұрыс тетраэдрінде E нүктесі — BD қырының ортасы. AE түзуі мен ABC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.
12. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. BB_1 түзуі мен AB_1C_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
13. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. BD түзуі мен SBC жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.
14. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. BC түзуі мен SAF жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AA_1 түзуі мен BCE_1 жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. BC_1 түзуі мен AFF_1 жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ABC_1 және ABC жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ADC_1 және BCD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. ACC_1 және BCC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
4. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. SAC және SBD жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

B

5. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. SAD және SBE жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. ABB_1 және CDD_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. ABB_1 және CEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. ACC_1 және BEE_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында ABC және CB_1D_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында BA_1C_1 және AB_1D_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. ABC және CA_1B_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.
12. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. SAD және SBC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
13. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. SBC және SCD жақтарының арасындағы екіжақты бұрыштың косинусын табыңдар.
14. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. SBC және SEF жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
15. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. SAF және SBC жазықтықтарының арасындағы бұрыштың косинусын табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. ABC және DB_1F_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыштың тангенсін табыңдар.

АРАҚАШЫҚТЫҚ

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында B нүктесінен AD_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында B нүктесінен A_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен BC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен B_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

B

5. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. S нүктесінен AC түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
6. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. S нүктесінен BE түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. F нүктесінен BB_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. F нүктесінен B_1C_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында B нүктесінен DA_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
10. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. B нүктесінен AC_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
11. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. S нүктесінен BF түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
12. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. B нүктесінен SA түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. B нүктесінен A_1F_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. B нүктесінен A_1D_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. B нүктесінен FE_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. B нүктесінен AD_1 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында A нүктесінен BDD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

2. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен BCC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
3. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. S нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
4. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. S нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

B

5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен BDD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен BCC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен CDD_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен BDE_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында A нүктесінен CB_1D_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында A нүктесінен BDC_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен BCA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
12. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен CA_1B_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
13. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен SCD жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
14. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. A нүктесінен SDE жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен DEA_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. A нүктесінен DEF_1 жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

Екі түзудің арақашықтығы

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында AB және CC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында AB және C_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында AB_1 және CD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AB және B_1C_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

B

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында AA_1 және BD_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
6. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AA_1 және BC_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AB және C_1D_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AB_1 және DE_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

C

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубында BA_1 және DB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
10. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. CC_1 және AB түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
11. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. AB және CB_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
12. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. SB және AC түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
13. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. SA және CD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

14. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. SB және AF түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
15. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. SB және AE түзулерінің арақашықтығын табыңдар.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. BB_1 және EF_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

ҚИМАЛАР

А

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, BB_1, B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
2. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1 см-ге тең. Тетраэдрдің AB, BC және CD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың AB, BC, A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BB_1, CC_1, A_1B_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
5. $ABCD$ тетраэдрінің барлық қырлары 1 см-ге тең. Тетраэдрдің AD, BD және BC қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың A, C және D_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесі және BC, B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының C төбесі және AD, A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
9. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың B, B_1 төбелері және AC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

В

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесі және BB_1, DD_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A, C төбелері және C_1D_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың A, D және C_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B төбесі және AA_1, CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1, B төбелері және CC_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

15. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың A_1, B_1 төбелері және AC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, CC_1 қырларының орталары және BB_1 қырында B төбесінен 0,25 қашықтықта жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A төбесі және CD, A_1D_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

18. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Пирамиданың A, B төбелері және SC қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

19. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың AA_1, BB_1 және A_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1B_1, CD қырларының орталары және AB қырында A төбесінен 0,25 қашықтықта жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының A_1, C_1 төбелері және AD қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

22. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Пирамиданың B, C төбелері және SA қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың B, D және E_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AD, B_1C_1 қырларының орталары және BC қырында B төбесінен 0,25 қашықтықта жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
25. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Пирамиданың AD, BC және SD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
26. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың A, B төбелері және A_1C_1 қырының ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың C, F және E_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

C

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, CC_1 қырларының орталары және AB қырында A төбесінен 0,75 қашықтықта жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының D_1 төбесі және AB, BC қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының BB_1, DD_1 қырларының орталары және AB қырында A төбесінен 0,75 қашықтықта жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призманың A, B және D_1 төбелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

32. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AA_1, CC_1 қырларының орталары және AB қырында A төбесінен 0,25 қашықтықта жатқан нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының AB, BC, CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.
34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубының B_1 төбесі және AD, CD қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықпен қимасын салыңдар. Қиманың ауданын табыңдар.

ІШТЕЙ ЖӘНЕ СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН ФИГУРАЛАР

Цилиндр және конус

А

1. Сфераға сырттай сызылған цилиндрдің остік қимасының периметрі 8 см-ге тең. Сфераның радиусын табыңдар.
2. Сфераға сырттай сызылған цилиндрдің остік қимасының ауданы 4 см^2-ге тең. Сфераның диаметрін табыңдар.
3. Цилиндрдің остік қимасының диагоналі 2 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
4. Цилиндрдің биіктігі 2 см-ге, ал табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
5. Цилиндр табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай радиусы 2 см-ге тең сфера сызылған. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.
6. Цилиндрдің биіктігі 1 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай радиусы 1 см-ге тең сфера сызылған. Цилиндр табанының радиусын табыңдар.
7. Тік призманың табаны — қабырғасы 1 см-ге тең дұрыс үшбұрыш. Осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.
8. Тік призманың табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.
9. Бірлік кубқа іштей сызылған цилиндр табанының радиусын табыңдар.
10. Дұрыс алтыбұрышты призма табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.
11. Тік призманың табаны — қабырғасы 1 см-ге тең дұрыс үшбұрыш. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндр табанының радиусын табыңдар.

12. Тік призманың табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндр табанының радиусын табыңдар.
13. Тік призманың табаны — қабырғасы 1 см-ге тең квадрат. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндр табанының радиусын табыңдар.
14. Дұрыс алтыбұрышты призма табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндр табанының радиусын табыңдар.

B

15. Конус табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы конусқа іштей сызылған дұрыс үшбұрышты пирамида табанының қабырғасын табыңдар.
16. Конус табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы конусқа іштей сызылған дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғасын табыңдар.
17. Конус табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы конусқа іштей сызылған дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғасын табыңдар.
18. Конус табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы конусқа сырттай сызылған дұрыс үшбұрышты пирамида табанының қабырғасын табыңдар.
19. Конус табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы конусқа сырттай сызылған дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғасын табыңдар.
20. Конус табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы конусқа сырттай сызылған дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғасын табыңдар.
21. Конустың жасаушысы 2 см-ге, ал табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

C

22. Конус табанының радиусы 2 см-ге тең. Осы конусқа іштей радиусы 1 см-ге тең сфера сызылған. Конустың биіктігін табыңдар.
23. Конус табанының радиусы 1 см-ге тең және жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Осы конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
24. Конустың биіктігі 8 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең. Осы конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
25. Қиық конус табандарының радиустары 2 см және 1 см-ге тең. Осы конусқа іштей сфера сызылған. Қиық конустың биіктігін табыңдар.

26. Қиық конустың бір табанының радиусы 2 см-ге тең. Осы конусқа іштей радиусы 1 см-ге тең сфера сызылған. Қиық конустың екінші табанының радиусын табыңдар.
27. Қиық конустың үлкен табанының радиусы 2 см-ге тең және жасаушысы табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Осы конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
28. Қиық конустың жасаушысы 2 см-ге, ал остік қимасының ауданы 3 $см^2$-ге тең. Осы конусқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
29. Конус табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Осы конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
30. Конус табанының радиусы 4 см-ге тең. Осы конусқа сырттай радиусы 5 см-ге тең сфера сызылған. Конустың биіктігін табыңдар.
31. Конус табанының радиусы 1 см-ге тең және жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Осы конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
32. Конустың биіктігі 8 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең. Осы конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
33. Қиық конустың табандарының радиустары 2 см және 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең. Осы конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
34. Қиық конустың кіші табанының радиусы 1 см-ге, ал жасаушысы 2 см-ге тең және екінші табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Осы конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
35. Қиық конустың бір табанының радиусы 4 см-ге, ал биіктігі 7 см-ге тең. Осы конусқа сырттай сызылған сфераның радиусы 5 см-ге тең. Қиық конустың екінші табанының радиусын табыңдар.
36. Қиық конустың табандарының радиустары 2 см және 4 см-ге, ал биіктігі 5 см-ге тең. Осы конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

Көпжаққа іштей сызылған сфера

A

1. Бірлік кубқа іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
2. Сфераның радиусы 1 см-ге тең. Осы сфераға сырттай сызылған кубтың қырын табыңдар.
3. Дұрыс үшбұрышты призма табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
4. Дұрыс үшбұрышты призмаға іштей радиусы 1 см-ге тең сфера сызылған. Призманың биіктігін табыңдар.
5. Дұрыс алтыбұрышты призма табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Призманың биіктігін және оған іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

B

6. Призманың табаны — катеттері 1 см-ге тең тікбұрышты үшбұрыш. Осы призмаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
7. Призманың табаны — қабырғалары 2 см және 3 см болатын теңбүйірлі үшбұрыш. Призманың биіктігін және оған іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
8. Төртбұрышты тік призманың табаны — қабырғасы 1 см-ге және сүйір бұрышы 60°-қа тең ромб. Призманың биіктігін және оған іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
9. Төртбұрышты тік призманың табаны — сүйір бұрышы 60°-қа тең ромб. Осы призмаға іштей сызылған сфераның радиусы 1 см-ге тең. Призманың биіктігін және табанының қабырғасын табыңдар.
10. Төртбұрышты тік призманың табаны — биіктігі 2 см-ге тең трапеция. Призманың биіктігін және оған іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
11. Дұрыс алтыбұрышты призмаға іштей радиусы 1 см-ге тең сфера сызылған. Призманың биіктігін және табанының қабырғасын табыңдар.
12. Бірлік тетраэдрге іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
13. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
14. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал табанындағы екіжақты бұрыштары 60°-қа тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

C

15. Төртбұрышты тік призманың табаны — периметрі 4 см-ге және ауданы 2 $см^2$-ге тең төртбұрыш. Осы призмаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
16. Дұрыс тетраэдрге іштей бірлік сфера сызылған. Тетраэдрдің қырын табыңдар.
17. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см-ге, ал табанындағы екіжақты бұрыштары 60°-қа тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
18. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 1 см-ге, ал төбесіндегі жазық бұрыштары 90°-қа тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
19. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.
20. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см-ге, ал табанындағы екіжақты бұрыштары 60°-қа тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

21. Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғалары 4 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей бірлік сфера сызылған. Пирамиданың биіктігін табыңдар.
22. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға іштей сызылған сфераның радиусын табыңдар.

Көпжаққа сырттай сызылған сфера

A

1. Бірлік кубқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
2. Бірлік сфераға іштей сызылған кубтың қырын табыңдар.
3. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 1 см, 2 см, 3 см-ге тең. Осы параллелепипедке сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
4. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 1 см, 2 см-ге тең және оған сырттай сызылған сфераның радиусы 1,5 см-ге тең. Параллелепипедтің сол төбесінен шығатын үшінші қырын табыңдар.

B

5. Бірлік тетраэдрға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
6. Бірлік сфераға іштей сызылған дұрыс тетраэдрдің қырын табыңдар.
7. Дұрыс призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призмаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
8. Дұрыс үшбұрышты призманың табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Призмаға сырттай радиусы 2 см-ге тең сфера сызылған. Призманың биіктігін табыңдар.
9. Дұрыс үшбұрышты призманың биіктігі 1 см-ге тең. Призмаға сырттай радиусы 1 см-ге тең сфера сызылған. Призманың табанының қабырғасын табыңдар.
10. Үшбұрышты тік призманың табаны — катеттері 1 см-ге тең тікбұрышты үшбұрыш. Призманың биіктігі 2 см-ге тең болса, онда оған сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
11. Дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Призмаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
12. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
13. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары 2 см-ге тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

C

14. Пирамиданың табаны — қабырғалары 3 см-ге тең дұрыс үшбұрыш. Пирамиданың бір бүйір қыры 2 см-ге тең және ол табан жазықтығына перпендикуляр. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
15. $SABC$ пирамидасының SC қыры 2 см-ге тең және ол ABC табан жазықтығына перпендикуляр, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 1$. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.
16. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 1 см-ге, ал төбесіндегі жазық бұрыштары 90°-қа тең. Осы пирамидаға сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

КӨЛЕМ

A

1. Тікбұрышты параллелепипед жағының ауданы 12 см^2-ге және осы жағына перпендикуляр қыры 4 см-ге тең. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.
2. Тікбұрышты параллелепипедтің көлемі 24 см^3-ге, ал бір қыры 3 см-ге тең. Параллелепипедтің осы қырына перпендикуляр жағының ауданын табыңдар.
3. Тікбұрышты параллелепипедтің көлемі 60 см^3-ге, ал бір жағының ауданы 12 см^2-ге тең. Параллелепипедтің осы жағына перпендикуляр қырын табыңдар.
4. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см және 6 см-ге тең. Параллелепипедтің көлемі 48 см^3-ге тең. Параллелепипедтің сол төбесінен шығатын үшінші қырын табыңдар.
5. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын үш қыры 4 см, 6 см, 9 см-ге тең. Осы параллелепипедке теңшамалы кубтың қырын табыңдар.
6. Егер кубтың барлық қырын үш есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?
7. Үшбұрышты тік призманың табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш, ал бүйір қыры 5 см-ге тең. Призманың көлемін табыңдар.
8. Үшбұрышты тік призманың табаны — катеттері 3 см және 5 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призманың көлемі 30 см^3-ге тең. Оның бүйір қырын табыңдар.
9. Дұрыс алтыбұрышты призма табанының қабырғалары 1 см-ге, ал бүйір қырлары $\sqrt{3}$ см-ге тең. Призманың көлемін табыңдар.
10. Егер дұрыс тетраэдрдің барлық қырын екі есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

11. Пирамиданың биіктігі 6 см-ге тең, ал табаны — қабырғалары 3 см және 4 см болатын тіктөртбұрыш. Пирамиданың көлемін табыңдар.
12. Пирамиданың табаны — қабырғалары 3 см және 4 см болатын тіктөртбұрыш. Пирамиданың көлемі 16 $см^3$-ге тең. Оның биіктігін табыңдар.
13. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 1 см-ге, ал биіктігі $\sqrt{3}$ см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.
14. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табанының қабырғалары 2 см-ге, ал көлемі $\sqrt{3}$ $см^3$-ге тең. Оның биіктігін табыңдар.
15. Егер пирамиданың биіктігін төрт есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?
16. Ішінде 6 л су бар цилиндрлік ыдысқа бөлшек салынды. Сонда ыдыстағы сұйықтың деңгейі 1,5 есе көтерілді. Бөлшектің көлемі неге тең?
17. Цилиндрлік ыдыстағы сұйықтың деңгейі 18 см. Егер осы сұйықты диаметрі бірінші ыдыстан 3 есе үлкен болатын екінші ыдысқа құятын болсақ, сұйықтың деңгейі қандай биіктікте болады?
18. Конус табанының ауданы 2 $см^2$-ге, ал жасаушысы 6 см-ге тең және ол табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Конустың көлемін табыңдар.
19. Егер конустың биіктігін үш есе қысқартса, онда оның көлемі неше есе кемиді?
20. Егер конустың табанының радиусын 1,5 есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?
21. Цилиндр мен конустың табаны және биіктігі ортақ. Конустың көлемі 10 $см^3$-ге тең. Цилиндрдің көлемін табыңдар.
22. Цилиндр мен конустың табаны және биіктігі ортақ. Цилиндрдің көлемі 150 $см^3$-ге тең. Конустың көлемін табыңдар.
23. Егер шардың радиусын үш есе арттырса, онда оның көлемі неше есе артады?

B

24. Кубтың диагоналі $\sqrt{12}$ см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.
25. Кубтың көлемі $24\sqrt{3}$ $см^3$-ге тең. Оның диагоналін табыңдар.
26. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см, 4 см-ге, ал диагоналі 6 см-ге тең. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.
27. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см, 3 см-ге, ал көлемі 36 $см^3$-ге тең. Параллелепипедтің диагоналін табыңдар.
28. Егер кубтың әрбір қырын 1 см-ге арттырса, онда оның көлемі 19 $см^3$-ге артады. Кубтың қырын табыңдар.

29. Параллелепипедтің жағы — қабырғасы 1 см-ге және сүйір бұрышы 60°-қа тең болатын ромб. Параллелепипедтің бір қыры осы жағымен 60° бұрыш жасайды және 2 см-ге тең. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.
30. Цилиндр табанының радиусы мен биіктігі 2 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған тікбұрышты параллелепипедтің көлемін табыңдар.
31. Цилиндр табанының радиусы 1 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған тікбұрышты параллелепипедтің көлемі 8 $см^3$-ге тең. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.
32. Сфераның радиусы 2 см-ге тең. Осы сфераға сырттай сызылған кубтың көлемін табыңдар.
33. Сфераға сырттай сызылған кубтың көлемі 216 $см^3$-ге тең. Сфераның радиусын табыңдар.
34. Үшбұрышты призманың көлемі 32 $см^3$-ге тең. Призма табанының орта сызығы арқылы оның бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген. Қиып алынған үшбұрышты призманың көлемін табыңдар.
35. Үшбұрышты призма табанының орта сызығы арқылы оның бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген. Қиып алынған үшбұрышты призманың көлемі 5 $см^3$-ге тең. Бастапқы призманың көлемін табыңдар.
36. Призма табандары — қабырғалары 2 см болатын дұрыс алтыбұрыш. Призманың бүйір қырлары $2\sqrt{3}$ см-ге тең және ол табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Оның көлемін табыңдар.
37. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 6 см-ге, ал бүйір қырлары 10 см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.
38. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 12 см-ге, ал көлемі 200 $см^3$-ге тең. Пирамиданың бүйір қырын табыңдар.
39. Пирамиданың табаны — тіктөртбұрыш. Пирамиданың бір бүйір жағы оның табан жазықтығына перпендикуляр, ал басқа үш бүйір жақтары табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Пирамиданың биіктігі 6 см-ге тең. Оның көлемін табыңдар.
40. Үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары өзара перпендикуляр және олардың әрқайсысы 3 см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.
41. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 2 см-ге, бүйір қырлары 4 см-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.
42. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың көлемі 6 $см^3$-ге, табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Пирамиданың бүйір қырын табыңдар.
43. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 4 см-ге, ал бүйір жағы мен табанының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің көлемі 12 см^3-ге тең. B_1ABC үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының көлемі 12 см^3-ге тең. E, F, E_1, F_1 нүктелері — BC, CD, B_1C_1, C_1D_1 қырларының орталары. $CEFC_1E_1F_1$ үшбұрышты призмасының көлемін табыңдар.

46. Кубтың көлемі 12 см^3-ге тең. Табаны — кубтың жағы, ал төбесі — кубтың центрінде жататын төртбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

47. $ABCA_1B_1C_1$ призмасының көлемі 6 см^3-ге тең. Осы призмадан C_1ABC үшбұрышты пирамидасы қиып алынған. Қалған бөліктің көлемін табыңдар.

48. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бөлігі болатын $SABC$ үшбұрышты пирамидасының көлемі 1 см^3-ге тең. Алтыбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

49. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың көлемі 12 см^3-ге тең. E нүктесі — SB қырының ортасы. $EABC$ үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

50. Үшбұрышты пирамиданың көлемі 12 см^3-ге тең. Осы пирамиданың төбесі арқылы және табанының орта сызығы арқылы өтетін жазықтықпен қиып үшбұрышты пирамида алынған. Қиып алынған үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

51. $SABC$ үшбұрышты пирамиданың көлемі 15 см^3-ге тең. Осы пирамида табанының AB қабырғасы арқылы өтетін жазықтық оған қарсы жатқан SC бүйір қырын S нүктесінен бастап санағанда $1 : 2$ қатынаста бөлетін D нүктесінде қиып өтеді. $DABC$ пирамидасының көлемін табыңдар.

52. Бір цилиндрлік ыдыс екіншісінен екі есе биік, бірақ екінші ыдыстың іші 1,5 есе кең. Екінші ыдыс көлемінің біріншінің көлеміне қатынасын табыңдар.

53. Конустың көлемі 12 см^3-ге тең. Конустың биіктігін қақ бөлетіндей оның табанына параллель қиюшы жазықтық жүргізілген. Қиып алынған конустың көлемін табыңдар.

54. Конустың биіктігі 6 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең. Оның көлемінің π-ге қатынасын табыңдар.

55. Конус табанының диаметрі 6 см-ге, ал осьтік қимасының төбесіндегі бұрышы 90°-қа тең. Оның көлемінің π-ге қатынасын табыңдар.

56. Теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың катеті 6 см-ге тең. Осы үшбұрышты бір катеті жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған конус көлемінің π-ге қатынасын табыңдар.

57. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 6 см-ге, ал табанының қабырғалары 4 см-ге тең. Пирамидаға сырттай сызылған конус көлемінің π-ге қатынасын табыңдар.

58. Дұрыс төртбұрышты пирамидаға сырттай сызылған конустың көлемі осы пирамидаға іштей сызылған конустың көлемінен неше есе үлкен болады?

59. Үш шардың радиустары 6 см, 8 см және 10 см. Көлемі осы шарлардың көлемдерінің қосындысына тең болатын жаңа шардың радиусын табыңдар.

60. Кубтың қыры 3 см-ге тең. Осы кубқа іштей шар сызылған. Шар көлемінің π-ге қатынасын табыңдар.

61. Кубтың қыры $\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы кубқа сырттай шар сызылған. Шар көлемінің π-ге қатынасын табыңдар.

C

62. Тік призманың табаны — ауданы 3 см^2-ге тең ромб. Диагональдық қималарының аудандары 8 см^2 және 12 см^2. Призманың көлемін табыңдар.

63. Тікбұрышты параллелепипедтің үш жағының аудандары 2 см^2, 3 см^2, 6 см^2. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

64. Параллелепипедтің екі жағының аудандары 4 см^2 және 6 см^2, ал олардың ортақ қыры 2 см және өзара 30° екіжақты бұрыш жасайды. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

65. Үшбұрышты көлбеу призманың бір бүйір жағының ауданы 12 см^2, ал осы жақтан оған қарсы жатқан қырына дейінгі қашықтық 3 см. Призманың көлемін табыңдар.

66. Үшбұрышты призманың екі бүйір жақтары өзара перпендикуляр және олардың ортақ қыры 2 см-ге тең. Осы жақтарының аудандары 4 см^2 және 6 см^2. Призманың көлемін табыңдар.

67. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры 3 см-ге тең. Кубтың $ABCD$ жағының көршілес қабырғаларының орталары арқылы өтетін және AA_1 қырына параллель қиюшы жазықтықтармен төрт үшбұрышты призмалар алынды. Призманың қалған бөлігінің көлемін табыңдар.

68. Дұрыс алтыбұрышты призманың көлемі 12. Төбелері берілген призманың табандарының қабырғаларының орталары болатын жаңа призманың көлемін табыңдар.

69. Цилиндр табанының радиусы мен биіктігі $\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған дұрыс үшбұрышты призманың көлемін табыңдар.

70. Цилиндр табанының радиусы мен биіктігі $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы цилиндрге іштей сызылған дұрыс үшбұрышты призманың көлемін табыңдар.

71. Сфераның радиусы $\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы сфераға сырттай сызылған дұрыс үшбұрышты призманың көлемін табыңдар.

72. Цилиндр табанының радиусы мен биіктігі $\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған дұрыс алтыбұрышты призманың көлемін табыңдар.

73. Цилиндр табанының радиусы мен биіктігі $\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы цилиндрге іштей сызылған дұрыс алтыбұрышты призманың көлемін табыңдар.

74. Сфераның радиусы $\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы сфераға сырттай сызылған дұрыс алтыбұрышты призманың көлемін табыңдар.

75. Кубтың қыры 6 см-ге тең. Төбелері кубтың төрт төбесімен сәйкес келетіндей кубқа іштей дұрыс тетраэдр сызылған. Тетраэдрдің көлемін табыңдар.

76. Тетраэдрдің бір қыры 3 см-ге, ал басқа барлық қырлары 2 см-ге тең. Тетраэдрдің көлемін табыңдар.

77. Үшбұрышты пирамиданың жазбасы — қабырғасы 6 см-ге тең квадрат. Пирамиданың көлемін табыңдар.

78. Тетраэдрдің екі қарама-қарсы қырлары өзара перпендикуляр және 3 см, 4 см-ге тең, ал олардың арақашықтығы 2 см-ге тең. Тетраэдрдің көлемін табыңдар.

79. $ABCD$ бірлік тетраэдрін оның DD_1 биіктігі жатқан түзуден 60° бұрышқа айналдырды. Бастапқы және айналған тетраэдрдің ортақ бөлігінің көлемін табыңдар.

80. Төртбұрышты пирамиданың көлемі 12 см^3-ге тең. Пирамиданың төбесі және табанының көршілес қабырғаларының орталары арқылы өтетін қиюшы жазықтықтармен төрт үшбұрышты пирамидалар қиылып алынды. Пирамиданың қалған бөлігінің көлемін табыңдар.

81. Кубтың қыры 6 см-ге тең. Төбелері осы куб жақтарының центрлерінде жататын октаэдрдің көлемін табыңдар.

82. Октаэдрдің қыры 3 см-ге тең. Осы октаэдрге іштей сызылған кубтың көлемін табыңдар.

83. Қыры 6 см-ге тең болатын кубтың әрбір жағынан өтпелі квадратты тесіктер жасалды. Квадраттың қабырғасы 2 см-ге тең. Кубтың қалған бөлігінің көлемін табыңдар.

84. Бірлік кубтың қыры және оның центрі арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр болатындай әрбір қыры арқылы жазықтықтар жүргізілген. Осы жазықтықтармен шектелген көпжақтың көлемін табыңдар.

85. Бірлік тетраэдрдің әрбір қыры арқылы оған қарсы жатқан қырына параллель жазықтықтар жүргізілген. Осы жазықтықтармен шектелген көпжақтың көлемін табыңдар.

86. Тетраэдрдің көлемі 1 см^3-ге тең. Оның әрбір төбесі арқылы оған қарсы жатқан жағына параллель жазықтықтар жүргізілген. Осы жазықтықтармен шектелген көпжақтың көлемін табыңдар.

87. Тік призманың бүйір қырлары 6 см-ге тең, ал табаны — қабырғалары 4 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш. Осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

88. Тік призманың бүйір қырлары 6 см-ге тең, ал табаны — қабырғалары 2 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

89. Дұрыс үшбұрышты призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемі осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің көлемінен неше есе үлкен болады?

90. Тік призманың бүйір қырлары 4 см-ге тең, ал табаны — қабырғалары 1 см болатын квадрат. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

91. Дұрыс төртбұрышты призмаға іштей сызылған цилиндрдің көлемі осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемінен неше есе үлкен болады?

92. Дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір қырлары 6 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға іштей сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

93. Дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір қырлары 6 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

94. Шардың көлемі 1 см^3-ге тең. Осы шарға сырттай сызылған цилиндрдің көлемін табыңдар.

95. Шардың көлемі 12 см^3-ге тең. Табаны — шардың үлкен дөңгелегі, ал биіктігі осы дөңгелек жазықтығына перпендикуляр болатын конустың көлемін табыңдар.

БЕТТІҢ АУДАНЫ

А

1. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын қырлары 1 см, 2 см, 3 см-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.

2. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 3 см және 4 см. Параллелепипедтің бетінің ауданы 52 см^2. Оның сол төбеден шығатын үшінші қырын табыңдар.

3. Егер кубтың барлық қырларын үш есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

4. Егер тетраэдрдің барлық қырларын екі есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

5. Дұрыс алтыбұрышты призманың биіктігі 6 см-ге, ал табанының қабырғалары 3 см-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

6. Үшбұрышты тік призманың биіктігі 10 см-ге тең, ал табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призманың бетінің ауданын табыңдар.
7. Цилиндрдің биіктігі 2 см-ге, ал табанындағы шеңбердің ұзындығы 3 см-ге тең. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар.
8. Конустың жасаушысы 2 см-ге, ал табанындағы шеңбердің ұзындығы 3 см-ге тең. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
9. Егер конус жасаушысын 3 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше аса артады?
10. Егер конус табанының радиусын 1,5 есе кемітсе, онда оның бетінің ауданы неше есе кемиді?
11. Шардың үлкен дөңгелегінің ауданы 1 см^2-ге тең. Шар бетінің ауданын табыңдар.
12. Егер шардың радиусын екі есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?

B

13. Кубтың диагоналі 1 см-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.
14. Куб бетінің ауданы 8 см^2-ге тең. Оның диагоналін табыңдар.
15. Куб бетінің ауданы 24 см^2-ге тең. Оның көлемін табыңдар.
16. Кубтың көлемі 27 см^3-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.
17. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 2 см және 4 см. Параллелепипедтің диагоналі 6 см-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.
18. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 1 см және 2 см. Параллелепипедтің бетінің ауданы 16 см^2-ге тең. Оның диагоналін табыңдар.
19. Егер кубтың әрбір қырын 1 см-ге арттырса, онда оның бетінің ауданы 30 см^2-ге тең. Кубтың қырын табыңдар.
20. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын екі қыры 1 см және 2 см. Параллелепипедтің көлемі 6 см^3-ге тең. Оның бетінің ауданын табыңдар.
21. Тік призманың бүйір қыры 5 см-ге тең, ал табаны — диагональдары 3 см және 4 см болатын ромб. Призманың бетінің ауданын табыңдар.
22. Тік призманың табаны — диагональдары 6 см және 8 см болатын ромб. Призма бетінің ауданы 248 см^2-ге тең. Оның бүйір қырын табыңдар.
23. Дұрыс төртбұрышты призма табанының қабырғалары 3 см-ге, бетінің ауданы 66 см^2-ге тең. Оның бүйір қырын табыңдар.
24. Үшбұрышты призманың екі бүйір жақтары өзара перпендикуляр. Олардың ортақ қыры 10 см-ге тең және басқа бүйір қырларынан 6 см және 8 см қашықтықта жатыр. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

25. Үшбұрышты тік призманың табаны — катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыш. Призма бетінің ауданы 288 см^2-ге тең. Оның биіктігін табыңдар.
26. Үшбұрышты призманың бүйір бетінің ауданы 12 см^2-ге тең. Призма табанының орта сызығы арқылы бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген. Қиып алынған үшбұрышты призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
27. Үшбұрышты призма табанының орта сызығы арқылы бүйір қырына параллель жазықтық жүргізілген. Қиып алынған үшбұрышты призманың бүйір бетінің ауданы 8 см^2-ге тең. Бастапқы призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
28. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 5 см-ге, ал табанының қабырғалары 6 см-ге тең. Пирамида бетінің ауданын табыңдар.
29. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 4 см-ге, ал табанының қабырғалары 6 см-ге тең. Пирамида бетінің ауданын табыңдар.
30. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 5 см-ге, ал табанының қабырғалары 6 см-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
31. Егер октаэдрдің барлық қырларын 3 есе арттырса, онда оның бетінің ауданы неше есе артады?
32. Конустың биіктігі 6 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең. Конус беті ауданының π-ге қатынасын табыңдар.
33. Конустың бүйір бетінің ауданы оның табанының ауданынан екі есе үлкен. Конустың жасаушысы мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.
34. Конус бетінің ауданы 12 см^2-ге тең. Оның биіктігін қақ бөлетіндей табанына параллель қима жүргізілген. Қиып алынған конус бетінің ауданын табыңдар.
35. Шардың көлемі 36π. Оның бетінің ауданының π-ге қатынасын табыңдар.
36. Бір шардың көлемі екінші шардың көлемінен 27 есе үлкен. Бірінші шар бетінің ауданы екінші шар бетінің ауданынан неше есе үлкен болады?
37. Екі шардың радиустары 6 см және 8 см. Осы шарлардың беттерінің аудандарының қосындысына тең болатын үшінші шардың радиусын табыңдар.

C

38. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусы 2 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған дұрыс төртбұрышты призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

39. Цилиндр табанының радиусы 2 см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған дұрыс төртбұрышты призманың бүйір бетінің ауданы 48 $см^2$-ге тең. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.
40. Цилиндрдің биіктігі 3 см-ге, ал табанының радиусы $\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған дұрыс үшбұрышты призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
41. Цилиндрдің биіктігі 3 см-ге, ал табанының радиусы $\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы цилиндрге іштей сызылған дұрыс үшбұрышты призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
42. Цилиндрдің биіктігі 3 см-ге, ал табанының радиусы $\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы цилиндрге сырттай сызылған дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
43. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусы 3 см-ге тең. Осы цилиндрге іштей сызылған дұрыс алтыбұрышты призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.
44. Сфераның радиусы 2 см-ге тең. Осы сфераға сырттай сызылған тікбұрышты параллелепипед бетінің ауданын табыңдар.
45. Сфераға сырттай сызылған тікбұрышты параллелепипед бетінің ауданы 54 $см^2$-ге тең. Сфераның радиусын табыңдар.
46. Цилиндрдің осьтік қимасының ауданы 1 $см^2$-ге тең. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар.
47. Дұрыс үшбұрышты призмаға іштей сызылған цилиндрдің бүйір бетінің ауданы 6 $см^2$-ге тең. Осы призмаға сырттай сызылған цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табыңдар.
48. Дұрыс тетраэдрдің биіктігі 4 см-ге тең. Осы тетраэдрге сырттай сызылған шар бетінің ауданын табыңдар.
49. Дұрыс тетраэдрге сырттай сызылған шар бетінің ауданы 9 $см^2$-ге тең. Осы тетраэдрге іштей сызылған шар бетінің ауданын табыңдар.
50. Шарға сырттай сызылған цилиндр бетінің ауданы 9 $см^2$-ге тең. Шар бетінің ауданын табыңдар.
51. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдерінің ұзындықтары 2 см, 4 см және 6 см-ге тең. Осы параллелепипедке сырттай сызылған шар бетінің ауданын табыңдар.
52. Кубқа сырттай сызылған шар бетінің ауданы осы кубқа іштей сызылған шар бетінің ауданынан неше есе үлкен болады?

АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ

Көпбұрыштардың айналуы

A

1. ABC тікбұрышты үшбұрышының катеттері $AC = BC = 1$ см. Осы үшбұрышты AC катеті жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

2. ABC тікбұрышты үшбұрышының катеттері $AC = BC = 1$ см. Осы үшбұрышты CH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
3. ABC теңқабырғалы үшбұрышының қабырғасы 1 см-ге тең. Осы үшбұрышты CH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
4. ABC теңбүйірлі үшбұрышында $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$, CH — биіктігі. Осы үшбұрышты CH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
5. $ABCD$ теңбүйірлі трапецияның AD және BC бүйір қабырғалары 1 см-ге, ал AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең. Осы трапецияны AB және CD табандарының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
6. $ABCD$ тікбұрышты трапецияның AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең, ал кіші бүйір қабырғасы 1 см-ге тең. Осы трапецияны AD қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

B

7. ABC тікбұрышты үшбұрышының катеттері $AC = BC = 1$ см. Осы үшбұрышты AB қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
8. ABC теңқабырғалы үшбұрышының қабырғасы 1 см-ге тең. Осы үшбұрышты AB қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
9. ABC теңбүйірлі үшбұрышында $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Осы үшбұрышты AB қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
10. ABC тікбұрышты үшбұрышында $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. Осы үшбұрышты AB қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
11. $ABCD$ ромбысының қабырғалары 1 см-ге, ал сүйір бұрышы 60°-қа тең. Осы ромбты AC түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
12. $ABCD$ ромбысының қабырғалары 1 см-ге, ал сүйір бұрышы 60°-қа тең. Осы ромбыны BD түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
13. $ABCD$ теңбүйірлі трапецияның AD және BC бүйір қабырғалары 1 см-ге, ал AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең. Осы трапецияны AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

14. $ABCD$ тікбұрышты трапецияның AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең, ал кіші бүйір қабырғасы 1 см-ге тең. Осы трапецияны AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

C

15. ABC теңбүйірлі үшбұрышында $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Осы үшбұрышты AC қабырғасы жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
16. ABC тікбұрышты үшбұрышында $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$, CH — биіктігі. Осы үшбұрышты CH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
17. $ABCD$ ромбысының қабырғалары 1 см-ге, ал сүйір бұрышы 60°-қа тең. Осы ромбыны AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
18. $ABCD$ теңбүйірлі трапецияның AD және BC бүйір қабырғалары 1 см-ге, ал AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең. Осы трапецияны CD түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
19. $ABCD$ теңбүйірлі трапецияның AD және BC бүйір қабырғалары 1 см-ге, ал AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең. Осы трапецияны орта сызығы жатқан c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
20. $ABCD$ тікбұрышты трапецияның AB және CD табандары сәйкесінше 2 см және 1 см-ге тең, ал кіші бүйір қабырғасы 1 см-ге тең. Осы трапецияны CD түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
21. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы алтыбұрышты AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
22. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы алтыбұрышты AC түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
23. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы алтыбұрышты AD түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
24. $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрышының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы алтыбұрышты AB және DE қабырғаларының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

Көпжақтардың айналуы

A

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубын AA_1 түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубын $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ жақтарының центрлері арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
3. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы AA_1 түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
4. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы ABC және $A_1B_1C_1$ жақтарының центрлері арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы табандарының центрлері арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

B

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубын BC және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
7. $ABCD$ бірлік тетраэдрін оның DH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
8. $SABCD$ дұрыс төртбұрышты пирамиданың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы пирамиданы SH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
9. $SABCDEF$ дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір қырлары 2 см-ге, ал табанының қабырғалары 1 см-ге тең. Осы пирамиданы SH биіктігі жатқан түзуден айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы AA_1 түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

C

11. $ABCD$ бірлік тетраэдрін AB түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.
12. $S'ABCDS''$ бірлік октаэдрін $S'S''$ түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

13. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс үшбұрышты призмасының барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы BC және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дұрыс алтыбұрышты призманың барлық қырлары 1 см-ге тең. Осы призманы BC және B_1C_1 қырларының орталары арқылы өтетін c түзуінен айналдырғанда пайда болған дененің көлемі мен бетінің ауданын табыңдар.

ПӘНДІК АТАУ КӨРСЕТКІШТЕРІ

Айналу 75
Айналу осі 75
Айналу фигурасы 75
Айналы симметрия 46
Айналы симметриялы фигура 46
Айналы симметриялы фигуралар 46
Алмаз кристалдары 47
Бірлік куб 133
Бұру 75
Бұру осі 75
Гексаэдр 26
Геометриялық конструктор 32
Додекаэдр 26
Дөңес көпжақ 8
Дөңес фигура 11
Дұрыс көпжақ 25
Дұрыс пирамида 11
Дұрыс тетраэдр 25
Жазықтыққа қарағанда симметрия 46
Жанама жазықтық 94
Жанама түзу 95
Икосаэдр 25
Исландық шпат кристалдары 48
Іздер әдісі 39
Кавальери принципі 139
Конус 81
Конусқа іштей сызылған пирамида 98
Конусқа іштей сызылған сфера 98
Конусқа сырттай сызылған пирамида 98
Конусқа сырттай сызылған сфера 98
Конус бетінің ауданы 82
Конустың биіктігі 82
Конустың бүйір беті 81
Конустың бүйір бетінің ауданы 82
Конустың жазбасы 82
Конустың жасаушысы 81
Конустың көлемі 82
Конустың осі 81
Конустың остік қимасы 81
Конустың табаны 81
Конустың төбесі 81
Көлбеу призма 9
Көлемнің өлшем бірлігі 133
Көпжаққа іштей сызылған сфера 180
Көпжаққа сырттай сызылған сфера 98
Көпжақтар 8
Көпжақтардың симметриясы 44
Көпжақты бет 16
Көпжақты бұрыш 16
Көпжақты бұрыштың жақтары 16

Көпжақты бұрыштың қырлары 16
Көпжақты бұрыштың төбесі 16
Көпжақ бетінің ауданы 31
Көпжақтың жазбасы 31
Көпжақтың қимасы 38
Көпжақтың қырлары 15
Куб 8
Қайнатпалы тұздың кристалдары 47
Қиық конус 86
Қиық конусқа іштей сызылған сфера 101
Қиық конусқа сырттай сызылған сфера 101
Қиық конус бетінің ауданы 87
Қиық конустың биіктігі 87
Қиық конустың бүйір беті 87
Қиық конустың бүйір бетінің ауданы 87
Қиық конустың жазбасы 87
Қиық конустың жасаушысы 87
Қиық конустың көлемі 155
Қиық конустың осі 86
Қиық конустың осьтік қимасы 87
Қиық конустың табандары 86
Қиық пирамида 10
Қиық пирамида бетінің ауданы 32
Қиық пирамиданың бүйір беті 10
Қиық пирамиданың бүйір жағы 10
Қиық пирамиданың бүйір қыры 10
Қиық пирамиданың көлемі 149
Қиық пирамиданың табандары 149
Меридиандар 95
Нормаль векторы 58
Октаэдр 25
Осьтік симметрия 44
Параллелепипед 8
Параллельдер 95
Пирамидаға іштей сызылған конус 128
Пирамидаға сырттай сызылған конус 128
Пирамида бетінің ауданы 32
Пирамиданың бүйір беті 9
Пирамиданың бүйір жағы 9
Пирамиданың бүйір қыры 9
Пирамиданың көлемі 9
Пирамиданың табаны 9
Пирамиданың төбесі 9
Платон денелері 27
Призмаға іштей сызылған цилиндр 126
Призмаға сырттай сызылған цилиндр 126
Призма бетінің ауданы 32
Призманың бүйір беті 9
Призманың бүйір жағы 9
Призманың бүйір қыры 9
Призманың көлемі 139

Призманың табаны 116
Симметрия 44
Симметрия жазықтығы 46
Симметрия осі 4
Симметрия центрі 44
Симметриялы фигуралар 46
Сутас (кварц) кристалдары 47
Сфера 92
Сфераға іштей сызылған конус
Сфераға іштей сызылған көпжақ 116
Сфераға іштей сызылған қиық конус
Сфераға іштей сызылған цилиндр
Сфераға сырттай сызылған конус 124
Сфераға сырттай сызылған көпжақ 123
Сфераға сырттай сызылған қиық конус 125
Сфераға сырттай сызылған цилиндр 125
Сфераның диаметрі 92
Сфераның осі 92
Сфераның полюстері 94
Сфераның радиусы 92
Сфераның үлкен шеңбері 94
Сфераның хордасы 92
Сфераның центрі 92
Тетраэдр 25
Тік призма 112
Тікбұрышты параллелепипед 8
Топология 23
Түзудің параметрлік теңдеуі 54
Ұқсас фигуралар 134
Ұқсастық 134
Ұқсастық коэффициенті 134
Центрлік симметрия 44
Центрлік симметриялы фигура 44
Цилиндр 75
Цилиндрге іштей сызылған призма 112
Цилиндрге іштей сызылған сфера 98
Цилиндрге сырттай сызылған призма 112
Цилиндрге сырттай сызылған сфера 98
Цилиндр бетінің ауданы 77
Цилиндрдің биіктігі 76
Цилиндрдің бүйір беті 76
Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы 77
Цилиндрдің жазбасы 77
Цилиндрдің жасаушысы 76
Цилиндрдің көлемі 144
Цилиндрдің осі 76
Цилиндрдің осьтік қимасы 76
Цилиндрдің табаны 76
Шар 92
Шар белдеуі 92
Шар белдеуінің беті 92

Шар белдеуінің биіктігі 92
Шар белдеуінің бүйір беті 106
Шар белдеуінің табаны 92
Шар сегменті 106
Шар сегментінің беті 106
Шар сегментінің биіктігі 106
Шар сегментінің бүйір беті 106
Шар сегментінің көлемі 106
Шар сегментінің табаны 92
Шардың беті 92
Шар бетінің ауданы 159
Шардың диаметрі 92
Шардың көлемі 159
Шардың радиусы 92
Шардың центрі 92
Эйлер теоремасы 20
Экватор 94

ЖАУАПТАРЫ

10-СЫНЫПТЫҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

1. 1) 3; 2) 6; 3) 10; 4)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.** Біреу немесе шексіз көп. **3.** 1) 4; 2) 10; 3)* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **4.** 1) 4; 2) 8; 3)* 15. **8.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **9.** 1) 8; 2) 12; 3) 6. **10.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) $2n$. **11.** 1), 4) Жоқ; 2), 3) иә. **12.** 1) 9; 2) 12; 3) 15; 4) 18; 5) $3n$. **13.** 1), 3), 4) Иә; 2) Жоқ. **14.** 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) $n+2$. **15.** 1), 2), 3), 4) Иә. **16.** 1) Төртбұрыш; 2) бесбұрыш; 3) алтыбұрыш. **17.** 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) $n+1$. **18.** 1), 2), 3), 4) Иә. **19.** 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) $2n$. **20.** 1), 4) Жоқ; 2), 3) иә. **21.** 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) $n+1$. **22.** 1), 2), 3), 4) Да. **23.** 1) Төртбұрыш; 2) бесбұрыш; 3) алтыбұрыш. **24.** 1) 18; 2) 18; 3) 6; 4) 27. **27.** 1) 24; 2) 24; 3) 3; 4) 24. **28.** 1), 2) Айқас түзулер; 3) қиылысады. **29.** 1), 2) Айқас түзулер, 3) қиылысады. **33.** 1) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, BCC_1B_1, EFF_1E_1; 2) DEE_1D_1. **35.** 1) 3; 2) 3; 3) 1; 4) 4. **37.** 1) 3; 2) 48. **38.** 1) $60°$; 2) $90°$; 3) $90°$. **39.** 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $90°$. **40.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **41.** 1) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **42.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **43.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $1\frac{1}{2}$. **44.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **45.** $45°$. **46.** $60°$. **47.** 1) $60°$; 2) $30°$; 3) $90°$; 4) $90°$. **48.** $\frac{1}{3}$. **49.** $-\frac{1}{3}$. **50.** 6. **51.** 1) 2; 2) $\sqrt{5}$; **52.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6}$. **53.** $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. **54.** $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$. **55.** 1) $120°$; 2) $60°$. **56.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; г) 0. **57.** 1. **58.** $A(0; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 1)$, $B_1(1; 1; 1)$, $C_1(1; 0; 1)$, $D_1(0; 0; 1)$. **59.** $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $D(1; \sqrt{3}; 0)$, $E(0; \sqrt{3}; 0)$, $F(-0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$, $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$, $D_1(1; \sqrt{3}; 1)$, $E_1(0; \sqrt{3}; 1)$, $F_1(-0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$. **60.** 1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{5}$. **61.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$. **62.** $R = 3$, $O(2; -1; 0)$. **63.** 7. **64.** $6x + 3y + 2z = 6$.

I тарау. КӨПЖАҚТАР

§ 1

3. а), б). **4.** а), ә). **5.** а), ә), б), в). **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\sqrt{29}$. **8.** 1. **9.** 9 есе. **10.** 4 есе. **11.** 4 есе. **12.** 94. **13.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$. **14.** $6 + 3\sqrt{3}$. **15.** б), г), д). **16.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **18.** 2 және $\sqrt{5}$. **19.** $\sqrt{5}$. **20.** 4. **21.** ә) 22; ө) 28. **22.** а) 92; ә) 48. **23.** а), ә) 34. **24.** а) 22; ә) 26. **25.** 30. **26.** ≈ 27600 м^2. **27.** ә), б), в), г) — дөңес; а), ғ) — дөңес емес. **28.** 288 см^2. **29.** $\sqrt{5}$. **30.** Жоқ. **31.** Жоқ.

§ 2

2. а), б). **3.** а), б). **4.** Бесбұрышты пирамида. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $1 + \sqrt{3}$. **8.** $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{2}$. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** 4 есе. **11.** 9 есе. **15.** $\sqrt{7}$. **16.** $\sqrt{10}$. **17.** ≈ 8595 м^2. **18.** $\approx 8{,}3$ га. **19.** $5 + 3\sqrt{3}$. **20.** 1. **21.** ≈ 1710 дм^2.

§ 3

1. 1), 2) Жоқ; 3) иә. **2.** Тетраэдр. **3.** 1) Төртбұрышты пирамида; 2) бесбұрышты пирамида; 3) алтыбұрышты пирамида. **4.** 1) Үшжақты бұрыштар; 2) үшжақты және n-жақты бұрыштар. **5.** $10°$-тан үлкен $150°$-тан кіші. **6.** 1) $240°$; 2) $270°$; 3) $300°$. **7.** 1) $210°$; 2) $240°$. **10.** 1), 2) Жоқ. **12.** Жоқ.

§ 4

1. 8. **2.** 12. **3.** 6. **6.** а) Алтыбұрышты призма; ә) бесбұрышты пирамида. **7.** Орындалады. **8.** Иә. **9.** Иә. **10.** Т = 12, Қ = 24, Ж = 12; Т − Қ + Ж = 0. **11.** Т = 24, Қ = 60, Ж = 38.

§ 5

1. 1) Т = 4, Қ = 6, Ж = 4; 2) Т = 8, Қ = 12, Ж = 6; 3) Т = 6, Қ = 12, Ж = 8; 4) Т = 12, Қ = 30, Ж = 20; 5) Т = 20, Қ = 30, Ж = 12. **2.** Жоқ. Жақтарының әртүрлі саны түйісетін төбелері бар болады. **3.** Иә, бұл октаэдр. **7.** 5. **8.** 3. **9.** Куб және октаэдр. **10.** Икосаэдр және додекаэдр. **11.** Тетраэдр, $\sqrt{2}$. **12.** Октаэдр, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** Октаэдр, $\frac{1}{2}$. **14.** Октаэдр, 1. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 4. **17.** 8. **18.** Тетраэдр, $\frac{1}{3}$. **19.** Куб, $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **20.** Додекаэдр. **21.** Икосаэдр. **22.** 10. **23.** 6. **24.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

§ 6

11. Жоқ.

§ 7

2. 1), 2), 3) Иә. **3.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **4.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **5.** 1), 2), 3) Иә. **6.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **7.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **9.** Берілген түзулердің жазықтығында жататын, оларға параллель болатын және олардан бірдей қашықтықта жататын түзудің нүктелері. **10.** 1) Берілген жазықтықтардың қиылысу түзуінің нүктелері; 2) берілген жазықтықтарға параллель және олардан бірдей қашықтықта жататын жазықтықтың нүктелері. **11.** Иә. **12.** 1), 2), 3) Иә. **13.** 1) 3; 2) 7. **14.** 1) 4; 2) 7. **15.** 1), 2) 1. **16.** 1) 4; 2) 6. **17.** 1) n, егер n — тақ сан, $n + 1$, егер n — жұп сан; 2) 0, егер n — тақ сан, 1, егер n — жұп сан. **18.** 1) $n + 1$; 2) n. **19.** 1) 9; 2), 3) 15. **20.** 1) 9; 2), 3) 15. **21.** Иә, мысалы, сфераның симметрия центрі оның бойында жатпайды. **22.** 1) Жақтары параллелограмдар болатын параллелепипедте симметрия центрі бар, бірақ симметрия осі жоқ; 2) дұрыс төртбұрышты пирамиданың симметрия осі бар, бірақ симметрия центрі жоқ. **23.** 1) Жақтары параллелограмдар болатын параллелепипедте симметрия центрі бар, бірақ симметрия жазықтығы жоқ; 2) табаны — параллелограмм болатын төртбұрышты пирамиданың симметрия осі бар, бірақ симметрия жазықтығы жоқ. **24.** 1) дұрыс төртбұрышты пирамиданың симметрия жазықтығы бар, бірақ симметрия центрі жоқ; 2) дұрыс үшбұрышты пирамиданың симметрия жазықтығы бар, бірақ симметрия осі жоқ. **25.** Октаэдр. **26.** Дұрыс алтыбұрышты призма.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	A)	B)	D)	C)	B)	C)	A)	D)	D)	A)	C)	B)	D)	B)	C)	D)	A)	B)	C)

§ 8

1. $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = -2 + 5t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 3 - 4t. \end{cases}$ **3.** Өзара параллель болады. **4.** $\frac{4}{9}$. **5.** 0. **6.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **7.** $\frac{9}{25}$. **8.** 0. **9.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **10.** $\frac{4}{5}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.** $\frac{11\sqrt{35}}{70}$. **13.** $\frac{3}{4}$.

§ 9

1. $3y - 2z = 0$. **2.** $6x - 3y - 2z + 6 = 0$. **3.** 1) $z = 3$; 2) $y = -2$; 3) $x = 1$. **4.** 1), 3). **5.** 1), 2) Иә; 3) жоқ. **6.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{21}$. **7.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{4}{5}$. **8.** $\frac{7}{25}$. **9.** 1) $\frac{6}{7}$; 2) $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{3}{7}$. **10.** 1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{3}{5}$. **11.** $\frac{1}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **13.** $\frac{3}{5}$. **14.** $\frac{13}{19}$. **15.** $\frac{5}{7}$.

§ 10

1. $\frac{4}{9}$. **2.** $\frac{8}{9}$. **3.** 1) Өзара перпендикуляр болады; 2) өзара параллель болады; 3) түзу жазықтықта жатады. **4.** 1) $\frac{\sqrt{14}}{14}$; 2) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$; 3) $\frac{\sqrt{14}}{7}$. **5.** 1) $\frac{12\sqrt{13}}{91}$; 2) $\frac{12\sqrt{5}}{35}$; 3) $\frac{6\sqrt{10}}{35}$. **6.** 1) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; 3) $\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **7.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) 1. **8.** 1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; 2) $\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **9.** 1) $\frac{4\sqrt{19}}{19}$; 2) $\frac{2\sqrt{285}}{95}$. **10.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

§ 11

1. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **5.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **6.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **7.** 1), 2), 3) $\frac{6}{7}$. **8.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ см. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **10.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ см. **11.** $\frac{4\sqrt{57}}{19}$ см. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	C)	D)	A)	B)	D)	A)	B)	D)	A)	D)	B)	D)	B)	B)	C)	D)	A)	D)

§ 12

2. Шексіз көп. **3.** Дөңгелек. **4.** Цилиндр. **5.** Сақина. **6.** 5 см. **7.** $\frac{1}{2\pi}$ см. **8.** 1) 4π см^2; 2) 6π см^2. **10.** Тіктөртбұрыш. **11.** 1), 2), 3) Иә. **12.** 1), 2) Цилиндр. **13.** 1) $2\sqrt{2}\pi$ см^2; 2) $\sqrt{2}\pi$ см^2. **14.** 1), 2) Цилиндр. **15.** 1) 2π см^2; 2) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ см^2. **16.** 1), 2) Цилиндр. **17.** 1) 12π см^2; 2) 4π см^2. **18.** $10\pi \approx 31,4$ (м^2). **19.** 3 дм. **20.** Табандарының радиустары 2 см және 1 см, ал биіктіктері 1 см болатын екі цилиндрден тұратын фигура. Бұл фигура бетінің ауданы 14 π-ге тең. **21.** Табандарының радиустары 2 см, 1 см, 1 см, ал биіктіктері 1 см болатын үш цилиндрден тұратын фигура. Бұл фигура бетінің ауданы 16 π-ге тең. **22.** Табанының радиусы және биіктігі 2 см-ге тең цилиндрден тұратын фигура. Бұл фигурадан табанының радиусы 1 см-ге, ал биіктігі 2 см-ге тең басқа цилиндр қиып алынған. Осы фигура бетінің ауданы 18 см^2-ге тең. **23.** Табандарының радиустары $2\sqrt{2}$ см және $\sqrt{5}$ см, ал биіктіктері 1 см болатын екі цилиндрден тұратын фигура. Бұл фигура бетінің ауданы $(16 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\pi$ см^2-ге тең. **24.** $\sqrt{9 + 4\pi^2}$ см. **25.** 13 см. **26.** 350π см^2.

§ 13

2. Шексіз көп. **3.** Дөңгелек. **4.** Конус. **5.** Конустың бүйір беті. **6.** 5. **7.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. **8.** 1. **9.** 1. **10.** 3π. **11.** Иә. **13.** $\frac{\pi}{4}$. **14.** $\sqrt{5}\pi$. **15.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **16.** Конус. **17.** Табандары ортақ болатын екі конустан тұратын фигура. **18.** Табандары ортақ болатын екі конустан тұратын фигура. Оның бетінің ауданы $\sqrt{2}\pi$-ге тең. **19.** Конус. **20.** $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$. **21.** Конус. **22.** 3π. **23.** Табанының радиусы 2 см-ге, ал жасаушысы 3 см-ге тең конустан тұратын фигура. Бұл фигурадан табанының радиусы 1-ге, ал жасаушысы $\sqrt{6}$-ға тең басқа конус қиып алынды. Оның бетінің ауданы $(9 + \sqrt{6})\pi$ см^2-ге тең. **24.** Табандары ортақ болатын екі тең конустардан тұратын фигура. Оның бетінің ауданы $\sqrt{2}\pi$ см^2-ге тең. **25.** Табандары ортақ болатын екі тең конустардан тұратын фигура. Оның бетінің ауданы π см^2-ге тең. **26.** 0,5. **27.** $120°$. **28.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. **29.** 37. **30.** 42,12 м^2. **31.** 1440 см^2.

§ 14

2. Шексіз көп. **3.** Дөңгелек. **4.** Қиық конус. **5.** Қиық конустың бүйір беті. **6.** 5 см. **7.** 80π см^2. **8.** Иә. **10.** 9π см^2. **11.** 1) Жоқ; 2), 3) иә. **12.** 1 см. **13.** 2 см. **14.** $\frac{17\pi}{4}$ см^2. **15.** Қиық конус. **16.** $(10 + 9\sqrt{2})\pi$ см^2. **17.** Қиық конус. **18.** 14π см^2. **19.** $6\sqrt{2}\pi \approx 26,6$ (м^2).

20. Табандары ортақ болатын екі тең қиық конустардан тұратын фигура. Оның бетінің ауданы $3{,}5\pi$ см^2-ге тең. 21. Фигура қиық конус болып табылады. Бұл фигурадан табаны қиық конустың бір табаны болатын конус қиып алынады. Оның бетінің ауданы 3π см^2-ге тең. 22. 1 см және 0,5 см. 23. $y = x^2$. 24. $y = a^x$. 25. $y = \sin x$. 26. ≈ 161 г. 27. $\approx 1{,}1$ дм^2. 28. ≈ 88 см, ≈ 63 см, $\approx 24{,}3$ см, ≈ 21 дм^2.

§ 15

2. 1) $OA < R$; 2) $OA > R$. 3. 1) Сфераның ішінде жатады; 2) сфераның бойында жатады; 3) сферадан тыс жатады. 4. Шексіз көп. 5. 110 мм. 6. 1 см. 7. 1) Қиылысады; 2) жанасады; 3) ортақ нүктелері болмайды. 8. 1) Біреу; 2) біреу де емес; 3) шексіз көп. 9. 4 см. 10. 4 см. 11. 1) Қиылысады; 2) жанасады; 3) ортақ нүктелері болмайды. 12. 5 см. 13. 8 см. 14. 5 см. 15. 1) Қиылысады; 2) жанасады; 3) ортақ нүктелері болмайды. 16. ≈ 6369 км. 17. Екеу. 18. 2 см және 10 см. 19. 1 см. 20. π. 21. Шексіз көп. 22. Берілген жазықтықтарға параллель және олардан бірдей қашықтықта жатқан жазықтық. 23. Сфераға жүргізілген жанама жазықтық. 24. Төбесі берілген нүктеде болатын конустың бүйір беті. 25. 1) Қиылысады; 2) жанасады; 3) ортақ нүктелері болмайды.

§ 16

1. R және $2R$. 2. $\frac{h}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. 4. $2\sqrt{3}$ см. 5. $\sqrt{3}$ см. 6. 2,5 см. 7. 6π см^2. 8. 4 см. 9. 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. 10. $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$. 11. $3\frac{1}{8}$ см. 12. $R = \frac{r(\sqrt{r^2 + h^2} - r)}{h}$. 13. 1,5 см. 14. $\sqrt{3}$ см. 15. 1) 1 см; 2) $\sqrt{2} - 1$ см. 16. 1) 1 см; 2) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$ см. 17. 2 см. 19. 2 см. 20. 5 см. 21. 3 см.

§ 17

1. 4π см^2. 2. $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$ см. 3. 12 см^2. 4. 1) 4; 2) 9; 3) n^2 есе артады. 5. 2 : 3. 6. 10 см. 7. 1. 8. π. 9. 2π. 10. 16 есе. 11. 3 есе. 12. 4 есе. 13. 400π см^2. 14. 1 : 3. 15. 4π см^2. 16. 6π см^2. 17. $\approx 509\,554\,140$ км^2. 18. ≈ 1520 м^2. 19. 19200 м^2. 20. $\frac{2\pi}{3}$ см^2. 22. $\frac{\pi}{2}$ см^2. 23. $\frac{2\pi}{3}$ см^2.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B)	C)	C)	D)	B)	C)	A)	C)	D)	C)	D)	D)	C)	C)	C)	D)	A)	D)	C)	D)

§ 18

1. 1), 2), 4), 5) Иә; 3) жоқ. 2. 1), 4), 5) Иә; 2), 3) жоқ. 3. Иә. 4. Иә. 5. Оның бір жағы квадрат болған жағдайда. 6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1. 7. $\frac{1}{2}$, 1. 8. Табандарының радиустары мен биіктіктері сәйкесінше $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см және 3 см; $\frac{\sqrt{10}}{2}$ см және 2 см; $\frac{\sqrt{13}}{2}$ см және 1 см болатын үш цилиндр. 9. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см және 1 см. 10. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см және 1 см. 11. 1 см. 12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см және 1 см. 13. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; 3) $\frac{1}{2}$ см. 14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см және $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. 15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см және $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. 16. 1 см және $\sqrt{3}$ см. 17. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см және $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. 18. $\frac{1}{2}$ см және $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. 19. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см және $\sqrt{3}$ см.

§ 19

1. 1), 2) Иә; 3) жоқ. 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. 4. 1,5 дм. 5. 4. 6. Табаны параллелограмм болатын төртбұрышты призма. 7. Жоқ, мысалы табаны доғалбұрышты үшбұрыш

болатын үшбұрышты тік призма. Сырттай сызылған сфераның центрі осы призмадан тыс жатады. **8.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **9.** $\sqrt{2}$. **10.** Призманың табаны: 1) сүйірбұрышты; 2) тікбұрышты; 3) доғалбұрышты үшбұрыш болған жағдайда. **11.** 13 см. **12.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ см. **13.** $\sqrt{11}$ см.

§ 20

1. Берілген нүктелерді қосатын кесіндінің ортасы арқылы өтетін және осы кесіндіге перпендикуляр болатын жазықтық. **3.** 2 см. **4.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **5.** $1\frac{1}{4}$ см. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ см. **7.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **9.** $1\frac{1}{2}$ см. **10.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **11.** 1 см. **12.** 1) 1 см; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **13.** Табаны параллелограмм болатын төртбұрышты пирамида. **14.** 1), 2), 3) Иә. **15.** Сырттай сызылған сфераның центрі осы пирамиданың табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі болады; сфераның радиусы $\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **17.** Сырттай сызылған сфераның центрі осы пирамиданың табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі болады. **18.** Сырттай сызылған сфераның центрі осы пирамиданың табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі болады. **19.** $1\frac{1}{2}$ см. **20.** $2\frac{1}{2}$ см. **21.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **22.** $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ см. **23.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}$ см.

§ 21

1. $\frac{1}{2}$ см. **2.** 2 см. **3.** $\frac{1}{2}$ см. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **5.** Жоқ. **6.** Дұрыс призма. Призманың биіктігі оның табанына іштей сызылған шеңбердің екі еселенген радиусына тең емес. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **8.** $2\sqrt{3}$ см. **9.** $\frac{1}{2}$ см. **10.** 2 см. **11.** $\sqrt{3}$ см. **12.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **13.** Берілген жазықтықтармен құрылған екіжақты бұрыштардың биссекторлық жазықтықтары жататын екі перпендикуляр жазықтықтар. **14.** 2 см. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см.

§ 22

1. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ см. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **3.** $2\sqrt{3}-3$ см. **4.** $R=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+4h^2}}$. **5.** $\frac{3\sqrt{5}-3}{4}$ см. **6.** 1) $2-\sqrt{3}$ см; 2) $\sqrt{2}-1$ см; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **7.** $r=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+12h^2}}$. **8.** $\frac{1}{3}$ см. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$ см. **10.** $r=\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3}a+\sqrt{3a^2+4h^2}}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{19}-\sqrt{3})}{8}$ см. **12.** $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ см. **13.** $\frac{\sqrt{57}-3}{16}$ см. **14.** Табаны тіктөртбұрыш болатын төртбұрышты пирамида. Оның биіктігінің табаны осы тіктөртбұрыштың диагональдарының қиылысу нүктесі болады. **15.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ см.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	D)	A)	D)	B)	C)	C)	D)	B)	D)	B)	B)	B)	C)	A)	D)	B)	C)	B)	B)

§ 23

1. 54 см². **2.** 8 см³. **3.** 8 см³. **4.** 7 см³. **5.** 27 есе. **6.** 8 есе. **7.** 1) 2 есе артады; 2) 9 есе кемиді. **8.** 62,5 г. **9.** 60 м³. **10.** а) 6 см³; ә) 8 см³. **11.** а) 40; ә) 12. **12.** а) 10; ә) 10. **13.** а) 5; ә) 6. **14.** 30 см³. **15.** 15 см³. **16.** 20 см. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** $1\frac{3}{4}$. **19.** ≈ 21м³. **20.** 9 см. **21.** 3 см. **22.** 160 см³. **23.** $\frac{1}{6}$. **24.** $\frac{1}{3}$. **25.** 4 см³. **26.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ см³. **28.** 6 м³. **29.** 162 л.

24

1. 60 см³. **2.** $20\sqrt{3}$ см³. **3.** $18\sqrt{3}$ см³. **4.** $\sqrt{3}$ см³. **5.** 0,75 см³. **6.** $16\sqrt{3}$ см. **7.** 1 : 3. **8.** 3 см³. **9.** 5 см³. **10.** 9 см³. **12.** 3 м³. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см³. **14.** $\frac{S_1S_2}{2a}$. **15.** Ізделінді жазықтық параллелепипедтердің симметрия центрлері арқылы өтетін жазықтық болып табылады. **16.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ см³. **17.** $3\sqrt{3}$ см³. **18.** $6\sqrt{3}$. **19.** $4\sqrt{3}$. **20.** $\frac{Q \cdot d}{2}$. **22.** 36 см³.

§ 25

1. 12π см³. **2.** $\frac{\pi a^3}{4}$ см³. **3.** Екінші. **4.** πa^2. **5.** $\frac{3\pi}{32}$ см³. **6.** $\frac{\pi}{4}$. **8.** $\frac{a}{b}$ немесе $\frac{b}{a}$. **9.** Екі есе. **10.** 3π см³. **11.** 243π см³. **12.** 4 см. **13.** Цилиндрдің табанын таңдап алуымызға байланысты болады. $\frac{1}{\pi}$ немесе $\frac{1}{2\pi}$. **14.** 2π. **16.** 5π см³. **17.** 6π см³. **18.** $\frac{\pi}{6}$ см³. **19.** 125π см³. **20.** $\frac{3\pi}{2}$ см³. **21.** 2π см³. **23.** 960 м³. **24.** 162 кг. **25.** 2250 см³.

§ 26

1. $\frac{1}{3}a^2h$. **2.** 32 м³. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см³. **5.** $1\frac{1}{2}$ см³. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ см³. **7.** 8 есе. **8.** 3 есе кемиді. **9.** 1) $\frac{1}{3}$ см³; 2) $\frac{1}{6}$ см³. **10.** 1 : 7. **11.** 7 см³. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **13.** $\frac{1}{6}$ см³. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ см³. **15.** $4\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{1}{3}$ см³. **17.** 1 : 1. **18.** 3 см³. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ см³. **20.** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ см³. **21.** ≈ 79443 м³. **23.** 3074176 м³. **24.** 407 м³. **25.** 473 дм³, 319 кг. **26.** $\frac{3}{4}$ см³. **27.** $\frac{1}{2}$ см³. **28.** $\frac{1}{2}$ см³. **29.** 3 см³. **30.** $\sqrt{3}$ см³. **31.** $\frac{1}{4}$ см³. **32.** $\frac{1}{3}$. **33.** $\frac{1}{6}$. **34.** $\frac{1}{6}$. **35.** $\frac{1}{12}$. **36.** $\frac{1}{4}$ см³. **37.** $\frac{1}{2}$ см³.

§ 27

1. 1) Үш; 2) төрт есе артады. **2.** 2 есе артады. **3.** 5 см³. **4.** 1 : 7. **5.** 16π см³. **6.** 3π см³. **7.** 3π см³. **8.** 7π см³. **9.** 72π см³. **10.** 9π см³. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см³. **12.** Жоқ. **13.** 2π см³. **14.** $\frac{\pi}{2}$ см³. **15.** $\frac{7}{27}$ см³. **16.** 4 см. **17.** 52π см³. **18.** 19π см³. **20.** ≈ 55,5 м³. **21.** 9π см³. **22.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **23.** $\frac{\pi}{4}$ см³. **24.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см³. **25.** $\frac{1}{4}$ см³. **26.** $2\sqrt{3}\pi$ см³. **27.** V = 19,44 м³.

§ 28

1. 36π см³. **2.** 1) 27; 2) 64 есе артады. **3.** 6 см. **4.** 27. **5.** $\frac{\pi}{6}$ см³. **6.** $\frac{4\pi}{3}$ см³. **7.** $\frac{4000\pi}{3}$ см³. **8.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ см³. **9.** $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ см³. **10.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{54}$ см³. **11.** $m^{\frac{3}{2}} : n^{\frac{3}{2}}$. **12.** $\frac{4\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3)$. **13.** 26 : 1. **14.** ≈ 0,5. **15.** $\frac{5324\pi}{3} \approx$ ≈ 5572 (м³). **16.** $\frac{7\sqrt{21}\pi}{54}$ см³. **17.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{216}$ см³. **18.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$ см³. **19.** $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **20.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$ см³. **21.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ см³. **22.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ см³. **23.** $\frac{5}{32}$. **24.** 58500π см³. **25.** Егер шардың центрі белдеудің табандарының арасында жатса, онда $\frac{434\pi}{3}$ см³. Керісінше жағдайда $\frac{38\pi}{3}$ см³. **26.** $\frac{\pi}{6}$ см³. **27.** $\frac{2\pi}{9}$ см³.

Өзіңді тексер!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	B)	B)	C)	C)	B)	A)	C)	D)	B)	B)	C)	A)	D)	C)	C)	B)	D)	A)

10-11-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

БҰРЫШТАР

Түзулердің арасындағы бұрыш

1. 45°. **2.** 90°. **3.** 60°. **4.** 45°. **5.** 60°. **6.** 60°. **7.** 60°. **8.** 90°. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **14.** $\frac{3}{4}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **16.** $\frac{1}{4}$.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. 45°. **2.** 90°. **3.** 90°. **4.** 60°. **5.** 45°. **6.** 60°. **7.** 60°. **8.** 90°. **9.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **14.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **15.** 60°. **16.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

1. 45°. **2.** 90°. **3.** 60°. **4.** 90°. **5.** 60°. **6.** 60°. **7.** 30°. **8.** 90°. **9.** $\sqrt{2}$. **10.** $\frac{1}{3}$. **11.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **12.** $\frac{1}{3}$. **13.** $-\frac{1}{3}$. **14.** 0,6. **15.** 0,2. **16.** $\frac{2}{3}$.

АРАҚАШЫҚТЫҚ

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

1. 1. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **4.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **6.** $\sqrt{3}$ см. **7.** $\sqrt{3}$ см. **8.** 2 см. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$ см. **11.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$ см. **12.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$ см. **13.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см. **14.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см. **15.** $\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ см.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **4.** $\sqrt{3}$ см. **5.** 1 см. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **7.** $\sqrt{3}$ см. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$ см. **12.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$ см. **13.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. **14.** $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ см. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **16.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см.

Екі түзудің арақашықтығы

1. 1. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** 1. **4.** 1 см. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **7.** 1 см. **8.** $\sqrt{3}$ см. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **12.** 0,5 см. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **14.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$ см. **15.** $\frac{2\sqrt{39}}{13}$ см. **16.** $\sqrt{3}$ см.

ҚИМАЛАР

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** 0,25 см^2. **3.** 0,5 см^2. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 0,25 см^2. **6.** $\sqrt{6}$ см^2. **7.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^2. **10.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **11.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **12.** $1\frac{1}{8}$ см^2. **13.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **14.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **15.** $1\frac{1}{8}$ см^2. **16.** $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **17.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **18.** $\frac{3\sqrt{21}}{16}$ см^2. **19.** $\frac{3\sqrt{11}}{16}$ см^2. **20.** $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **21.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **22.** $1\frac{1}{8}$ см^2. **23.** $\frac{3\sqrt{11}}{16}$ см^2. **24.** $\sqrt{6}$. **25.** $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ см^2. **26.** $\frac{3\sqrt{19}}{16}$ см^2. **27.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ см^2. **28.** $\frac{5\sqrt{17}}{16}$. **29.** $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. **30.** $1\frac{5}{16}$. **31.** 3 см^2. **32.** $1\frac{5}{16}$. **33.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **34.** $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.

ІШТЕЙ ЖӘНЕ СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН ФИГУРАЛАР

Цилиндр және конус

1. 1 см. **2.** 2 см. **3.** 1. **4.** $\sqrt{2}$ см. **5.** $2\sqrt{3}$ см. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см. **8.** 2 см. **9.** 0,5. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **12.** 5 см. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **14.** 1 см. **15.** $\sqrt{3}$ см. **16.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **17.** 1 см. **18.** $2\sqrt{3}$ см. **19.** 2 см. **20.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **22.** $2\frac{2}{3}$ см. **23.** $\sqrt{2}-1$ см. **24.** 3 см. **25.** $2\sqrt{2}$ см. **26.** 0,5 см. **27.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **28.** 0,75 см. **29.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **30.** 8 см. **31.** 1 см. **32.** $6\frac{1}{4}$ см. **33.** 2 см. **34.** $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ см. **35.** 3 см. **36.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$ см.

Көпжаққа іштей сызылған сфера

1. 0,5. **2.** 2 см. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **4.** 2 см. **5.** $\sqrt{3}$ см. **6.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ см. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см және $\sqrt{2}$ см. **8.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см және $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **9.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см және 2 см. **10.** 1 см және 2 см. **11.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см және 2 см. **12.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$. **13.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ см. **14.** 0,5 см. **15.** 1 см. **16.** $2\sqrt{6}$. **17.** $\frac{1}{3}$ см. **18.** $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ см. **19.** $\frac{\sqrt{14}(\sqrt{15}-1)}{28}$ см. **20.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **21.** $2\frac{2}{3}$ см. **22.** $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$ см.

Көпжаққа сырттай сызылған сфера

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **3.** $\sqrt{14}$ см. **4.** 2 см. **5.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **6.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{21}}{6}$ см. **8.** $\frac{2\sqrt{33}}{3}$ см. **9.** 1,5 см. **10.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ см. **11.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ см. **12.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **13.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **14.** 2 см. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

КӨЛЕМ

1. 48 см^3. **2.** 8 см^2. **3.** 5 см. **4.** 4 см. **5.** 6 см. **6.** 27. **7.** 120 см^3. **8.** 4 см. **9.** 4,5 см^3. **10.** 8. **11.** 24 см^3. **12.** 4 см. **13.** 0,25 см^3. **14.** 3 см. **15.** 4. **16.** 31. **17.** 2 см. **18.** 2 см^3. **19.** 3. **20.** 2,25. **21.** 30 см^3. **22.** 50 см^3. **23.** 27. **24.** 8 см^3. **25.** 6 см^3. **26.** 32 см^3. **27.** 7 см. **28.** 2 см. **29.** 1,5 см^3. **30.** 32 см^3. **31.** 2 см. **32.** 64 см^3. **33.** 3 см. **34.** 8 см^3. **35.** 20 см^3. **36.** 18 см^3. **37.** 256 см^3. **38.** 13 см. **39.** 48 см^3. **40.** 4,5 см^3. **41.** 12 см^3. **42.** 7 см. **43.** 48 см^3. **44.** 2 см^3. **45.** 1,5 см^3. **46.** 2 см^3. **47.** 4 см^3. **48.** 6 см^3. **49.** 3 см^3. **50.** 3 см^3. **51.** 10 см^3. **52.** 1,125. **53.** 1,5 см^3. **54.** 128. **55.** 9. **56.** 72. **57.** 16. **58.** 2. **59.** 12 см. **60.** 4,5. **61.** 4,5. **62.** 12 см^3. **63.** 6. **64.** 6. **65.** 18. **66.** 6 см^3. **67.** 13,5 см^3. **68.** 9. **69.** 27 см^3. **70.** 54 см^3. **71.** 54 см^3. **72.** 18 см^3. **73.** 13,5 см^3. **74.** 36 см^3. **75.** 72 см^3. **76.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^3. **77.** 9 см^3. **78.** 4 см^3. **79.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$. **80.** 6 см^3. **81.** 36 см^3. **82.** $2\sqrt{2}$ см^3. **83.** 160 см^3. **84.** 2. **85.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **86.** 27 см^3. **87.** 8π см^3. **88.** 8π см^3. **89.** 4. **90.** 2π см^3. **91.** 2. **92.** $\frac{9\pi}{2}$ см^3. **93.** 6π см^3. **94.** 1,5 см^3. **95.** 3 см^3.

БЕТТІҢ АУДАНЫ

1. 22 см^2. **2.** 2 см. **3.** 9. **4.** 4. **5.** 108 см^2. **6.** 288 см^2. **7.** 6 см^2. **8.** 3 см^2. **9.** 3. **10.** 1,5. **11.** 4 см^2. **12.** 4. **13.** 2 см^2. **14.** 2 см. **15.** 8 см^3. **16.** 54 см^2. **17.** 64 см^2. **18.** 3 см. **19.** 2 см. **20.** 22 см^2. **21.** 62 см^2. **22.** 10 см^2. **23.** 4 см^2. **24.** 240 см^2. **25.** 10 см. **26.** 6 см^2. **27.** 16 см^2. **28.** 84 см^2. **29.** 96 см^2. **30.** 72 см^2. **31.** 9. **32.** 144. **33.** 60. **34.** 3 см^2. **35.** 36. **36.** 9. **37.** 10 см. **38.** 32 см^2. **39.** 3 см. **40.** 54 см^2. **41.** 27 см^2. **42.** 36 см^2. **43.** 54 см^2. **44.** 96 см^2. **45.** 1,5 см. **46.** π см^2. **47.** 12 см^2. **48.** 36π см^2. **49.** 1 см^2. **50.** 6 см^2. **51.** 56π см^2. **52.** 3.

АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ

Көпбұрыштардың айналуы

1. $\frac{\pi}{3}$ см^3 және $(\sqrt{2}+1)\pi$ см^2. **2.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см^3 және $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см^2. **3.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см^3 және $0,75\pi$ см^2. **4.** $\frac{\pi}{8}$ см^3 және $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{4}$ см^2. **5.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{48}$ см^3 және $2,75\pi$ см^2. **6.** $\frac{7\pi}{3}$ см^3 және $(3\sqrt{2}+5)\pi$ см^2. **7.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ см^3 және $\sqrt{2}\pi$ см^2. **8.** $\frac{\pi}{4}$ см^3 және $\sqrt{3}\pi$ см^2. **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 және π см^2. **10.** $9,6\pi$ см^3 және $16,8\pi$ см^2. **11.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 және π см^2. **12.** $0,25\pi$ см^3 және $\sqrt{3}\pi$ см^2. **13.** π см^3 және $2\sqrt{3}\pi$ см^2. **14.** $\frac{4\pi}{3}$ см^3 және $(\sqrt{2}+3)\pi$ см^2. **15.** $\frac{\pi}{4}$ см^3 және $\frac{(\sqrt{3}+3)\pi}{2}$ см^2. **16.** $8,192\,\pi$ және $23,04\,\pi$.

17. $0{,}75\pi$ см^3 және $2\sqrt{3}\,\pi$ см^2. **18.** $1{,}25\pi$ см^3 және $3\sqrt{3}\,\pi$ см^2. **19.** $\frac{11\pi}{32}$ см^3 және $\frac{5\sqrt{3}\pi}{14}$ см^2. **20.** $\frac{5\pi}{3}$ см^3 және $(\sqrt{2}+5)\pi$ см^2. **21.** $4{,}5\pi$ см^3 және $6\sqrt{3}\,\pi$ см^2. **22.** $\frac{19\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 және 7π см^2. **23.** π см^3 және $2\sqrt{3}\pi$ см^2. **24.** $\frac{7\sqrt{3}\pi}{12}$ см^3 және $3{,}5\pi$ см^2.

Көпжақтардың айналуы

1. 2π см^3 және $(2\sqrt{2}+4)\pi$ см^2. **2.** $0{,}5\pi$ см^3 және $(\sqrt{2}+1)\pi$ см^2. **3.** π см^3 және 4π см^2. **4.** $\frac{\pi}{3}$ см^3 және $\frac{(2\sqrt{3}+2)\pi}{2}$ см^2. **5.** π см^3 және 4π см^2. **6.** $1{,}25\pi$ және $(\sqrt{5}+2{,}5)\pi$. **7.** $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ және $\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см^3 және $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ см^2. **9.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см^3 және 3π см^2. **10.** 4π см^3 және 12π см^2. **11.** $0{,}25\pi$ және $\sqrt{3}\pi$. **12.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ және $\sqrt{2}\pi$. **13.** $0{,}75\pi$ см^3 және $\frac{(2\sqrt{3}+3)\pi}{2}$ см^2. **14.** $3{,}25\pi$ см^3 және $\frac{(2\sqrt{13}+13)\pi}{2}$ см^2.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз 3
10-СЫНЫПТЫҢ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ 4

I тарау. КӨПЖАҚТАР

§ 1. Көпжақ ұғымы. Призма және оның элементтері, призма түрлері. Призманың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары 8
§ 2. Пирамида және қиық пирамида. Пирамиданың, қиық пирамиданың жазбасы, бүйір беті және толық бетінің аудандары 19
§ 3. Көпжақты бұрыш 25
§ 4*. Эйлер теоремасы 29
§ 5. Дұрыс көпжақтар 34
§ 6. Көпжақтардың жазықтықпен қималары 40
§ 7*. Көпжақтардың симметриясы 47
Өзіңді тексер! 54

II тарау. КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

§ 8. Кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрышты табу 57
§ 9. Екі жазықтықтың арасындағы бұрышты табу 61
§ 10. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты табу 66
§ 11. Кеңістіктегі нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық 70
Өзіңді тексер! 74

III тарау. АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§ 12. Цилиндр және оның элементтері. Цилиндрдің жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары 78
§ 13. Конус және оның элементтері. Конустың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары 84
§ 14. Қиық конус және оның элементтері. Қиық конустың жазбасы, бүйір және толық бетінің аудандары 90
§ 15. Сфера, шар және олардың элементтері 96
§ 16*. Айналу денелерінің комбинациялары 102
§ 17. Сфераның және оның бөліктерінің аудандары 109
Өзіңді тексер! 114

IV тарау*. ІШТЕЙ ЖӘНЕ СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН КӨПЖАҚТАР

§ 18. Цилиндр және призма. Конус және пирамида 117
§ 19. Сфераға іштей сызылған көпжақтар. Призма 121
§ 20. Сфераға іштей сызылған көпжақтар. Пирамида 124
§ 21. Сфераға сырттай сызылған көпжақтар. Призма 128
§ 22. Сфераға сырттай сызылған көпжақтар. Пирамида 132
Өзіңді тексер! 135

V тарау. ДЕНЕЛЕРДІҢ КӨЛЕМДЕРІ

§ 23. Денелер көлемдерінің жалпы қасиеттері 138
§ 24. Призма көлемі 144
§ 25. Цилиндр көлемі 149
§ 26. Пирамида және қиық пирамида көлемдері 153
§ 27. Конус және қиық конус көлемдері 161
§ 28. Шар және оның бөліктерінің көлемдері 166
Өзіңді тексер! 171
10-11-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ 174
ПӘНДІК АТАУ КӨРСЕТКІШТЕРІ 203
ЖАУАПТАРЫ 207